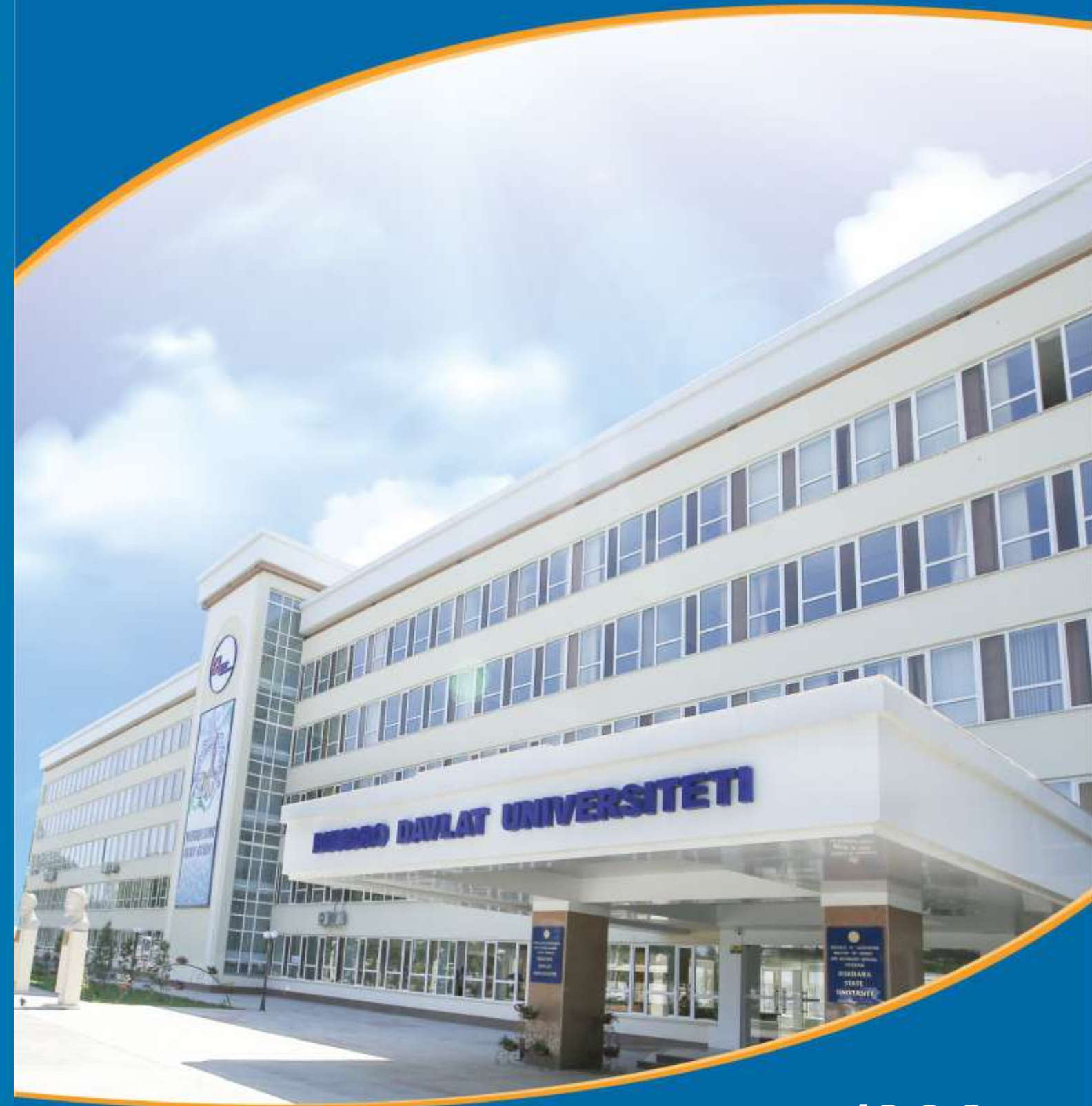


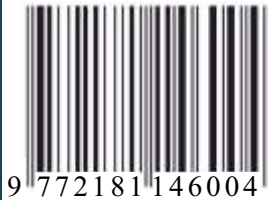
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

10/2024

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz

10/2024

<https://buxdu.uz>

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2024, № 10, oktabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Moldova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, dotsent

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
Tuxtayev E.E.	Nokritik immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarining ergodiklik xossalari va invariant o'lchovlar	3
Jumayev J., Muxsinova N.Sh.	Mahsulot sifatiga omillarning ta'sirini ikki faktorli eksperiment usuli asosida tadqiq olish	10
Эрмаматова Ф.Э.	Формула Карлемана для обобщённой системы Коши-Римана в многомерной бесконечной области	15
Safarov R.Ch., Toshqulova D.A., Daminova M.S.	Sferik koordinatalar sistemasida Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi	22
Рустамов С.У.	Интегральная формула Коши для $\mathbb{H}$ -регулярной функции в ограниченной области	28
Ахмедов О.Ш.	Моделирование вибрации зубчатых передач привода локомотива	32
Tuychiyeva S.T.	Aniq integrallarni chegirmalar yordamida hisoblash	39
Normurodov Sh.B.	Ayrim funksional tenglamalarni yechish metodikasi haqida	46
Husenova J.T.	Parametrli chiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasiga keltiriladigan integral tenglamalar	52
Hasanov I.I., Temirova Sh.M.	Investigation of an initial boundary value problem for a fractional order equation with the Riemann-Liouville operator	59
Erkinboyev Q.S.	Uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlarining ba'zi tatbiqlari	67
Eshimbetov M.R.	Qirralari yarim cheksiz bo'lgan ochiq yulduzsimon grafda Shredinger tenglamasi uchun δ' ulanish shartli Koshi masalasi	71
Gaybullaev R.K., Solijanov G.O., Urazmatov G.H.	Maximal solvable extensions of low dimensional Heisenberg Lie algebras	76
Эрмаматова З.Э.	Коэффициентная обратная задача для уравнения Гельмгольца	83
Durdiev U.D.	An investigation into the inhomogeneous integro-differential equation for the transverse vibration of a beam	90
Ярашов И. Б.	Приближённые методы нахождения корней алгебраических уравнений с помощью программы MathCad	95

FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Саидханов Н.Ш.	Изучение неоднородности угловых распределений вторичных частиц в ядерных взаимодействиях с помощью статистических методов	100
Kuvandikov O.K., Shodiev Z.M., Sulaymanov O.A.	Magnetic properties of rare Earth chromo borates ($\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$) at high temperatures	106
Saparbayev A.A.	D18 donor polimer va turli akseptorlar bilan olingan faol qatlamlarning optik xossalari	112
Quchqarov B.X., Mamatkarimov O.O., Xolmirzayev A.A.	Yarimo'tkazgichli nanostrukturalarda elektrofizik xususiyatlarining mahalliy diagnostikasi	119
Jurayev B.Sh., Ergashev S.Sh., Khamrakulov F.B.	TIC 354493993 ikki modali va yuqori amplitudali Delta Scuti	126
Qo'chqarov B.H., Xolmirzayev A.A., Izzatillayev X.	Fotokonvertorli konsentratsiyali elektr stansiyalaridan foydalanish muammolari va istiqbollari	131
G'aniyev S.Y.	Suvli issiqlik akkumulyatorni harorat rejimini modellashtirishda Matlab/Simulink sistemasidan foydalanish	136
Muminov Kh.A.	Optical absorption in defects of amorphous semiconductors	141
Abdukarimov A.A., Yokubbayev A.A.	Manufacturing technology and physical photoelectric characteristics of TiO_2 -based solar cell with semiconductor properties	147
Икрамов Р.Г., Нуриддинова М.А., Султонов Б.К., Холмирзаев О.Т.	Новый метод расчёта плотности состояний электронов в дефектах аморфных полупроводников	154
KIMYO *** CHEMISTRY *** ХИМИЯ		
Shamsiyeva M.B., Abduraxmonova P.E.	Charm sanoati chiqindisi-mezdrani, terini qayta ishlash jarayonlarida qo'llashning nazariy tadqiqi	159
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Тўхтаева Г.П., Шодиева С.Н., Мирзомуротов М.Ф.	Ўтлоқи-аллювиал тупроқларнинг мелиоратив ҳолатини ўрганиш	167

NOKRITIK IMMIGRATSIYALI GALTON-VATSON TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONLARINING ERGODIKLIK XOSSALARI VA INVARIANT O'LCHOVLAR

Tuxtayev Erkin Egamberdiyevich,

Qarshi davlat universiteti

Algebra va geometriya kafedrası tayanch doktoranti

tukhtaev_erkin@mail.ru

Annotatsiya. Maqolada tasodifiy jarayonlar nazariyasida muhim o'rin tutadigan va keng amaliy tatbiqlarga ega bo'lgan Galton-Vatson immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlarning muhim bir xarakteristikasi bo'lgan parchalanish parametri keltirilgan. Bunda jarayonning subkritik holi uchun teoremlar olingan. Shuningdek, ishda jarayon subkritik bo'lganda invariant o'lchov hosil qiluvchi funksiyasining yaqinlashishi va uning aniq ko'rinishini ifodalovchi muhim teorema isbotlangan. $\{u_j, j \in S\}$ sonlar subkritik immigratsiyali jarayonlari uchun invariant taqsimot tashkil etishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: tarmoqlanuvchi jarayon, hosil qiluvchi funksiya, o'tish ehtimolligi, tasodifiy miqdor, invariant taqsimot, parchalanish parametri.

ЭРГОДИЧНЫЕ СВОЙСТВА И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА С НЕКРИТИЧНОЙ ИММИГРАЦИЕЙ

Аннотация. В статье представлен параметр разложения, являющийся важной характеристикой ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией, играющий важную роль в теории случайных процессов и имеющий широкие практические приложения. Получены теоремы для докритического состояния процесса. Также в работе доказана важная теорема, выражающая сходимость инвариантной меры производящей функции и её точный вид в случае докритического процесса. Показано, что числа $\{u_j, j \in S\}$ образуют инвариантное распределение для докритических иммиграционных процессов.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, производящая функция, вероятность перехода, случайная величина, инвариантное распределение, параметр разложения.

ERGODIC PROPERTIES AND INVARIANT MEASURES OF GALTON-WATSON BRANCHING RANDOM PROCESSES WITH NON-CRITICAL IMMIGRATION

Abstract. The article presents the expansion parameter, which is an important characteristic of Galton-Watson branching processes with immigration, plays an important role in the theory of random processes and has broad practical applications. Theorems for the subcritical state of the process are obtained. The work also proves an important theorem expressing the convergence of the invariant measure of the generating function and its exact form in the case of a subcritical process. It is shown that the numbers $\{u_j, j \in S\}$ form an invariant distribution for subcritical immigration processes.

Keywords: branching process, generating function, transition probability, random variable, invariant distribution, expansion parameter.

Kirish. Markov tasodifiy jarayonlari sinfida tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar modellari alohida o'rin tutadi. Bu maqolada biz Galton-Vatson immigratsiyali (GVI) tarmoqlanuvchi jarayonlari deb ataladigan tasodifiy jarayonlarni qaraymiz. Zarrachalar populyatsiyasining evolyutsiyasi nazaridan GVI jarayonining formal ta'rifini quyidagicha keltirish qulay. Dastlab tizimda $i \in \mathbb{N}$ ta zarracha mavjud bo'lsin. Bu zarrachalarni *aborigenlar* deb ataymiz. Har bir aborigen birlik vaqt davomiyligida umr ko'radi. Hayotining so'nggida u ξ tasodifiy sondagi avlodni mos ravishda $P(\xi = k) = p_k$ taqsimot qonuni bilan hosil qiladi, bu yerda $k \in \mathbb{N}_0$. Shu bilan bir vaqtda, tizimga har birlik vaqt davomida biror tasodifiy qonunga ega bo'lgan tasodifiy sondagi immigrant zarrachalar kirib kelsin. Ular tizimga kirib, aborigenga aylanishadi.

Kelgusida har bir zarracha boshqa zarachalar kabi bir birlik umr ko'radi va umrining oxirida boshqa zarrachalarga bog'liq bo'lmagan holda $\{p_k\}$ reproduktiv qonunga ko'ra tasodifiy sondagi avlod qoldiradi.

Shunday qilib, vaqtning ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}_0$ momentida tizimdagi zarrachalar soni X_n quyidagi rekurrent munosabat orqali formal aniqlanishi mumkin:

$$X_{n+1} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nX_n} + \eta_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

bu yerda $\{\xi_{nk}\}$ – bir xil taqsimlangan o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, u bevosita n -avlod k -zarrachasining avlodlari sifatida talqin qilinadi, η_m esa m -vaqtda kirib keluvchi ξ_{nk} dan bog'liqsiz bo'lgan bir xil taqsimlangan o'zaro bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar. Bunda $\xi_{nk} \stackrel{d}{=} \xi$ miqdorlar barcha n va k lar uchun umumiy $p_k = P(\xi = k)$ taqsimotga, $\eta_m \stackrel{d}{=} \eta$ miqdorlar esa barcha m lar uchun $P(\eta = j) =: h_j$ taqsimotga ega.

GVI jarayonining yuqoridagi ta'rifi birinchi marta 1965- yilda S.Xitkot [1] tomonidan berilgan (shuningdek [2] ga qarang). Keyinchalik, hozirgi kunga qadar ma'lum bo'lgan bir qator ishlar jarayonning strukturaviy va asimptotik xususiyatlariga bag'ishlangan. Shu munosabat bilan, xususan, A.Barbour va A.Pakes [3], E.Seneta [4]–[7], A.Pakes [8], [9]–[12], S.Pommerenke [13] va boshqa mualliflarning ishlarini sanab o'tish mumkin.

Superkritik jarayonning qaytmaslik xususiyatlari S.Xitkot va A.Pakesning ishlarida isbotlangan; qarang [1], [2], [11]. E.Seneta'ning qayd etilgan ishlarida $\{X_n\}$ Markov zanjirining ergodikligi shartlari, xususan, jarayon subkritik bo'lgan holda yagona invariant o'lchov mavjudligi isbotlangan. Kritik jarayon traektoriyasi ancha qiziqroq. A.Pakesning [8], [14], [9]–[12] tadqiqotlari shuni ko'rsatdiki, agar $a < \infty$ bo'lsa, bunday jarayonning $\mathcal{S}$ holati qaytmas, nol-qaytuvchi yoki ergodik bo'lishi mumkin. O'tish ehtimolligining aniqroq shakldagi asimptotik ko'rinishlari, shuningdek, zanjirning ergodiklik xossalari A.Imomovning [15], [16], [17] ishlarida topildi.

Tadqiqot obyekti va qo'llanilgan metodlar. Quyidagi ehtimoliy hosil qiluvchi funksiyalarni kiritaylik:

$$h(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} h_j s^j \quad \text{va} \quad f(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} p_j s^j$$

bunda $s \in [0, 1)$. Tasodifiy jarayon $\{X_n\}$ mumkin bo'lgan holatlari fazosi $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$ bilan berilgan bir jinsli Markov zanjirini aniqlaydi. Bu zanjirning i holatdan j holatga n qadamda o'tish ehtimolliklarini har qanday k uchun quyidagicha belgilaymiz:

$$p_{ij}^{(n)} := P(X_{k+n} = j | X_k = i) = P(X_n = j | X_0 = i).$$

Kelgusida biz agar $\{X_n\}$ zanjirning n qadam oldingi holati $i \in \mathcal{S}$ bo'lsa, zanjir holatining shartli ehtimolligini ifodalashda $P_i(*)$ belgilashdan foydalanamiz. Masalan, $p_{ij}^{(n)}$ o'tish ehtimolligi $P_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)}$ bilan belgilanadi. Mos ravishda hosil qiluvchi funktsiyani ushbu

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) := E_i s^{X_n} = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij}^{(n)} s^j$$

ko'rinishda aniqlaymiz, bu yerda E_i belgi P_i ehtimollikka nisbatan matematik kutilmani ifodalaydi. Yuqorida keltirilgan (1) rekurrent munosabatdan, to'la ehtimolliklar formulasini qo'llab, GVI jarayonining bir jinsliligidan foydalanib, quyidagi tenglikka kelimiz:

$$\mathcal{P}_{n+1}^{(i)}(s) = E_i s^{X_{n+1}} = h(s) \mathcal{P}_n^{(i)}(f(s)). \quad (2)$$

Topilgan (2) rekurrent munosabatni takroriy qo'llasak, biz quyidagi foydalanish uchun qulay formulani olamiz:

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) = [f_n(s)]^i \prod_{k=0}^{n-1} h(f_k(s)), \quad (3)$$

bu yerda $f_n(s)$ hosil qiluvchi funktsiya $f(s)$ ning n -karrali iteratsiyasi, ya'ni ushbu $f_{n+1}(s) = f_n(f(s)) = f(f_n(s))$ munosabat o'rinni.

$\{X_n\}$ Markov zanjiri m parametrlarning qiymatiga bog'liq ravishda tasniflanadi. Agar $m < 1$, $m = 1$ va $m > 1$ bo'lsa, jarayon mos ravishda subkritik, kritik va superkritik deb ataladi.

Ushbu ishda analitik usullardan hosil qiluvchi funksiyalar usuli qo'llanilgan.

Natijalar va muhokamalar. Mulohazalarimizni dastlab $p_{ij}^{(n)}$ o'tish ehtimolliklarining umumiy asimptotik xususiyatlarini tekshirishdan boshlaymiz. Ushbu $\mathcal{P}_n(s) := \mathcal{P}_n^{(0)}(s)$ belgilashni kiritamiz. Ma'lumki, barcha $s \in [0, 1)$ qiymatlar uchun $n \rightarrow \infty$ da $f_n(s) \rightarrow q$ o'rinli. U holda yuqoridagi (3) formuladan, $\mathcal{P}_n(s) := \mathcal{P}_n^{(0)}(s)$ belgilash yordamida, barcha $s \in [0, 1)$ uchun quyidagi tasdiqni bevosita hosil qilamiz:

$$\frac{\mathcal{P}_n^{(i)}(s)}{\mathcal{P}_n(s)} \longrightarrow q^i, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Bu munosabat, xususan, $s = 0$ qiymatda o'rinli va (4) munosabatdan bevosita $n \rightarrow \infty$ da nisbatlarning monoton yaqinlashishi haqidagi ushbu $p_{i0}^{(n)} / p_{00}^{(n)} \rightarrow q^i$ tasdiqni hosil qilamiz. Umumiy holda, barcha $i, j \in S$ holatlar uchun mos tasdiqni topishimiz uchun dastlab (3) formuladan quyidagi tengliklarni yozib olamiz:

$$\mathcal{P}_{n+1}^{(i)}(s) = [f_{n+1}(s)]^i \prod_{k=0}^n h(f_k(s)) = \left[\frac{f_n(f(s))}{f_n(s)} \right]^i h(f_n(s)) \mathcal{P}_n^{(i)}(s).$$

Bu tenglikdan ushbu $\mathcal{P}_{n+1}(s) = h(f_n(s)) \mathcal{P}_n(s)$ munosabat kelib chiqadi. Bu tenglikdan, $s = 0$ bo'lganda,

$$p_{00}^{(n+1)} = h(f_n(0)) p_{00}^{(n)} < p_{00}^{(n)}$$

munosabatni olamiz. Ikkinchi tomondan, ravshanki va $p_{01}^{(n)} = \partial \mathcal{P}_n(s) / \partial s|_{s=0}$. U holda oxirgi munosabatni $s = 0$ nuqtada bir marta differensiallab, topamiz:

$$p_{01}^{(n+1)} = p_{01}^{(n)} + a p_{00}^{(n)} m^n \geq p_{01}^{(n)}.$$

Oxirgi topilgan tengsizliklardan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\frac{p_{01}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} \leq \frac{p_{01}^{(n+1)}}{p_{00}^{(n+1)}}.$$

Demak, $\{p_{01}^{(n)} / p_{00}^{(n)}\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi. Mulohazalarimizni davom ettira borib, barcha $j \in S$ holatlar uchun $p_{0j}^{(n)} = \partial^j \mathcal{P}_n(s) / \partial s^j|_{s=0}$ ekanligidan, $\{p_{0j}^{(n)} / p_{00}^{(n)}\}$ ketma-ketlikning monoton o'suvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bundan tashqari, $p_{00}^{(n)} > 0$ bo'lganligi sababli, ushbu ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. U holda, ketma-ketlik monoton o'sgan holda chekli nomanfiy limit qiymatga yaqinlashadi. Bu limit qiymatni u_j orqali belgilaymiz. Shunday qilib,

$$\frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} \uparrow u_j < \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Yuqoridagi mulohazalar yordamida barcha $i, j \in S$ holatlar uchun [18] ishda quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 1 [18]. Barcha $i, j \in S$ holatlar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{ij}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} = q^i u_j, \quad (6)$$

bunda $\{u_j\}$ sonlar (5) tasdiqda aniqlangan. Mos hosil qiluvchi funksiya $\mathcal{U}(s) = \sum_{j \in S} u_j s^j$ ushbu

$$\sigma \cdot \mathcal{U}(s) = h(s) \mathcal{U}(f(s)) \quad (7)$$

funksional tenglamani qanoatlantiradi, bu yerda esa $\sigma = h(q)$.

Bu teoremda aniqlangan $\mathcal{U}(s)$ funksiya darajali qator sifatida barcha $s \in [0; r]$, $r < 1$, qiymatlarda uzluksiz va yaqinlashuvchi. Yuqoridagi (7) tenglamada $f(s)$ funksiyaning iteratsiyasini takroriy qo'llab, ushbu

$$\sigma^n \cdot \mathcal{U}(s) = \mathcal{P}_n(s) \mathcal{U}(f_n(s)) \quad (8)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa, $\mathcal{U}(s)$ va $\mathcal{P}_n(s)$ funksiyalarning ta'rifiga ko'ra, quyidagi tengliklarni yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \sigma^n \sum_{j \in S} u_j s^j &= \sum_{i \in S} u_i (f_n(s))^i \mathcal{P}_n(s) = \sum_{i \in S} u_i \mathcal{P}_n^{(i)}(s) \\ &= \sum_{i \in S} u_i \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} s^j = \sum_{j \in S} \left[\sum_{i \in S} u_i p_{ij}^{(n)} \right] s^j \end{aligned}$$

Oxirgi topilgan tenglikda s^j darajalar oldidagi mos koeffitsiyentlarni tenglasak, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\sigma^n u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{ij}^{(n)}.$$

Bu tenglama $\{u_j, j \in S\}$ sonlarning $\{p_{ij}\}$ o'tish ehtimolliklariga nisbatan invariantlik xossasini ifodalaydi. Xususan, $\sigma u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{ij}$ bo'lib, bu tenglikning ehtimoliy ma'nosi quyidagicha. Agar biror $m \in \mathbb{N}$ qadam uchun $P(X_m = j) = u_j$ bo'lsa, Kolmogorov-Chepmen formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = j) &= \sum_{i \in S} P(X_m = i) P(X_{m+1} = j | X_m = i) \\ &= \sum_{i \in S} u_i p_{ij} = \sigma u_j = \sigma P(X_m = j). \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ zanjirning biror $j \in S$ holatga tushish ehtimolligi yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ qadamlar uchun $\sigma = h(q)$ son aniqligida o'zgarmaydi. Bu holda $\{u_j, j \in S\}$ sonlar $\{p_{ij}\}$ o'tish ehtimolliklariga nisbatan σ -invariant o'lchov tashkil etadi deyiladi.

Shu o'rinda Andersonning [19, §5.1] monografiyasida keltirilgan uzluksiz vaqtli $\{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ Markov zanjirlarining bir muhim xarakteristikasiga murojaat qilamiz. Bu monografiyada o'tish ehtimolliklari $\{p_{ij}(t)\}$ eksponensial tartibda nolga kamayib boruvchi uzluksiz vaqtli yoyilmaydigan Markov zanjirlari holatlari fazosining "parchalanish darajasi" ushbu $\lambda = -\lim_{t \rightarrow \infty} \ln p_{ij}(t)/t$ son bilan tavsiflangan. Bu son zanjirning parchalanish parametri deb nomlangan; qarang [19, 164-bet]. Uzluksiz va diskret vaqtli zanjirlar orasidagi o'xshashliklar munosabati bilan biz quyidagi ta'rifni kiritamiz. Ushbu

$$\lambda := \lambda_S = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln p_{ij}^{(n)}}{n} \quad (9)$$

miqdor $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ zanjirning parchalanish parametri deb ataladi. Uzluksiz vaqtli Markov zanjirlari holatlar fazosining tasnifiga monand [19, 177 bet], $\{X_n\}$ zanjir λ_S -qaytuvchi deyiladi, agarda $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\lambda n} p_{ii}^{(n)} = \infty$ bo'lsa. Aks holda u λ_S -qaytmas deyiladi. Agar zanjir λ_S -qaytuvchi bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lambda n} p_{ii}^{(n)} > 0$ bo'lsa, u λ_S -musbat deyiladi, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lambda n} p_{ii}^{(n)} = 0$ bo'lsa, zanjir λ_S -nol deyiladi.

Biz quyida (9) formula bilan aniqlangan $\{X_n\}$ zanjirning parchalanish parametrini o'rganamiz. Ravshanki, barcha $n \in \mathbb{N}$ qadamlar uchun $p_{00}^{(n)} > 0$ va ta'rifga ko'ra $u_0 = 0$. U holda (8) formuladan ushbu $\sigma^n = \mathcal{P}_n(0) \mathcal{U}(f_n(0))$ tenglikni olamiz. Bundan esa, $f_n(0) \rightarrow q$ yaqinlashishga ko'ra,

$$p_{00}^{(n)} \sim \frac{1}{\mathcal{U}(q)} \sigma^n, \quad n \rightarrow \infty$$

asimptotik munosabatni topamiz. Bu munosabatni (6) tasdiq bilan birgalikda qarasak, barcha $i, j \in S$ holatlar uchun ushbu

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{q^i u_j}{\sum_{k \in \mathcal{S}} u_k q^k} \sigma^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Ravshanki, (10) formulada σ^n oldidagi koeffitsiyent chekli son va GVI jarayoni superkritik bo'lganda $0 < \sigma < 1$. Demak, $m > 1$ bo'lgan holda barcha $i, j \in \mathcal{S}$ holatlar uchun $\sigma^{-n} p_{ij}^{(n)} \rightarrow \text{const}$, $n \rightarrow \infty$. U holda ushbu

$$\frac{1}{n} \ln p_{ij}^{(n)} = \ln \sigma + \frac{1}{n} \ln \frac{q^i u_j}{\mathcal{U}(q)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikda $n \rightarrow \infty$ deb limitga o'tsak, superkritik GVI tarmoqlanuvchi jarayoni holatlari fazosining $\lambda = \lambda_{\mathcal{S}}$ parchalanish parametri qiymatini topamiz. Bundan tashqari $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\lambda n} p_{ii}^{(n)} = \infty$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lambda n} p_{ii}^{(n)} > 0$ bo'lishini tekshirib ko'rishimiz mumkin. Yuqorida olingan xulosalarni quyidagi teoremda jamlab ifodalaymiz.

Teorema 2. Agar $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ Markov zanjiri superkritik GVI tarmoqlanuvchi jarayonini ifodalasa, u holda bu zanjir holatlari fazosining parchalanish parametri

$$\lambda_{\mathcal{S}} = |\ln \sigma|. \quad (11)$$

Bundan tashqari, bu zanjir $\lambda_{\mathcal{S}}$ -musbat qaytuvchidir.

Endi $m \neq 1$ bo'lgan hol uchun, ya'ni nokritik GVI tarmoqlanuvchi jarayon uchun $\mathcal{U}(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}} u_j s^j$ funksiyaning yaqinlashishi va uning aniq ko'rinishini ifodalovchi quyidagi muhim teoremani isbotlaymiz.

Teorema 3. Nokritik GVI tarmoqlanuvchi jarayonini qaraymiz. Subkritik jarayon uchun $f''(1-) < \infty$ bo'lsin. U holda barcha $s \in [0, q) \cup (q, 1)$ uchun $\mathcal{U}(s)$ limit funksiya yaqinlashuvchi va

$$\mathcal{U}(s) = \prod_{n \in \mathbb{N}_0} [1 + H_n(s) \beta^n],$$

bunda $H_n(s)$ funksiya barcha $n \in \mathbb{N}_0$ nomerlar uchun s o'zgaruvchi bo'yicha chegaralangan hamda

$$H_n(s) \longrightarrow \frac{h'(q)}{\sigma} [\mathcal{K}_q - \mathcal{A}(s)], \quad n \rightarrow \infty,$$

Bunda $\mathcal{A}(s)$ funksiya (15) asimptotik formula bilan aniqlangan va

$$\mathcal{K}_q = \mathcal{A}(0) = \frac{q}{1 - q\gamma}$$

son umumlashgan Kolmogorov doimiysi bo'lib, $\gamma = f''(q)/2\beta(1 - \beta)$, $\beta = f'(q)$.

Isbot. Bizni qiziqtirayotgan $\mathcal{U}(s)$ funksiya (5) tasdiqda berilgan $\{u_j\}$ sonlar to'plami bilan bir qiymatli aniqlanishi tufayli quyidagi hosil qiluvchi funksiyaning qaraymiz:

$$\mathcal{U}_n(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{p_{0j}^{(n)}}{p_{00}^{(n)}} s^j = \frac{1}{\mathcal{P}_n(0)} \mathcal{P}_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{h(f_k(s))}{h(f_k(0))}, \quad (12)$$

oxirgi tenglikda (3) formuladan foydalandik. O'rta qiymat haqidagi teorema yordamida biz quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{h(f_n(s))}{h(f_n(0))} = 1 + \frac{h'(\theta_n(s))}{h(f_n(0))} (f_n(s) - f_n(0)) \quad (13)$$

bu yerda $f_n(0) < \theta_n(s) < f_n(s)$.

Klassik adabiyotlardan ma'lumki, barcha $m < \infty$ holatlar uchun $0 \leq s < 1$ bo'lganda (qarang. [21])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = q, \quad (14)$$

o'rinli bo'ladi, bu yerda q – avvalgidek, G-V jarayonining so'nish ehtimolligidir. Shu sababdan $n \rightarrow \infty$ bo'lganda $\theta_n(s) \rightarrow q$, bundan esa $h'(\theta_n(s)) \rightarrow h'(q)$ va $h(f_n(0)) \rightarrow \sigma$ bo'lishi kelib chiqadi. Hosil qilingan (13) tenglikdagi $R_n(s)$ funksiya uchun

$$R_n(s) = \mathcal{A}(s)\beta^n(1+o(1)), n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

asimptotik formula o'rinli, shu bilan birga bu formulaga ko'ra

$$R_n(0) = P(n < \mathcal{H} < \infty) \sim \mathcal{K}_q \beta^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

bu yerda

$$\mathcal{K}_q = \mathcal{A}(0) = \frac{q}{1-q\gamma}$$

va $\gamma = f''(q)/2\beta(1-\beta)$ qarang, [20]. Yuqoridagi xulosalarni (15) va (16) formulalar bilan birgalikda qarasak, $n \rightarrow \infty$ da quyidagi asimptotik munosabatni olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{h'(\theta_n(s))}{h(f_n(0))} [f_n(s) - f_n(0)] &= \frac{h'(\theta_n(s))}{h(f_n(0))} [R_n(0) - R_n(s)] \\ &\sim \frac{h'(\theta_n(s))}{h(f_n(0))} [\mathcal{K}_q - \mathcal{A}(s)] \beta^n = H_n(s) \beta^n, \end{aligned} \quad (17)$$

bu yerda

$$H_n(s) = \frac{h'(\theta_n(s))}{h(f_n(0))} [\mathcal{K}_q - \mathcal{A}(s)].$$

Endi, (12), (13) va (17) formulalarni birgalikda qarab, $n \rightarrow \infty$ deb limitga o'tish bilan, teorema tasdig'ini olamiz.

Teorema isbot bo'ldi.

Izoh 1. Isbotlangan teoremada topilgan $\mathcal{U}(s)$ funksiyaning ifodasini $\mathcal{V}(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_n(s)$ limit funksiya orqali ham ifodalash mumkin, bu yerda

$$\mathcal{V}_n(s) = \frac{f_n(qs) - f_n(0)}{q - f_n(0)} = E[s^{Z_n} | n < \mathcal{H} < \infty].$$

Buning uchun dastlab quyidagi tenglikni yozib olamiz:

$$\frac{h(f_n(qs))}{h(f_n(0))} = \frac{h(\xi_n(s))}{h(f_n(0))} \mathcal{V}_n(s) R_n(0), \quad (18)$$

bu yerda $f_n(0) < \xi_n(s) < f_n(qs)$ va $n \rightarrow \infty$ da $\xi_n(s) \rightarrow q$. O'z navbatida, adabiyotlardan ma'lumki, $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu_j s^j$ funksiya barcha $s \in [0, 1)$ qiymatlarda yaqinlashuvchi va u

$$\mathcal{A}(s) = \frac{q-s}{1+(q-s)\gamma} \quad (19)$$

funksiya orqali

$$\mathcal{V}(s) = 1 - \frac{\mathcal{A}(qs)}{\mathcal{A}(0)}. \quad (20)$$

formula bilan aniqlangan. Shunday qilib, (12), (16), (18) va (20) formulalarni birgalikda qarasak, quyidagi natijani olamiz:

$$\mathcal{U}(qs) = \prod_{n \in \mathbb{N}_0} [1 + H_n^q(s) \beta^n],$$

bunda $H_n^q(s)$ funksiya barcha $n \in \mathbb{N}_0$ nomerlar uchun s o'zgaruvchi bo'yicha chegaralangan hamda

$$H_n^q(s) \longrightarrow \mathcal{K}_q \frac{h'(q)}{\sigma} \mathcal{V}(s), \quad n \rightarrow \infty.$$

Izoh 2. Yuqoridagi (16) tenglikdan $\mathcal{A}(q) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\mathcal{V}(s) = 1 - \frac{\mathcal{A}(qs)}{\mathcal{A}(0)}$ (20) munosabatga ko'ra $\mathcal{V}(1) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu_j = 1$. Demak,

$$H_n(1) \longrightarrow \mathcal{K}_q \frac{h'(q)}{\sigma}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bu yerdan esa $\mathcal{U}(q) < \infty$. Oxirgi tengsizlikdan shunday xulosaga kelamizki, $\{u_j, j \in \mathcal{S}\}$ sonlar subkritik GVI jarayonlari uchun invariant taqsimot tashkil etadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Xulosa. Ushbu ishda superkritik Galton-Vatson immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonining parchalanish parametrining qiymati topildi. Subkritik hol uchun $f''(1-) < \infty$ bo'lganda $s \in [0, q) \cup (q, 1)$ uchun $\mathcal{U}(s)$ limit funksiya yaqinlashuvchi va $H_n(s)$ funksiya barcha $n \in \mathbb{N}_0$ nomerlar uchun s o'zgaruvchi bo'yicha chegaralanganligi aniqlandi. Shuningdek, $\{u_j, j \in \mathcal{S}\}$ sonlarning subkritik GVI jarayonlari uchun invariant taqsimot tashkil etishi ko'rsatildi.

ADABIYOTLAR:

1. Heatcote C.R. Corrections and comments on the paper "A branching process allowing immigration". // Journal of Royal Stat. Society, 1966, B 28(1), pp. 213–217.
2. Heatcote C.R. Corrections and comments on the paper "A branching process allowing immigration". // Journal of Royal Stat. Society, 1966, B 28(1), pp. 213–217.
3. Barbour A.D., Peyks A.G. Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, II. The case of infinite offspring mean. // Adv. Appl. Prob., 1979, 11, pp. 63–72.
4. Seneta E. On the invariant measures for simple branching process. // Journal Appl. Prob., 1971, 8, pp. 43–51.
5. Seneta E. An explicit-limit theorem for the critical process with immigration. // Journal Roy. Stat. Soc., 1970, B32(1), pp. 149–152.
6. Seneta E. Functional equations and the Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi process. // Adv. Appl. Prob., 1969, 1, pp. 1–42.
7. Seneta E. The stationary distribution of a branching process allowing immigration: A remark on the critical case. // Journal Roy. Stat. Soc., 1968, B30(1), pp. 176–179.
8. Peyks A.G. Limit theorems for the simple branching process allowing immigration, I. The case of finite offspring mean. // Adv. Appl. Prob., 1979, 11, pp. 31–62.
9. Peyks A.G. Some limit theorems for Markov chains with applications to branching process. Stud. in Prob. and Stat. Jerusalem Acad. Press, North-Holland, 1974, pp. 21–39.
10. Peyks A.G. Further results on the critical process with immigration. // Journal Aust. Math. Society, 1972, 13, pp. 277–290.
11. Peyks A.G. Branching processes with immigration. // Journal Appl. Prob., 1971, 8(1), pp. 32–42.
12. Peyks A.G. On the critical process with immigration. // Journal Aust. Math. Society, 1971, 12(4), pp. 476–482.
13. Pommerenke C. On the stationary measures of critical branching processes. // Z.Wahrscheinlichkeitsth., 1981, 55, pp. 305–312.
14. Peyks A.G. Some new limit theorems for critical branching process allowing immigration. // Stoch. Processes and Appl., 1976, 4(2), pp. 175–185.
15. Imomov A.A. On Long-Term Behavior of Continuous-Time Markov Branching Processes Allowing Immigration. // Journal. of Siberian Federal Univ.: Mathematics and Physics, 2014, 7(4), pp. 429–440.
16. Imomov A.A. A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. // Ukrainian Math. Jour., 2005, 57(2), pp. 307–315.
17. Imomov A.A., Tukhtaev E.E. On asymptotic structure of critical Galton-Watson branching processes allowing immigration with infinite variance. // Stochastic Models. 2023, 39(1), pp. 118–140.
18. Imomov A.A. On long-time behaviors of states of Galton-Watson branching processes allowing immigration. // Journal Sib. Fed. Univ.: Math. Phys., 2015, 8(4), pp. 394–405.
19. Anderson W. Continuous-Time Markov Chains: An Applications-Oriented Approach. Springer, New York. (1991).
20. Imomov A.A., Murtazayev M.S. On the Kolmogorov constant explicit form in the theory of discrete-time stochastic branching systems. // Journal of applied probability, 2024, 61(3), pp. 927–941.
21. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. Москва, Мир, 1966.

MAHSULOT SIFATIGA OMILLARNING TA'SIRINI IKKI FAKTORLI EKSPERIMENT
USULI ASOSIDA TADQIQ OLISH

Jumayev Jura,

Buxoro davlat universiteti dotsenti

j.jumayev@buxdu.uz

Muxsinova Nodira Shuxratovna,

Buxoro davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Maqolada harorat va inisiator miqdori kabi asosiy omillarning sopolimerlar sifatiga ta'siri samaradorligi to'liq ikki faktorli eksperiment usuli asosida tadqiq qilinadi va usul aniqligi baholanadi. Buning uchun faktorli eksperiment nazariyasiga asoslanib erkin o'zgaruvchilar kodlandi, eksperiment rejasi matritsasi tuzildi, regressiya tenglamalari koeffitsiyentlari hisoblab chiqildi, tenglamaning adekvatligi tekshirildi va natijalar tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: regressiya modellari, omillar, sopolimer ishlab chiqarish, eng kichik kvadratlar usuli, faktorli eksperiment usuli, omillarni kodlash, rejalashtirish matritsasi, dispersiya, standart og'ish.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НА КАЧЕСТВО ПРОДУКТА С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДВУХФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Аннотация. В статье произведена оценка эффективности влияния основных факторов, как температура, количество инициатора на производство сополимеров с использованием метода полного факторного эксперимента. Для этого закодированы переменные, была составлена матрица планирования эксперимента, рассчитаны уравнения регрессии, уравнение было проверено на адекватность, и проведён апостериорный анализ.

Ключевые слова: регрессионные модели, факторы, производство сополимеров, метод наименьших квадратов, метод факторного эксперимента, кодирование факторов, матрица планирования, дисперсия, среднееквадратическое отклонение.

STUDY OF THE INFLUENCE OF FACTORS ON PRODUCT QUALITY USING THE
METHOD OF A TWO-FACTOR EXPERIMENT

Abstract. In the article, the effectiveness of the influence of main factors such as temperature and the amount of copolymer on the performance of the copolymer was assessed using the method of a full factorial experiment. To do this, variables were coded, an experimental design matrix was compiled, regression equations were calculated, the equation was checked for adequacy, and post hoc analysis was performed.

Keywords: regression models, factors, production of copolymers, least squares method, factor experiment method, factor coding, planning matrix, variance, standard deviation.

Kirish. Amaliy ilovalarda regressiya modellari ko'pincha omillarning ularga bog'liq bo'lgan miqdorlar bilan bog'langan tenglamalarini topish uchun ishlatiladi. Buning uchun eng kichik kvadratlar usuli, to'liq faktorli eksperiment usuli va boshqalar orqali modellashtirish vositalari mavjud [1-3]. So'nggi paytlarda aniqlik va ishonchlik tufayli tadqiqotchilar ko'pincha to'liq faktorli eksperiment usuliga murojaat qilishadi.

[4] da asosiy omillarning quritishga ta'siri samaradorligi to'liq faktorli eksperiment usuli yordamida baholangan. Buning uchun erkli o'zgaruvchilar kodlangan, eksperimental reja matritsasi tuzilgan, regressiya tenglamalari hisoblab chiqilgan, tenglamaning adekvatligi tekshirilgan va aposterior tahlillari o'tkazilgan.

[5] da toshni maydalash jarayoni to'liq faktorli eksperiment yordamida matematik modellashtirilgan. Olingan tenglamadan foydalanib, jarayonni optimallashtirish uchun zarur bo'lgan har bir o'rganilayotgan omilning yakuniy natijaga ta'sir qilish darajasi aniqlangan.

Yuqoridagi tahlillar shuni ko'rsatadiki, omilli tahlildan foydalanish texnologik jarayonlarni modellashtirish uchun maqbul natijalar beradi.

Metodologiya. Ba'zi texnologik omillarning uglerod moyi sopolimerining [6] ishlashiga ta'sirini o'rganish uchun eksperimentlar ikki faktorli eksperiment rejasiga muvofiq amalga oshirildi va har bir eksperiment uch marta takrorlandi (1-jadvalga qarang). Sopolimerning ishlashiga ta'sir qiluvchi quyidagi omillar tanlandi:

- z1 – harorat $^{\circ}\text{C}$;
z2 – inisiator miqdori % ;

Faktorlarni kodlash.

Olingan eksperimental ma'lumotlarga asosanib, uch marta o'tkazilgan faktorli eksperiment uchun dastlabki rejalashtirish matritsasini tuzamiz. Har bir eksperiment uchun o'rtacha namuna natijalarini hisoblaymiz [7-10]:

$$\bar{y}_i = \frac{(y_{1i} + y_{2i} + y_{3i})}{3}$$

Biz barcha o'zaro ta'sirlarni va o'rtacha hisoblangan qiymatlarini hisobga olgan holda rejalashtirish matritsasini quramiz.

1-jadval.

№	Boshlang'ich qiymatlar		Kodlangan qiymatlar		Y tajriba natijalari			Y O'rtacha
	$^{\circ}\text{C}$	%	X ₁	X ₂	Y1	Y2	Y3	
1	60	0,3	-1	-1	45,7	46,2	47,0	46,3
2	80	0,7	+1	+1	55,8	55,2	57,3	56,1
3	80	0,3	+1	-1	46,4	47,3	47,9	47,2
4	60	0,7	-1	+1	50,6	52,1	52,7	51,8

Nazariyaga asosanib, faktorlarni kodlash quyidagicha bo'ladi (2-jadval):

2-jadval.

Faktorlar	Yuqori daraja +i	Pastki daraja -i	Markaz Z_i^0	Variatsiya oralig'i λ_i	Kodlangan o'zgaruvchining natural o'zgaruvchiga bog'liqligi
z ₁	80	60	70	10	$X_1 = \frac{Z_1 - 70}{10};$
z ₂	0,7	0,3	0,5	0,2	$X_2 = \frac{Z_2 - 0,5}{0,2};$

Model koeffitsiyentlarini hisoblash. Quyidagi ifoda yordamida empirik munosabatni qidiramiz:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 \quad (1)$$

Model koeffitsiyentlari [4] formulasi yordamida hisoblanadi.

$$b_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y_k \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^N x_{1j}y_j}{\sum_{j=1}^N x_{1j}^2};$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^N x_{2j}y_j}{\sum_{j=1}^N x_{2j}^2}; \quad b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^N x_{1j}x_{2j}y_j}{\sum_{j=1}^N x_{1j}^2x_{2j}^2};$$

Ushbu formulalarga ma'lumotlarni kiritish orqali koeffitsiyentlarni hisoblaymiz:

$$b_0 = \frac{1}{4}(46,3 + 56,1 + 47,2 + 51,8) = 50,35$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(-46,3 + 56,1 + 47,2 - 51,8) = 1,3$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-46,3 + 56,1 - 47,2 + 51,8) = 3,6$$

Ushbu kattaliklarni (1) ga qo'yganda bu tenglama quyidagicha ko'rinishni oladi:

$$y = 50,35 + 1,3 \cdot X_1 + 3,6 \cdot X_2 \quad (2)$$

Model koeffitsiyentlarining ahamiyatligini tekshirish. Buning uchun biz birlik o'lchov dispersiyasini, natijaviy funksiyasi o'rtacha qiymatining dispersiyasini va ularga mos keladigan standart og'ishni quyidagi formula yordamida hisoblaymiz [12-15]:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{ji} - \bar{y}_j)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_j^2$$

Qulaylik uchun quyidagilarni hisoblab olamiz:

3-jadval.

j	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}_j$	$(y_{j1} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j2} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j3} - \bar{y}_j)^2$	S_j^2
1	45,7	46,2	47,0	46,3	0,6	0,1	0,7	1,4
2	55,8	55,2	57,3	56,1	0,3	0,9	1,2	2,4
3	46,4	47,3	47,9	47,2	0,8	0,1	0,7	1,6
4	50,6	52,1	52,7	51,8	1,2	0,3	0,9	2,4

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k^2 = \frac{1}{4}(0,43 + 1,17 + 0,57 + 1,17) = 0,835$$

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{S_y^2}{3} = \frac{0,835}{3} = 0,278 \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{0,278} = 0,528$$

Ushbu jadvaldan oxirgi ustun elementlarini qo'shgan holda topamiz:

$$\sum_{j=1}^n S_j^2 = 1,4 + 2,4 + 1,6 + 2,4 = 7,8$$

Bundan $S_{\{y\}}^2$ ni hisoblab olamiz:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^8 S_j^2 = \frac{1}{4} \cdot 7,8 = 1,95$$

Ushbudan foydalanib koeffitsiyentlarning o'rtacha kvadratik o'gishlarini hisoblaymiz:

$$S_{KO\Phi} = \sqrt{\frac{S_{\{y\}}^2}{n \cdot m}} = \sqrt{\frac{1,95}{4 \cdot 2}} = 0,12$$

Styudent jadvaliga muvofiq $n(m-1)=4 \cdot 1=4$ va $\alpha=0,05$ ga muvofiq $t_{kp}=2,78$. Bundan kelib chiqadiki $t_{kp} \cdot S_{KO\Phi} = 2,78 \cdot 0,12 = 0,37858 \approx 0,34$

Topilgan qiymatni regressiya tenglamasining koeffitsiyentlari bilan solishtiramiz. Ko'rinib turibdiki, (2) tenglamadagi barcha koeffitsiyentlar 0,34 dan katta. Demak, (2) tenglamaning barcha koeffitsiyentlari ishonchli va yakuniy tenglama oldingidek qoladi:

$$y = 50,35 + 1,3 \cdot X_1 + 3,6 \cdot X_2$$

Endi ushbu tenglamani adekvatligini Fisher mezonini orqali tekshiramiz. Oldingi hisob-kitoblar orqali topilgan qiymatlar asosida Fisher kriteriyasi F_{krit} ni hisoblash uchun S_{qol}^2 ni aniqlash kerak.

Buning uchun topilgan (2) regressiya tenglamasidan foydalanib x_i parametrlar o'rniga +1 yoki -1 qiymatlarni qo'yib funksiya qiymatini topib olamiz:

$$y_1 = 50,35 + 1,3 \cdot (-1) + 3,6 \cdot (-1) = 45,45$$

$$y_2 = 50,35 + 1,3 \cdot (1) + 3,6 \cdot (1) = 55,25$$

$$y_3 = 50,35 + 1,3 \cdot (1) + 3,6 \cdot (-1) = 48,05$$

$$y_4 = 50,35 + 1,3 \cdot (-1) + 3,6 \cdot (1) = 52,65$$

Qoldiq dispersiya S_{oct}^2 ni quyidagi formula orqali hisoblaymiz:

$$S_{\text{qol}}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^N (\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2 = 1,445$$

Fisher mezonini bo'yicha F_{krit} ni quyidagi formula orqali hisoblaymiz:

$$F_{\text{krit}} = \frac{S_{\text{qol}}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{1,445}{0,8350} = 1,73$$

Ushbu topilgan Fisher mezonini jadval qiymati tegishli $\alpha=0,05$ ahamiyatlilik darajasi va $k_1=n-r=8-7=1$ va $k_2=n(m-1)=8 \cdot 2=16$ erkinlik darajalariga muvofiq Fisher taqsimotining kritik nuqtalari jadvallaridan topiladi [16-17]:

$$F_{\text{табл.}} = 4,49$$

$F_{\text{расч}} = 1,83 < F_{\text{табл.}} = 4,49$, bo'lgani uchun (2) regressiya tenglamasi adekvat ekanini topamiz.

Ushbu olingan (2) regressiya tenglamasini tahlil qilamiz. Tenglamadagi ko'rinadiki, har ikki faktor ham natijaga ijobiy ta'sir etadi, ya'ni faktorlar o'ssa, natija oshadi va aksincha.

Endi topilgan (2) tenglamani natural o'zgaruvchilarda yozamiz, buning uchun x_i kodlangan o'zgaruvchilar o'rniga ularning z_i orqali yozilgan ifodalarini (2) tenglamaga qo'yamiz:

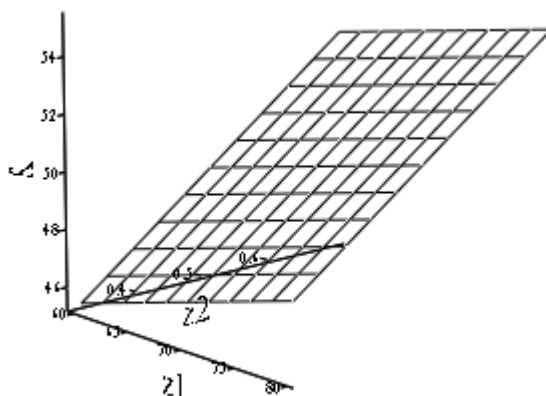
$$y = 50,35 + 1,3 \cdot \frac{z_1 - 70}{10} + 3,6 \cdot \frac{z_2 - 0,5}{0,2}$$

Shakl almashtirishlar bajarib topamiz:

$$y = 32,25 + 0,13z_1 + 18z_2 \quad (3)$$

Ko'rinadiki, natural o'zgaruvchilarda yozilgan regressiya tenglamasi ham kodlangan o'zgaruvchilarda yozilgan (2) tenglamaga o'xshash.

Olingan (3) tenglama xossalari 1-chizmadan ko'rib olish mumkin. [18].



1-chizma. $y = 32,25 + 0,13z_1 + 18z_2$ funksiya grafigi.

Xulosa. Tajriba natijalaridan foydalanib to'la faktorli eksperiment usuli yordamida topilgan regressiya tenglamasi faktorlarning o'zgarish oralig'ida yetarlicha aniqlikda natija bera olishi ko'rsatildi. Bunday topilgan regressiya tenglamalari har bir faktorning chiqish ko'rsatkichiga ta'sirini o'rganish va shuning asosida jarayon optimizatsiyasiga erishish mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Григорьев Ю. Д. Методы оптимального планирования эксперимента. Линейные модели. М. Лань, 2015. 320 с.

2. Ермаков С. М., Бродский В. З., Жигляевский А. А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1983. 392 с.
3. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 302 с.
4. Sharipov N.Z., Gafurov K.X., Jumaev J. Mahalliy soya urug'ini po'stlog'idan ajratish jarayonini tadqiq qilish//Фан ва технологиялар тараққиёти. // Илмий-техникавий журнал. № 4, 2022. 47-52 betlar. https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/8538
5. Kholikov AA., Jumaev J. Planning and conducting experiments of the drying process using heat pipes // European Scholar Journal (ESJ), Vol.2, No.3, March 2021, p.36-41. <https://scholarzest.com/index.php/esj/article/view/312/246>
6. Тимофеев В.С. Принципы технологии основного органического и нефтехимического синтеза// учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2003. – 536 с.
7. Жураев Х., Гафуров К., Ж. Жумаев, Мирзаева Ш. Математическое моделирование процесса сверхкритической экстракции биологически активных веществ из лакричного корня//Universum. Технические науки. Выпуск 10(79). Октябрь 2020. <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10822>
8. Джумаев Х.Ф., Гафуров К.Х., Мухаммадиев Б.Т., Жумаев Ж., Мирзаева Ш.У.. The influence of technological parameters on the process of CO₂-extraction of biologically active substances from licorice root. // The American journal of applied science, Volume 2, 2020. P. 273-286. <https://usajournalshub.com/index.php/tajas/article/view/1067>
9. Mirzaeva Sh.U.. Extraction of Glycyrrhizic Acid from Licorice Root using CO₂. // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Volume 6, Issue 4, April 2019, India, - P. 8939-8946.
10. Гафуров К.Х., Мухаммадиев Б.Т., Мирзаева Ш.У.. Сверхкритическая [СК] CO₂ экстракция глицирризиновой кислоты из местных лакричных корней. // Бултеровские сообщения №1, том 49. 2017, Татарстан, С. 108-114.
11. Гафуров К.Х., Мухаммадиев Б.Т., Рузиева К.Э., Ахмедов В.Н., Мирзаева Ш.У. Моделирование разных режимов экстракции системой растворителей этанол+CO₂. // Ученый XXI века 1-3, 2017, С. 44-47.
12. Жумаев Ж., Опокина Н.А. Решение математических задач в пакетах математических программ Maxima и MathCAD. Учебное пособие. Казань: КФУ, 2021. – 228 с. <https://dspace.kpfu.ru/xmlui/handle/net/163784>
13. Shamsiddinova M.U. Regression tahlilda nisbiy xatolikning o'ziga xos tomonlari// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti 2-son /2024 17-24 betlar.
14. Shamsiddinova M.U. Bir faktorli chiziqli regressiyaning chiziqsiz hollarida eng kichik kvadratlar usulini qo'llash// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti 1-son /2024 37-41 betlar.
15. Narziev M., Jumaev J. Simulation of mixing and crushing of liquid at the initial site by a high-temperature gas flow// E3S Web of Conferences 390, 05023 (2023). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202339005023>
16. Гафуров К.Х., Сафаров А.Ф., Мирзаева Ш.У. Энергосбережение в установке для экстракции сверхкритическим углекислым газом // «Бухоро давлат университети илмий ахбороти» илмий-техникавий журналы, №1, 2016. С.21-26.
17. Gafurov Kh., Muhammadiev B., Mirzaeva Sh., Kuldosheva F. Obtaining extracts from plant raw materials using carbon dioxide // Journal "Food science and technology-Ukraine" - 2020. Volume 14, Issue 1. P.47-53. ISSN: 2073-8684.
18. Jumayev J. Transport masalasini MathCAD tizimida yechish// BuxDU ilmiy axboroti, 2022, № 6, 27-31 betlar. https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/8701

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Эрмаматова Фотима Эрмаматовна,
докторант 3-го курса кафедры «Дифференциальные уравнения»
Самаркандского государственного университета имени Шарафа Рашидова
fotimaermamatova817@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления решения обобщённой системы Коши-Римана в многомерной пространственной бесконечной области по их значениям на куске границы этой области, т.е. задача Коши. Строится приближённое решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана-Ярмухамедова.

Ключевые слова: обобщённая система Коши-Римана, задача Коши, некорректные задачи, регулярное решение, приближённое решение, матрица Карлемана-Ярмухамедова.

CARLEMAN'S FORMULA FOR THE GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEM IN A MULTIDIMENSIONAL IN UNBOUNDED DOMAIN

Abstract. The paper considers the problem of reconstructing the solution of a generalized Cauchy-Riemann system in a multidimensional unbounded domain from their values on a piece of the boundary of this domain, i.e. the Cauchy problem. An approximate solution to this problem is constructed, based on the Carleman-Yarmukhamedov matrix method.

Key words: Generalized Cauchy-Riemann system, Cauchy problem, ill-posed problems, regular solution, approximate solution, Carleman-Yarmukhamedov matrix.

KO'P O'LCHOVLI CHEKSIZ SOHADA UMUMLASHGAN KOSHI-RIMAN SISTEMASI UCHUN KARLEMAN FORMULASI

Annotatsiya. Ko'p o'lchovli cheksiz sohada umumlashgan Koshi-Riman sistemasi yechimining soha chegarasini bir qismida berilgan qiymati bo'yicha tiklash, ya'ni Koshi masalasi qaralgan. Karleman-Yarmukhamedov matritsasi metodiga asoslangan taqribiy yechimi keltirilgan.

Kalit so'zlar: umumlashgan Koshi-Riman sistemasi, Koshi masalasi, nokorrekt masala, regular yechim, taqribiy yechim, Carleman-Yarmukhamedov matritsasi.

Введение. Рассмотрим систему уравнений [1], [2]:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_k} + a_k F_k \right) = 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - a_k F_j + a_j F_k = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

которая является n -мерным аналогом обобщённой системы Коши-Римана, где $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ - искомая вектор-функция, $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - заданный постоянный вектор.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_{kj}(X_1, X_2, \dots, X_n; \vec{A}) \vec{F} &= L_{jk}(X_1, X_2, \dots, X_n; \vec{A}) \vec{F} = \\ &= (X_k - a_k) F_j - (X_j - a_j) F_k + \delta_{kj} (X_l + a_l) F_l, \quad (k \leq j) \\ L_k(X; \vec{A}) \vec{F} &= (L_{k1}, \dots, L_{kn}) \vec{F} \quad (k, l, j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_{kj} - символ Кронекера. Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$L_k \left(\frac{\partial}{\partial x}; \vec{A} \right) \vec{F} = 0, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Обсуждение и результаты. Для каждого векторного оператора L_k определяем сопряженный векторный оператор L_k^* равенством:

$$\vec{V} \cdot L_k \left(\frac{\partial}{\partial x}; \vec{A} \right) \vec{F} + \vec{F} \cdot L_k^* \left(\frac{\partial}{\partial x}; \vec{A} \right) \vec{V} = \operatorname{div} P_k. \quad (4)$$

Тогда легко получить, что

$$L_k^* (\vec{X}; \vec{A}) \vec{V} = L_k (\vec{X}^k; \vec{A}_k) \vec{V}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{X}^k &= (-X_1, -X_2, \dots, -X_{k-1}, X_k, \dots, X_n), \\ \vec{A}_k &= (-a_1, -a_2, \dots, -a_{k-1}, -a_k, a_{k+1}, \dots, a_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Если $a_k = 0$, то система (1) является системой Рисса [3]. А при $n = 2$ она является обобщенной системой Коши-Римана [4], которая существенно расширяет рамки классической теории аналитических функций и её применений. В ней рассматривается класс функций, который объединяет семейства решений весьма широкого класса эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Это обобщенная система Коши-Римана, для решений которой сохраняется ряд основных свойств аналитических функций одной комплексной переменной. Поэтому (1) является, с одной стороны, обобщением системы Рисса, с другой стороны – многомерным аналогом обобщенной системы Коши-Римана.

Каждые компоненты $F_k(y)$ вектора $\vec{F}(y)$ являются решением системы (1) и удовлетворяют уравнению:

$$\Delta F_k - |\vec{A}|^2 F_k = 0. \quad (7)$$

Если $\vec{F}(y)$ – решение системы (3) в ограниченной области Ω , то справедлива обобщенная интегральная формула Коши [3], [4]:

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} M_0(y, x; \vec{A}) \vec{F}(y) dS_y = \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ \vec{F}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (8)$$

где матрица $M_0(x, y; \vec{A})$ определена равенством:

$$M_0(y, x; \vec{A}) = \left\| L_k^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; 0) \vec{N}^k \right\|, \quad (9)$$

ω_n – площадь поверхности n -мерного шара единичного радиуса, $\vec{N} = \left(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_n \right)$

имеет вид:

$$\vec{N}_k^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_0(y, x; \lambda)}{\partial x_k} - a_k \Phi_0(y, x; \lambda) \right) \cdot \operatorname{sign}(k - i) \text{ при } i \neq k,$$

$$N_i^i(y, x) = \frac{\partial \Phi_0(y, x; \lambda)}{\partial x_i} + a_i \Phi_0(y, x; \lambda), \quad (10)$$

$\Phi_0(y, x; \lambda)$ -классическое фундаментальное решение уравнения (7), $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ -внешняя нормаль поверхности $\partial\Omega$ в точке y , $\lambda^2 = |\vec{A}|^2$.

В работе [1] по матричному ядру $M_0(y, x; \vec{A})$ введён аналог обобщённого интеграла типа Коши, даны изящные формулы скачков для предельных значений обобщённого интеграла типа Коши. Также получена формула восстановления (интегральное представление) исчезающего на бесконечности решения системы уравнения (3) в пространстве $y_n > 0$ по значениям его компоненты класса $L(R^{n-1})$ (абсолютно интегрируемая функция) на гиперплоскости $y_n = 0$.

Из формулы Гаусса-Остроградского следует, что формула (8) сохраняется и в том случае, если в равенстве (9) к $\Phi_0(y, x; \lambda)$ прибавить произвольное регулярное решение уравнения Гельмгольца. Введём обозначение:

$$M(y, x; \vec{A}) = \left\| L_k^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; 0) \vec{V}^k \right\|, \quad (11)$$

где $\vec{V}^k = \left(V_1^k, V_2^k, \dots, V_n^k \right)$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned} V_k^i(y, x) &= \left(\frac{\partial \Phi(y, x; \lambda)}{\partial x_k} - a_k \Phi(y, x; \lambda) \right) \cdot \text{sign}(k - i) \text{ при } i \neq k, \\ V_i^i(y, x) &= \frac{\partial \Phi(y, x; \lambda)}{\partial x_i} + a_i \Phi(y, x; \lambda), \end{aligned} \quad (12)$$

а $\Phi(y, x; \lambda)$ определяется из формулы [5]

$$C_n K(x_n) \Phi(y, x; \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{K(w)}{w} \right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad (13)$$

где

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m 2^{-1} (m-2)! (n-2) \pi \omega_n, & n = 2m, m \geq 2; \\ (-1)^m 2^{-2m+1} (m-1)! (n-2) \pi \omega_n, & n = 2m+1, m \geq 1, \end{cases}$$

$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_n$, ω_n - площадь единичной сферы в R^n ,

$$\psi(\lambda u) = \begin{cases} u I_0(\lambda u), & n = 2m, m \geq 1, \\ \cos(\lambda u), & n = 2m+1, m \geq 1, \end{cases}$$

$I_0(\lambda u)$ -функция Бесселя нулевого порядка; здесь берется регулярная ветвь аналитической функции $I_0(\lambda u)$, $n = 2m$ - вещественная при $\lambda > 0$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_{\partial\Omega} M(y, x; \vec{A}) \vec{F}(y) dS_y = \begin{cases} 0, & x \notin \bar{\Omega}, \\ \vec{F}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (14)$$

где матрица $M(y, x; \vec{A})$ в развёрнутом виде имеет вид:

$$M(y, x; \vec{A}) = \begin{vmatrix} (\frac{\partial}{\partial y_1} + a_1)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_2} - a_2)\alpha_2 + \dots + (\frac{\partial}{\partial y_n} - a_n)\alpha_n & -(\frac{\partial}{\partial y_2} - a_2)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_1} + a_1)\alpha_2 \\ (\frac{\partial}{\partial y_2} + a_2)\alpha_1 - (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_2 & (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_2} + a_2)\alpha_2 + (\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_3 \\ (\frac{\partial}{\partial y_3} + a_3)\alpha_1 - (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_3 & (\frac{\partial}{\partial y_3} + a_3)\alpha_2 - (\frac{\partial}{\partial y_2} - a_2)\alpha_3 \\ \dots & \dots \\ (\frac{\partial}{\partial y_n} + a_n)\alpha_1 - (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_n & (\frac{\partial}{\partial y_n} + a_n)\alpha_2 - (\frac{\partial}{\partial y_2} - a_2)\alpha_n \end{vmatrix} \times \Phi(y, x; \lambda). \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} (\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_1} + a_1)\alpha_3 & -(\frac{\partial}{\partial y_4} - a_4)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_1} + a_1)\alpha_4 & \dots & -(\frac{\partial}{\partial y_n} - a_n)\alpha_1 + (\frac{\partial}{\partial y_1} + a_1)\alpha_n \\ -(\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_2 + (\frac{\partial}{\partial y_2} + a_2)\alpha_3 & (\frac{\partial}{\partial y_4} - a_4)\alpha_2 - (\frac{\partial}{\partial y_2} + a_2)\alpha_4 & \dots & (\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - a_{n-1})\alpha_2 + (\frac{\partial}{\partial y_2} + a_2)\alpha_n \\ (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_1 + \dots + (\frac{\partial}{\partial y_3} + a_3)\alpha_3 & -(\frac{\partial}{\partial y_4} - a_4)\alpha_3 + (\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_4 & \dots & (\frac{\partial}{\partial y_n} - a_n)\alpha_3 + (\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(\frac{\partial}{\partial y_3} - a_3)\alpha_n + (\frac{\partial}{\partial y_n} + a_n)\alpha_3 & (\frac{\partial}{\partial y_n} + a_n)\alpha_4 - (\frac{\partial}{\partial y_4} - a_4)\alpha_n & \dots & (\frac{\partial}{\partial y_1} - a_1)\alpha_2 + \dots + (\frac{\partial}{\partial y_n} + a_n)\alpha_n \end{vmatrix}$$

Пусть Ω - конечносвязная неограниченная область в R^n ($n \geq 3$), с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, обозначим $\Omega_R = \Omega \cap \{x \in R^n : |x| < R\}$, $\Omega_R^\infty = \Omega \setminus \Omega_R$, $R > 0$. Обозначим через $A(\Omega)$ - совокупность регулярных решений системы (1).

Пусть $\vec{F}(y) \in A(\Omega)$, при каждом фиксированном $x \in \Omega$ удовлетворяет условию роста

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_R^\infty} M(y, x; A) \vec{F}(y) dS_y = 0, \quad (16)$$

тогда справедлива формула (14).

Рассмотрим частные случаи формулы (14). Пусть неограниченная область Ω лежит внутри слоя наименьшей ширины, определяемой неравенством $0 < y_n < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, причём $\partial\Omega$ простирается до бесконечности. Будем предполагать, что для некоторого $b_0 > 0$ площадь удовлетворяет условию роста:

$$\int_{\partial\Omega} \exp\{-b_0 ch\rho_0|y'|\}ds < \infty, \quad 0 < \rho_0 < \rho. \quad (17)$$

Задача1. Известны данные Коши решения системы (3) на поверхности S :

$$\vec{F}(y)|_S = \vec{f}(y), \quad y \in S, \quad (18)$$

где S – часть границы области Ω , $\vec{f}(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y))$ – заданная непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить функцию $\vec{F}(x)$ в Ω , исходя из заданной $\vec{f}(y)$, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши-Римана в ограниченной области по её значениям на гладком куске S границы.

Надо отметить, что при решении задачи Коши для уравнения Лапласа явная формула продолжения решения в неограниченной области получена Ш.Ярмухамедовым [5] – [7], а работе [8] – [9] А.Хасановым и Ф.Турсуновым установлена явная формула продолжения решения и её производной, а также регуляризации в ограниченной области.

Пусть $\vec{F}(y) \in A(\Omega)$ удовлетворяет условию роста

$$|\vec{F}(y)| \leq C \exp[\exp \rho_2 |y'|], \quad \rho_2 < \rho, \quad y \in \Omega, \quad |y'|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2. \quad (19)$$

При $\sigma \geq 0$ в (12), (13) в соответствие [6] – [7] положим:

$$K(w) = \left[\frac{\rho}{2} \frac{w - x_n}{\sin \frac{\rho}{2}(w - x_n)} \right]^p \frac{(w + x_n + 2h)^{-k}}{\left[\sin \frac{\rho}{2}(w + x_n) \right]^p} \times \quad (20)$$

$$\times \exp \left[\sigma w^2 - b \operatorname{chi} \rho_1 \left(w - \frac{h}{2} \right) - b_1 \operatorname{chi} \rho_0 \left(w - \frac{h}{2} \right) \right], \quad w = y_n + i\sqrt{u^2 + \alpha^2}, \quad 0 < x_n < h,$$

где $b > 0, b_1 > b_0 (\cos \rho_0 \frac{h}{2})^{-1}$, p – целое неотрицательное и k – натуральное числа.

Обозначим $\Phi(y, x; \lambda) = \Phi_\sigma(y, x; \lambda), M(y, x; \vec{A}) = M_\sigma(y, x; \vec{A})$.

Так как

$$\cos \rho_1 \left(y_n - \frac{h}{2} \right) \geq \cos \rho_1 \frac{h}{2} \geq \delta_0 > 0,$$

$$\cos \rho_0 \left(y_n - \frac{h}{2} \right) \geq \cos \rho_0 \frac{h}{2} \geq \delta_0 > 0, \quad 0 < \rho_1, \rho_0 < \rho,$$

то при фиксированном $x \in \Omega$ и $y \rightarrow \infty, y \in \Omega \cup \partial\Omega$ для $\Phi_\sigma(x, y; \lambda)$ и её градиента справедлива асимптотическая оценка:

$$|\Phi_\sigma| + |\operatorname{grad} \Phi_\sigma| = O\left(\exp[-\varepsilon_1 ch\rho_1|y'| - b_0 ch\rho_0|y'|]\right), \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Так как для $M_\sigma(x, y; A)$ имеет место неравенство:

$$|M_\sigma(y, x; \vec{A})| \leq C(|\Phi_\sigma(y, x, \lambda)| + |\operatorname{grad} \Phi_\sigma(y, x, \lambda)|),$$

то выберем теперь ρ_1 с условием $\rho_2 < \rho_1 < \rho$. Тогда условие (16) выполнено, и справедлива формула (14), в которой $K(w), \Phi_\sigma(y, x; \lambda), M_\sigma(y, x; \bar{A})$ определяются из (20), (13), (20) соответственно.

Условие (19) можно ослабить. Обозначим:

$$A_\rho(\Omega) = \left\{ \bar{F}(y) : \bar{F}(y) \in A(\Omega), |\bar{F}(y)| \leq \exp[o(\exp \rho |y'|)], \right. \\ \left. |y'|^2 = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2, y \rightarrow \infty, y \in \Omega \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $\bar{F}(y) \in A_\rho(\Omega)$ удовлетворяет граничному условию роста:

$$|\bar{F}(y)| \leq C \exp \left[a \cos \rho_1(y_n - \frac{h}{2}) \exp \rho_1 |y'| \right], \quad a \geq 0, \quad y \in \partial\Omega. \quad (21)$$

Если $0 < \rho_1 < \rho$, то справедлива формула:

$$\bar{F}(x) = \int_{\partial\Omega} M(x, y; \bar{A}) \bar{F}(y) dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

в которой $K(w)$ определяется из (20), причем $b = a$.

Пусть $\Omega \subset R^n$ есть неограниченная односвязная область, лежащая внутри слоя $0 < y_n < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, и ее граница состоит из гиперплоскости $y_n = 0$ и гладкой поверхности S , заданной уравнением $y_n = L(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ и удовлетворяющей условиям

$$0 < L(y_1, \dots, y_{n-1}) \leq h, \quad |grad L(y_1, \dots, y_{n-1})| \leq const < \infty, \quad (y_1, \dots, y_{n-1}) \in R^{n-1}.$$

Обозначим через $A_\rho(\Omega)$ класс функций из $A(\Omega)$, удовлетворяющих следующему условию роста:

$$A_\rho(\Omega) = \left\{ \bar{F}(y) \in A(\Omega) : |\bar{F}(y)| \leq \exp[o(\exp \rho |y'|)], \right. \\ \left. |y'|^2 = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2, y \rightarrow \infty \right\}$$

В (13) положим:

$$K(w) = \frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_n + 2h}, \quad K(x_n) = \frac{\exp(\sigma x_n^2)}{2h}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_n,$$

и, выделяя мнимую часть подынтегрального выражения, получим:

$$C_m \Phi_\sigma(y, x; \lambda) = h e^{\sigma(y_n^2 - x_n^2) + \alpha^2} \cdot \int_0^\infty \frac{\varphi_\sigma(y, x, u) e^{-\sigma u^2} \psi(\lambda u)}{(u^2 + r^2 + 4h(h + y_n - x_n))} du, \\ \varphi_\sigma(y, x, u) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \left\{ \frac{e^{-\sigma \alpha^2}}{u^2 + r^2} \left(-2(y_n - x_n + h) \cos(\tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-\sqrt{u^2 + \alpha^2} + \frac{(y_n - x_n)(y_n - x_n + 2h)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) \sin(2\sigma y_n \sqrt{u^2 + \alpha^2}) \right) \right\}, \quad \tau = 2\sigma y_n. \quad (23)$$

(Сходимость несобственного интеграла в правых частях равенств (13) и (23) обеспечивается присутствием множителя $e^{-\sigma u^2}$).

Предположим, что $\vec{F}(y) \in A_p(\Omega)$ ограничена на $\partial\Omega$:

$$|\vec{F}(y)| \leq B, \quad y \in T = \partial\Omega \setminus S, \quad (24)$$

где B - заданное положительное число. При этом предположении верна обобщённая интегральная формула Коши (14):

$$\vec{F}(x) = \int_{\partial\Omega} M_\sigma(y-x; \vec{A}) \vec{F}(y) dS_y, \quad x \in \Omega. \quad (25)$$

Обозначим:

$$\vec{F}_\sigma(x) = \int_S M_\sigma(y-x; \vec{A}) \vec{F}(y) dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \vec{F}_\sigma}{\partial x_j}(x) = \int_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x; \vec{A}) \vec{F}(y) dS_y, \quad x \in \Omega. \quad (27)$$

Теорема 2. Пусть $F(y) \in A_p(\Omega)$ на части T границы $\partial\Omega$ удовлетворяет условию (24).

Тогда для любого $x \in \Omega$ и $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ справедливо неравенство:

$$|F(x) - F_\sigma(x)| \leq C_1(\sigma, A) B e^{-\sigma x_1^2}, \quad \left| \frac{\partial \vec{F}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \vec{F}_\sigma(x)}{\partial x_j} \right| \leq C_2(\sigma, A) B e^{-\sigma x_1^2} \quad (28)$$

Из леммы 1 следует утверждение теоремы 1.

Следствие 1. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \vec{F}_\sigma(x) = \vec{F}(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial \vec{F}_\sigma(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{F}(x)}{\partial x_j},$$

причём предел достигается равномерно на компактах из Ω .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Obolashvili E. A generalized Cauchy-Riemann system on multidimensional Euclidean space (Обобщённая система Коши-Римана в многомерном евклидовом пространстве) // *Komplexe Analysis und ihre Anwendun gauf partielle differentialglei chungen* // *Wissenschaftliche Beitrage Universitat, Halle-Wittenberg* M 27 – 1977. – P. 36–39.
2. Оболашвили Е.И. "Обобщённая система Коши-Римана в многомерном пространстве", *Труды Тбилисского Математического Института*, т.58. (1978), 168-173.
3. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., 1974.
4. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции, Физматгиз, М, 1988. - 509 с.
5. Ярмухамедов Ш. "О продолжении решения уравнения Гельмгольца", ДРАН, 357:3 (1997), 320-323.
6. Ярмухамедов Ш. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной области // Доклады АН РУз. 1980, -№2. –С.9-10.
7. Ярмухамедов Ш. Формула Грина для бесконечной области и ее применение // Известия АН Узбекской ССР. 1981, -№5. –серия физико-математических наук, –С.36-42.
8. Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 92-106.
9. Хасанов А.Б., Турсунов Ф.Р. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия вузов. Математика. Том 11. № 2 (2021). С. 56-73.

SFERIK KOORDINATALAR SISTEMASIDA LAPLAS TENGLAMASI UCHUN DIRIXLE MASALASI

Safarov Rasul Choriyor o'g'li,
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi
Toshqulova Dilshoda Adham qizi,
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi
Daminova Mukarram Sulton qizi,
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi
r.safarov1@q.nsu.ru
ORCID 0009-0008-6247-1373

Annotatsiya. Maqolada kompleks ikki o'zgaruvchili funktsiya haqiqiy va mavhum qismlariga ajralgan holatida qaraldi, analitik bo'lgan kompleks funktsiyalarning hamda garmonik funktsiyaning ta'rifi keltirildi, ikki o'zgaruvchili analitik bo'lgan kompleks funktsiya hamda Koshi-Riman shartidan foydalanib dekart koordinatalar sistemasida Laplas tenglamasi keltirilib chiqarildi.

Laplas tenglamasi $n=3$ o'lchamli fazoda, ya'ni sharda qaraldi va Laplas tenglamasiga birinchi chegaraviy masala, ya'ni Dirixle masalasi qo'yildi, Laplas tenglamasi va Dirixle masalasi uchun dekart koordinatalar sistemasidan sferik koordinatalar sistemasiga o'tildi va soddaroq ko'rinishdagi Laplas tenglamasi va Dirixle masalasi topildi. Sferik koordinatalar sistemasidagi Laplas tenglamasi uchun xususiy yechim k-tartilbli bir jinsli ko'phad ko'rinishida qidirildi hamda Laplas tenglamasi k-tartilbli sferik funktsiya bo'lishi uchun zaruriy bo'lgan shartlar keltirildi. k-tartilbli sferik funktsiyaning yechimi Laplas tenglamasining xususiy yechimidan foydalanib ikki funktsiyaning ko'paytmasi ko'rinishida izlandi va berilgan Dirixle masalasidan foydalanib ba'zi noma'lumlar topildi va umumiy yechim Lejandr ko'phadlari yordamida yozildi.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, Dirixle masalasi, sferik koordinatalar sistemasi, Lejandr ko'phadi.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Аннотация. В статье рассматривалась комплексная функция с двумя переменными, разложенная на вещественную и абстрактную части, приводилось определение комплексных функций, являющихся аналитическими, а также гармонической функции, приводилось уравнение Лапласа в декартовой системе координат с использованием аналитической функции с двумя переменными, а также условия Коши-Римана. Уравнение Лапласа рассматривалось в $n=3$ -мерном пространстве, т. е. в сфере, и первая граничная задача была поставлена на уравнение Лапласа, т. е. задача Дирихле, была перенесена из декартовой системы координат в сферическую систему координат для уравнения Лапласа и задачи Дирихле, и было найдено более простое уравнение Лапласа и задача Дирихле. Частное решение уравнения Лапласа в сферической системе координат ищется в виде однородного многогранника k -порядка, а также приведены условия, необходимые для того, чтобы уравнение Лапласа было сферической функцией k -порядка решение сферической функции k -го порядка искали в виде произведения двух функций с помощью частного решения уравнения Лапласа, а некоторые неизвестные находили с помощью заданной задачи Дирихле, а общее решение записывали с помощью многочленов Лежандра.

Ключевые слов: уравнение Лапласа, задача Дирихле, сферическая система координат, многочлен Лежандра.

THE DIRICHLE PROBLEM FOR LAPLAC'S EQUATION IN A SPHERICAL COORDINATE SYSTEM

Abstract. In the article, the complex two-variable function is divided into real and abstract parts, the definition of analytic complex functions and harmonic function is given, the two-variable analytic complex function and the Laplace equation in the Cartesian coordinate system using the Cauchy-Riemann condition brought out.

The Laplace equation was considered in $n=3$ -dimensional space, i.e., a sphere, and the first boundary value problem, the Dirichlet problem, was applied to the Laplace equation and the Dirichlet problem were found. The particular solution for the Laplace equation in the spherical coordinate system is sought in the form of a k -order homogeneous polynomial, and the necessary conditions for the Laplace equation to be a k -order spherical function are given. The solution of the k -order spherical function was sought as a product of two functions using the particular solution of Laplace's equation and some unknowns were found using the given Dirichlet problem and the general solution was written using Legendre polynomials.

Keywords: Laplace's equation, Dirichlet's problem, spherical coordinate system, Legendre's multiplication.

Kirish. Maqolada biz Laplas tenglamasiga qo'yilgan ($n=3$ o'lchamli fazoda) Dirixle masalasini qaraymiz, ko'pgina misol va masalalarda Laplas tenglamasiga Dirixle masalasi qo'yiladi [13]. Lekin $n=3$ da bu tenglamaning umumiy yechimi haqida yozilmagan faqatgina $n=2$ da turli natijalar olingan [13]. Laplas tenglamasi yoki Laplas operatori haqida ko'pgina adabiyotlarda yozilgan [2]-[13], hatto p-Laplas operatori uchun ham bir qancha natijalar olingan[1]. Laplas tenglamasi xususiy hosilali differensial tenglamalar fanining eng asosiy eng asosiy elliptik tipdagi tenglamasi hisoblanadi va unga qo'yilgan Dirixle masalasi esa ikkinchi chegaraviy masala hisoblanadi[1]-[13]. Elliptik tipdagi tenglamalar ya'ni Laplas tenglmasi fizik jarayonlarda ishlatiladi, misol uchun p-Laplas tenglamasi Nyutonskiy bo'lmagan suyuqliklarni harakatini o'rganishda foydalaniladi [1].

Metod. Laplas tenglamasiga qo'yilgan birinchi chegaraviy masalani yechishda asosan Fu're metodidan foydalanamiz, ya'ni noma'lum funksiyani ikkita ixtiyoriy bir o'zgaruvchili funksiyalarning ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz va berilgan birinchi shartidan foydalanib noma'lumlarni topamiz, bu metod haqida ba'zi adabiyotlarda ma'lumotlar keltirilgan [13], qo'shimcha metod sifatida arifmetik hisoblash ishlarini maktab kursidan ma'lumot bo'lgan metodlardan foydalanamiz.

Natija va muhokamalar. Laplas tenglamasi uchun sharda ($n=3$) Dirixle maslasini qaraymiz:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$u|_{\partial B_R} = f(x, y, z) \quad (2)$$

Bizga (1), (2) masala yechimini umumiy ko'rinishi qiziq. Quyidagicha o'zgaruvchi almashtirish qilsak

$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi \cos \psi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \\ z = \rho \cos \varphi, 0 < \rho < \infty \end{cases}$$

(1), (2) tenglama keying quyidagicha ko'rinishyni oladi

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

va chegaraviy shart

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$$

Odatda (3) o'zgaruvchi almashtirishga dekart koordinatalar sistemasidan sferik mkoordinatalar sistemasiga o'tish deyiladi.

Ta'rif 1. Agar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, funksiya z_0 nuqtada va uning biror atrofida barcha nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiya shu nuqtada analitik deyiladi.

Ta'rif 2. D sohaning barcha nuqtalarida analitiik bo'lgan $f(z)$ funksiya, D sohada analitik deyiladi.

Agar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ D sohada analitiik funksiya bo'lsa, u holda bu funksiya uchun quyidagi tenglik o'rinni ya'ni bu funksiya Koshi-Riman shartini qanotlantiradi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

(4) dagi birinchi tenglikni x bo'yicha, ikkinchi tenglikni esa y bo'yicha differensiallasak va quyidagi ayniyatdan foydalansak,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

Quyidagi tenglikga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$u(x, y)$ funksiya uchun (5) tenglama Laplas tenglamasi hisoblanadi va eng soda va eng asosiy elliptik tipdagi xususiy hosillali differensial tenglama hisoblanadi

Ta'rif 3. Berilgan $V \subset R^3$ sohaning chegaralangan S bo'lsin. Funksiya $u(x, y, z)$ garmonik deyiladi V sohada agar:

- 1) Funksiya $u(x, y, z)$ birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz $\tilde{V}$;
- 2) V sohaning ichidan ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilaga ega;
- 3) Laplas tenglamasini qanoatlantirsa:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad \forall (x, y, z) \in V.$$

Sharda Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi $u = u(r, \theta, \varphi)$ funksiyaning toping $r < R$;

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6)$$

va shar sirtida ($r = R$)da quyidagi qiymatni qabul qiluvchi:

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi). \quad (7)$$

(6) tenglamaning xususiy yechimini k -tartibli ko'phad ko'rinishida izlaymiz:

$$u_k(r, \theta, \varphi) = r^k Y(\theta, \varphi),$$

(6) tenglamaga olib borib qo'yamiz, $Y(\theta, \varphi)$ funksiya quyidagi tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + k(k+1)Y = 0 \quad (8)$$

(8) ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi (8) tenglamaning xususiy yechimiga k -tartibli sferik funksiya deyiladi. (8) tenglamaning yechimini topish uchun o'zgaruvchilari ajralgan metodidan foydalanamiz. (8) tenglamani yechimini yechimini ikkita funksiyaning ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz ya'ni $Y_k(\theta, \varphi) = P(\cos \theta) \Phi(\varphi)$:

$Y_k(\theta, \varphi + 2\pi) = Y_k(\theta, \varphi)$, tenglikdan quyidagi tenglikga bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi(\varphi) = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases} \quad (9)$$

Bu yerda $\lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$ va (9) masalaning yechimi:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

$P(\cos \theta)$ funksiya quyidagi tenglikdan topiladi:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \left[k(k+1) - \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right] P(\cos \theta) = 0, \quad (10)$$

(10) tenglamaga $t = \cos \theta$, deb almashtirish bajaramiz, $P(\cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi$, funksiya uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-[(1-t^2)P'(t)]' + \frac{n^2}{1-t^2} P(t) = k(k+1)P(t). \quad (11)$$

(11) tenglamaning yechimi Lejandr ko'phadi hisoblanadi:

$$P_{k,n}(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_k(t)}{dt^n},$$

Bu yerda $P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2-1)^k]$ —Lejandr ko'phadi, $k = 0, 1, 2, \dots$

(10) tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$P_{k,n}(\cos \theta) = \sin^n \theta \frac{d^n}{d \cos \theta^n} [P_k(\cos \theta)],$$

$P_{k,0}(\cos \theta) = P_k(\cos \theta), P_{k,n}(\cos \theta) = 0 \quad n > k$ lar uchun:

Shunga ko'ra (8) tenglamaning yechimi birlik sferada chegaralangan va quyidagi ko'rinishda:

$$P_{k,n}(\cos \theta) \cos n\varphi, P_{k,n}(\cos \theta) \sin n\varphi.$$

Ularning ixtiyoriy koeffitsiyent bilan chiziqli kombinatsiyasi:

$$Y_k(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^k (a_{k,n} \cos n\varphi + b_{k,n} \sin n\varphi) P_{k,n}(\cos \theta) \quad (12)$$

ham (8) tenglamaning yechimi hisoblanadi, (6) tenglamaning xususiy yechimi quyidagi formulani beradi:

$$u(r, \theta, \varphi) = r^k Y_k(\theta, \varphi).$$

Shar ichidan Dirixle masalasining yechimi(va boshqa ichki masalaning yechimi) sferik funksiya yordamida quyidagicha ko'rinishda yozish mumkin:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k X_k(\theta, \varphi).$$

Ozod had bo'lgan $f(\theta, \varphi)$ funksiya sferik funksiya yordamida quyidagi qator ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi)$$

va (7) chegaraviy shartdan foydalanib quyidagi tenglikka erishamiz. $X_k(\theta, \varphi) = Y_k(\theta, \varphi)$.

Shunga ko'ra sharda Laplas tenglamasiga qo'yilgan Dirixle masalasining yechimi quyidagi ko'rinishda

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k(\theta, \varphi). \quad (13)$$

Natija. $r=R$ radiusi shar sirtida uzluksiz bo'lgan $f(\theta, \varphi)$ funksiya berilgan bo'lsin. U holda (13) qatorning yig'indisi (6)-(7) masalaning yechimi bo'ladi.

$k = 0, 1, 2, \dots$ holatlarda Lejandr ko'phadining ko'rinishini yozamiz:

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t); \\
 P_{0,0}(\cos \theta) &= P_0(\cos \theta) = 1, P_{1,0}(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_{1,1}(\cos \theta) = \sin \theta. \\
 P_{2,0}(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1), P_{2,1}(\cos \theta) = 3\cos \theta \sin \theta, P_{2,2}(\cos \theta) = 3\sin^2 \theta; \\
 P_{3,0}(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta), P_{3,1}(\cos \theta) = \sin \theta \frac{15\cos^2 \theta - 3}{2}, \\
 P_{3,2}(\cos \theta) &= 15\sin^2 \theta \cos \theta, P_{3,3}(\cos \theta) = 15\sin^3 \theta; \\
 P_{k,k}(\cos \theta) &= \frac{(2k)!}{2^k k!} \sin^k \theta.
 \end{aligned}$$

(12) formuladan foydalanib $k = 0, 1, 2, \dots$ larda sferik funksiyaning ko'rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}
 Y_0(\theta, \varphi) &= a_{0,0}, \\
 Y_1(\theta, \varphi) &= a_{1,0} \cos \theta + (a_{1,1} \cos \varphi + b_{1,1} \sin \varphi) \sin \theta, \\
 Y_2(\theta, \varphi) &= a_{2,0}(3\cos^2 \theta - 1) + (a_{2,1} \cos \varphi + b_{2,1} \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta + \\
 &\quad + (a_{2,2} \cos 2\varphi + b_{2,2} \sin 2\varphi) \sin^2 \theta, \\
 Y_3(\theta, \varphi) &= a_{3,0}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + (a_{3,1} \cos \varphi + b_{3,1} \sin \varphi) \sin \theta (15\cos^2 \theta - 3) + \\
 &\quad + (a_{3,2} \cos 2\varphi + b_{3,2} \sin 2\varphi) \sin^2 \theta \cos \theta + (a_{3,3} \cos 3\varphi + b_{3,3} \sin 3\varphi) \sin^3 \theta.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Misol. Radiusi birga teng bo'lgan shar ichida garmonik va shar sirtida

$$u(1, \theta, \varphi) = \cos \theta (\cos \varphi + \cos \theta)$$

Shartni qanoatlantiruvchi $u = u(r, \theta, \varphi)$ funksiyaning toping.

Yechim: $f = f(r, \theta, \varphi)$ funksiyaning quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$f(\theta, \varphi) = \sin \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

Yuqoridagi (13) formulalardan foydalanib

$$a_{0,0} = a_{1,0} = 0$$

$$a_{1,1} = 1, b_{1,1} = 1$$

koeffitsiyentlarni topamiz.

U holda yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 f(\theta, \varphi) &= Y_1(\theta, \varphi) \\
 u(r, \theta, \varphi) &= r Y_1(\theta, \varphi) = r(\cos \varphi + \sin \varphi) \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Xulosa. Maqolada Laplas tenglamasiga qo'yilgan Dirixle masalasi yechildi, ya'ni yechim sferik funksiyalar yordamida yoki Lejandr ko'phadlari yordamida yozildi, xulosa sifatida shuni aytish mumkinki, ba'zi tenglamalarni dekart koordinatalar sistemasiga o'tib osonroq yechish mumkin ekan. Maqolada olingan natijadan asosan talabalar Laplas tenglamasiga qo'yilgan Dirixle masalasini yechishda foydalanish mumkin. laplas tenglamasiga qo'yilgan ikkinchi, uchinchi chegaraviy masalalarni $n=3$ o'lchamli fazoda yechish tavsiya qilinadi.

ADABIYOTLAR:

1. Терсенов А.С. О достаточных условиях существования радиально-симметричного решения уравнения p -Лапласа // *Нелинейный анализ*. 2014. В. 95. П. 362-373.
2. Корпусов М. О. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения математической физики*. Москва: Физический факультет МГУ, 2016. – 188 с.
3. Крылов Н.В. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка*. М.: Наука, 1985. – 376 с.
4. Крылов Н. В. *Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера*. Новосибирск: Научная книга, 1998. – 178 с.
5. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука, 1988. – 336 с.
6. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными*. / Пер. с англ. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. – 562 с.
7. Ландис Е.М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*. М.: Наука, 1971. – 288 с.
8. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
9. Олексий О.А. *Лекции об уравнениях с частными производными*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 236 с.
10. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1983. – 424 с.
11. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. О гильдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений // *Доклады РАН*, 2001, 378(5), 583-588.
12. Дилмурадов Н. О регулярности граничных точек для одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // *Докл. АН УзССР*, 1984. N3.
13. Салохиддинов М.С., Исломов Б.И. *Математика физика тенгламаларидан мисол ва масалалар туплами*, 146-180 с.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ $\mathbb{H}$ -РЕГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рустамов Сохибжон Умурзакович,

базовый докторант кафедры «Математика»

Навоийского государственного педагогического института,

Sohibjon_17@mail.ru

Аннотация. В данной работе получена интегральная формула Коши, т.е. изучается задача продолжения решения обобщённой системы Коши-Римана с действительным кватернионным параметром по заданным значениям на границы данной области в трёхмерном пространстве.

Ключевые слово: обобщённая система Коши-Римана, кватернион с действительными параметрами, интегральная формула Коши, $\mathbb{H}$ -регулярная функция.

$\mathbb{H}$ -РЕГУЛЯР ФУНКЦИЯ УЧУН ЧЕГАРАЛАНГАН СОҲАДА КОШИНИНГ ИНТЕГРАЛ ФОРМУЛАСИ

Аннотация. Ушбу ишда ҳақиқий кватернион параметрли умумлашган Коши-Риман тенгламалар системаси ечимини уч ўлчамли фазодан олинган чегараланган соҳа чегарасида берилган қиймати бўйича шу соҳага давом эттириш масаласи, яъни Кошининг интеграл формуласи ҳосил қилинган.

Калим сўзлар: умумлашган Коши-Риман системаси, ҳақиқий параметрли кватернион, Кошининг интеграл формуласи, $\mathbb{H}$ – регуляр функция.

CAUCHY INTEGRAL FORMULA FOR AN $\mathbb{H}$ -REGULAR FUNCTION IN A BOUNDED DOMAIN

Abstract. In this paper, the integral Cauchy formula is obtained, i.e. the problem of continuing the solution of the generalized Cauchy-Riemann system with a real quaternion parameter for given values to the boundaries of a given region in three-dimensional space is studied.

Keywords: generalized Cauchy-Riemann system, quaternion with a real parameter, integral formula Cauchy, $\mathbb{H}$ – regular function.

Введение. Хорошо известно, что классическая интегральная формула Коши является основным рабочим аппаратом в теории функции комплексного переменного. В связи с применением аппарата теории функции комплексного переменного был достигнут наиболее существенный прогресс в решении двумерных граничных задач математической физики. Среди возможных пространственных обобщений двумерной теории всё более видное место в последнее время занимает кватернионный анализ. Кватернионный анализ берёт своё начальное развитие в классической работе Hamiltona [1], который указал основные свойства. Введённый в работах Gr.C. Moisil, N. Theodoresco [2], Н.М. Крылова [3] в связи с требованием факторизации оператора Лапласа аналог условий Коши-Римана естественным образом привёл к понятиям кватернионных аналогов интеграла типа Коши, оператора сингулярного интегрирования T – оператора, рассмотренным впервые в работе А.В. Бицадзе [4], [5]. Для них оказались справедливы теоремы, обобщающие известные результаты теории функций комплексного переменного. В [4] были показаны первые применения интегральных теорем кватернионного анализа в пространственной теории упругости.

Задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является обобщением [2], [6]-[7] системой Моисила-Теодореску, трёхмерным аналогом уравнений Коши-Римана, важность которых в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [8]-[10]. Действительный кватернионный анализ и её применение в решении эллиптических граничных задач отражены в монографии К. Gurlebeck, W. Sprobig [7].

1. Алгебра действительного кватерниона. Пусть $\mathbb{R}^4$ – четырёхмерное Евклидово векторное пространство. Выбираем ортонормальный базис $i_0 = (1,0,0,0)$, $i_1 = (0,1,0,0)$, $i_2 = (0,0,1,0)$, $i_3 = (0,0,0,1)$. Отсюда, вектор $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ можно записать в виде:

$$a = \sum_{k=0}^3 a_k i_k. \quad (1)$$

Введя сокращение $\hat{a} = \sum_{k=1}^3 a_k i_k$, получим $a = a_0 i_0 + \hat{a}$. Введённое этим путём векторное пространство $\mathbb{R}^4$ с алгебраической структурой кольца называется *множеством действительных кватернионов* и обозначается через $\mathbb{H}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{a = a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 | a_j \in \mathbb{R}, j = 0,1,2,3\}$$

Традиционный выбор записи $\mathbb{H}$ в честь создателя кватернионов – W.R.Hamilton.

Единичный элемент i_0 и кватернионная мнимая единица $\{i_k | k \in \mathbb{N}_3\}$ как стандартный базис элементов обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} i_0^2 = i_0 = -i_k^2, \\ i_1 i_2 = i_3; i_2 i_3 = i_1; i_3 i_1 = i_2, \\ i_0 i_k = i_k, i_j i_k = -i_k i_j, \forall j \neq k = 1,2,3, \end{cases} \quad (2)$$

здесь и везде $\mathbb{N}_p := \{1,2, \dots, p\}$, $\mathbb{N}_p^0 := \mathbb{N}_p \cup \{0\}$.

Элементу $a = (a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ соответствует сопряженный элемент $\bar{a} = (a_0 i_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3) \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$ и их норма

$$|a| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Кватернионы можно определить в виде специальной 4×4 действительной матрицы, которая имеет форму:

$$a = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

Здесь $a_k, k = 0,1,2,3$ означает действительное число. Подобно представлению (1.1), базисы i_0, i_1, i_2, i_3 получены в матричном вычислении:

$$\begin{aligned} i_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & i_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ i_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & i_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Кватернионы определяются как линейные действительные комбинации единицы i_k и имеют многие представления в других алгебрах, используемых для приложений. Во-первых, если $a \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$, тогда имеет место векторное представление $a = a_0 + \vec{a}$, где $\vec{a} := \sum_{k=1}^3 a_k i_k$, $a_0 := Sc(a)$, $\vec{a} := Vec(a)$, и их соответственно называем *скалярной и векторной частями кватерниона a*.

$\mathbb{H}$ –регулярная функция. Пусть G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial G = \Gamma$ –гладкой поверхностью Ляпунова.

Определение . Функция $u(x)$ называется $\mathbb{H}$ –значной, если её можно представить в виде:

$$u(x) = \sum_{i=0}^3 u_i(x) e_i, \quad x \in G, \quad (3)$$

где функции $u_i(x)$ – вещественные.

Введём трёхмерный оператор

$$\nabla = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

для отображений $\vec{F} = \sum_{k=1}^3 F_k i_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$.

Для $F = (F_0, \vec{F}) \in \ker \nabla$ такой, что $\nabla \cdot F = 0$ или $F \cdot \nabla = 0$ некоммутативны, будем рассматривать левые и правые операторы:

$$D := i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^3 i_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

или

$$\bar{D} := \frac{\partial}{\partial x_1} i_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} i_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} i_3 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} i_j$$

обобщающие двумерные операторы Коши-Римана (см. [7]);

$1, i_1, i_2, i_3$ – кватернионные единицы.

Определени. $\mathbb{H}$ -значная функция u называется $\mathbb{H}$ -левой регулярной в G тогда и только тогда, когда $u \in C_{\mathbb{H}}^1(G)$ и $Du = 0$ в G . Если $\mathbb{H}$ -значная функция $u \in C_{\mathbb{H}}^1(G)$ решает уравнение $uD = 0$, то она называется $\mathbb{H}$ -праворегулярной в G . $\mathbb{H}$ -леворегулярные функции будем называть $\mathbb{H}$ -**регулярными**.

Используя (1.2), легко видеть, что Du можно записать в виде:

$$Du = (-\operatorname{div} \hat{u})i_0 + \operatorname{grad} u_0 + \operatorname{rot} \hat{u}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u_0 &= (D_1 u_0)i_1 + (D_2 u_0)i_2 + (D_3 u_0)i_3, \\ \operatorname{div} \hat{u} &= D_1 u_1 + D_2 u_2 + D_3 u_3, \\ \operatorname{rot} \hat{u} &= \det \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathbb{H}$ -значная функция u называется $\mathbb{H}$ -регулярной, если u удовлетворяет так называемой системе Моисила-Теодореску:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{u} &= 0, \\ \operatorname{grad} u_0 + \operatorname{rot} \hat{u} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В частности, где $u_0 = \text{const}$, эта система описывает безвихревую жидкость без источников.

Интегральная формула Коши для действительной кватернионнозначной функции. Пусть $\alpha(y) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k(y) i_k$, где α_k – компоненты внешней нормали в точке y , $|\alpha| = 1$. $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичная внешняя нормаль и $dS = nd\Gamma = dx_2 dx_3 i_1 + dx_1 dx_3 i_2 + dx_1 dx_2 i_3$, где $d\Gamma$ – поверхностный элемент ∂G .

Если

$$\Phi_0(y, x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (6)$$

Фундаментальное решение классического уравнения Лапласа, где $r = |y - x|$, то справедлива формула:

$$\begin{aligned} \rho(y, x) &= -D(\Phi_0) = -D\left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}\right) = -\bar{D}\left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|y - x|}\right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{|y - x|}{|y - x|^3} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{(y - x)|y - x|}, \\ D\rho &= \bar{D}\rho = \Delta_3\left(\frac{1}{|y - x|}\right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

при $y \neq x$, $y - x = \sum_{k=1}^3 (y_k - x_k) i_k$.

Из работы ([8], п.8.8) следует:

Определение. Функция $\rho(y, x)$ называется *фундаментальным решением* дифференциального оператора D .

В работе [11] указан специальный вид формулы Коши-Помпейя в трёхмерном пространстве для дифференцируемых кватернионных функций, то есть для $F \in C^1(G, \mathbb{H}(\mathbb{R})) \cap C(\bar{G}, \mathbb{H}(\mathbb{R}))$ полного кватерниона справедлива формула:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \rho(y, x) \cdot F(y) \cdot dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_G \rho(y, x) \cdot DF(y) \cdot dv_y &= \\ &= \begin{cases} F(x), & x \in G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема. (Интегральная формула Коши [7; с. 29]). Пусть $F \in A(G, \mathbb{H}(\mathbb{R})) \cap C(\bar{G}, \mathbb{H}(\mathbb{R}))$. Тогда справедлива интегральная формула Коши

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \rho(y, x) \cdot F(y) \cdot dS_y = \begin{cases} F(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G} \end{cases} \quad (9)$$

Формула (9) сохраняется и в том случае, если к функции $\Phi_0 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}$ прибавить произвольное регулярное решение уравнения Лапласа.

Теорема. (Интегральная формула Коши). Пусть $u \in A_{\mathbb{H}}(G) \cap C_{\mathbb{H}}(\bar{G})$. Тогда справедлива интегральная формула Коши:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} h(y, x) \cdot F(y) \cdot dS_y = \begin{cases} F(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$h(y, x) = -D(\Phi(y, x)) = D(\Phi_0(y, x) + g(y, x)), \quad (11)$$

$\Phi(y, x)$ определяется следующим образом:

$$\Phi(y, x) = [-2\pi^2 K(0)]^{-1} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(w)}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad (12)$$

$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3$, $K(w)$ – целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w , $w = u + iv$, где u, v – действительные числа, и $K(0) \neq 0$, для всех $R > 0$ существует $C_R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R, \operatorname{Im} w \leq -C_R} (|K(w)| + |\operatorname{Im} w| |K'(w)| + |\operatorname{Im} w|^2 |K''(w)|) < \infty. \quad (13)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(w)} = K(w)$. Тогда из (3.8) следует, что для всех $R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R} \{ |K(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|) |K'(w)| + (1 + |\operatorname{Im} w|^2) |K''(w)| \} < \infty. \quad (14)$$

Формула (3.7) имеет вид

$$-2\pi^2 K(0) \Phi(x, y) = \int_0^\infty \left\{ \frac{(y_3 - x_3) \operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{s + u^2}} - \operatorname{Re} K(w) \right\} \frac{du}{r^2 + u^2}. \quad (15)$$

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi(x, y)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Hamilton W.R. Elements of Quaternions. London, Langmans Green, 1866. 866 p.
2. Moisil Gr.C., Theodoresco N. Fonctions holomorphes dans l'espace. Mathematica, –1931. V.5, 141, – P. 142-153.
3. Крылов Н.М. О кватернионах Роана Гамильтона и понятии моногенности. // ДАН СССР. – 1947. Т. 65. – №9. – С. 799-800.
4. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. –1953. -17:6. – С.525-538.
5. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения // ДАН. АН СССР. – 1953. – С.389-392.
6. Mises R. Integral theorems in three-dimentional potential flow.// Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, 1944. – с.509-611.
7. Klaus Gurlbebeck, Wolfgang Sprobig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1990.
8. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 pp.
9. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 59. №1. С.3-27.
10. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теорет. и математ. физика. 1984.Т. 60. №2. С.169-198.
11. Pascali D. Old and new in the monogenic quaternion theory // Proceedings of the first conference “Classical and Functional Analysis” Azuga-Romania. – 2013. –P.103-120.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ПРИВОДА ЛОКОМОТИВА

Ахмедов Олимжон Шарипович,

преподаватель кафедры дифференциальных уравнений

Бухарского государственного университета,

соискатель Национального исследовательского университета

Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

olimjon84@mail.ru, o.sh.axmedov@buxdu.uz

Аннотация. Данная работа посвящена вибрации зубчатой передачи привода локомотива, возбуждаемой кинематическими погрешностями зубчатой передачи. Для создания математической модели взаимосвязанной системы применён метод декомпозиции на подсистемы. Была получена матрица динамической жёсткости, которая позволяет оценить комплексные амплитуды установившегося отклика системы. Данная математическая модель использована для расчёта комплексных амплитуд деформации зацепления, зависящих от скорости локомотива.

Ключевые слова: кинематическое отклонение, подвижной состав, зубчатая передача, деформации зацепления, внутреннее возбуждение.

MODELLING VIBRATION OF GEAR DRIVE OF WHEELSET DRIVE OF LOCOMOTIVE

Abstract. This work is devoted to the vibration of the gear transmission of the locomotive drive, excited by kinematic errors of the gear transmission. To create a mathematical model of the interconnected system, the method of decomposition into subsystems was used. A matrix of dynamic rigidity was obtained, which allows us to estimate the complex amplitudes of the steady-state response of the system. This mathematic model is used to calculate the complex amplitudes of the deformation of the engagement, depending on the speed of the locomotive.

Keywords: kinematic deviation, rolling stock, gear drive, engagement deformation, internal excitation.

LOKOMOTIV YURITMASI TISHLI UZATMASINING TEBRANISHINI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. Ushbu maqola lokomotiv yuritmasi tishli ilashmasi kinematik xatoligi natijasida tishli uzatmaning tebranishiga bag'ishlangan. O'zaro bog'langan tizimning matematik modelini yaratish uchun quyi tizimlarga bo'linish usuli qo'llanildi. Tizimning barqaror holatdagi javobining murakkab amplitudalarini baholashga imkon beruvchi dinamik birlilik keltirib chiqarilgan. Ushbu matematik model lokomotiv tezligiga bo'g'liq holda ilashma deformatsiyasining kompleks amplitudalarini hisoblash uchun ishlatilgan.

Kalit so'zlar: kinematik og'ish, harakatlanuvchi tarkib, tishli uzatma, ilashma deformatsiyasi, ichki qo'zg'alish.

Введение. В приводах железнодорожного подвижного состава широко используются зубчатые передачи. Их надёжность и долговечность во многом определяются точностью изготовления деталей и качеством сборки. Долговечность и надёжность функционирования зубчатых передач в значительной степени определяются точностью изготовления деталей и качеством сборки. Наличие погрешностей при изготовлении и сборке приводит к возникновению динамических нагрузок, шума, вибраций, нагрева, а также к концентрации напряжений на отдельных участках зубьев. Кроме того, погрешности могут вызвать несогласованность углов поворота ведущего и ведомого звеньев.

Литературный обзор. В статье [1] разработана математическая модель для оценки динамических характеристик колесных пар с учётом вязкоупругих свойств материала системы с использованием наследственной теории Больцмана-Вольтера.

В работе [2] разработан метод математического моделирования и динамических свойств привода электровоза. А также рассмотрено соединение тягового двигателя посредством роторно-

В работе [4] представлены результаты численного и экспериментального определения собственных частот металлических кожухов тяговой зубчатой передачи. Для численного определения собственных частот кожухов выполнен модальный расчёт твердотельной модели кожуха в программной среде Ansys Workbench.

В статье [6] была исследована эффективность алгоритмов подавления в колесных парах железнодорожного подвижного состава. Кроме того, в качестве пилотного исследования проанализировано, в какой степени элементы управления тягой влияют на возбуждение крутильных колебаний.

Методы. Рассмотрим универсальную привода подвижного состава. Чтобы смоделировать колебания привода, разобьём привод (рисунок 1) на пять подсистем:

-
- The diagram illustrates a mechanical system, likely a vehicle chassis or suspension assembly, with various components and coordinate systems. The main components are labeled as follows:
- L1, L2:** Longitudinal links or beams.
 - RM:** Rotational mass or motor.
 - S:** Spring or suspension component.
 - P:** Piston or actuator.
 - K:** Spring or damper.
 - LS:** Link or sensor.
 - D:** Damper or damper assembly.
 - H:** Horizontal link or beam.
 - A, B:** Actuators or sensors.
 - RP:** Reference point or ground.
- Coordinate systems and variables are defined for the system:
- RM:** Rotational coordinate ψ and translational coordinates u and v .
 - S, K:** Rotational coordinate ψ_{20} and translational coordinates v_{20} and w_{20} .
 - D:** Rotational coordinate ω_D and translational coordinates φ_{20} and φ_{19} .
- The diagram also shows various joints, springs, and dampers connecting the components, and a set of numbered points (1 through 32) indicating specific locations or degrees of freedom.

- Статор тягового двигателя (S) с кронштейном, корпусом редуктора и грузом редуктора с держателем, сконцентрированным в центре груза на оси вращения.

- <https://buxdu.uz>

- колесная пара (D) с ведомой частью зубчатой муфты.

Общее положение подсистем в системе координат, показанной на рисунке 1 справа, описывается обобщенными координатами, приведенными в таблице 1. Из данных, приведенных в таблице 1, мы видим, что для приводной части привода (RM, S) мы рассматриваем пространственные колебания, то есть каждый узел имеет 6 степеней свободы, для приводных частей привода (K, H, D) мы рассматриваем только крутильные колебания, т.е. каждый узел имеет только крутильное отклонение. Кроме того, математические модели (матрицы массы, жёсткости и демпфирования) взаимно изолированных подсистем будут представлены в их локальных конфигурационных пространствах.

Обобщённые координаты подсистем

Таблица 1.

Подсистем	Количество степеней свободы	Порядок обобщенных координат	Обобщённые координаты
Ротор двигателя (RM)	108	1-108	$u_1, v_1, w_1, \varphi_1, \vartheta_1, \psi_1, \dots, u_{18}, v_{18}, w_{18}, \varphi_{18}, \vartheta_{18}, \psi_{18}$
Зубчатое колесо (K)	1	109	φ_{19}
Моторный статор (S)	6	110-115	$u_{20}, v_{20}, w_{20}, \varphi_{20}, \vartheta_{20}, \psi_{20}$
Полый вал (H)	5	116-120	$\varphi_{21}, \dots, \varphi_{25}$
Колёсная пара (D)	7	121-127	$\varphi_{26}, \dots, \varphi_{32}$

Составляем математическую модель отдельного привода в невозбуждённом состоянии в обобщённых координатах, выражающих отклонения привода от положения статического равновесия, определяемого движением транспортного средства по прямой, геометрически идеальной трассе. Консервативная модель полного привода не учитывает демпфирование, адгезионные силы при контакте колёс с рельсами или возбуждение. Поэтому он имеет форму, полученную из моделей взаимно изолированных подсистем и матриц связи жесткости между подсистемами, и может быть описан в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{RM,S} + \mathbf{K}_{P,K} + \mathbf{K}_{S,RP} + \mathbf{K}_{LS} + \mathbf{K}_{ZS})\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ имеют блочную диагональ и имеют следующую структуру

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_{RM}, I_{0k}, \mathbf{M}_S, \mathbf{M}_H, \mathbf{M}_D), \quad \mathbf{K} = \text{diag}(\mathbf{K}_{RM}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{K}_H, \mathbf{K}_D), \quad (2)$$

Порядок матриц подсистем (2) следует из таблицы 1.

Где матрицы $\mathbf{K}_{RM,S}, \mathbf{K}_{P,K}, \mathbf{K}_{S,RP}, \mathbf{K}_{LS}, \mathbf{K}_{ZS}$ соединительные матрицы между субсистемами. Здесь получена матрицы (2) и связывающие всех элементов, рассмотренных в [7,8] и [2], которая представлены в сжатом виде с локализацией в глобальном конфигурационном пространстве измерения $R^{127,127}$.

После дополнения консервативной модели 1) рассмотренными эффектами сил сцепления при контакте колеса с рельсами и линеаризованными характеристиками крутящего момента двигателя, выраженными направлением касательной b_E [Nm/s], и после добавления пропорционального демпфирования континуумов и соединений получаем сложную математическую модель (без возбуждения) в форме:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}_{sum}(s_0, v)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_{sum}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

где матрицы общей жёсткости и демпфирования

$$\mathbf{K}_{sum} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{RM,S} + \mathbf{K}_{P,K} + \mathbf{K}_{S,RP} + \mathbf{K}_{LS} + \mathbf{K}_{ZS}, \quad \mathbf{B}_{sum}(s_0, v) = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{RM,S} + \mathbf{B}_{P,K} + \mathbf{B}_{S,RP} + \mathbf{B}_{LS} + \mathbf{B}_{ZS} + \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_{ad}(s_0, v), \quad (4)$$

Демпфирование в непрерывности ротора двигателя (RM), полого вала (H) и колесной пары (D) выражается пропорционально соответствующим матрицам жёсткости в виде:

$$\mathbf{B}_{RM} = \beta_{RM}\mathbf{K}_{RM}, \mathbf{B}_H = \beta_H\mathbf{K}_H, \mathbf{B}_D = \beta_D\mathbf{K}_D, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{B}_{RM}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{B}_H, \mathbf{B}_D), \quad \mathbf{B}_M = \frac{1}{5} \text{diag}(\cdot, b_E, \dots, b_E, \dots, b_E, \dots, b_E, \cdot), \quad (5)$$

где β_{RM}, β_H и β_D - коэффициенты пропорционального демпфирования.

Демпфирование связей между подсистемами может быть выражено матрицами той же структуры, что и соответствующие матрицы жёсткости, если мы заменим параметры жёсткости демпфированием.

Эффект вращательного демпфирования многодискового сцепления (LS) незначителен из-за низкой жёсткости. Следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{RM,S} &= \beta_{RM,S} \mathbf{K}_{RM,S}, & \mathbf{B}_{P,K} &= \beta_{P,K} \mathbf{K}_{P,K}, & \mathbf{B}_{S,RP} &= \beta_{S,RP} \mathbf{K}_{S,RP}, \\ \mathbf{B}_{LS} &= \beta_{LS} \mathbf{K}_{LS}, & \mathbf{B}_{ZS} &= \beta_{ZS} \mathbf{K}_{ZS}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta_{RM,S}, \beta_{P,K}, \beta_{S,RP}, \beta_{LS}$ и β_{ZS} являются коэффициентами пропорционального демпфирования.

В модели (3) введены блочно-диагональные матрицы эффектов адгезии.

$$\mathbf{B}_{ad}(s_0, v) = \text{diag}[\dots, \mathbf{B}_{ad}, \dots, \mathbf{B}_{ad}, \dots], \quad (7)$$

Матрица $\mathbf{B}_{ad}$ была получена в [1].

Боковой зазор в зубчатых передачах представляет собой наименьшее расстояние между профильными поверхностями двух соседних зубчатых колёс, которое позволяет одному колесу свободно поворачиваться, в то время как другое остаётся неподвижным. Этот зазор измеряется в сечении, перпендикулярном направлению зубьев, в плоскости, касательной к основным цилиндрам. Поэтому вектор внутреннего возбуждения в зацеплении записываем в виде:

$$\mathbf{f}_G(t) = \sum_{z=1}^Z (k_z \Delta_z(t) + b_z \dot{\Delta}_z(t)) \mathbf{c}_z. \quad (8)$$

где $\mathbf{c}_z$ - глобальный вектор геометрических параметров зубчатой передачи, коэффициенты k_z и b_z - средняя жёсткость и демпфирование зубьев в зацеплении. Кинематическое отклонение зубчатой передачи $\Delta_z(t)$ в зубчатом зацеплении z является периодической функцией времени и поэтому может быть аппроксимировано рядом Фурье с K членами гармоническим составляющим в виде:

$$\Delta_z(t) = \sum_{k=1}^K (\Delta_{z,k}^C \cos(k\omega_z t) + \Delta_{z,k}^S \sin(k\omega_z t)). \quad (9)$$

Каждая гармоническая составляющая с частотой $k\omega_z$ соответствует паре коэффициентов Фурье $\Delta_{z,k}^C$ и $\Delta_{z,k}^S$. В основном при зацеплении зубов z кинематическое отклонение зубчатой передачи аппроксимируется тремя гармоническими составляющими ряда Фурье. В приводе колёсной пары имеется только одно зубчатое зацепление $z = 1$, и в зависимости от геометрических размеров зубчатых колёс мы учитываем амплитуды точности изготовления:

$$\Delta_{1,1}^C = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad \Delta_{1,2}^C = \frac{\Delta_{1,1}^C}{2}, \quad \Delta_{1,3}^C = \frac{\Delta_{1,1}^C}{3}, \quad \Delta_{1,1}^S = \Delta_{1,2}^S = \Delta_{1,3}^S = 0.$$

Частота зубьев ω_z может быть выражена от углового скорости ω_0 или оборота n .

$$\omega_z = p_z \omega_0 = \frac{\pi n}{30} p_z, \quad (10)$$

где

$$p_z = \frac{z_p \omega_{pz}}{\omega_0} = \frac{z_k \omega_{kz}}{\omega_0} \quad (11)$$

Если мы расширим функцию, определяющую кинематическое отклонение, в комплексную форму так, что $\Delta_z(t) = \text{Re}\{\tilde{\Delta}_z(t)\}$, мы получим:

$$\tilde{\Delta}_z(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\Delta}_{z,k} e^{ik\omega_z t}, \text{ где } \tilde{\Delta}_{z,k} = \Delta_{z,k}^C - i \Delta_{z,k}^S. \quad (12)$$

Математические модели (3) для установившегося режима колебаний будут описываться следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}_{sum}(s_0, v)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_{sum}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_G(t) + \mathbf{f}_E(t) \quad (13)$$

Устойчивый отклик системы с несколькими зацеплениями зубьев также будет иметь комплексную форму:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \sum_{z=1}^Z \sum_{k=1}^K \tilde{\mathbf{q}}_{z,k} e^{ik\omega_z t}. \quad (14)$$

Если теперь подставить в линеаризованную модель (13) предыдущее соотношение, преобразованное в комплексную форму и учитывающее только внутреннее возбуждение, то для

каждого зацепления зубьев и каждой гармонической составляющей колебаний получим комплексные амплитуды

$$\tilde{q}_{z,k} = [-Mk^2\omega_z^2 + B_{sum}(s_0, v)ik\omega_z + K_{sum}]^{-1}c_z(k_z + ik\omega_z b_z)\tilde{\Delta}_{z,k} \quad (15)$$

В зависимости от исходной скорости, мы можем выразить неизвестные комплексные амплитуды установившегося отклика системы:

$$\tilde{q}_{z,k}(n) = Z_{z,k}^{-1}(n)f_{z,k}(n), \quad (16)$$

в результате чего матрица динамической жесткости имеет форму:

$$Z_{z,k} = [-Mk^2\omega_z^2 + B_{sum}(s_0, v)ik\omega_z + K_{sum}], \quad (17)$$

а комплексная амплитуда преобразованного вектора внутреннего возбуждения обозначается в виде:

$$f_{z,k}(n) = c_z(k_z + ik\omega_z b_z)\tilde{\Delta}_{z,k} \quad (18)$$

действительный вектор колебательных составляющих прогибов равен:

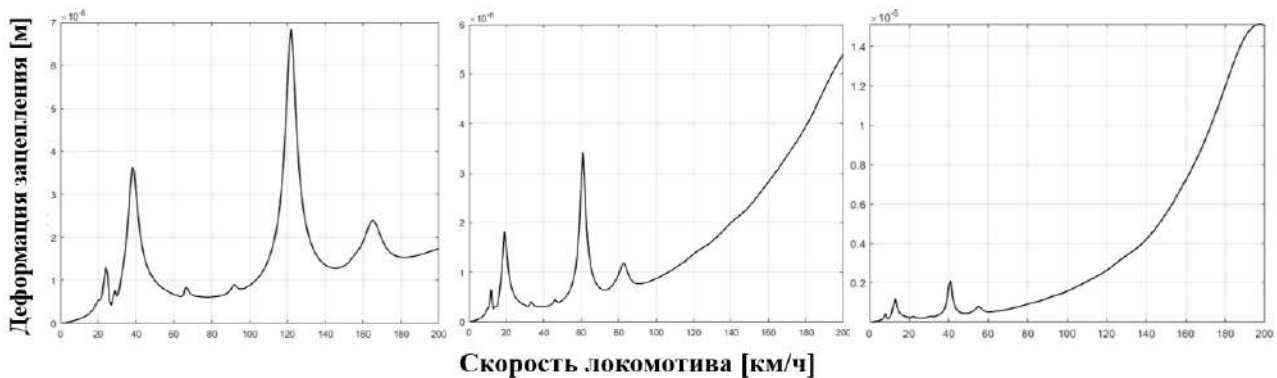
$$q(t) = Re\{\tilde{q}(t)\} = \sum_{z=1}^Z \sum_{k=1}^K (Re\{\tilde{q}_{z,k}\} \cos(k\omega_z t) - Im\{\tilde{q}_{z,k}\} \sin(k\omega_z t)). \quad (19)$$

При этом целесообразно ввести также верхнюю эффективную оценку установившейся амплитуды i -й обобщённые координаты в виде:

$$\bar{q}_i(n) = \sqrt{\sum_{z=1}^Z \sum_{k=1}^K |\tilde{q}_{i,z,k}|^2}. \quad (20)$$

В (20) на правой стороны отображаются квадраты абсолютных значений комплексных амплитуд выбранной i -й обобщённой координаты, которые являются откликом на отдельные гармонические составляющие внутреннего возбуждения во всех зубчатых зацеплениях.

Результаты и обсуждение. На рисунках 2-3 приведено полученное сравнение абсолютных значений различных гармонических составляющих комплексных амплитуд деформации зубчатой передачи (деформация зубчатого зацепления в нормальном направлении) $d_{1,1,k}$ и верхней эффективной оценки $\bar{d}_1(n)$ постоянной амплитуды зубчатой передачи в зависимости от скорости локомотива.



а) Первый

б) Второй

в) Третий

Рисунок 2. Амплитуды деформации зацепления привода локомотива с вызванные 1-3 гармонической составляющей кинематические отклонения в зацеплении.

На рисунке 2 показаны резонансные пики 1-й, 2-й и 3-й гармонической составляющей кинематического отклонения в зацеплении. Эти резонансные пики зависят от скорости локомотива и указывают на амплитуду деформации зацепления на каждом резонансном пике.

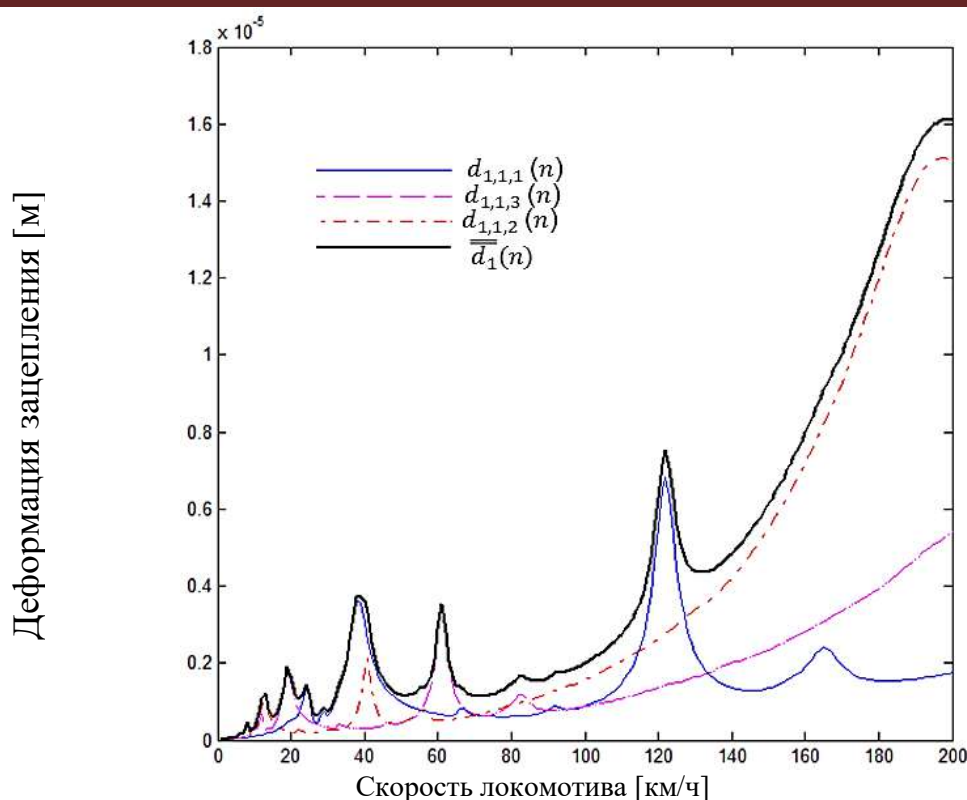


Рисунок 3. Деформации зубчатой передачи $d_{1,1,k}$ и верхней эффективной оценки $\overline{d}_1(n)$ постоянной амплитуды зубчатой передачи в зависимости от скорости локомотива

В общем случае амплитуда деформации множественных зацеплений зуба в зацеплении i зуба, вызванная k -й гармонической составляющей кинематического отклонения в зацеплении j зуба, обычно обозначается как $d_{i,j,k}$. Поэтому на рисунке 3 амплитуды деформации привода локомотива с одним зацеплением зубьев обозначены через $d_{1,1,k}$.

На рисунке 3 показаны деформации зубчатой передачи $d_{1,1,k}$ и верхней эффективной оценки $\overline{d}_1(n)$ постоянной амплитуды зубчатой передачи в зависимости от скорости локомотива при скольжении (крип) $s = 0,003$. С помощью данной зависимости можно определить резонанс s -й гармонической составляющей кинематического отклонения передачи с собственной частотой. Например, 1-й гармонической составляющей кинематического отклонения передачи с 9 и 16 собственной частотой.

$$f_i = k * \omega_z = \frac{k * v \left[\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right]}{2 * \pi * 3,6 * r_d} = f_{i,z}, \text{ для } v = 37 \left[\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right], f_9 = 191.4 \text{ Гц}, f_{1,z} = 191 \text{ Гц},$$

$$\text{для } v = 125 \left[\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right], f_{16} = 644.2 \text{ Гц}, f_{1,z} = 644.76 \text{ Гц},$$

Закключение.

1. Разработана математическая модель установившегося отклика на внутреннее кинематическое возбуждение при ошибке зацепления для оценки деформации зацеплении зубчатой передачи привода локомотива.
2. Получена матрица динамической жёсткости для оценки комплексные амплитуды установившегося отклика системы.
3. Построена зависимость комплексной амплитуды зацепления зубчатой передачи от скорости локомотива.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ahmedov O, Mirsaidov M. Dynamic characteristics of wheelsets with a rail considering viscoelastic properties of the material. *Materials Physics and Mechanics*. 2023; 51(2): 36-49. DOI: 10.18149/MPM.5122023_4.

2. Ahmedov O, Zeman V, Byrtus M. Modelling of vibration and modal properties of electric locomotive drive, // *Engineering mechanics*, Vol. 19, 2012, No. 2/3, p. 165–176.
3. Trimpe F.; Lück, S.; Naumann, R.; Salander, C. *Simulation of Torsional Vibration of Driven Railway Wheelsets Respecting the Drive Control Response on the Vibration Excitation in the Wheel-Rail Contact Point*. // *Vibration* 2021, 4, 30–48. <https://doi.org/10.3390/vibration4010003>
4. Андриевский А. Г., Москвичев В. В., Е. А. Чабан. Расчетно-экспериментальное определение динамических характеристик кожуха тяговой зубчатой передачи электровоза. // *Известия Транссиба*.–2020.–№ 3 (43).–С. 47 – 57.
5. Файзибаев Ш.С. [и др.] Моделирование крутильных колебаний колесно-моторного блока тепловоза uzte16m, // *Universum: технические науки: электрон. научн. журн.* 2022. 4(97). URL: <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/13387>.
6. Abouzeid, A.F. ; Trimpe, F.; Lück, S.; Traupe, M.; Guerrero, J.M.; Briz, F. Co-Simulation-Based Verification of Torsional Vibration Protection of Electric-Driven Railway Vehicle Wheelsets. // *Vibration* 2022, 5, 613–627. <https://doi.org/10.3390/vibration5030036>
7. Ahmedov Olimjon, Mirsaidov Mirziyod. Finite element of rotating wheelset and its natural frequencies determination // *Materials Physics and Mechanics*. 2021, V. 47. N. 5. P. 706-719. DOI: 10.18149/MPM.4752021_5.
8. Hajzman. M, Byrtus. M, Zeman V. (2010) Development of the Basic Dynamical Model of a Squirrel Cage Motor. // *Engineering Mechanics*, Vol.17, No.3/4, p.225-235

ANIQ INTEGRALLARNI CHEGIRMALAR YORDAMIDA HISOBLASH

Tuychiyeva Sayyora Taxirovna,

Toshkent davlat transport universiteti,

fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD),

O'zbekiston, Toshkent

sayyora-tohirzoda@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada chegirmalar nazariyasining asosiy tushunchalari va ularni aniq integrallarni, shu xususan, xosmas integrallarning ayrim turlarini hisoblashda qo'llanilishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: maxsus nuqta, yakkalangan maxsus nuqta, bartaraf qilinadigan maxsus nuqta, qutb nuqtasi, funksiyaning chegirmasi, aniq integral, xosmas integral, yopiq kontur, Jordan lemmasi.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Аннотация. В данной статье показаны основные понятия теории вычетов и их применение при вычислении определённых интегралов, в частности, некоторых видов несобственных интегралов.

Ключевые слова: особая точка, изолированная особая точка, устранимая, полюс, вычет функции, определённый интеграл, несобственный интеграл, замкнутый контур, лемма Жордана.

CALCULATING CERTAIN INTEGRALS USING DEDUCTIONS

Abstract. This article shows the basic concepts of the theory of deductions and their application in the calculation of certain integrals, in particular, some types of improper integrals.

Keywords: singular point, isolated singular point, disposable, pole, function deduction, definite integral, improper integral, closed contour, Jordan's lemma.

Kirish. Fizika va matematikaga oid ko'plab masalalarni yechish integrallarni hisoblashni o'z ichiga oladi. Aksariyat hollarda bunday masalalarni yechishda chegirmalar haqidagi asosiy teoremlardan, har xil turdagi integral ifodalarni hisoblash uchun foydalaniladi. Amaliyotda yopiq kontur bo'yicha olingan integrallarni hisoblashda Koshi teoremasidan, xosmas integrallarni hisoblashda esa Jordan lemmalaridan foydalanish qulaydir.

Tadqiqot obyekti va qo'llanilgan metodlar. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $\{0 < |z - a| < \delta\}$ da golomorf bo'lib, a nuqta bu funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

1-Ta'rif [1-4, 7]. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz \quad (0 < \rho < \delta)$$

integral $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi chegirmasi deyiladi va $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz.$$

Ravshanki, $f(z)$ funksiya a nuqtada golomorf bo'lsa, $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\{r < |z| < \infty\}$ da golomorf bo'lsin.

2-Ta'rif [1-4, 7]. Ushbu

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z)dz \quad (\rho > r)$$

integral $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasi deyiladi va $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} f(z) dz.$$

Endi funksiya chegirmalarini hisoblashda foydalanadigan formulalarni keltiramiz [1-4].

1) Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *birinchi tartibli qutb nuqtasi* bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z) \quad (1)$$

bo'ladi.

2) Agar $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ uchun $\phi(z)$ va $\psi(z)$ funksiyalar a nuqtaga golomorf bo'lib,

$\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)} \quad (2)$$

bo'ladi.

3) Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning *n-tartibli qutb nuqtasi* bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}} \quad (3)$$

bo'ladi.

4) Agar $z = \infty$ nuqtada $f(z)$ funksiya golomorf bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] \quad (4)$$

bo'ladi.

5) Agar $f(z) = \phi\left(\frac{1}{z}\right)$ bo'lib, $\phi(z)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\phi'(0) \quad (5)$$

bo'ladi.

1. Integrallarni chegirmalar yordamida hisoblash.

Chegirmalar yordamida turli integrallarni hisoblash mumkin. Bunda quyidagi teorema muhim rol o'ynaydi.

Teorema (Koshi teoremasi) [1-4]. *Faraz qilaylik,*

1) $f(z)$ funksiya $D \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sohada golomorf ($D \subset C, a_1, a_2, \dots, a_n \in D$),

2) $f(z)$ funksiya sohaning chegarasigacha aniqlangan va $\overline{D} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ da uzluksiz,

3) ∂D - to'g'riylanuvchi yopiq kontur bo'lsin. U holda

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \quad (6)$$

formula o'rinlidir.

Izoh. (6)-formula $\infty \in D$ bo'lgan hol uchun ham o'rinlidir. Faqat bu holda $z = \infty$ ni $f(z)$ uchun maxsus nuqta deb hisoblash hamda ∂D chiziq orientatsiyasini soat strelkasi yo'nalishida olish kifoyadir.

Yuqorida keltirilgan Koshi teoremasidan amaliyotda yopiq kontur bo'yicha olingan integrallarni hisoblashda foydalaniladi.

2. Aniq integrallarni chegirmalar yordamida hisoblash.

Aniq integrallarni ham chegirmalar yordamida hisoblash mumkin. Bunda aniq integral kompleks

o'zgaruvchili funksiyaning kontur bo'yicha olingan integraliga keltirilib hisoblanadi.

a) $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Ushbu

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx \quad (7)$$

integral berilgan bo'lib, uni hisoblash talab etilsin, bunda $R(\cos x, \sin x) - \cos x$ va $\sin x$ larning ratsional funksiyasi va u $[0, 2\pi]$ da uzluksiz.

Eyler formulasiga ko'ra

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

bo'lishini e'tiborga olib, so'ng

$$z = e^{ix}$$

deb belgilash kiritsak, unda

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dx = \frac{1}{iz} dz$$

bo'lib, berilgan (7)-integral quyidagicha

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz$$

bo'ladi, bunda

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Hosil bo'lgan integral (6)-formula yordamida hisoblanadi.

b) Xosmas integrallarni hisoblash.

Chegirmalar nazariyasidan foydalanib xosmas integrallarni ham hisoblash mumkin. Bu quyidagi teorema asoslangan.

Teorema [1-4]. $f(z)$ funksiya $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ sohaning chekli sondagi maxsus nuqtalaridan tashqari barcha nuqtalarida golomorf bo'lib, uning chegarasida uzluksiz bo'lsin. Agar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad (\gamma_r = \{z : |z| = r, 0 \leq \arg z \leq \pi\}) \quad (8)$$

bo'lsa, u holda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} f(z) \quad (9)$$

bo'ladi.

Bu teoremadagi (8)-shartning bajarilishini ko'rsatishda quyidagi lemmalardan foydalaniladi.

1-Lemma (Jordan lemmasi) [1-4]. Agar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \max_{z \in \gamma_r} |f(z)| = 0 \quad (10)$$

bo'lsa,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0 \quad (11)$$

bo'ladi.

2-Lemma (Jordan lemmasi) [1-4]. Agar

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{z \in \gamma_r} |f(z)| = 0 \quad (12)$$

bo'lsa, u holda $\forall \lambda > 0$ uchun

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (13)$$

bo'ladi.

Endi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} R(x) dx$$

ko'rinishdagi xosmas integrallarni qaraylik.

Agar $\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{z \in \gamma_r} |R(z)| = 0$ bo'lsa, u holda bu integralga Jordanning 2-lemmasini va yuqoridagi teoremani qo'llash natijasida quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x dx = -2\pi \cdot \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}[e^{i\lambda z} \cdot R(z)] \right\}, \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}[e^{i\lambda z} \cdot R(z)] \right\}, \quad (15)$$

Natijalar va ularning tahlili

Endi chegirmalarni va ular yordamida integrallarni hisoblash masalalarini ko'rib chiqamiz [5-8].

1. $f(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}$ funksiya chegirmasini hisoblang.

◁ Funksiyaning $z=1$ maxsus nuqtasi 3-tartibli qutb nuqtasi bo'lganligi uchun, (3) – formulaga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\cos 2z}{(z-1)^3} (z-1)^3 \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (\cos 2z)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (-2 \sin 2z)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} (-4 \cos 2z) = -2 \cos 2. \quad \triangleright \end{aligned}$$

2. Quyidagi $\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$

integralni chegirmalar yordamida hisoblang.

◁ Integral ostidagi funksiya $|z| < 4$ sohaning $z_0 = 0$ va $z_1 = -1$ nuqtalaridan tashqari barcha qismida analitik hisoblanadi. U holda, chegirmalar haqidagi teoreмага ko'ra quyidagilarni yozamiz:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz &= 2\pi i \cdot (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res}(-1)). \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1}{z(z+1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)}{z(z+1)} = 1 \end{aligned}$$

bo'lganligi uchun $z_0 = 0$ nuqta bartaraf etiladigan maxsus nuqta bo'ladi. Shuning uchun $\operatorname{res} f(0) = 0$.

$z_1 = -1$ nuqta 1-tartibli qutb bo'lganligi uchun chegirmani (2)-formula yordamida hisoblaymiz:

$$\operatorname{res} f(-1) = \left. \frac{e^z - 1}{(z^2 + z)'} \right|_{z=-1} = \left. \frac{e^z - 1}{2z + 1} \right|_{z=-1} = 1 - e^{-1}.$$

Demak,

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1}). \quad \triangleright$$

3. Quyidagi

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{2 - \sin^2 x} dx$$

aniq integralni chegirmalar yordamida hisoblang.

◁ Bu integralda $e^{2ix} = z$ almashtirishni bajarsak, $x \in [0, \pi] \Rightarrow z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

$$dx = \frac{1}{2iz} dz,$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{2},$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{2}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{2 - \sin^2 x} &= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{2 - \frac{1 - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \cdot \frac{(z+1)^2}{z^2 + 6z + 1} dz \end{aligned}$$

tenglik o'rinlidir.

Integral ostidagi

$$f(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2 + 6z + 1)} = \frac{(z+1)^2}{z \cdot [z - (-3 + 2\sqrt{2})] \cdot [z - (-3 - 2\sqrt{2})]}$$

funksiyaning $z_0 = 0$, $z_1 = -3 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = -3 - 2\sqrt{2}$ maxsus nuqtalari bo'lib, ulardan $z_0 = 0$ va $z_1 = -3 + 2\sqrt{2}$ lar $\{|z| < 1\}$ sohaga tegishli bo'lgan qutb nuqtalaridir.

Koshi teoremasini ((6)-formulani) qo'llab, topamiz:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} f(z) dz &= 2\pi i [\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=z_1} f(z)] = 2\pi i \left[\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{(z_1 + 1)^2}{z_1 - z_2} \right] = \\ &= 2\pi i \left[1 + \frac{1}{-3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{(-3 + 2\sqrt{2} + 1)^2}{4\sqrt{2}} \right] = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{2 - \sin^2 x} dx = \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad \triangleright$$

4. Quyidagi chegarasi cheksiz bo'lgan

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

integralni chegirmalar yordamida hisoblang.

◁ Avvalo berilgan integralni

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Endi

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^n} = \frac{1}{(z + i)^n \cdot (z - i)^n}$$

desak, bu funksiya

$$\{z \in C : \text{Im } z > 0\} \text{ da } z = i$$

maxsus nuqtaga, n -tartibli qutbga ega.

Ravshanki,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot \max_{\gamma_r} f(z) = 0 \quad (\gamma_r = \{z : |z| = r, 0 \leq \arg z \leq \pi\}) \Rightarrow$$

Jordanning 1-lemmasiga ko'ra $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$ bo'ladi. Unda 2-punktdagi teorema ko'ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} f(z)$$

bo'ladi.

(3)-formuladan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-i)^n \cdot f(z)] = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n} \right] = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Natijada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \pi$$

bo'lib, berilgan integral uchun

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

bo'lishini topamiz. $\triangleright$

5. Quyidagi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

integralni Jordan lemmalaridan foydalanib hisoblang.

$\triangleleft$ Bu masalani yechish uchun Jordanning 2-lemmasi va (15)-formuladan foydalanamiz. $f(z)$ funksiya deb

$$f(z) = \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2} = \frac{(z+1) \cdot e^{2iz}}{[z - (-1+i)] \cdot [z - (-1-i)]}$$

funksiyani olamiz. Bu funksiyaning ikkita $z_1 = -1+i$ va $z_2 = -1-i$ qutb nuqtalari bo'lib, ulardan $z_1 = -1+i \in \{\text{Im } z > 0\}$ bo'ladi.

$R(z) = \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2}$ funksiya uchun $z \rightarrow \infty$ da $R(z) \cong \frac{1}{z}$ bo'lganidan Jordanning 2-lemmasi shartining bajarilishi ta'minlanadi va lemmaga ko'ra

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} R(z) e^{2iz} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

tenglik bajariladi, bunda $\gamma_r = \{z : |z| = r, 0 < \arg z < \pi\}$.

Unda (15)-formulaga ko'ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re}[\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)]$$

bo'ladi. (1)-formuladan foydalanib $\operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$ ni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[(z - z_1) \cdot \frac{(z+1)e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)} \right] = \\ &= \frac{(z_1+1)e^{2iz_1}}{(z_1-z_2)} = \frac{ie^{-2-2i}}{2i} = \frac{e^{-2}}{2} (\cos 2 - i \sin 2). \end{aligned}$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx = 2\pi \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2}}{2} (\cos 2 - i \sin 2) \right] = \pi e^{-2} \cos 2. \triangleright$$

Xulosa. Yuqoridagilardan shuni xulosa qilish mumkinki, integrallarni hisoblashda chegirmalar nazariyasi muhim ahamiyatga ega bo'lib, integrallar mavzusini o'qitishda imkon qadar undan foydalanish bir qancha qulayliklar yaratib, mavzuni o'zlashtirishda samarali natija beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-е изд., ч.1.-М., "Наука", 1976 (1985). – 566 с.
2. Худойбергганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ. (маърузалар). – Т., "Университет", 1998. – 198 б.
3. Садуллаев А., Худойбергганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ). – Т., "Ўзбекистон", 2000. – 398 б.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексной переменной. –М., Лань, 2002. – 688 с.
5. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций, изд. 2. –М., "Наука" 1972. – 415 с.
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 4-е изд. – М. "ФИЗМАТЛИТ", 2002. – 312 с.
7. Бакулина М.П. Вычеты и их применения к вычислению интегралов: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. 36 с.
8. Ильинкова Н.И., Кононова О.А., Филиппова Н. К. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов. Учеб.-метод. пособие – Минск: БГУ, 2012.

AYRIM FUNKSIONAL TENGLAMALARNI YECHISH METODIKASI HAQIDA

Normurodov Sherzod Boymurodovich,
Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti magistranti
Normurodov_sherzod87@mail.ru

Annotatsiya. Hozirda jahonda olib borilayotgan ko‘plab amaliy ishlar aksariyat hollarda bir o‘zgaruvchili va ko‘p o‘zgaruvchili funksional tenglamalarni yechishga olib kelinadi. Demak, agar biz funksional tenglamalarning yechimini topish uchun ko‘plab qulay usullarni aniqlasak qo‘yilgan masalani hal qilish osonlashadi. Funksional tenglamalarni yechishning o‘rniga qo‘yish usuli, o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, aniqlanmagan koeffitsiyentlar usuli, qiymatlarni o‘zgaruvchilar bilan almashtirish usuli, matematik induksiya usuli, rekkurent munosabatlar hosil qilish usuli, funksiyani almashtirish shu kabi boshqa usullar mavjud bo‘lib, biz ushbu maqolada yuqoridagi usullardan ba‘zilarini keltirib o‘tamiz. Shu o‘rinda aytish mumkinki, nostandart funksional tenglamalarni yechishning umumiy yo‘li topilmagan. Ushbu ishdan funksional tenglamalarni yechishda akademik litseylar, kasb-hunar maktabi va shu jumladan, oliy o‘quv yurtlari talabalari ham qo‘shimcha manba sifatida foydalanishlari mumkin.

Kalit so‘zlar: funksional tenglama, o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, Koshi tenglamasi, nostandart, matematik induksiya.

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абстракт. В настоящее время многие практические работы, проводимые в мире, в большинстве случаев приводят к решению функциональных уравнений с одним и многими переменными. Итак, если мы определим множество удобных методов поиска решения функциональных уравнений, задачу будет легче решить. Существуют и другие методы решения функциональных уравнений: метод замены, метод замены переменных, метод неопределённых коэффициентов, метод замены значений переменных, метод математической индукции, метод формирования рекуррентных соотношений, подстановка функций и т.д. Некоторые из вышеперечисленных методов мы упомянем ниже в данной статье. Здесь можно сказать, что общего пути решения нестандартных функциональных уравнений не найдено. Учащиеся академических лицеев, профессиональных училищ, в том числе семейных образовательных учреждений могут использовать данную работу как дополнительный ресурс для решения функциональных уравнений.

Ключевые слова: функциональное уравнение, метод замены переменных, уравнение Коши, нестандартность, математическая индукция.

ON METHODS OF SOLVING SOME FUNCTIONAL EQUATIONS

Abstract. Currently, many practical works carried out in the world in most cases lead to solving functional equations with one and many variables. So, if we define many convenient methods for finding a solution to functional equations, the problem will be easier to solve. There are also other methods for solving functional equations: the replacement method, the variable replacement method, the method of undetermined coefficients, the method of replacing variable values, the method of mathematical induction, the method of forming recurrence relations, substitution of functions, etc. We will mention some of the above methods below. In this article, here we can say that a general way to solve non-standard functional equations has not been found. Students of academic lyceums, vocational schools, including family educational institutions can use this work as an additional resource for solving functional equations.

Keywords: functional equation, variable replacement method, Cauchy equation, non-standard, mathematical induction.

Kirish va muammo bayoni. Matematikada ba‘zi masalalarni yechish, ba‘zi funksiyalarning xossalari o‘rganishda funksional tenglamalarga duch kelamiz. Shu sababdan funksional tenglamalarni yechish usullari va ularning yechimlarini o‘rganish muhim amaliy ahamiyatga ega. Funksional analiz hozirgi

zamon matematikasining muhim sohalaridan biridir. Funktsional analizning asosiy vazifalariga funktsional fazolarni bir necha o'zaro uzviy bog'langan turli matematik strukturalar, masalan, algebraik amallar, metrika, norma, skalyar ko'paytma, qisman tartib kiritilgan holda o'rganishdir.

Funktsional tenglamalar bugungi kunda o'zbek matematik olimlari tomonidan katta qiziqish bilan o'rganilayotgan matematikaning bo'limlaridan biri hisoblaniladi.

Aqliy hujum metodlar haqida tushuncha. [6] "Aqliy hujum"- g'oyalarni generatsiya qilish usuli. Qatnashchilar birlashgan holda qiyin muammoni yechishga harakat qiladilar: uni yechish uchun shaxsiy g'oyalarni ilgari suradilar (generatsiya kiradi). U ishtirokchilarni o'z tasavvurlari va ijodlaridan foydalanishga rag'batlantiradi. "Aqliy hujum"ning vazifasi kichik guruhlar yordamida yangi- yangi g'oyalarni yaratishdir. Bu usul muammoni hal qilayotgan kishilarning ko'proq aql bovar qilmaydigan va hatto, fantastik g'oyalarni yaratishga undaydi. G'oyalar qancha ko'p bo'lsa. Ularning hech bo'lmaganda bittasi ayni muddao bo'lishi mumkin.

"Aqliy hujum"ning qoidalar:

1. Fikr va g'oyalar hech qanday cheklanmagan holda iloji boricha qattiqroq aytilishi lozim;
2. Bildirilgan fikr va g'oyalar takliflar berish to'xtatilmaguncha muhokama qilinmaydi, baholanmaydi;
3. Bildirilgan har qanday g'oya va fikrlar hisobga olinadi;
4. Qancha ko'p g'oya va fikrlar bildirilsa shuncha yaxshi;
5. Bildirilgan g'oya va fikrlarni to'ldirish va yanada kengaytirish mumkin;
6. Barcha aytilgan takliflar yozib boriladi;
7. Takliflarni bildirish uchun vaqt aniq belgilanadi.

"Aqliy hujum" metodi. Ayrim mashhur funktsional tenglamalar. Quyida biz ba'zi bir "mashhur" funktsional tenglamalardan ayrinlarni keltrib o'tamiz:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ – bu funktsional tenglamaga Koshi tenglamasi deyiladi;

$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)]$ – bu funktsional tenglamaga kvadratik tenglama yoki parallelogramm qoidasi deyiladi;

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ – bu funktsional tenglamaga Yensen tenglamasi deyiladi;

$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x)$ – bu funktsional tenglamaga Lobachevskiy tenglamasi deyiladi;

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ – bu funktsional tenglamaga Dalamber tenglamasi deyiladi.

Teorema (Koshi tenglamasi). Agar f uzluksiz funksiya barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ni qanoatlantirsa, u holda $f(x) = cx$, bu yerda c – o'zgarmas son.

Xulosa. Agar f uzluksiz funksiya va barcha $x, y \in \mathbb{R}$ uchun,

- (i) $f(x+y) = f(x)f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = c^x$
- (ii) $f(xy) = f(x) + f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = c \ln x$
- (iii) $f(xy) = f(x)f(y)$ bo'lsa, u holda $f(x) = x^c$

bu yerda c – o'zgarmas son.

Misol. Agar $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz, barcha $1 < x, y \in \mathbb{R}$ uchun $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. Berilgan tenglama $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ ga ekvivalent. Agar $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ deb belgilab olsak, u holda:

$$g(x) = c \ln x \text{ va } f(x) = xg(x) = cx \ln x \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

Misol. Quyidagi funktsional tenglamani $f(x+a) = x^2 + 4x + 6$ yeching.

Yechish. Aytaylik, $t = x + 2$ bo'lsin, u holda $x = t - 2$, bundan

$$f(t) = (t-2)^2 + 4(t-2) + 6 = t^2 + 2.$$

Demak, $f(x) = x^2 + 2$ ga teng ekan.

Misol. Agar $3f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x$ bo'lsa, u holda $f(x)$ ni aniqlang?

Yechish. Quyidagicha belgilash kiritib olamiz $t = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{t}$. Natijada

$$3f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{4}{t}.$$

Demak,

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{4}{x}. \quad (1)$$

Berilganidan $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ni topib olib (1) ga keltirib qo'ysak

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4x - 3f(x)}{2}.$$

$$3 \frac{4x - 3f(x)}{2} + 2f(x) = \frac{4}{x}$$

tenglamani ikkala qismini ham $2x$ ga ko'paytiramiz natijada

$$12x^2 - 9xf(x) + 4xf(x) = 8$$

$$12x^2 - 5xf(x) = 8$$

$$\text{Demak, } f(x) = \frac{12x^2 - 8}{5x} = \frac{12}{5}x - \frac{8}{5x}.$$

Misol. Agar $af(x-1) + bf(1-x) = cx$ bo'lsa, bu yerda $a, b, c - \text{const}$, $f(x)$ ni ko'rinishini aniqlang?.

Yechish. Belgilash kiritib olamiz $x - 1 = t$ deb

$$af(t) + bf(-t) = c(1+t)$$

$$af(x) + bf(-x) = c(1+x) \quad (2)$$

Agar $-x = t$ deb belgilash olsak, natijada $x = -t$ $af(-t) + bf(t) = c(1-t)$,

$$af(-x) + bf(x) = c(1-x),$$

$$f(-x) = \frac{c(1-x) - bf(x)}{a}.$$

Bu tenglikni (2) ga qo'ysak natijada

$$af(x) + b \frac{c(1-x) - bf(x)}{a} = c(1+x).$$

Oxirgi tenglikni ikkala qismini a ga ko'paytirsak, natijada

$$a^2f(x) + bc(1-x) - b^2f(x) = ac(1+x)$$

$$f(x)(a^2 - b^2) = ac(1+x) + bc(1+x)$$

$$f(x)(a-b)(a+b) = (1+x)(b+ac)$$

$$f(x) = \frac{c(1+x)}{a-b}.$$

Misol. Quyidagi $xf(x) + 2xf(-x) = -1$ funksional tenglamani qanoatlantiruvchi $f(x)$ ni toping?

Yechish. Agar $t = -x$ deb olsak u holda $x = -t$ bo'ladi. Natijada

$$-tf(-t) - 2tf(t) = -1.$$

$$-xf(-x) - 2xf(x) = -1 \quad (3)$$

bo'ladi.

Tenglamani berilishidan $f(-x)$ ni topib, (3) ga qo'yamiz

$$2xf(-x) = -1 - xf(x),$$

$$f(-x) = \frac{-1 - xf(x)}{2x},$$

$$-x \frac{-1 - xf(x)}{2x} - 2xf(x) = -1, \text{ tenglamani ikkala qismini } 2 \text{ ga ko'paytiramiz}$$

$$1 + xf(x) - 4xf(x) = -2. \text{ Natijada } f(x) = \frac{1}{x} \text{ tenglik hosil bo'ladi.}$$

O'rniga qo'yish usuli. Bu usulning mohiyati quyidagicha. Berilgan tenglamada x (yoki y) ga turli almashtirishlarni qo'llab hamda hosil bo'lgan tenglamani dastlabki tenglama bilan taqqoslab, izlanayotgan funksiyaga nisbatan algebrik tenglama hosil qilinadi.

Misol. Quyidagi funksional tenglamani yeching:

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Yechish. Agar $z = \frac{x-2}{x+1}$ deb belgilab olsak, u holda $x = \frac{z+2}{1-z}$ ($z \neq 1, z \neq 0$). Natijada

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z} \quad (4)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Endi z ni $\frac{1}{z}$ ga almashtirib

$$f(z) + 2f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1+2z}{z-1} \quad (5)$$

Tenglikni hosil qilamiz. (4) va (5) tengliklardan $f(z)$ ni topamiz:

$$f(z) = \frac{4z+5}{3(1-z)},$$

ya'ni

$$f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}.$$

Misol. Tenglamani yeching:

$$2f(x+y) + f(x-y) = f(x)(2e^y + e^{-y}).$$

Yechish. Quyidagi:

$$x=0, y=t;$$

$$x=t, y=2t;$$

$$x=t, y=-2t$$

almashtirishlarni olib ushbu

$$2f(t) + f(-t) = f(0)(2e^t + e^{-t});$$

$$2f(3t) + f(-t) = f(t)(2e^{2t} + e^{-2t});$$

$$2f(-t) + f(3t) = f(t)(2e^{-2t} + e^{2t})$$

tenglamalarni hosil qilamiz, bunda $a = f(0)$.

Agar bu tenglamani $f(-t)$ va $f(3t)$ larga nisbatan yechamiz. Buning uchun birinchi tenglikni -3 ga ko'paytirib ikkinchi tenglikni qo'shib, hosil bo'lgan tenglikdan uchinchi tenglikning ikkilanganini ayiramiz. Natijada:

$$6f(t) = 3a(2e^t + e^{-t}) - 3f(t)e^{-2t},$$

ya'ni

$$f(t) = a \cdot \frac{2e^t + e^{-t}}{2 + e^{-2t}} = a \cdot e^t.$$

Bu tenglik dastlabki tenglamani qanoatlantirishini osongina tekshirish mumkin:

$$2ae^{x+y} + ae^{x-y} = a \cdot e^x (2e^y + e^{-y}).$$

Funksional tenglamalarni yechishning boshqa usullariga misollar.

Misol. Barcha $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ funksiyalarni toping, bunda

$$f(1) = 2 \text{ va } f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

Yechish. Bu matematik induksiya usulida yechish mumkin bo'lgan qadimiy masalalardan biridir. Agar berilgan tenglamada $x = 1$ va $y = n$ ni qo'ysak, $f(n+1) = f(n) + 1$ ga ega bo'lamiz va $f(1) = 2$ dan boshlab har bir n natural son uchun $f(n) = n + 1$ ga egamiz. Shunga o'xshash $x = 0$ va $y = n$ uchun $f(0)n = f(n) - 1 = n$, $f(0)$ ga ega bo'lamiz. Hozir maqsad har bir $z \in \mathbb{Z}$ uchun $f(z)$ ni topish shart. Berilgan tenglamaga $x = -1$ va $y = 1$ o'zgarish kiritsak, $f(-1) = 0$ bo'ladi. Bu holatda $x = -1$ va $y = n$.

$f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1$ ni beradi. Bundan har bir $z \in \mathbb{Z}$ uchun $f(z) = z + 1$. Hozir $f(\frac{1}{n})$ ni topishimiz kerak. $x = n$ va $y = \frac{1}{n}$ ni qo'ysak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(1) = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(n + \frac{1}{n}\right) + 1. \quad (6)$$

$x = 1$ va $y = m + 1$ dan foydalansak, $f\left(m + 1 + \frac{1}{n}\right) = f\left(m + \frac{1}{n}\right) + 1$ ga ega bo'lamiz. Bundan matematik induksiya metodini qo'llab $f\left(m + \frac{1}{n}\right) = m + f\left(\frac{1}{n}\right)$ ni topamiz. (6) ga ko'ra istalgan natural n son $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + 1$ bo'ladi. Bundan tashqari $x = m$ va $y = \frac{1}{n}$ uchun $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} + 1$ ga yoki $f(r) = r + 1$ ga ega bo'lamiz. Istalgan r — musbat ratsional son uchun $x = -1$ va $y = r$ holatda

$f(-r) = -f(r-1) + 1 = -r + 1$ bo'ladi. Xuddi shunday har bir $x \in \mathbb{Q}$ uchun $f(x) = x + 1$ kelib chiqadi.

Eslatma. $xy + 1 = (x+1)(y+1) - (x+y+1) + 1$ dan boshlab barcha $x, y \in \mathbb{Q}$ lar uchun tenglamani yechimi.

Misol. $g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$. Tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyalarni toping, bu yerda x va y haqiqiy sonlar.

Yechish. Berilgan funksiyaning $g(x) = 0$ va $g(x) = 2$ qiymatlarida tenglik o'rinli ekanligini ko'rish mumkin. Matematik induksiya metodidan foydalanib buni isbotlash oson, agar g funksiya bu ikki funksiya bilan birga teng bo'lmasa, u holda barcha x ning ratsional qiymatlarida $g(x) = x$ bo'ladi,

Xuddi shu kabi $g(r+x) = r + g(x)$ va $g(rx) = rg(x)$ oson ko'rish mumkin, bunda r —ratsional son va x —haqiqiy son. Ayniqsa ikkinchi tenglamadan $r = -1$ uchun $g(-x) = -g(x)$ ga ega bo'lamiz. Bundan holatda $y = -x$ ekanligidan $g(x)^2 = g(x^2)$ bo'ladi. Aytaylik, $g(x) < x$ deb faraz qilaylik. $g(x) < r < x$ bo'ladigan $x \in \mathbb{Q}$ ni tanlab olamiz. U holda

$$r > g(x) = g(x-r) + r \geq r,$$

qarama-qarshilikka duch kelamiz. Xuddi shunday $g(x) > x$ dan boshqa qarama-qarshilikka ega bo'lamiz. Shu tarzda har bir $x \in \mathbb{R}$ uchun $g(x) = x$ ga ega bo'lishimiz shart. Bu uchta funksiyalar berilgan funksional tenglamani qanoatlantiradi.

Misol. Ushbu

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (7)$$

tenglamani yeching.

Yechish. (7) tenglamadan $y = x, 2x, 3x, \dots$ deb olib, matematik induksiya bo'yicha quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} f(2x) = f^2(x) \\ f(3x) = f^3(x) \\ \dots \\ f(nx) = f^n(x). \end{cases} \quad (8)$$

Agar hosil bo'lgan tengliklarda $x = 1$ deb olinsa, u holda

$$f(n) = f^n(1)$$

tenglik hosil bo'ladi. Agar $f(1) = C_1$ desak, u holda barcha $x \in \mathbb{N}$ lar uchun $f(x) = C_1^x$ ni hosil qilamiz. Agar (8) tenglikda $x = \frac{m}{n}$ deb olinsa u holda

$$f(m) = f^n\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^m$$

hosil bo'ladi, bundan esa

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = C_2^{\frac{m}{n}}$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, $x \in \mathbb{Q}$ lar uchun berilgan tenglamani yechimi $f(x) = C^x$ ga teng bo'ladi. $f(\cdot)$ ni uzluksiz funksiya deb faraz qilib barcha $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ larda $f(x) = C^x$ ekanligini hosil qilamiz.

Agar (7) tenglikda $x = 0$ deb olinsa, u holda

$$f(y) = f(0) \cdot f(y)$$

tenglikni ya'ni $f(y) = 0$ yoki $f(0) = 1 = C^0$ hosil qilamiz.

Endi (7) tenglikda $y = -x$ deb olib,

$$f(0) = f(-x) \cdot f(x), \quad 1 = f(-x) \cdot f(x),$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{C^x} = C^{-x}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $f(x) = C^x$ berilgan tenglamani yechimi bo'ladi.

Xulosa. Ushbu maqolada funksional tenglamalarni yechishning bir nechta usullari qarab chiqildi. Bu ishdan umumiy o'rta ta'lim maktablari o'quvchilarini matematika fani bo'yicha fan olimpidalariga tayyorlashda foydalanish mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Смышляев В. К., Практикум по решению задач школьной математики // Выпуск V, Москва "Просвещение", 1978 г., стр.,36-39.
2. Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York, Birkhauser, 1966, pp. 98-102.
3. Aczel J., Dhombres J., Functional Equations Containing Several Variables. 1985, pp. 46-53.
4. Kuczma M., Choczewski B., Ger R., Iterative Functional Equations.
5. Notes on Functional Equations, by Mr. Kwok Ka Keung.
6. Jumayev M.E, Boshlang'ich sinflarda matematikadan laboratoriya mashg'ulotlarini tashkil etish metodikasi. Toshkent. "Yangi asr avlodi" 2006 yil. 256 b.
7. Sahoo P. K., Kannappan P., Introduction to Functional Equations.
8. Carlitz L., A special functional equation, Univ.Beograd, Publ.Electrotehn, Fak.Ser.Mat.Fiz, 1963 y.
9. Chaundy T. W. – McLeod J. B., On a functional equation, Quart.J.Math, Oxford, 1958, pp. 202-206.

PARAMETRLI CHIZIQLI TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASIGA
KELTIRILADIGAN INTEGRAL TENGLAMALAR

Husenova Jasmina To‘lqinovna,
Buxoro davlat universiteti tadqiqotchisi
j.t.husenova@buxdu.uz

*Maqolada keltirilgan tadqiqot ishi BuxDU Matematik analiz kafedrasi mudiri, f.-m.f.f.d. (PhD),
dotsent E.B.Dilmurodov rahbarligida bajarilgan va nashrga tavsiya qilingan.*

Annotatsiya. Ushbu maqolada funksional tenglamalarning muhim sinflaridan biri bo‘lgan integral tenglamalarni parametrli chiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechish usullari bayon qilingan. Dastlab, parametrli chiziqli tenglamaning va tenglamalar sistemasining yechimga ega bo‘lmaslik, yagona yechimga ega bo‘lish yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lish shartlari keltirilgan. So‘ngra ulardan foydalanib bir necha turdagi chiziqli integral tenglamalar yechib ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: parametr, chiziqli tenglama, tenglamalar sistemasi, funksional tenglama, integral tenglama, yechim, usul.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ И
СИСТЕМАМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Абстракт. В данной статье описаны методы решения интегральных уравнений, являющихся одним из важных классов функциональных уравнений, путём сведения их к параметрическим линейным уравнениям и системам уравнений. Сначала приводятся условия, при которых параметрическое линейное уравнение и система уравнений не имеют решения, имеют единственное решение или имеют бесконечно много решений. Затем с их помощью решаются несколько типов линейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: параметр, линейное уравнение, система уравнений, функциональное уравнение, интегральное уравнение, решение, метод.

INTEGRAL EQUATIONS REDUCED TO LINEAR EQUATIONS AND SYSTEM OF
EQUATIONS WITH PARAMETERS

Abstract. This article describes the methods of solving integral equations, which are one of the important classes of functional equations, by reducing them to parametric linear equations and systems of equations. At first, the conditions for the parametric linear equation and the system of equations not to have a solution, to have an unique solution, or to have infinitely many solutions are presented. Then several types of linear integral equations are solved using them.

Keywords: parameter, linear equation, system of equations, functional equation, integral equation, solution, method.

Kirish. Funksiyalardan tashkil topgan to‘plamga funksional to‘plam deyiladi [1,2]. $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz funksiyalar to‘plami, $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar to‘plami, $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha monoton funksiyalar to‘plami, $[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha integrallanuvchi funksiyalar to‘plami funksional to‘plamlarga misol bo‘la oladi. Agar funksional to‘plamda berilgan tenglamada noma‘lum funksiyadan iborat bo‘lsa, bu tenglamaga funksional tenglama deyiladi. Funksional tenglamalarni yechish umuman olganda juda qiyin bo‘lishi mumkin, lekin bunday tenglamalarni yechishning ba‘zi umumiy usullari mavjuddir. Xususan, amaliyotda keng qo‘llaniladigan usullar sifatida o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, noma‘lum koeffitsiyentlar usuli, Koshi usuli, o‘rniga qo‘yish usullarini sanab o‘tish mumkin [3]. Funksional tenglamalarning muhim sinflaridan biri bu integral tenglamadir. Agar funksional tenglamada noma‘lum funksiya integral ostida bo‘lsa, u holda bunday tenglamaga integral tenglama deyiladi [1,2]. Masalan, ushbu

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)g(\varphi(t), t)dt$$

ko‘rinishdagi tenglamaga φ funksiyaga nisbatan integral tenglamadir, $K(\cdot, \cdot)$ va $g(\cdot, \cdot)$ – berilgan funksiyalardir.

Ushbu maqolada parametrli chiziqli tenglamalarga keltiriladigan integral tenglamalar haqida fikr va mulohazalar yuritamiz. Ma’lumki, umumta’lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar maktablari matematika kursida parametr qatnashgan ifodalar, parametr qatnashgan tenglamalar, parametr qatnashgan tenglamalar sistemasi, parametr qatnashgan tengsizliklar va parametr qatnashgan funksiyalar o‘rganiladi.

O‘quvchiga qulaylik uchun parametrli chiziqli tenglamalar va ularning yechimga ega bo‘lish shartlari haqida qisqacha ma’lumot beramiz.

$ax = b$ ko‘rinishdagi tenglamaga parametrli chiziqli tenglama deyiladi. Bunda a va b parametrlar haqiqiy sonlar, x esa no‘malum (izlanayotgan o‘zgaruvchi). Parametrli tenglamalarni yechish usullarini tadqiq qilish algebraning ko‘p o‘rganilayotgan obyektlaridan biri hisoblanadi. Buyuk alloma yurtdoshimiz Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning “Al-jabr val-muqobala” asarida tenglamalarni yechish usullari to‘liq bayon qilingan. “Algebra” so‘zi asar nomidagi “al-jabr” so‘zidan vujudga kelgan. Chiziqli tenglamalar bilan bog‘liq qiziqarli masalalar umumta’lim maktablarining 5-sinf [4] va 6-sinf [5] darsliklarida ko‘p uchraydi. Parametrli chiziqli tenglamalarni yechish bilan bog‘liq masalalarni esa oliy ta’lim muassasalariga kirish test sinovlarida uchratish mumkin.

Quyida parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega yoki ega emasligini a va b parametrlarga bog‘liq ravishda tahlil qilamiz.

1) Agar $a = b = 0$ shart bajarilsa, u holda $ax = b$ tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

2) Agar $a \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim $x = \frac{b}{a}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3) Agar $a = 0$, $b \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

ko‘rinishdagi sistemaga ikki noma’lumli parametrli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ sonlari haqiqiy (kompleks) sonlar, x va y izlanayotgan noma’lumlar.

Endi (1) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lish shartlarini keltiramiz:

1) Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$ shart bajarilsa, u holda (1) tenglamalar sistemasi yechimga ega emas.

2) Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$ shart bajarilsa, u holda (1) tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega.

Agar $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ shart bajarilsa, u holda (1) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

Parametrli chiziqli tenglamalarga keltiriladigan integral tenglamalar. Endi parametrli chiziqli tenglama yechimining mavjudlik shartlardan foydalanishga oid masalalarga to‘xtalib o‘tamiz.

1-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma(1+x) \int_0^1 t\varphi(t)dt = 1 - x^2 \quad (2)$$

integral tenglama $\gamma \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko‘p. Yechim mavjud bo‘lgan hollarda yechimni toping.

Berilgan (2) integral tenglamani yechish maqsadida

$$I = \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad (3)$$

belgilash kiritamiz hamda $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\varphi(x) = \gamma(1+x)I + 1 - x^2 \quad (4)$$

ifodani hosil qilamiz. $\varphi(x)$ funksiya uchun topilgan (4) ifodani (3) belgilashga qo‘yamiz:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 t(\gamma(1+t)I + 1 - t^2)dt; \\
 I &= \int_0^1 t(1+t)\gamma dt \cdot I + \int_0^1 t(1-t^2)dt; \\
 I &= \left(\frac{1}{2} + \gamma \frac{1}{3}\right)I + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}; \\
 \frac{3-2\gamma}{6} \cdot I &= \frac{1}{4}; \\
 (3-2\gamma)I &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

γ parametrga nisbatan hosil bo'lgan oxirgi parametrli chiziqli tenglamani tahlil qilamiz.

Ko'rinib turibdiki, agar $\gamma = \frac{3}{2}$ bo'lsa, u holda berilgan (2) integral tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

Aksincha, agar $\gamma \neq \frac{3}{2}$ bo'lsa, u holda I soni uchun

$$I = \frac{3}{2(3-2\gamma)}$$

tenglik o'rinli bo'lib, berilgan (2) integral tenglama yagona yechimga ega hamda bu yechim

$$\varphi(x) = \frac{3\gamma(1+x)}{2(3-2\gamma)} + 1 - x^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma \sin x \int_0^{\pi/2} \cos t \varphi(t) dt = 1 \quad (5)$$

integral tenglama $\gamma \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p. Yechim mavjud bo'lgan hollarda yechimni toping.

2-masalada berilgan (5) chiziqli integral tenglamada

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos t \varphi(t) dt \quad (6)$$

kabi belgilash kiritamiz hamda izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiya (yechim) uchun

$$\varphi(x) = \gamma I \sin x + 1 \quad (7)$$

ifodani hosil qilamiz. Izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiya yechimi uchun topilgan (7) ifodani (6) belgilashga qo'yamiz hamda sodda hisoblashlarni amalga oshiramiz:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} (\gamma I \cos t \sin t + \cos t) dt; \\
 I &= \gamma \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt \cdot I + \int_0^{\pi/2} \cos t dt; \\
 I &= \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot I + 1; \\
 (2 - \gamma)I &= 2.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Hosil bo'lgan γ parametrga nisbatan (8) parametrli chiziqli tenglamani tahlil qilamiz.

Ko'rinib turibdiki, agar (8) tenglamada $\gamma = 2$ bo'lsa, u holda berilgan (5) integral tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

Aksincha, agar (8) tenglamada $\gamma \neq 2$ bo'lsa, u holda I soni uchun

$$I = \frac{2}{2-\gamma}$$

tenglik o'rinli bo'lib, berilgan (5) integral tenglama yagona yechimga ega hamda bu yechim

$$\varphi(x) = \frac{2\gamma \sin x}{2 - \gamma} + 1$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'quvchilar mustaqil yechishlari uchun quyidagi masalalarni tavsiya qilamiz.

3-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma(1-x) \int_0^1 (1+t)\varphi(t)dt = x^2 + 1$$

integral tenglama $\gamma \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p. Yechim mavjud bo'lgan hollarda yechimni toping.

4-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma(x^2 - 2) \int_0^1 (5 + t^2)\varphi(t)dt = x + 4$$

integral tenglama $\gamma \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p. Yechim mavjud bo'lgan hollarda yechimni toping.

Parametrli chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladigan integral tenglamalar. Chiziqli integral tenglamaning xususiyatidan kelib chiqib uni parametrli tenglamalar sistemaning yechimga ega bo'lish shartlaridan foydalanib yechish mumkin [1,2].

5-masala.

$$x(s) - \lambda \int_0^1 (s + st)x(t)dt = s^2$$

berilgan integral tenglama $\lambda \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlarida yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p bo'ladi?

Dastavval, tenglamani qulay ko'rinishga keltirib olamiz:

$$x(s) - \lambda \int_0^1 sx(t)dt - \lambda \int_0^1 stx(t)dt = s^2$$

λ o'zgaras son bo'lganligi uchun integral belgisi ostidan chiqarish mumkin.

$$x(s) - \lambda s \int_0^1 x(t)dt - \lambda s \int_0^1 tx(t)dt = s^2. \quad (9)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{cases} a = \int_0^1 x(t)dt \\ b = \int_0^1 tx(t)dt \end{cases} \quad (10)$$

(9) ko'rinishdagi ifodani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} x(s) - \lambda sa - \lambda sb &= s^2 \\ x(s) &= \lambda sa + \lambda sb + s^2 \end{aligned}$$

O'zgaruvchilarni almashtirish orqali quyidagini hosil qilamiz:

$$x(t) = \lambda at + \lambda bt + t^2.$$

$x(t)$ ning bu ko'rinishidan foydalanib, (10) tenglamalar sistemasini ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$a = \int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 (\lambda at + \lambda bt + t^2)dt = \frac{1}{3} + \frac{\lambda a}{2} + \frac{\lambda b}{2}$$

$$b = \int_0^1 tx(t)dt = \int_0^1 t(\lambda at + \lambda bt + t^2)dt = \frac{1}{4} + \frac{\lambda a}{3} + \frac{\lambda b}{3}$$

$$\begin{cases} a\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda b}{2} = \frac{1}{3} \\ -\frac{\lambda a}{3} + \lambda b\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Yechimga ega bo'lmisligi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lishi kerak:

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} = \frac{-\frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{3}} \neq \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$$

Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi uchun

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} = \frac{-\frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} \neq \frac{-\frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{3}}$$

bo'lganda esa tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Bundan λ ning $\frac{6}{5}$ dan farqli barcha qiymatlarida tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.

6-masala.

$$x(s) - \lambda \int_0^1 (s + s^2 t)x(t)dt = s^2 + 1$$

berilgan integral tenglama $\lambda \in \mathbb{C}$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlarida yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko'p bo'ladi?

Bu integral tenglamani yechish uchun dastavval, tenglamani qulay ko'rinishga keltirib olamiz:

$$\begin{aligned} x(s) - \lambda \int_0^1 sx(t)dt - \lambda \int_0^1 s^2 tx(t)dt &= s^2 + 1 \\ x(s) - \lambda s \int_0^1 x(t)dt - \lambda s^2 \int_0^1 tx(t)dt &= s^2 + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{cases} a = \int_0^1 x(t)dt \\ b = \int_0^1 tx(t)dt \end{cases} \quad (12)$$

(11) integral tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x(s) - \lambda sa - \lambda s^2 b = s^2 + 1.$$

(12) tenglamalar sistemasidan foydalanib, (10) integral tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'lamiz:

$$x(s) = \lambda sa + \lambda s^2 b + s^2 + 1$$

$$x(t) = \lambda at + \lambda bt^2 + t^2 + 1$$

(12) tenglamalar sistemasini qulay ko'rinishda yozib olamiz:

$$a = \int_0^1 x(t)dt = \int_0^1 (\lambda at + \lambda bt^2 + t^2 + 1)dt = \frac{4}{3} + \frac{\lambda a}{2} + \frac{\lambda b}{3}$$

$$b = \int_0^1 tx(t)dt = \int_0^1 t(\lambda at + \lambda bt^2 + t^2 + 1)dt = \frac{3}{4} + \frac{\lambda a}{3} + \frac{\lambda b}{4}$$

$$\begin{cases} a\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{\lambda b}{3} = \frac{4}{3} \\ -\frac{\lambda a}{3} + b\left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Yechimga ega bo'lmashligi uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lishi kerak:

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} = \frac{-\frac{\lambda}{3}}{1 - \frac{\lambda}{4}} \neq \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}}$$

Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi uchun

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} = \frac{-\frac{\lambda}{3}}{1 - \frac{\lambda}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

$$\frac{1 - \frac{\lambda}{2}}{-\frac{\lambda}{3}} \neq \frac{-\frac{\lambda}{3}}{1 - \frac{\lambda}{4}}$$

bo'lganda esa tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

7-masala. Ushbu

$$x(s) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(3s + t)x(t)dt = \cos s$$

Integral tenglamani yeching?

Yechish. Agar $\sin(3s + t) = \sin 3s \cdot \cos t + \cos 3s \cdot \sin t$ ayniyatni hisobga olsak, berilgan integral tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$x(s) = \lambda \sin 3s \int_0^{2\pi} \cos t x(t)dt + \lambda \cos 3s \int_0^{2\pi} \sin t x(t)dt + \cos s$$

Bu yerda

$$a = \int_0^{2\pi} \cos t x(t)dt, \quad b = \int_0^{2\pi} \sin t x(t)dt$$

belgilashlarni kiritsak,

$$x(s) = \lambda a \sin 3s + \lambda b \cos 3s + \cos s \quad (13)$$

ifodani olamiz. Endi a va b o'zgarmaslarni topish uchun (13) ni a va b tengliklarga qo'yib tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a = \lambda a \int_0^{2\pi} \sin 3t \cdot \cos t dt + \lambda b \int_0^{2\pi} \cos 3t \cdot \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ b = \lambda a \int_0^{2\pi} \sin 3t \cdot \sin t dt + \lambda b \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos 3t dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos t dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \lambda a \cdot 0 + \lambda b \cdot 0 + \pi \\ b = \lambda a \cdot 0 + \lambda b \cdot 0 + 0 \end{cases}$$

bundan $a = \pi$ va $b = 0$ larni hosil qilamiz. Demak, tekshirilayotgan integral tenglama λ parametrning barcha nolmas qiymatlari uchun yagona yechimga ega va bu yechim

$$x(s) = \pi \lambda \sin 3s + \cos s$$

funksiyadan iborat bo'ladi.

[6-10] maqolalarda parametrli chiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechish usullaridan foydalanib, Fridriks modeli va ikki zarrachali diskret Shryodinger operatorining Fredgolm determinant qurilgan hamda xos qiymatlar soni va joylashuv o'rnini o'rganilgan.

Xulosa. Ushbu maqolada umumta'lim maktablarida va oliy ta'limda ko'p o'rganiladigan funksional tenglamalarning muhim sinflaridan biri bo'lgan integral tenglamalarni parametrli chiziqli tenglamalar va tenglamalar sistemasiga keltirish orqali yechish usullari bayon qilingan. Dastlab, parametrli chiziqli tenglamaning va tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lmashlik, yagona yechimga ega bo'lish yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lish shartlari keltirilgan. So'ngra ulardan foydalanib bir necha turdagi chiziqli integral tenglamalar yechib ko'rsatilgan. Ta'kidlash lozimki, maqolada qo'llanilgan usullar Fridriks modeli va ikki zarrachali diskret Shryodinger operatorining Fredgolm determinantini qurishda hamda xos qiymatlar soni va joylashuv o'rnini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

ADABIYOTLAR:

1. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. *Funksional analiz va integral tenglamalar*. Darslik. Toshkent. El Press – 2013.
2. Abdullayev J.I., Eshqobilov Yu.X., Ikromov I.A., G'anixo'jayev R.N. *Funksional analiz (misol va masalalar yechish). II qism. O'quv qo'llanma*. Toshkent-2016.
3. Botirov G.I., Rasulov T.H.. *Funksional tenglamalar*. Fizika, matematika va informatika. 2013- yil, 3-son, 39-46 betlar.
4. Xaydarov B.Q. *Matematika. 5-sinf, I qism [matn]: umumiy o'rta ta'lim maktablarining 5-sinfi uchun darslik*. Toshkent, 2020, - 144 b.
5. Ismailov Sh.va boshqalar. *Matematika. 6-sinf [matn]: darslik*. Toshkent, Respublika ta'lim markazi, 2022, - 240 b.
6. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. *Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами*. // Сибирские электронные матем. известия. 12 (2015), С. 168-184.
7. Rasulov T.H. *Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian*. // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. 2:2 (2014), pp. 178-197.
8. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. *Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials*. // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), pp. 327-342.
9. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. *The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations*. // Math. Anal. Appl. 330 (2007), pp.1152-1168.
10. Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. *The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles*. // Rep. Math. Phys., 63:3 (2009), pp. 359-380.

INVESTIGATION OF AN INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL ORDER EQUATION WITH THE RIEMANN-LIOUVILLE OPERATOR

Hasanov Ibrohim Ixtiyorovich,
Teacher of Bukhara State University
ihasanov998@gmail.com

Temirova Shaxlo Mirzoxidovna,
Master of Bukhara State University
aziktemirov34@gmail.com

Abstract. The field of mathematical analysis, called fractional calculus and devoted to the study and application of derivatives and integrals of arbitrary order, has a long history and rich content, due to penetration into it and relationships with a wide variety of issues in the theory of functions, integral and differential equations, etc. It is located in constant development, which feeds on the ideas and results of various directions in mathematical analysis. The fractional calculus of functions of one and many variables continues to develop intensively at the present time, as evidenced by both a large stream of publications and international conferences especially devoted to questions of fractional calculus. It is possible that it is precisely the constant development of the theory of fractional integro-differentiation, and in recent decades its great branching, especially in the case of functions of many variables, that is the reason for the lack of monographs on this theory. Meanwhile, this circumstance could not but serve as a brake on the development of fractional calculus. A number of very significant and fundamental results have been published in original papers, many of which are difficult to access and little known.

This article is devoted to the solution of the initial-boundary value problem for a differential equation with fractional Riemann-Liouville derivatives. The work uses the spectral method and the integral Laplace transform to find the solution of the direct problem in explicit form through an infinite series with a three-parameter Mittag-Leffler function. Further, when sufficient conditions are met with respect to the given functions, it is proved that the constructed solution is regular.

Keywords: Riemann-Liouville fractional derivative, Mittag-Leffler function, Laplace transform, initial conditions, boundary conditions.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Область математического анализа, называемая дробным исчислением и посвящённая изучению и применению производных и интегралов произвольного порядка, имеет длительную историю и богатое содержание, обусловленное проникновением в неё и связями с самыми разными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и т.д. Она находится в постоянном развитии, которое питается идеями и результатами различных направлений в математическом анализе. Дробное исчисление функций одной и многих переменных продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время, о чём свидетельствует как большой поток публикаций, так и международные конференции, специально посвящённые вопросам дробного исчисления. Возможно, что именно постоянное развитие теории дробного интегро-дифференцирования, а в последние десятилетия и её большая разветвлённость, особенно в случае функций многих переменных, являются причиной отсутствия монографий по этой теории. Между тем, это обстоятельство не могло не служить тормозом развития дробного исчисления. Ряд весьма значимых и фундаментальных результатов были опубликованы в оригинальных работах, многие из которых труднодоступны и малоизвестны.

Настоящая статья посвящена решению начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля. В работе используются спектральный метод и интегральное преобразование Лапласа для нахождения решения прямой задачи в явном виде через бесконечный ряд с трёх параметрической функцией Миттаг-Леффлера. Далее, при выполнении

достаточных условий относительно заданных функций, доказано, что построенное решение является регулярным.

Ключевые слова: дробная производная Римана-Лиувилля, функция Mittag-Леффлера, преобразование Лапласа, начальные условия, граничные условия.

RIMAN-LIUVILL MA'NOSIDA KASR TARTIBLI HOSILA QATNASHGAN TENGLAMAGA QO'YILGAN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALA TADQIQI

Annotatsiya. Kasr tartibli hisobi deb ataladigan va ixtiyoriy tartibli hosilalar va integrallarni o'rganish va qo'llashga bag'ishlangan matematik tahlil sohasi unga kirib borishi va nazariyadagi turli savollar bilan bog'liqligi tufayli uzoq tarixga va boy mazmunga ega. Kasr tartibli hisobi doimiy rivojlanishda bo'lib, matematik tahlilning turli yo'nalishlari g'oyalari va natijalari bilan tavsiflanadi. Hozirgi vaqtda bir va ko'p o'zgaruvchilarning funksiyalarining kasr hisobi jadal rivojlanishda davom etmoqda, buni ham katta nashrlar oqimi, ham kasr hisobi masalalariga bag'ishlangan xalqaro konferensiyalar tasdiqlaydi. Aynan kasr integro-differentsiatsiya nazariyasining doimiy rivojlanishi va so'nggi o'n yilliklarda uning katta ta'sirlari, ayniqsa, ko'p o'zgaruvchilarning funksiyalari misolida, bu nazariya bo'yicha monografiyalarning yetishmasligiga sabab bo'lishi mumkin. Shu bilan birga, bu holat kasr hisobining rivojlanishiga to'siq bo'lib xizmat qila olmadi. Bir qator juda muhim va fundamental natijalar asl nashrlarda nashr etilgan, ularning ko'piga kirish qiyin va kam ma'lumdir.

Ushbu maqola kasr tartibli Riemann-Liouvil hosilasi qatnashgan differensial tenglama uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalasini yechishga bag'ishlangan. Ishda uch parametrlil Mittag-Leffler funksiyasi qatnashgan cheksiz qator orqali to'g'ri masalaning yechimini qurilgan. Buning uchun spektral usul va integral Laplas almashtirishi qo'llaniladi. Bundan tashqari, agar berilgan funksiyalar bo'yicha yetarli shartlar bajarilsa, tuzilgan yechim klassik ekanligi isbotlanadi.

Kalit so'zlar. Riman-Liouvilning kasr hosilasi, Mittag-Leffler funksiyasi, Laplas konvertatsiyasi, boshlang'ich shartlar, chegara shartlari

Introduction. Let us consider the initial boundary value problem for a differential equation with fractional derivatives

$$u_t + \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k D_{0+,t}^{\alpha_k} u - \mu_m D_{0+,t}^{\alpha_m} u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where $0 < \alpha_k \leq 1$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{m-1}$, $\mu_k \in [\mu, \bar{\mu}]$, $0 < \mu < \bar{\mu}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $D_{0+,t}^\gamma$ – fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville with respect to the variable t , defined by the equality (page 69):

$$\begin{aligned} (D_{0+,t}^\gamma g)(t) &= \frac{d}{dt} I_{0+,t}^{1-\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1, \\ D_{0+,t}^\gamma g(t) &= g'(t), \quad \gamma = 1, \\ I_{0+,t}^\gamma g(t) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1, \end{aligned}$$

$f(x, t)$, $\varphi(x)$ – given functions, $l > 0$ and $T > 0$ – some fixed numbers.

In mathematical modeling of mass transfer processes in media with a fractal structure, the method of fractional derivatives is used, the essence of which is to replace the integer derivative with a fractional derivative [1], [2]. Various initial and initial-boundary value problems for such equations are studied in the monograph [2]. In [3], a Cauchy-type problem for the fractional diffusion equation with a discretely distributed differentiation operator was studied. The properties of the fundamental solution were studied using the Wright function. In [4], using the Green's function method, the Cauchy problem was solved for the equation of anomalous diffusion-advection of radon in a fractal medium, which is represented using the Caputo fractional derivative with respect to time and the Riesz-Weil fractional derivative with respect to the

spatial coordinate. It is also shown that in the case when the exponents of fractional derivatives are equal to 1, the solution coincides with the previously known classical solution. In recent years, numerous studies [6]–[8] have been carried out on inverse problems involving various corresponding fractional operators, including the diffusion operator.

In [10–15], the unique solvability of nonlocal direct problems and problems with inverse sources for various fractional differential equations with Caputo and Riemann–Liouville integrodifferential operators was studied.

An equation of the form (1) with $\alpha_m = 0$ and $m = 2$ describes the processes of transfer of immobile solute in highly inhomogeneous porous media [5]. Work [9] is devoted to constructing a fundamental solution (1) and, with its help, solving the Cauchy problem for this equation when $\alpha_m = 0$ and $m = 2$.

Equation (1) differs from the fractional diffusion equation and the fractional wave equation [2] in that it contains both classical and fractional derivatives of the unknown function.

We will call the problem (1)–(2) a *direct problem* and by its *regular solution* we mean a function $u(x, t)$, defined in a closed domain $\overline{\Omega} := \{(x, t): x \in [0, l], 0 \leq t \leq T\}$, satisfying the conditions

- 1) $\{t^\gamma u_t, t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} u, t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_m} u_{xx}\} \in C(\overline{\Omega}), \quad \gamma = \max\{\alpha_k, \alpha_m\}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1;$
- 2) $u(x, t)$ is twice continuously differentiable with respect to x for each $0 < t \leq T$;
- 3) for each $x \in (0, l)$ fractional integrals of the function $u(x, t): I_{0+,t}^{1-\alpha_k} u(x, t), I_{0+,t}^{1-\alpha_m} u_{xx}(x, t)$ - continuously differentiable with respect to $t \in (0, T]$;
- 4) the equalities (1)–(3) are satisfied.

In this work, we use the following weighted function spaces (, pp. 4-5, 162- 163):

$$C_\gamma[0, T] := \{g: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}: t^\gamma g(t) \in C[0, T], 0 \leq \gamma < 1\},$$

with the norms

$$\|g\|_\gamma = \|t^\gamma g(t)\|_C = \|t^\gamma g(t)\|.$$

1. Preliminaries. The Mittag-Leffler function is an entire function defined by the series

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad z, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Also called the Mittag-Leffler function is the sum of a more general series

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0,$$

thus $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

The three-parameter Mittag-Leffler function is defined as follows

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad z, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0,$$

here $(\gamma)_n$ is the Pochhammer symbol:

$$(\gamma)_n = \frac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)} \text{ and } (\gamma)_0 \equiv 1 \quad (\Re(\gamma) > -n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad \gamma \notin \{0, -1, -2, \dots\}).$$

Next we need the following statements:

Proposition 1. *The following Laplace transformations are correct (p. 84):*

$$L[(D_{0+,t}^\gamma g(t))(p) = p^\gamma L[g(t)](p) - (I_{0+,t}^{1-\gamma} g)(0+), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (4)$$

$$L[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\pm \omega t^\alpha)](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\pm \omega t^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha \mp \omega)^\gamma}, \quad (5)$$

where $|\omega/s^\alpha| < 1$.

Definition 1: The $H(z)$ – function, which is defined by means of a Mellin-Barnes type integral in the following manner:

$$H(z) = H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \theta(s) z^{-s} ds,$$

where $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$, $z \neq 0$, and $z^{-s} = \exp[-s\{\ln|z| + i \arg z\}]$, where $\ln|z|$ represents the natural logarithm of $|z|$ and $\arg z$ is not necessarily the principal value. Here

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)}.$$

An empty product is always interpreted as unity; $n, m, p, q \in \mathbb{N}_0$ with $0 \leq n \leq p$, $1 \leq m \leq q$, $A_l, B_j \in \mathbb{R}_+$, $a_l, b_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $l = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$. L is suitable contour separating the poles

$$\zeta_{j\nu} = -\left(\frac{b_j + \nu}{B_j}\right), j = 1, 2, \dots, m; \nu = 0, 1, 2, \dots$$

of the gamma function $\Gamma(b_j + sB_j)$ from the poles

$$\omega_{\lambda k} = \left(\frac{1 - a_\lambda + k}{A_\lambda}\right), \lambda = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

of the gamma functions $\Gamma(1 - a_\lambda - sA_\lambda)$, that is

$$A_\lambda(b_j + \nu) \neq B_j(a_\lambda - k - 1), j = 1, 2, \dots, m; \lambda = 1, 2, \dots, n; \nu, k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{j=1}^p A_j, \quad (8)$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^n A_j - \sum_{j=n+1}^p A_j + \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{j=m+1}^q B_j. \quad (9)$$

Proposition 2. (see , p. 19). Let μ and α be as given in (8) and (9), and let condition (Z) be satisfied. Then, if $\mu \geq 0$ or $\mu < 0$, $\alpha > 0$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi\alpha$, then the H -function has an asymptotic expansion at zero $H_{p,q}^{m,n}(z) = O(z^c)$, $|z| \rightarrow 0$, here, $c = \min_{1 \leq j \leq m} \left[\frac{\Re(b_j)}{B_j}\right]$, $\Re(b_j)$ – real part b_j .

The three-parameter Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$ has the following representation through the H – Fox function, (see , p. 67):

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} H_{1,2}^{1,1} \left[-z \middle| \begin{matrix} (1-\gamma, 1) \\ (0, 1), (1-\beta, \alpha) \end{matrix} \right]. \quad (10)$$

Proposition 3. (см. , c. 79): Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha < 1$. Let also the functions $f(x)$ and $k(x)$ be defined on $[a, b]$ such that Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha < 1$. Let also the functions $f(x)$ and $k(x)$ be defined on $[a, b]$ such that $f(x) \in C[a, b]$ and $L(x) = \int_0^x \tau^{-\alpha} k(x - \tau) d\tau \in C^1[a, b]$. Then for anyone $x \in [a, b]$, $D_{a+}^\alpha \left[\int_a^t k(t - \tau) f(\tau) d\tau \right] (x) = \int_a^x D_{a+}^{\alpha+} [k(t - a)](\tau) f(x + a - \tau) d\tau + f(x) \lim_{x \rightarrow a+} I_{a+}^{1-\alpha} [k(t - a)](x)$.

Proposition 4. Let $\mu, \alpha, \beta > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Then the following formulas for the Riemann–Liouville and the Liouville fractional integration and differentiation of the Prabhakar function are valid:

$$\left\{ D_{0+,t}^\mu \left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma (at^\alpha) \right] \right\} (x) = x^{\beta-\mu-1} E_{\alpha,\beta-\mu}^\gamma (ax^\alpha). \quad (11)$$

2. Existence and uniqueness results for direct problem solution.

Regarding the input data of the direct problem, we will assume that the following conditions are met:

(A1) $\varphi(x) \in C^2[0, l]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0, l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$;

(A2) $f(x, \cdot) \in C[0, T]$ for all $t \in [0, T]$, $f(\cdot, t) \in C^2[0, l]$,

$f^{(3)}(\cdot, t) \in L_2(0, l)$, $f(0, t) = f(l, t) = f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0$;

Theorem. Let $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, m$ and let conditions (A1) and (A2) be satisfied. Then the only regular solution to the direct problem (1)–(3) is given by the formula

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n G_n(t) + \int_0^t G_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau \right) X_n(x), \quad (12)$$

where

$$G_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{(-1)^r}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times \\ \times t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} H_{1,2}^{1,1} \left[\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m} \middle| \begin{matrix} (-r, 1) \\ (0, 1), (\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - r, 1 - \alpha_m) \end{matrix} \right]. \quad (13)$$

φ_n and $f_n(t)$ – Fourier coefficients of functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ by system of orthonormal functions $X_n(x)$.

Proof. By applying the Fourier method, the solution $u(x, t)$ of the problem (1)-(3) can be expanded in a uniformly convergent series in term of eigenfunctions of the form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) u_n(t), \quad (14)$$

where

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Taking into account equality (14), we obtain from (1) following equation

$$u_n^{(t)} + \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t) + \mu_m \lambda_n D_{0+,t}^{\alpha_m} u_n(t) = f_n(t) \quad (16)$$

where

$$f_n(t) = \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx.$$

The initial condition (2) give:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x, 0) X_n(x) dx = \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \varphi_n. \quad (17)$$

Thus, we obtained ordinary fractional differential equations (16) for unknown functions $u_n(t)$ with initial conditions (17). To solve them, we will formally apply the Laplace transform. Then, we get the following expression:

$$s \omega_n(s) - \varphi_n + \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k} \omega_n(s) + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m} \omega_n(s) = \phi_n(s) \quad (18)$$

where

$$L[u_n(t)] = \omega_n(s), \quad L[f_n(t)] = \phi_n(s). \quad (19)$$

Next we show that $u_n(t)$ is continuous on $[0, T]$. Then the second term on the right side of (4) will be equal to zero.

Solving equation (18) we get

$$\omega_n(s) = \frac{\varphi_n + \phi_n(s)}{s + \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k} + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}}$$

Next, we calculate the inverse Laplace transform. First, we transform formula (19) for

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k}}{s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}} \right| < 1$$

as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_n + \phi_n(s)}{s + \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k} + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}} &= \frac{\varphi_n + \phi_n(s)}{s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}} \frac{1}{1 + \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k}}{s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}}} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\varphi_n + \phi_n(s))}{s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}} \left(\frac{\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k}}{s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m}} \right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\varphi_n + \phi_n(s)) \left(\sum_{k=1}^{m-1} \mu_k s^{\alpha_k} \right)^r}{(s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m})^{r+1}} = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\varphi_n + \phi_n(s))}{(s + \mu_m \lambda_n s^{\alpha_m})^{r+1}} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \times \\ &\quad \times \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] s^{\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} \end{aligned} \quad (20)$$

if we also take into account the following relation:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1})^r \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (x_v)^{k_v} \right] \quad (21)$$

where the summation is taken over all $k_1, k_2, \dots, k_{m-1} \in N_0$ such that $k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} = r$ [see, (p.823)].

According to (5) and (10), for $s \in C$ and $|\mu_m \lambda_n s^{\alpha_m-1}| > 0$, we have

$$\frac{s^{\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_m(r+1)}}{(s^{1-\alpha_m} + \mu_m \lambda_n)^{r+1}} = L \left\{ t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} E_{1-\alpha_m, r+1-\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v}^{r+1} (-\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m}) \right\} =$$

$$= L \left\{ t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} \frac{1}{r!} H_{1,2}^{1,1} \left[\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m} \middle| (0,1), \left(\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - r, 1 - \alpha_m \right) \right] \right\} \quad (22)$$

Using the well-known theorem on the Laplace transform of the convolution of two functions, from (18) taking into account the above calculations, we obtain the following formal solution to problems (16) and (17):

$$u_n(t) = \varphi_n G_n(t) + \int_0^t G_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau, \quad (23)$$

where

$$G_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{(-1)^r}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times$$

$$\times t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} H_{1,2}^{1,1} \left[\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m} \middle| (0,1), \left(\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - r, 1 - \alpha_m \right) \right]. \quad (24)$$

Now we will prove that function $u_n(t)$ is a classical solution to problem (16)-(17), using proposition 2 we obtain the following estimates for the H -function

$$H_{1,2}^{1,1} \left[\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m} \middle| (0,1), \left(\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - r, 1 - \alpha_m \right) \right] \leq C_T.$$

And from this we have estimates for the function $G_n(t)$

$$|G_n(t)| \leq C_T \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \frac{t^{(1-\alpha_1)r}}{r!} =$$

$$= C_T \sum_{r=0}^{\infty} M^r \frac{t^{(1-\alpha_1)r}}{r!} = C_T e^{M t^{1-\alpha_1}},$$

where $\sum_{v=1}^{m-1} \mu_v = M$. Thus, the function $u_n(t)$ is evaluated as follows:

$$|u_n(t)| \leq C_T (|\varphi_n| + T \|f_n\|) e^{MT} \quad (25)$$

For both sides of formula (23) we apply $D_{0+,t}^{\alpha_k}$ and get the following

$$D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t) = \varphi_n D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t) + D_{0+,t}^{\alpha_k} \int_0^t G_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau.$$

Then applying the proposition 5 to the last equation and we have:

$$D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t) = \varphi_n D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t) + \int_0^t D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t - \tau) f_n(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Using formula (10), we express the function (24) in terms of the Mittag-Leffler function

$$G_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{(-1)^r r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times$$

$$\times t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v} E_{1-\alpha_m, r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v}^{r+1} (-\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m}). \quad (27)$$

Next we calculate $D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t)$

$$D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{(-1)^r r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times$$

$$\times t^{r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k} E_{1-\alpha_m, r - \sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k}^{r+1} (-\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m}). \quad (28)$$

Evaluate the function $|D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t)|$

$$\begin{aligned}
 |D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t)| &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{r!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times \\
 &\times |t^{r-\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k} E_{1-\alpha_m, r-\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k}^{r+1} (-\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m})| = \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] \times \\
 &\quad (-r, 1) \\
 &\times |t^{r-\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k} H_{1,2}^{1,1} [\mu_m \lambda_n t^{1-\alpha_m}] (0,1), \left(\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - r, 1 - \alpha_m \right)| \leq \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}=r} \right) \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \left[\prod_{v=1}^{m-1} (\mu_v)^{k_v} \right] t^{r-\sum_{v=1}^{m-1} \alpha_v k_v - \alpha_k} C_T \leq \\
 &\leq C_T \sum_{r=0}^{\infty} M^r t^{(1-\alpha_1)r - \alpha_k}.
 \end{aligned}$$

From the last arguments we get the following:

$$|t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} G_n(t)| \leq C_T e^{Mt^{1-\alpha_1}} t^{\gamma - \alpha_k}.$$

Using the last estimate obtained for function $D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t)$, we obtain the following estimate:

$$|t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t)| \leq C_T |\varphi_n| e^{Mt^{1-\alpha_1}} t^{\gamma - \alpha_k} + TC_T \|f_n\| e^{Mt^{1-\alpha_1}} t^{\gamma - \alpha_k}. \quad (29)$$

And finally, using equation (16) and estimates (29) for the function $u'_n(t)$ we obtain the following estimate:

$$|t^\gamma u'_n(t)| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |\mu_k t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t)| + |\mu_m \lambda_n t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_m} u_n(t)| + \|f_n\|_\gamma. \quad (30)$$

Consider the convergence of the following series:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (|\varphi_n| + T \|f_n\|) = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\left| \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx \right| + T \left\| \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx \right\| \right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

Integrating the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ by parts, and taking into account conditions (A1) and (A2), we obtain the following:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx &\sim \frac{1}{n^3} \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \varphi^{(3)}(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{n^3} \tilde{\varphi}_n \\
 \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} f(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx &\sim \frac{1}{n^3} \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} f_{xxx}(x, t) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{n^3} \tilde{f}_n(t)
 \end{aligned}$$

Let's write the series [HII 31] using the last equality and apply the Cauchy-Buniakovsky inequality to this series, then we get

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (|\varphi_n| + T \|f_n\|) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\tilde{\varphi}_n| + T \|\tilde{f}_n\|) \leq \\
 &\leq C (\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + T \|f\|_{L_2([0,l],[0,T])}) \quad (32)
 \end{aligned}$$

Next, we examine the continuity of functions $u(x, t)$, $D_{0+,t}^{\alpha_k} u(x, t)$, and $D_{0+,t}^{\alpha_m} u_{xx}(x, t)$:

$$\begin{aligned}
 |t^\gamma u(x, t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |t^\gamma u_n(t) X_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t^\gamma u_n(t)| \leq C_T t^\gamma \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_n| + T \|f_n\|) e^{MT}, \\
 |t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} u(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_k} u_n(t) X_n(x)| \leq C_T e^{Mt^{1-\alpha_1}} t^{\gamma - \alpha_k} \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_n| + T \|f_n\|),
 \end{aligned}$$

$$|t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_m} u_{xx}(x,t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t^\gamma D_{0+,t}^{\alpha_m} u_n(t) X''_n(x)| \leq C_T e^{Mt^{1-\alpha_1}} t^{\gamma-\alpha_m} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (|\varphi_n| + T \|f_n\|).$$

The convergence of the above series follows from formula (32), so function (12) is a classic solution for problems with (1)-(3). The theorem is proven.

REFERENCES:

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. // Amsterdam: Elsevier, (2006) 523 p.
3. Псху А.В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования. // Сиб. электрон. матем. изв. Том 13, стр. 1078–1098 (2016).
4. Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1 (20), (2010), с. 127–132.
5. Schumer R.; Benson D.A.; Meerschaert M.M.; Baeumer B. Fractal mobile/immobile solute transport. Water Resour. Res. 2003, 39, 1–12.
6. Хасанов И.И., Акрамова Д.И., Рахмонов А.А. Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана-Лиувилля. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 27, № 1. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1952>.
7. Дурдиев У.Д. Задача об определении коэффициента реакции с дробным уравнением диффузии. // Диф. Урав., 2021, том 57, № 9, с. 1220-1229.
8. Durdiev D.K., Jumaev J.J. Inverse Coefficient Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in the Bounded Domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics vol. 44, pp. 548-557, (2023).
9. Дурдиев Д.К. Об определении коэффициента уравнения смешанного параболического типа с нехарактеристической линией изменения. // Диф. Урав., 2022, том 58, № 12, с. 1633-1644.
10. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.: The H-function. // Theory and applications. Springer, Dordrecht (2010) 269 p.
11. Tomovski Z., Hilfer R., and Srivastava H. M., ~ “Fractional and operational calculus with generalized fractional derivatives operators and Mittag-Leffler type functions,” Integral Transform. // Spec. Funct. 21, 797–814 (2010).
12. Durdiev Durdimurod K., Shishkina Elina L., Sitnik Sergei M. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space. Lobachevskii Journal of Mathematics 42(6), 2021, pp. 1264–1273.
13. Durdiev D. K., Shishkina E. L., Rahmonov A. A. The explicit formula for a solution of wave differential equation with fractional derivatives in the multi-dimensional space. // Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №2, pp. 1-12
14. Sultanov M.A., Durdiev D.K., Rahmonov A.A. Construction of an Explicit Solution of a Time-Fractional Multidimensional Differential Equation. // Mathematics 2021, 9(17), 2052;
15. Abramowitz M. and Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphics and Mathematical Tables, Dover, New York, 1972.

UCHINCHI TIP KLASSIK SOHA AVTOMORFIZMLARINING BA'ZI TATBIQLARI

Erkinboyev Qutlimurot San'atbek o'g'li,

Urganch davlat universiteti Matematik tahlil kafedrası tayanch doktoranti

qerkinboyev@gmail.com

Annotatsiya. *Matritsaviy sohalar birinchi bo'lib E.Kartan va K.Zigel tomonidan chuqur o'rganilgan. Jumladan, ular to'rtta klassik sohalar avtomorfizmlarining umumiy ko'rinishlarini tasvirlashgan.*

Bu maqolada Rudin [2] kitobidagi Teorema 2.2.5 ning Kartanning uchinchi tip klassik sohasidagi analogi keltirilgan.

Kalit so'zlar: *kososimmetirik matritra, unitar matritsa, simmetrik soha, klassik soha, avtomorfizm.*

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОМОРФИЗМОВ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Аннотация. *Матричные области впервые были глубоко изучены Э. Картаном и К. Зигелем. В частности, они описали общие формы автоморфизмов четырех классических областей.*

В этой статье получен аналог Теоремы 2.2.5 из книги Рудина [2] для классических областей Картана третьего типа.

Ключевые слова: *кососимметрическая матрица, унитарная матрица, симметричная область, классическая область, автоморфизм.*

SOME APPLICATIONS OF THIRD-TYPE CLASSICAL DOMAIN AUTOMORPHISMS

Abstract. *Matrix domains were first deeply studied by E. Cartan and K. Ziegel. In particular, they described the general forms of automorphisms of four classical domains.*

In this paper, we obtain an analog of Theorem 2.2.5 from Rudin's [2] book for classical Cartan domains of the third type

Key words: *skew-symmetric matrix, unitary matrix, symmetric domain, classical domain, automorphism.*

Kirish. Ma'lumki, Riman teoremasiga asosan chegarasi bir nuqtadan ko'p bo'lgan ixtiyoriy bir bog'lamli soha $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birlik doiraga bigolomorf ekvivalent bo'ladi. Ammo $\mathbb{C}^n (n > 1)$ fazoda bunday xossa (xususiyat) umuman olganda o'rinli emas. Masalan shar va polidoira o'zaro bigolomorf ekvivalent emas. Shuning uchun, $\mathbb{C}^n$ fazoda bigolomorf sohalar sinfi muhim hisoblanadi.

Ta'rif 1. Berilgan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha bir jinsli soha deyiladi, agar bu soha avtomorfizmlari gruppasi $Aut(D)$ tranzitiv bo'lsa. Ya'ni ixtiyoriy $z_1, z_2 \in D$ nuqtalar uchun shunday $\varphi \in Aut(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lib $\varphi(z_1) = z_2$ munosabat o'rinli bo'lsa.

Ta'rif 2. Bir jinsli $D \subset \mathbb{C}^n$ soha simmetrik soha deyiladi, agar har qanday $\zeta \in D$ nuqta uchun shunday $\varphi \in Aut(D)$ avtomorfizm mavjud bo'lib quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lsa:

- 1) $\varphi(\zeta) = \zeta$, $z \neq \zeta$ nuqtalar uchun $\varphi(z) \neq z$.
- 2) $\varphi \circ \varphi = e$, bu yerda $e \in Aut(D)$ birlik akslantirish.

Ta'rif 3. Chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha klassik soha deyiladi, agar bu sohaning golomorf avtomorfizmlari to'la gruppasi klassik Li gruppasini tashkil qilsa va tranzitiv bo'lsa.

Bir jinsli, simmetrik, qavariq va chegaralangan kompleks sohalar turli nuqtai nazardan katta qiziqish uyg'otadi. Buning sababi shundaki, ular yordamida $\mathbb{C}^n$ sohalari uchun bir qator muhim, asosan ko'p o'lchovli natijalar olingan ([1], [2], [3] va boshqalar).

Bir jinsli sohalar integral formulalar qurishda avtomorfizmlar gruppasidan foydalaniladi. Bunda avtomorfizmlar gruppallari([4], [5]) keng bo'lgan elementi matritsalaridan iborat sohalar ([1], [6]) qaraladi. Matritsaviy sohalar birinchi bo'lib E.Kartan va K.Zigel tomonidan chuqur o'rganilgan. Jumladan, ular to'rtta klassik sohalar avtomorfizmlarining umumiy ko'rinishlarini tasvirlashgan. Xua Lo-Ken esa klassik sohalar uchun ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida garmonik analizni qurgan (1944-1957yillarda) va ular bo'yicha natijalar Xua Lo-Kenning 1958-yilda xitoy tilida chop etilgan (1959-yilda rus tilida chop etilgan [1]) monografiyasida keltirilgan.

Klassik sohalarining Zigel sohalar bilan bigolomorf akslantirish mavjudligi [7] da keltirilgan .Bunday bigolomorf akslantirishlar yozilgan va ularning chegaralanmagan sohalariga golomorf davom qildirishlar masalalariga tadbiqlari keltirilgan ([9], [10]). Shuning uchun klassik sohalar ko'p o'lovli kompleks analizda muhim o'rin tutadi.

Uchinchi tip klassik soha $\mathfrak{R}_3(m, m)$ ushbu

$$I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0$$

munosabatni qanoatlantiruvchi m-tartibli kososimmetirik kvadrat matritsalaridan iborat.

Bunda $I^{(m)}$ -m-tartibli birlik kvadrat matritsa, $\bar{Z}$ - Z matritsaga qo'shma matritsa.

$\mathfrak{R}_3(m, m)$ uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi[1]:

$$\varphi(Z) = (AZ + B)(-\bar{B}Z + \bar{A})^{-1} = (ZB^* + A^*)^{-1}(ZA' - B'), \quad (1)$$

bu avtomorfizmlarning koeffitsiyentlari mos ravishda

$$A^*A - B^*B = I^{(m)}, A'B = -B'A \text{ va } A^*A - B'\bar{B} = I^{(m)}, B^*A = -A'\bar{B} \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Agar $A = Q$, $A^{-1}B = -P$ ko'rinishda belgilab (1) akslantirishni soddalashtirsak

quyidagi

$$\varphi(Z) = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ushbu:

$$\varphi_p(Z) = Q(Z - P)(I + \bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1} \quad (3)$$

(bu yerda: $Z \in \mathfrak{R}_3(m, m)$, $\bar{Q}(I + P\bar{P})Q' = I^{(m)}$, $QP + P\bar{Q} = 0$, $Q = Q^*$) akslantirish berilgan bo'lsin.

1-Teorema [12]. $\varphi_p(Z)$ akslantirish uchun quyidagi xossalar o'rinli

$$1^0. \varphi_p(P) = 0, \varphi_p(0) = P;$$

$$2^0. d(\varphi_p(P)) = QdZQ', d(\varphi_p(0)) = (Q^*)^{-1}dZ\bar{Q}^{-1};$$

$$3^0. \text{Ixtiyoriy } Z, W \in \mathfrak{R}_3(m, m) \text{ uchun ushbu:}$$

$$\det(I - \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(W) \rangle) = \frac{\det(I - P \cdot \bar{P}) \cdot \det((I - Z \cdot \bar{W}))}{\det(I - Z \cdot \bar{P}) \cdot \det(I - P \cdot \bar{W})}$$

munosabat o'rinli;

$$4^0. \text{Ixtiyoriy } Z \in \mathfrak{R}_3(m, m) \text{ uchun}$$

$$\det(I - \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(Z) \rangle) = \frac{\det(I - P \cdot \bar{P}) \det(I - Z \cdot \bar{Z})}{\det(I - Z \cdot \bar{P}) \det(I - P \cdot \bar{Z})}.$$

$$5^0. \varphi_p(\varphi_p(Z)) = Z \text{ (involutsiya bo'lish xossasi);}$$

$$6^0. \varphi_p(Z) - \text{gomeomorfizm bo'ladi. } \varphi_p(Z) \in \text{Aut}(\mathfrak{R}_3(m, m)).$$

Ta'rif. Agar U matritsa uchun $UU^* = I$ bo'lsa, u holda U matritsa unitar matritsa deyiladi, bu yerda I -birlik matritsa.

Yuqorida keltirilgan 1-teorema, $\varphi_p(Z)$ akslantirish uchun o'rinli bo'ladi.

Asosiy natijalar. Keyingi keltiriladigan teorema uchinchi tip klassik soha $\mathfrak{R}_3(m, m)$ ning ixtiyoriy golomorf avtomorfizmi uchun o'rinli bo'ladi.

2-Teorema. Ushbu $F(P) = 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $F \in \text{Aut}(\mathfrak{R}_3(m, m))$ golomorf avtomorfizm berilgan bo'lsin. U holda shunday yagona U unitar matritsa topiladiki quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

$$1. F = U \circ \varphi_p;$$

2. Ixtiyoriy $Z, W \in \mathfrak{R}_3(m, m)$ lar uchun

$$\det(I - \langle F(Z), F(W) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, W \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, W \rangle)}.$$

Isbot. 1. Ushbu $F \circ \varphi_p$ akslantirish uchinchi tip klassik soha $\mathfrak{R}_3(m, m)$ ning avtomorfizmi nol nuqtani saqlaydi ya'ni $(F \circ \varphi_p)(0) = 0$.

U holda A.Kartanning yagonalik teoremasiga ([2] 2.1.3-teorema) ko'ra $F \circ \varphi_p$ akslantirish chiziqli.

Ma'lumki ixtiyoriy chiziqli akslantirishni shunday yagona U unitar matritsa orqali ifodalash mumkin [11].

Demak, ushbu

$$F \circ \varphi_p = U$$

munosabat o'rinli bo'ladi. 1-teoremaning 5°-xossasiga ko'ra

$$\varphi_p(\varphi_p(Z)) = Z$$

involutsiya xossasi o'rinli. Bundan

$$F \circ \varphi_p \circ \varphi_p = U \circ \varphi_p.$$

ya'ni

$$F = U \circ \varphi_p$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2. Ixtiyoriy $Z, W \in \mathfrak{R}_3(m, m)$ nuqtalar uchun quyidagilar o'rinli

$$\begin{aligned} I - \langle F(Z), F(W) \rangle &= I - \langle U\varphi_p(Z), U\varphi_p(W) \rangle = \\ &= I - U \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(W) \rangle U^* = U(I^{(m)} - \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(W) \rangle)U^*. \end{aligned}$$

Ya'ni

$$I - \langle F(Z), F(W) \rangle = U(I^m - \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(W) \rangle)U^*.$$

Bundan

$$\det(I - \langle F(Z), F(W) \rangle) = \det(I - \langle \varphi_p(Z), \varphi_p(W) \rangle)$$

tenglik o'rinli ekani kelib chiqadi.

1-teoremaning 3° - xossasiga ko'ra

$$\det(I - \langle F(Z), F(W) \rangle) = \frac{\det(I - \langle P, P \rangle) \cdot \det(I - \langle Z, W \rangle)}{\det(I - \langle Z, P \rangle) \cdot \det(I - \langle P, W \rangle)}$$

munasabat o'rinli.

ADABIYOTLAR:

1. Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.. – М.: Мир, 1984. – 456 с.
3. Krantz S. G. Harmonic and complex analysis in several variables. Cham: Springer, 2017.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-63231-5>
4. Айзенберг Л. А., Формулы Карлемана в комплексном анализе, Наука, Новосибирск, 1990.
Aizenberg L. A., Carleman formulas in complex analysis, Science, Novosibirsk, 1990.
5. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979. – 366 с.
6. Худайбергенов Г., Хидиров Б.Б., Рахмонов У.С. Автоморфизмы матричных шаров // Вестник НУУз. 2010. \No3. с-205-210.
7. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: ИЛ., 1961 г.
8. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976.
9. G. Khudayberganov, U.S. Rakhmonov, Z.Q. Matyakubov. Integral formulas for some matrix domains // Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, 2016, pp. 89-95.
10. Г. Х. Худайбергенов, Б. Т. Курбанов, “Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях Зигеля”, Наука — технология — образование — математика — медицина, СМФН, 68, № 1, Российский университет дружбы народов, М., 2022, 144–156
11. Г. Худайбергенов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов. Комплексный анализ в матричных областях. Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 297 с.
12. Erkinboyev Q.S. Uchinchi tip klassik soha avtomorfizmlarining ba'zi xossalari. Вестник НУУз. 2024, 2.1.1

**QIRRALARI YARIM CHEKSIZ BO‘LGAN OCHIQ YULDUZSIMON GRAFDA
SHREDINGER TENGLAMASI UCHUN δ' ULANISH SHARTLI KOSHI MASALASI**

Eshimbetov Mardonbek Reyimboyevich,

*Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti
Matematika fakulteti Matematik analiz kafedrası dotsenti v.b.*

mr.eshimbetov92@gmail.com

Annotatsiya. Yulduzsimon metrik grafda biz Shredinger tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalani tadbiq qildik. Umumlashgan Fure almashtirishi (yoki Fokas usuli) yordamida qaralayotgan masala grafning tarmoqlanish nuqtalaridagi yechimning va uning hosilasining qiymatlariga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu tenglamalar sistemasi masaladagi berilganlarga nisbatan yagona yechimi topiladi. Umumlashgan Fokas usuli yordamida masalaning aniq yechimi berilganlarga bog‘liq integral ifoda shaklida topildi.

Kalit so‘zlar: Shredinger tenglamasi; metrik graf; Fokas usuli; umumlashgan almashtirish; Fure almashtirishi; boshlang‘ich-chegaraviy masala.

**ЗАДАЧА КОШИ С УСЛОВИЕМ δ' СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА
НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ПОЛУГРАФНОМ ОТКРЫТОМ ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ**

Аннотация. Исследована начально-краевая задача для уравнения Шредингера на звездообразном метрическом графе. Используя обобщённую подстановку Фурье (или метод Фокаса), рассматриваемая задача сводится к системе линейных уравнений относительно значений решения и его произведения в точках ветвления графа. Эта система уравнений находит уникальное решение рассматриваемых условий задач. Используя обобщённый метод Фокаса, мы получили точное решение задачи в виде интегрального представления по заданным данным.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, метрический граф, метод Фокаса, унифицированное преобразование, преобразование Фурье, начально-краевая задача.

**CAUCHY PROBLEM WITH δ' CONJUGATE CONDITION FOR THE SCHRÖDINGER
EQUATION ON A SEMI-INFINITE OPEN STAR GRAPH**

Abstract. The initial-boundary value problem for the Schrödinger equation on a star-shaped metric graph has been studied. The considered problem is reduced to a system of linear equations with respect to the values of the solution and its derivatives at the branching points of the graph using the generalized Fourier substitution (or the Fokas method). This system of equations finds a unique solution for the given problem conditions. Using the generalized Fokas method, we obtained an exact solution to the problem in the form of an integral representation based on the given data.

Key words: Schrödinger equation, metric graph, Fokas method, unified transformation, Fourier transformation, initial-boundary value problem.

Kirish. Metrik graflarda boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tadqiq qilish zarurati o‘tgan asrning 80-yillarning oxirlarida paydo bo‘lgan. Bunda chexiyalik olimlar P.Eksner va P.Sebarlar yulduzsimon ochiq graflarda Shredinger tenglamasi uchun chegaraviy masalalar qaralgan va olingan natijaning kvant zarrachasining tarmoqlangan sohada erkin harakatini o‘rganishga qo‘llashgan. Bu sohadagi keyingi natijalar U.Smilanskiy, P.Kuchment, R.Shreyder, A.Kostrikin va ularning shogirdlari tomonidan 2000-2010-yillarda chop etildi. Ular tomonidan statsionar Shredinger tenglamasi uchun metrik graflarda spektral va sochilish masalalari tadqiq qilingan. Ular tomonidan birinchi marotaba kvant graf tushunchasi ishlatila boshladi. P.Eksner va O.Postlar tomonidan ingichka tarmoqlangan sohalarda Shredinger operatori tadqiq qilingan. Soha tarmoqlarining ko‘ndalang kesimi o‘lchovi nolga intilgandagi limit holatida kvant graflari hosil bo‘lishi ko‘rsatiladi.

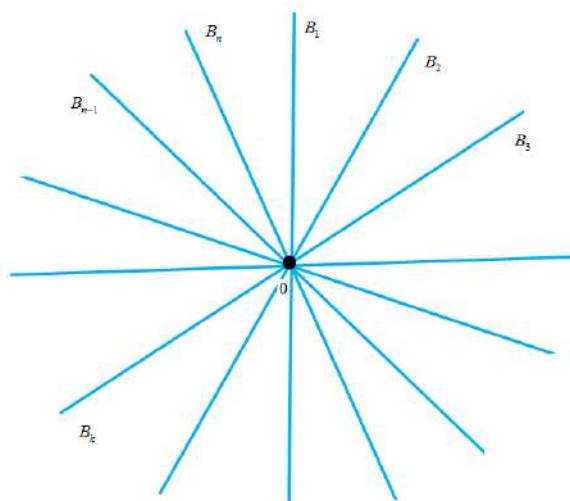
Kvant graflarida teskari masalalar J.Boman, P.Kurasov, N.Gerasimenkolar tomonidan o‘rganila boshlagan. Asosan ular kvant graflarida berilganlar sochilish haqidagi ma‘lumotlar yordamida grafning

bog‘langanligi, uchlarida chegaraviy va ulanish shartlari bilan birgalikda aniqlashgan. P.Kurasov va M.Novaszyklar chekli metrik grafda Laplas operatori uchun teskari spektral masala o‘rganilgan. Umuman olganda, kvant graflari yetarlicha yaxshi o‘rganilgan bo‘lishiga qaramasdan, bugungi kungacha sohaning yetakchi olimlari tadqiqotlar olib borayotgan, aktual sohalardan biri bo‘lib turibdi. Buning asosiy sababi sifatida, kvant graflari nanofizikaning yangi muammolarini o‘rganishdagi asosiy vosita sifatida xizmat qilishini keltirishimiz mumkin. Metrik graflarda Korteveg-de Friz tenglamasi va uning chiziqli qismi, Eyri tenglamasi uchun bir nechta masalalar tadqiq qilingan [1-2, 9-10]. Bu sohada hozirda mavjud ilmiy natijalar Z.A.Sobirov, M.I.Ahmedov, N.Uesker[8], D.Noya, D.Magnola, K.Seyfert[3,5], M.Kavalkantelar[4] tomonidan olingan. A.S.Volkova tomonidan metrik graflarda elliptik tipdagi tenglama va issiqlik tarqalish tenglamalari uchun Garnak tengsizligining analogi isbotlangan. A.S.Volkova tomonidan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun oddiy yulduzsimon grafda aniqlangan issiqlik tarqalish tenglamasining umumlashgan yechimlari o‘rganilgan[13]. Qaralayotgan masala bir qiymatli yechilishi ko‘rsatilgan. Bundan tashqari, chegaraviy qiymatlar yordamida boshqaruv masalasi tadqiq qilingan.

Chegaraviy masalalarni yechishning Fokas umumlashgan almashtirish usuli bugungi kunda yangi, rivojlanib kelayotgan usullardan biridir. Bu usul A.Fokas[6-7], D.Smith, B.Pelloni, D.Bernard[15], N.Sheilslar tomonidan chekli va cheksiz intervalarda chiziqli va nochiziqli tenglamalar uchun qator boshlang‘ich va chegaraviy masalalar yechishga qo‘llanilgan[15-17]. Metrik grafda Fokas usuli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi marotaba D.Smith va N.Sheilslar tomonidan yulduzsimon va ketma-ket ulangan, turli o‘tkazuvchanlikka ega bo‘lgan kesmalar, aylana va uning bitta nuqtasida kesmani ulashdan hosil bo‘lgan graflarda boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish uchun qo‘llanilgan. Shu bilan birga, grafning tarmoqlanish nuqtasi, ya‘ni ichki uchida ulanish (Kirxgoff) shartlari fizika nuqtai-nazaridan asoslab berilgan.

Masalaning qo‘yilishi va asosiy natija

Bizga n ta yarim cheksiz intervallarni graf uchi deb ataluvchi bitta O nuqtada birlashtirishdan hosil bo‘lgan Γ sodda yulduzsimon graf berilgan bo‘lsin. Grafning bog‘lamlarini $B_j, j = \overline{1, n}$ kabi belgilaymiz (1-chizma).



1-chizma.

B_j bog‘lamlarni $(0, \infty)$ intervallarga mos qo‘yib, har bir bog‘lamda x_j koordinatani aniqlaymiz. Bunda graf uchi O ga mos qo‘yiladi. Umumiylikka zarar yetkazmaslik uchun x_j ni x dan qabul qilamiz [14].

Quyidagicha boshlang‘ich-chegaraviy masalani qaraymiz [11]:

Ushbu Γ grafning har bir bog‘lamida

$$i q_t^{(j)}(x, t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x, t) + f^{(j)}(x, t), \quad x \in B_j, t > 0, j = \overline{1, n} \quad (1)$$

Shredinger tenglamasini va quyidagicha boshlang‘ich shartlar

$$q^{(j)}(x, 0) = q_0^{(j)}(x), \quad x \in \overline{B_j}, j = \overline{1, n} \quad (2)$$

chegaraviy shartlar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^{(j)}(x, t) = 0, \quad t \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (3)$$

hamda Γ grafning uchlarida quyidagi δ' ulanish (Kirxgoff) shartlari

$$q^{(1)}(0, t) + q^{(2)}(0, t) + \dots + q^{(n)}(0, t) = 0, t \geq 0, \quad (4)$$

$$\delta_1^2 q_x^{(1)}(0, t) = \delta_2^2 q_x^{(2)}(0, t) = \dots = \delta_n^2 q_x^{(n)}(0, t), t \geq 0. \quad (5)$$

ni qanoatlantiruvchi $q^{(j)}(x, t)$ funksiyalarni topish talab qilinsin.

(1) – (5) masalani yechishda Fokasning umumlashgan almashtirish usulini qo‘llaymiz. Buning uchun dastlab “lokal munosabat”larni qaraymiz [7]:

$$\left(e^{-ikx+wt} q^{(j)}(x, t) \right)_t = \left(\sigma e^{-ikx+wt} \left(k q^{(j)}(x, t) - i q_x^{(j)}(x, t) \right) \right)_x - i e^{-ikx+wt} f^{(j)}(x, t), \quad (6)$$

bu yerda $w(k) = -i\sigma k^2, j = 1, 2, \dots, n$.

Endi (6) lokal munosabatlarni $\Gamma_\infty \times (0, t)$ sohada Grin formulasini qo‘llab, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^\infty e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx - \int_0^\infty e^{-ikx+wt} q^{(j)}(x, t) dx - \\ & - \int_0^t \sigma e^{ws} \left(k q^{(j)}(0, s) - i q_x^{(j)}(0, s) \right) ds - \\ & - i \int_0^\infty \int_0^t e^{-ikx+ws} f^{(j)}(x, s) dx ds \end{aligned} \quad (7)$$

bu yerda $j = \overline{1, n}, k \in \mathbb{C}$.

$k \in \mathbb{C}$ uchun quyidagicha belgilashlarni amalga oshiramiz:

$$\begin{aligned} \hat{g}_0^{(j)}(w, t) &= \int_0^t e^{ws} q^{(j)}(0, s) ds, \quad \hat{g}_1^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} q_x^{(j)}(0, s) ds, \\ \hat{F}^{(j)}(k, t) &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-ikx+ws} f^{(j)}(x, s) dx ds, \quad \hat{q}^{(j)}(k, t) = \int_0^{+\infty} e^{-ikx} q^{(j)}(x, t) dx, \quad \hat{q}_0^{(j)}(k) = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Bu belgilashlarni (7) tenglikka olib borib qo‘yib, tenglikni quyidagi ko‘rinishga olib kelamiz, ya’ni “global munosabat”ni hosil qilamiz:

$$e^{wt} \hat{q}^{(j)}(k, t) = \hat{q}_0^{(j)}(k) - k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) - i\hat{F}^{(j)}(k, t), \quad (8)$$

bu yerda $\mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C}: \text{Im} k > 0\}, j = \overline{1, n}$.

$w(k) = -i\sigma k^2$ dispersion munosabat $k \rightarrow -k$ almashtirishga nisbatan invariant bo‘lganligi uchun $\hat{g}_0^{(j)}(w, t), \hat{g}_1^{(j)}(w, t), (j = \overline{1, n})$ funksiyalar ham bu almashtirishga nisbatan invariant. Shu sababli (8) global munosabatdan quyidagini hosil qilishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} e^{wt} \hat{q}^{(j)}(-k, t) &= \hat{q}_0^{(j)}(-k) + k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) + \\ &+ i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) - i\hat{F}^{(j)}(-k, t), \end{aligned} \quad (9)$$

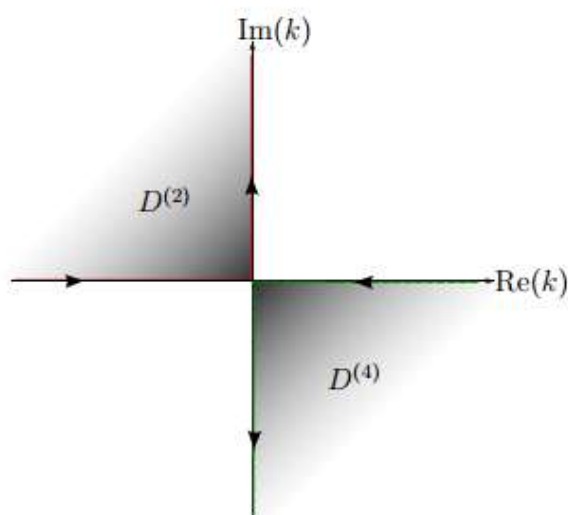
$\mathbb{C}^- = \{k \in \mathbb{C}: \text{Im} k < 0\}, j = \overline{1, n}$.

(8) global munosabat uchun teskari Fure almashtirishini qo‘llab, masalaning quyidagi integral ko‘rinishdagi yechimini topamiz:

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx-wt} \left(-k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) \right) dk - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx-wt} \hat{F}^{(j)}(k, t) dk. \end{aligned} \quad (10)$$

Integral ostidagi ifodalarning golomorfliigi va cheksizlikda kamayuvchiligini e’tiborga olib, Koshi teoremasi va Jordan lemmasidan yechimning quyidagi integral ifodalarini hosil qilamiz (2-chizma) [14]:

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \left(-k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) \right) dk - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{F}^{(j)}(k, t) dk, \end{aligned} \quad (11)$$



2-chizma

Endi (11) integral ostidagi ifodadan $\hat{g}_0^{(j)}(w, t), \hat{g}_1^{(j)}(w, t), j = \overline{1, n}$ noma'lum funksiyalarni topish masalasini ko'rib chiqamiz.

Buning uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechish bilan shug'illanemiz:

$$\begin{cases} e^{wt} \hat{q}^{(j)}(-k, t) = \hat{q}_0^{(j)}(-k) + k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) - i\hat{F}^{(j)}(-k, t), \\ \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \hat{g}_0^{(j)}(w, t) = 0. \end{cases}$$

δ' ulanish shartlarini hisobga olib, tenglamalar sistemasini $i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t)$ ga nisbatan yechib quyidagi [11-12]:

$$i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2} \left[i \sum_{j=1}^n \delta_j^2 [\hat{F}^{(j)}(-k, t) + i\hat{q}_0^{(j)}(-k)] + e^{wt} \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \hat{q}^{(j)}(-k, t) \right] \quad (12)$$

tenglikka ega bo'lamiz, Bu yerda:

$$i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2} i \sum_{j=1}^n \delta_j^2 [\hat{F}^{(j)}(-k, t) + i\hat{q}_0^{(j)}(-k)] \quad (13)$$

Endi (8) global munosabatdan $k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t)$ ni topamiz:

$$k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) = \hat{q}_0^{(j)}(k) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) - i\hat{F}^{(j)}(k, t) - e^{wt} \hat{q}^{(j)}(k, t). \quad (14)$$

Bu yerda $\{k \in \mathbb{C}: \text{Im}k > 0\}, j = \overline{1, n}$,

$$k\sigma \hat{g}_0^{(j)}(w, t) = \hat{q}_0^{(j)}(k) + i\sigma \hat{g}_1^{(j)}(w, t) - i\hat{F}^{(j)}(k, t). \quad (15)$$

Endi topilgan noma'lum funksiyalarni (11) integral yechimga qo'ysak va

$$\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx} \hat{q}^{(j)}(-k, t) dk$$

integral nolga aylanishini hisobga olib, masala yechimining aniq ifodasini (11) integral ko'rinishda hosil qilamiz.

Teorema. Aytaylik, $q_0^{(j)}(x) \in C(\overline{B_j}), f_j(x, t) \in C(\overline{B_j} \times [0, T]), T > 0$ bo'lib, bu funksiyalar $\overline{B_j}$ da absolyut integrallanuvchi bo'lsin. U holda (1) – (5) masalalarning yechimi (11), (13) va (15) formulalar bilan aniqlanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Abdinazarov S. The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian). // *Differential Equations*. Vol. 13(1). p. 3-12, (1981).
2. Colliander J.E., Kenig C.E. The generalized Korteweg-de Vries equation on the half line. // *Commun. Partial Differ. Equations*, Vol. 27(11-12): p. 2187-2266. (2002).
3. Mugnolo D., Noja D. and Seifert Ch. Airy-type evolution equations on star graphs. // *Analysis and PDE*. Vol. 11(7). p. 1625-1652. (2018).
4. Cavalcante M. The Korteweg–de Vries equation on a metric star graph. *Z. Angew. // Math. Phys.* Vol. 69(5). 124. p. 22. (2018).
5. Seifert Ch. The linearized Korteweg-de-Vries equation on general metric graphs. // *The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory*. Vol. 268. p. 449-458 (2018).
6. Fokas A.S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs. // *Proc. R. Soc. A*, Vol. 453, p. 1411–1443. (1997).
7. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. // *SIAM*, USA. p. 352. (2008).
8. Sobirov Z.A., Akhmedov M.I., Uecker H. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. Vol. 6(1), p. 198-204. (2015).
9. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for Airy equation on simple open star graph. *Bulletin of National University of Uzbekistan // Mathematics and Natural Sciences*. – 2020. Vol. 3. № 4. – p. 438 – 447.
10. Akhmedov M.I., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Initial-boundary value problem for the linearized KdV equation on simple metric star graph. // *Uzbek Mathematical Journal*. 4. p. 13-20. (2017).
11. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. Vol. 12(4), p. 412–420. (2019).
12. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. // *Uzbek Mathematical Journal*. 1. p. 73-81. (2019).
13. Volkova A.S. The generalized solution of the boundary value problems for heat equation on graphs. // *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Series 10*, Vol. 3. p. 39-47. (2013). (in Russian).
14. Собиров З.А., Эшимбетов М.Р. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. // *Современная математика. Фундаментальные направления*. - 2021. - Т. 67. - №4. - С. 766-782.
15. Deconinck B., Sheils N.E., Smith D.A. The Linear KdV equation with an Interface. *Commun. // Math. Phys.* Vol. 347. p. 489–509 (2016).
16. Fokas A.S., Pelloni B. Unified Transform for Boundary Value Problems. // *Applications and Advances*. *SIAM*, USA. p. 293. (2015).
17. Fokas A.S. A new transform method for evolution partial differential equations. // *IMA Journal of Applied Mathematics* Vol. 67(6). p. 559–590. (2002).

MAXIMAL SOLVABLE EXTENSIONS OF LOW DIMENSIONAL
HEISENBERG LIE ALGEBRAS

Gaybullaev Rustamjon Kakhramonovich,

Doctor of Philosophy in Mathematics(PhD)

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

r_gaybullaev@mail.ru

Solijanova Gulkhayo Oybek khizi,

Doctor of Philosophy in Mathematics(PhD)

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

gulhayo.solijanova@mail.ru

Urazmatov Gulmurod Hasaboy ugli,

Assisant teacher in Math

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

gulmurod0405@mail.ru

Abstract. In this paper derivation spaces of some low dimensional Heisenberg Lie algebras determined. Moreover, by using nil-independent derivations maximal solvable extensions are constructed.

Keywords: Lie algebras, solvable algebras, nilpotent algebras, derivations, nil-independent derivations.

KICHIK O'LCHAMLI GEYZENBERG LI ALGEBRALARINING MAKSIMAL
YECHILUVCHAN KENGAYTMALARI

Annotatsiya. Ushbu ishda kichik o'lchamli Heisenberg Li algebralarining differentsiallashlar fazosi o'rganilgan hamda nil-erkli differentsiallashlar yordamida ushbu algebralarining maksimal yechiluvchan kengaytmalari qurilgan.

Kalit so'zlar: Li algebralari, yechiluvchan algebralar, nilpotent algebralar, differentsiallashlar, nil-erkli differentsiallashlar.

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ МАЛОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ
ГЕЙЗЕНБЕРГА

Аннотация. В данной работе определяются пространства дифференцирований некоторых алгебр Ли Гейзенберга малых размерностей. Более того, с помощью ниль-независимых дифференцирований строятся максимально разрешимые расширения.

Ключевые слова: алгебры Ли, разрешимые алгебры, производные, не зависящие от нуля.

Introduction. Lie algebras plays an essential role in mathematics and physics, especially in quantum field theory, quantum mechanics. An extensive study of Lie algebras gave many beautiful results and generalizations. From the classical theory of finite-dimensional Lie algebras, it is known that an arbitrary Lie algebra over a field of zero characteristic is decomposed into a semidirect sum of the solvable radical and its semisimple subalgebra (Levi's theorem)[1]. Thanks to Malcev's and Mubarakzjanov's results the study of non-nilpotent solvable Lie algebras is reduced to the study of nilpotent ones and their derivations. Therefore, the study of finite-dimensional Lie algebras is focused on nilpotent algebras and representations of semisimple algebras. In 2010, L.Snoble stated the following hypothesis: "Up to isomorphism there exists unique complex maximal solvable extension of a nilpotent Lie algebra". On [5] Gorbatshevich found a counter example to the Snoble's Conjecture.

The Heisenberg Lie algebra is a fundamental structure in the realm of mathematics and theoretical physics, named after the physicist Werner Heisenberg, who is renowned for his contributions to quantum mechanics. This algebra plays a crucial role in various areas, including representation theory, quantum mechanics, and the study of symmetries.

Formally, the Heisenberg Lie algebra, often denoted as H_n can be defined as the vector space R^{2n+1} with a specific Lie bracket operation. The structure is characterized by its non-abelian nature, which emerges from the commutation relations of its generators. Specifically, for a basis $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z\}$, the Lie brackets satisfy:

$$\begin{aligned} [x_i, y_i] &= z, \quad 1 \leq i \leq n, \\ [x_i, z] &= [y_i, z] = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

This structure leads to rich geometric interpretations, particularly in the context of nilpotent Lie algebras and their applications in the study of Heisenberg groups. The Heisenberg Lie algebra is also integral to the mathematical formulation of quantum mechanics, providing insights into the underlying symmetries and uncertainty principles that govern quantum systems.

Our main goal is to study derivation spaces of Heisenberg Lie algebras and its solvable extensions. Moreover, it is proved that the maximal solvable extension of low dimensional Heisenberg Lie algebras is unique.

Preliminaries

Now we give some necessary definitions. Let $\mathbb{F}$ be a field.

Definition 1. An algebra L over a field $\mathbb{F}$ is called a *Lie algebra*, if it satisfies the following identities:

$$[x, x] = 0, \tag{1}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \tag{2}$$

for any $x, y, z \in L$, where $[-, -]$ is a multiplication in L .

Note that (1) applied to $[x + y, x + y]$, imply anticommutativity: $[x, y] = -[y, x]$ (1)' (Conversely, if $\text{Char} \mathbb{F} \neq 2$, it is clear that (1)' imply (1)). (2) is called *Jacoby identity*. Let introduce the following notation:

$$\text{Jac}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y].$$

A subspace I of a Lie algebra L is called an *ideal* of L , if $x \in L, y \in I$ together imply $[x, y] \in I$. Ideals play the role in Lie algebra theory which is played by normal subgroups in groups theory and by two sided ideals in ring theory.

For a given Lie algebra $(L, [-, -])$ the *lower central* and the *derived series* are defined recursively as follows:

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], k \geq 1,$$

One can check that

$$L^i \supseteq L^{i+1} \supseteq \dots, \quad L^{[i]} \supseteq L^{[i+1]} \supseteq \dots.$$

Definition 2. An algebra $(L, [-, -])$ is said to be *solvable* (respectively, *nilpotent*) if there exists $m \in \mathbb{N}$ (respectively, $n \in \mathbb{N}$) such that $L^m = 0$ ($L^{[n]} = 0$).

Since the sum of nilpotent (solvable) ideals is also nilpotent (solvable), there exists a maximal nilpotent (solvable) ideal. The maximal nilpotent (respectively, *solvable*) ideal of a Lie algebra L is called *nilradical* (respectively, *radical*) of the algebra L . One can check that any nilpotent Lie algebra is solvable.

Definition 3. A linear map $d : L \rightarrow L$ of a Lie algebra $(L, [-, -])$ is said to be a *derivation* if for all $x, y \in L$ the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)], \tag{3}$$

The set of all derivations of L is denoted by $\text{Der}(L)$. For a given $x \in L$, by ad_x we denote the map $\text{ad}_x : L \rightarrow L$ such that $\text{ad}_x(y) = [y, x]$ for all $y \in L$. Obviously, the map ad_x is a derivation,

which is called *inner derivation*. The set of inner derivations of L is denoted by $Inner(L)$. Derivations that are not inner are called *outer derivations*. Note that $Der(L)$ is a Lie algebra with respect to the commutator and $Inner(L)$ is an ideal of a Lie algebra $Der(L)$.

Now we define the notion of nil-independent derivations of Lie algebras over the field $\mathbb{F}$.

Definition 3. Derivations $d_1, d_2, \dots, d_n$ are said to be *nil-independent* if $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n$ is not nilpotent for any $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, such that $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq \vec{0}$.

In terms of nil-independent derivations we have the estimation of codimension of the nilradical in a solvable Lie algebra [6].

Lemma 1. Let R be a solvable Lie algebra with its nilradical N . Then $\text{codim} N$ does not exceed the maximal number of nil-independent derivations of N .

Main part

In this section, work we study derivation spaces and maximal solvable extensions of three and five dimensional Heisenberg Lie algebra.

Let $n = 1$, then we have 3 dimensional Heisenberg Lie algebra with the following multiplication table:

$$H_1 : [e_1, e_2] = e_3.$$

Now, let determine derivation spaces of H_1 .

Proposition 1. Any derivation of H_1 has the following matrix form:

$$Der(H_1) : \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{11} + h_{22} \end{pmatrix}$$

Proof. Let take following denotations:

$$d(e_1) = h_{11}e_1 + h_{12}e_2 + h_{13}e_3, \quad d(e_2) = h_{21}e_1 + h_{22}e_2 + h_{23}e_3,$$

Since $\{e_1, e_2\}$ are generator elements of H_1 , all other derivations can be expressed by $d(e_1)$ and $d(e_2)$. By using derivation identity, we get

$$d(e_3) = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)] = h_{11}e_3 + h_{22}e_3 = (h_{11} + h_{22})e_3.$$

By using Lemma 1, we can prove the following corollary:

Corollary 1.

$$\text{Codim}(H_1) \leq 2.$$

Let $R(H_1) = H_1 \oplus Q_1$ be a maximal solvable extensions of H_1 .

Theorem 1. Any maximal solvable extensions of the algebras H_1 has the following multiplication table:

$$R(H_1) : \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, y] = e_2, \\ [e_1, x] = e_1, & [e_3, y] = e_3, \\ [e_3, x] = e_3, \end{cases}$$

Proof. Let $R(H_1) = H_1 \oplus Q$ be a maximal solvable extensions of H_1 . Then there exists a basis $\{e_1, e_2, e_3, x, y\}$ such that $R(H_1)$ has the following multiplication table:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_1, y] = \beta_{12}e_2 + \beta_{13}e_3, \\ [e_1, x] = e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3, & [e_2, y] = e_2 + \beta_{13}e_3, \\ [e_2, x] = \alpha_{23}e_3, & [e_3, y] = e_3, \\ [e_3, x] = e_3, & [x, y] = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3. \end{cases}$$

Let us take the following changes of basis:

$$x' = x + \alpha_{23}e_1 - \alpha_{13}e_2, \quad y' = y + \beta_{23}e_1 - \beta_{13}e_2,$$

After applying this changes of basis, we get the following products:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, y] = e_2, \\ [e_1, x] = e_1 + \alpha_{12}e_2, & [e_3, y] = e_3, \\ [e_3, x] = e_3, & [x, y] = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3. \\ [e_1, y] = \beta_{12}e_2, \end{cases}$$

From $Jac(x, y, e_1) = 0$ and $Jac(x, y, e_2) = 0$ we obtain

$$\gamma_2 = 0, \quad \alpha_{12} + \beta_{12} = 0 \text{ and } \gamma_1 = 0$$

respectively.

So, we have the following table of products:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, y] = e_2, \\ [e_1, x] = e_1 + \alpha_{12}e_2, & [e_3, y] = e_3, \\ [e_3, x] = e_3, & [x, y] = \gamma_3e_3. \\ [e_1, y] = -\alpha_{12}e_2, \end{cases}$$

Finally, by taking

$$e'_1 = e_1 + \alpha_{12}e_2, \quad x' = x - \gamma_3e_3,$$

we derive the following multiplications:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, y] = e_2, \\ [e_1, x] = e_1, & [e_3, y] = e_3. \\ [e_3, x] = e_3, \end{cases}$$

Therefore, maximal solvable extensions of H_1 is unique up to isomorphisms.

Now we consider 5-dimensional Heisenberg Lie algebra which is denoted by H_2 .

$$H_2 : \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5 \\ [e_3, e_4] = e_5. \end{cases}$$

Let determine maximal solvable extensions of H_2 .

Proposition 2. Any derivation of H_2 has the following matrix form:

$$Der(H_2): \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ -h_{24} & h_{14} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{23} & -h_{13} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

where $h = h_{11} + h_{22} = h_{33} + h_{44}$.

Proof. Let $d \in Der(H_2)$, suppose

$$\begin{aligned} d(e_1) &= h_{11}e_1 + h_{12}e_2 + h_{13}e_3 + h_{14}e_4 + h_{15}e_5, \\ d(e_2) &= h_{21}e_1 + h_{22}e_2 + h_{23}e_3 + h_{24}e_4 + h_{25}e_5, \\ d(e_3) &= h_{31}e_1 + h_{32}e_2 + h_{33}e_3 + h_{34}e_4 + h_{35}e_5, \\ d(e_4) &= h_{41}e_1 + h_{42}e_2 + h_{43}e_3 + h_{44}e_4 + h_{45}e_5, \end{aligned}$$

Because of e_1, e_2, e_3, e_4 are generator basis elements of H_1 , $d(e_5)$ can be expressed by $d(e_1), d(e_2), d(e_3), d(e_4)$.

By using multiplications table of H_2 and derivation identity, we obtain

$$\begin{aligned} h_{11} + h_{22} &= h_{33} + h_{44} = h, \\ h_{32} &= h_{14}, \quad h_{42} = -h_{13}, \quad h_{31} = -h_{24}, \quad h_{41} = h_{23}. \end{aligned}$$

Therefore, we get the matrix form of $Der(H_2)$ in the proposition.

By using Proposition 2 and Lemma 1, we get the following Corollary.

Corollary 2.

$$Codim(H_2) \leq 3.$$

Let $R(H_2) = H_2 \oplus Q$ be a solvable Lie algebra with nilradical H_2 . Due to Corollary 2, we conclude that the dimension of $R(H_2)$ is not greater than 8.

Theorem 2. Let $R(H_2)$ be a maximal solvable extensions of H_2 . Then it admits a basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, x, y, z\}$ such that $R(H_2)$ is unique (up to isomorphisms) and it has the following multiplication table:

$$R(H_2): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, & [e_2, y] = e_2, \\ [e_3, e_4] = e_5, & [e_3, z] = e_3, \\ [e_1, x] = e_1, & [e_4, z] = -e_4, \\ [e_5, x] = e_5, \end{cases}$$

and the remaining products of the basis elements are zero.

Proof. In [4], $(n+3)$ -dimensional nilpotent n -Lie algebras classified. Let $I = \{e_5\}$, because of I is an ideal of H_2 , we can consider the factor algebra $\{H_2 / I\}$. $\{H_2 / I\}$ is nothing else, but the algebra $A_{5,1}$ which was mentioned on [4]. Then we have 4-dimensional abelian algebra $\{H_2 / I\}$ as nilradical and 3-dimensional its complementary subspace Q_2 . Then we come to an algebra which was mentioned on [3] this paper:

$$L_7(\beta_i) = \begin{cases} [e_i, x_i] = e_i, & 1 \leq i \leq k-1, \\ [e_k, x_i] = \beta_i e_k, & 1 \leq i \leq k-1. \end{cases}$$

Then we have the following products:

$$R(H_2): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, & [e_4, y] = \beta_2 e_4 + \alpha_{42} e_5, \\ [e_3, e_4] = e_5, & [e_5, y] = \alpha_{52} e_5, \\ [e_1, x] = e_1 + \alpha_{11} e_5, & [e_1, z] = \delta_{13} e_5, \\ [e_2, x] = \delta_{21} e_5, & [e_2, z] = \delta_{23} e_5, \\ [e_3, x] = \delta_{31} e_5, & [e_3, z] = e_3 + \alpha_{33} e_5, \\ [e_4, x] = \beta_1 e_4 + \alpha_{41} e_5, & [e_4, z] = \beta_3 e_4 + \alpha_{43} e_5, \\ [e_5, x] = \alpha_{51} e_5, & [e_5, z] = \alpha_{53} e_5, \\ [e_1, y] = \delta_{12} e_5, & [x, y] = \gamma_{12} e_5, \\ [e_2, y] = e_2 + \alpha_{22} e_5, & [x, z] = \gamma_{13} e_5, \\ [e_3, y] = \delta_{32} e_5, & [y, z] = \gamma_{23} e_5. \end{cases}$$

Firstly, from $Jac(e_1, e_2, x) = 0$ we get $\alpha_{51} = 1$.

Then from checking Jacobi identity for the followings

$$\begin{aligned} & Jac(e_1, e_2, y) = 0, \quad Jac(e_1, e_2, z) = 0, \quad Jac(e_3, e_4, x) = 0, \quad Jac(e_3, e_4, y) = 0, \\ & Jac(e_3, e_4, z) = 0, \quad Jac(x, y, e_1) = 0, \quad Jac(x, y, e_2) = 0, \quad Jac(x, z, e_2) = 0, \quad Jac(x, z, e_3) = 0, \\ & Jac(x, z, e_4) = 0, \quad Jac(y, z, e_1) = 0, \quad Jac(y, z, e_3) = 0, \quad Jac(y, z, e_4) = 0 \text{ and } Jac(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

we obtain the following relations respectively:

$$\begin{aligned} & \alpha_{52} = 1, \quad \alpha_{53} = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = -1, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \delta_{31} = -\alpha_{33}, \\ & \delta_{32} = -\alpha_{33}, \quad \alpha_{41} = 0, \quad \alpha_{42} = 0, \quad \delta_{13} = 0, \quad \delta_{23} = 0 \text{ and } \gamma_{13} = \gamma_{23}. \end{aligned}$$

Then we have the following table of products:

$$R(H_2): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_5, & [e_4, y] = e_4, \\ [e_3, e_4] = e_5, & [e_5, y] = e_5, \\ [e_1, x] = e_1, & [e_1, z] = 0, \\ [e_2, x] = \delta_{21} e_5, & [e_2, z] = 0, \\ [e_3, x] = -\alpha_{33} e_5, & [e_3, z] = e_3 + \alpha_{33} e_5, \\ [e_4, x] = e_4, & [e_4, z] = -e_4 + \alpha_{43} e_5, \\ [e_5, x] = e_5, & [e_5, z] = 0, \\ [e_1, y] = \delta_{12} e_5, & [x, y] = \gamma_{12} e_5, \\ [e_2, y] = e_2, & [x, z] = \gamma_{13} e_5, \\ [e_3, y] = -\alpha_{33} e_5, & [y, z] = \gamma_{23} e_5. \end{cases}$$

Let take the following changes of basis:

$$\begin{aligned} e'_3 &= e_3 + \alpha_{33} e_5 & \Rightarrow & \alpha_{33} = 0, \\ z' &= z + \alpha_{43} e_3 + \gamma_{13} e_5 & \Rightarrow & \alpha_{43} = \gamma_{13} = 0, \\ x' &= x + \delta_{21} e_1 - \gamma_{12} e_5 & \Rightarrow & \delta_{21} = \gamma_{12} = 0, \\ y' &= y - \delta_{12} e_2 & \Rightarrow & \delta_{12} = 0. \end{aligned}$$

Therefore, the theorem is completely proved.

We should mention that maximal solvable Lie algebras with Heisenberg nilradical is uniquely determined (up to isomorphism).

REFERENCES:

1. Jacobson. N, *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1962.
2. James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1972.
3. Gaybullayev.R.K, Khudoyberdiyev A.Kh, Pohl K, "Classification of solvable Leibniz algebras with abelian nilradical and $k-1$ dimensional extension" *Communication in Algebra*, 2020, 48,7,P.3061.
4. Mehdi Eshrati., Farshid Saeedi., Hamid Darabi., "Low dimensional nilpotent $\mathfrak{n}$ – Lie algebras".
5. Gorbatsevich.V., "On maximal Extensions of nilpotent Lie algebras".
6. Mubarakzyanov G.M. *The classification of real structures of Lie algebra of order five*. *Izv. VUZ. Math.*, 1963.

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Эрмаматова Зухро Эрмаматовна,
Самаркандский филиал Ташкентского
государственного экономического университета
ermamatovazuxro94@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для уравнения Гельмгольца. Строится точное решение этой задачи, основанное на методе функции Карлемана-Ярмухамедова. На основе этого рассматривается обратная задача по определению коэффициента в уравнение.

Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, задача Коши, некорректные задачи, регулярное решение, обратная задача, матрица Карлемана-Ярмухамедова.

COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

Abstract. The paper considers the Cauchy problem for the Helmholtz equation. An exact solution to this problem is constructed, based on the Carleman-Yarmukhamedov function method. On this basis, the inverse problem of determining the coefficient in the equation is considered

Key words: Helmholtz equations, Cauchy problem, ill-posed problems, regular solution, inverse problem, Carleman-Yarmukhamedov function.

GELMGOLTS TENGLAMASI UCHUN TESKARI KOEFFITSIENTLI MASALA

Annotatsiya. Ushbu maqolada Gelmgolts tenglamasi uchun Koshi masalasi ko'rib chiqiladi. Bu masalaning aniq yechimi Karleman-Yarmuxamedov funktsiya usuli asosida qurilgan. Shunga asoslanib, teskari masala tenglamadagi koeffitsient aniqlangan

Kalit so'zlar: Gelmgolts tenglamasi, Koshi masalasi, nokorrekt masala, regular yechim, teskari masala, Carleman-Yarmukhamedov funksiyasi.

Введение. Уравнение Гельмгольца представляет собой особый вид эллиптических уравнений и особенно важно в некоторых практических физических приложениях, связанных с распространением волн и вибрационными явлениями. Оно часто используется для описания вибрации конструкции [1], задачи акустической полости [2], радиационной волны [3], рассеяния волны [4], задачи теплопроводности в рёбрах [5], теории Дебая–Хюккеля [6], линеаризации уравнения Пуассона–Больцмана [7] и других.

Задача Коши для уравнения Гельмгольца возникает во многих областях науки, таких как распространение волн, вибрации и электромагнитное рассеяние [8–9]. При исследовании задачи Коши априори предполагается существование её решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [10], [11]. Единственность решения показана в [11]. После установления единственности решения в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов.

В последнее время было проведено много исследований по проблеме Коши для уравнений Гельмгольца, например работы [12]–[17] и др. Для получения более обширной информации о задаче Коши для уравнения Гельмгольца можно обратиться к [18].

1. Задача Коши для уравнения Гельмгольца и обратная задача

Рассмотрим задачу Коши в ограниченной односвязной области Ω в трехмерном пространстве R^3 с границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Задача 1. (Задача Коши). Известны данные Коши решения неоднородного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta U(x) + \lambda^2 U(x) \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \lambda^2 U(x) = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

на поверхности S :

$$U(y)|_S = f_1(y), \quad \frac{\partial U(y)}{\partial n} \Big|_S = f_2(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

где $f_1(y)$, $f_2(y)$ – заданные на S функции классов $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно. Требуется восстановить функцию $U(x)$ в Ω , исходя из заданных $f_1(y)$, $f_2(y)$, т.е. решить задачу аналитического продолжения решения уравнения Гельмгольца в пространственной области по её значениям на гладком куске S границы.

Задача (1)–(2) для произвольных $\lambda(y)$, $f_1(y)$ и $f_2(y)$ неразрешима. Если S – аналитическая поверхность, $\lambda(y)$ – аналитична на $\Omega \cup S$, функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ также аналитичны на S и аналитически продолжимы в Ω , то есть решение задачи 1 существует (тогда оно единственно (см. [19; с. 39.]), однако оно неустойчиво, что следует из следующего примера типа Адамара:

Пример 1. Пусть S есть кусок плоскости $x_3 = 0$ и

$$U^{(k)}(x) = \frac{\cos(kx_1) \sin(kx_2) \operatorname{sh}(\sqrt{2k^2 + \lambda^2} x_3)}{k^2}. \quad (3)$$

Функция $U^{(k)}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.2.1) в R^3 . Кроме того, для $x_3 = 0$ $|U^{(k)}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{k^2}$. Поэтому $U^{(k)}(x)|_{x \in T} = U^{(k)}(x)|_{x_3=0} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$. Однако, в каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ с $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ и $x_3 > 0$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} U^{(k)}(x) = \infty$.

Обозначим через $H(\Omega)$ – множество функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца в области Ω и принадлежащих классу $C^1(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$

Для уравнения Гельмгольца (1) в области Ω справедлива пространственная интегральная формула Кирхгоффа [20; гл.V, с. 417-423; гл.VII, с. 503-524]:

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \left[\Phi_0(y, x; \lambda) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi_0(y, x; \lambda)}{\partial n} \right] dS_y + \int_{\Omega} f(y) \Phi_0(y, x; \lambda) dy \quad (4)$$

причём $\Phi_0(y, x; \lambda) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\lambda|y-x|}}{|y-x|}$, $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – внешняя нормаль поверхности $\partial\Omega$ в

точке y , $f(y) \in C^\alpha(\Omega)$ $0 < \alpha < 1$.

Из формулы Грина следует, что формула (4) справедлива и в случае, если к $\Phi_0(y, x; \lambda)$ прибавить произвольное регулярное решение уравнения Гельмгольца, то есть справедлива формула:

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial U}{\partial n}(y) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial n} \right] dS_y + \int_{\Omega} f(y) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) dy, \quad (5)$$

где $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ определяется формулой ([12]):

$$\Phi_{\sigma}(y, x; \lambda) = \left[-2\pi^2 K(\sigma, 0) \right]^{-1} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{K(\sigma, w)}{w} \right] \frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad (6)$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,$$

В работе [21] доказана теорема для однородного случая при $\lambda = \lambda(y)$ – комплекснозначная функция $\lambda(y) = \lambda_1(y) + i\lambda_2(y)$ из класса $C^2(\bar{\Omega})$. Здесь приводим результаты для неоднородного случая при $0 < \lambda = \text{const}$ без доказательств.

Теорема 1. Пусть $U(x) \in H(\Omega)$ удовлетворяет условию (2) и на части T границы $\partial\Omega$ неравенству

$$\left| \frac{\partial^i U(y)}{\partial y_j^i} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^i U(y)}{\partial y_j^i} \right| \leq B, \quad y \in T, \quad (7)$$

где B – заданное положительное число. Если f – ограниченная, локально непрерывная по Гёльдеру функция в Ω , то задача Коши (1)–(2) однозначно разрешима для любых $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — заданных функций класса $C(S)$. Тогда для любого $x \in \Omega$ и $\sigma > 0$ справедливо неравенство:

$$\left| \frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i} - \frac{\partial^i U_{\sigma}(x)}{\partial x_j^i} \right| \leq C(\sigma) B \exp(-\sigma x_3^2), \quad (8)$$

где $i = 0, 1$ $j = 1, 2, 3$

$$C(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \right). \quad (9)$$

Следствие 1. Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial^i U_{\sigma}(x)}{\partial x_j^i} = \frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i} \quad (10)$$

причём предел достигается равномерно на компактах из Ω .

Согласно [22]–[23] исследуем задачу определения коэффициента λ^2 в однородной уравнении Гельмгольца, т.е.

$$\Delta U(x) - \lambda^2 U(x) \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} - \lambda^2 U(x) = 0, \quad 0 < \lambda = \text{const}, x \in \Omega. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть функция $U(y)$ в ограниченной односвязной области Ω удовлетворяет уравнению (11), на гладком куске поверхности S удовлетворяет условию:

$$U(y)|_S = f(y), \quad \frac{\partial U(y)}{\partial n} \Big|_S = g(y), \quad y \in S, \quad (12)$$

здесь $f(y), g(y)$ – заданные на S функции классов $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно, тогда для коэффициента λ^2 в уравнении (11) справедлива формула:

$$\lambda^2 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{-\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}{\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}. \quad (13)$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим задачу (11)–(12). Если $U(x) \in H(\Omega)$, то для любого $x \in \Omega$ справедлива формула Грина:

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \left[U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}(y) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \right] dS_y, \quad (14)$$

которую можно записать в виде:

$$U(x) = \int_S \left\{ U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}(y) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \right\} dS_y + \\ + \int_T \left\{ U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}(y) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \right\} dS_y \quad (15)$$

где

$$\Phi_\sigma(y, x; \lambda) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2 - \sigma x_3^2}}{w - x_3} \right] \frac{\cos(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + s}} du, \quad (16)$$

$$s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_3.$$

Притом:

$$-2\pi^2 \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} = \int_0^\infty \operatorname{Im} e^{\sigma w^2 - \sigma x_3^2} (w + x_3) \frac{\cos(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + s}} du = \\ = e^{-\sigma s + \sigma(y_3^2 - x_3^2)} \int_0^\infty \left(\cos \tau \sqrt{u^2 + s} + (y_3 + x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + s}}{\sqrt{u^2 + s}} \right) e^{-\sigma u^2} \cos(\lambda u) du, \quad \tau = 2\sigma y_3. \quad (17)$$

Так как $U(x)$ не зависит от σ , то дифференцируя (15) по σ , получим:

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial U}{\partial n}(y) \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} - U(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right] dS_y = 0. \quad (18)$$

Имеем:

$$\int_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n}(y) \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} - U(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y = \\ = \int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y + \\ + \lambda^2 \int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y +$$

$$+\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y, \quad (19)$$

где

$$-2\pi^2 \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} = e^{-\sigma s + \sigma(y_3^2 - x_3^2)} \int_0^\infty \left(\cos \tau \sqrt{u^2 + s} + (y_3 + x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + s}}{\sqrt{u^2 + s}} \right) e^{-\sigma u^2} du$$

$$-2\pi^2 \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} = e^{-\sigma s + \sigma(y_3^2 - x_3^2)} \int_0^\infty \left(\cos \tau \sqrt{u^2 + s} + (y_3 + x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + s}}{\sqrt{u^2 + s}} \right) u^2 e^{-\sigma u^2} du,$$

$$\begin{aligned} -2\pi^2 \frac{d\Phi_\sigma^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} = \\ = e^{-\sigma s + \sigma(y_3^2 - x_3^2)} \int_0^\infty \frac{\lambda^2 u^2}{2} \varphi(u, \lambda) \left(\cos \tau \sqrt{u^2 + s} + (y_3 + x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + s}}{\sqrt{u^2 + s}} \right) e^{-\sigma u^2} du, \end{aligned}$$

$$\varphi(u, \lambda) = \left(\frac{\sin \frac{\lambda u}{2}}{\frac{\lambda u}{2}} \right) - 1.$$

Теперь из (18), получаем:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y = \\ = \int_T \left\{ \frac{\partial U}{\partial n}(y) \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} - U(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y - \\ - \int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y - \\ - \int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y. \quad (20) \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\int_T \left\{ \frac{\partial U}{\partial n}(y) \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} - U(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}{\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_\sigma^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y} = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_{\sigma}^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(3)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}{\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y} = 0, \quad (22)$$

справедлива формула:

$$\lambda^2 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{-\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_{\sigma}^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(1)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}{\int_S \left\{ g(y) \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} - f(y) \frac{\partial}{\partial n} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \right\} dS_y}. \quad (23)$$

При $y_3 = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} -2\pi^2 \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \Big|_{y_3=0} &= e^{-\sigma s - \sigma x_3^2} \int_0^{\infty} e^{-\sigma u^2} \cos \lambda u \, du = \frac{e^{-\sigma s - \sigma x_3^2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{\sigma}} e^{\frac{\lambda^2}{4\sigma}}, \\ -2\pi^2 \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \Big|_{y_3=0} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\sigma s - \sigma x_3^2}}{\sqrt{\sigma}} e^{\frac{\lambda^2}{4\sigma}}. \end{aligned}$$

Для нормальной производной получаем:

$$-2\pi^2 \frac{d}{dy_3} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \Big|_{y_3=0} = e^{-\sigma s - \sigma x_3^2} \int_0^{\infty} 2\sigma x_3 e^{-\sigma u^2} \cos \lambda u \, du = \frac{x_3 e^{-\sigma s - \sigma x_3^2} \sigma}{2\sqrt{\pi} \sqrt{\sigma}} e^{\frac{\lambda^2}{4\sigma}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} -2\pi^2 \frac{d}{dy_3} \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \Big|_{y_3=0} &= \frac{x_3 e^{-\sigma s - \sigma x_3^2} \sigma}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{\lambda^2}{4\sigma}}}{\sqrt{\sigma}} \cdot -2\pi^2 \frac{d\Phi_{\sigma}^{(2)}(y, x; \lambda)}{d\sigma} \Big|_{y_3=0} = \\ &= \frac{x_3 e^{-\sigma s - \sigma x_3^2} \sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{\lambda^2}{4\sigma}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно (21) – (23) оценивая интегралы и получим справедливость формулы (13). **Теорема 2 доказана.**

ЛИТЕРАТУРА:

1. Beskos D.E., Boundary element method in dynamic analysis: part II (1986–1996), // ASME Appl. Mech. Rev. 50 (1997) 149–197.
2. Chen J.T., Wong F.C., Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition, // Sound. Vib. 217 (1998) 75–95.
3. Harari I., Barbone P.E., Slavutin M., Shalom R., Boundary infinite elements for the Helmholtz equation in exterior domains, Int. // Numer. Meth. Eng. 41 (1998) 1105–1131.
4. Hall W. S. and Mao X. Q., “A boundary element investigation of irregular frequencies in electromagnetic scattering // Engineering Analysis with Boundary Elements, vol.16, no.3, pp.245–252, 1995.
5. Kraus A.D., Aziz A., Welty J., Extended Surface Heat Transfer, Wiley, New York, 2001.
6. Danskin J. M. The theory of Max Min. — Berlin: Springer, 1967
7. Liang J., Subramaniam S., Computation of molecular electrostatics with boundary element methods // Biophys. J. 73 (1997) 1830–1841.
8. Kim B. K. and Ih J. G., “On the reconstruction of the vibro acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method // Journal of the Acoustical Society of America, vol. 100, no. 5, pp. 3003–3016, 1996

9. Marin L., Elliott L., Heggs P. J., Ingham D. B., Lesnic D., and Wen X., "An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 5-6, pp. 709–722, 2003.
10. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Изв.АН СССР, Сер. математика*, – 1956. Т.20. – С. 819-842.
11. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962. – 92 с.
12. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца // *Докл. РАН*. 1997. – Т. 357. – №3. – С. 320-323.
13. Ярмухамедов Ш. Регуляризация по Лаврентьеву решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца // *ДАН РУз*. – 2001, – №3, – С. 6-8.
14. Ярмухамедов Ш. Задача Коши для уравнения Гельмгольца // *ДАН РУз*. – 2003, – №2, – С. 7-9.
15. Qin H.H., Wei T., Shi T., Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation // *Comput. Appl. Math.* 224 (2009) 39–53.
16. Qin H.H., Wei T., Two regularization methods for the Cauchy problems of the Helmholtz equation // *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 947–967.
17. Wen Chen and Zhuojia Fu Boundary particle method for inverse Cauchy problems of inhomogeneous Helmholtz equations // *Journal of Marine Science and Technology*, – 2009. V.17. – №3 –P. 157– 163.
18. Marin L., An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation // *Comput. Mech.* 45 (2010) 665–677.
19. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М.: Наука, 1978. – 351 с.
20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977, – 736 с.
21. Yarmuhamedov Sh. and Yarmuhamedov I., "Cauchy problem for the Helmholtz equation", *Ill-Posed and Non-Classical Problems Mathematical Physics and Analysis*, Samarkand, 2000, pp.143-172.
22. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982. 88 с.
23. Лаврентьев М.М. Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. 1969. 68 с.

AN INVESTIGATION INTO THE INHOMOGENEOUS INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE TRANSVERSE VIBRATION OF A BEAM

Durdiev Umidjon Durdimuratovich,

Head of the department Differential equations, Bukhara State University,
Senior Research Fellow at the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan
umidjan93@list.ru, u.d.durdiev@buxdu.uz

Abstract. In this paper, we investigate the initial-boundary value problem associated with the inhomogeneous integro-differential equation governing the transverse vibrations of a beam. We subsequently examine the vibration operator of the homogeneous beam utilizing the method of separation of variables, focusing on the eigenvalues and eigenfunctions. This approach effectively transforms the problem into a Fredholm integral equation of the second kind. Leveraging the completeness of the eigenfunction system, we establish a unique theorem, which is critical for ensuring the solvability of the problem. Furthermore, we employ the method of successive approximations to derive solutions for these equations. This methodological framework not only facilitates the resolution of the integro-differential equation but also allows us to prove an existence theorem, thereby affirming the robustness of the solutions obtained.

Keywords: integro-differential, initial-boundary, inhomogeneous, eigenfunctions, separation of variables, Fredholm integral equation, unique, existence.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Аннотация. В данной работе исследуется начально-краевая задача, связанная с неоднородным интегро-дифференциальным уравнением, управляющим поперечными колебаниями балки. Затем мы исследуем оператор колебаний однородной балки с помощью метода разделения переменных, сосредоточив внимание на собственных значениях и собственных функциях. Такой подход эффективно преобразует задачу в интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Опираясь на полноту системы собственных функций, мы устанавливаем теорему о единственности, которая является критической для обеспечения разрешимости задачи. Кроме того, мы используем метод последовательных приближений для получения решений этих уравнений. Эта методологическая основа не только облегчает решение интегро-дифференциального уравнения, но и позволяет доказать теорему существования, тем самым подтверждая устойчивость полученных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное, начально-граничное, неоднородное, собственные функции, разделение переменных, интегральное уравнение Фредгольма, единственность, существование.

BALKANING KO'NDALANG TEBRANISHLARI UCHUN BIR JINSLI BO'LMAGAN INTEGRAL-DIFFERENTIAL TENGLAMANI O'RGANISH

Annotatsiya. Ushbu ish balkaning ko'ndalang tebranishlarini boshqaradigan bir jinsli bo'lmagan integral-differensial tenglama bilan bog'liq bo'lgan boshlang'ich-chegaraviy masalani o'rganadi. Keyin biz o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida bir jinsli balkaning tebranish operatorini o'rganamiz, xos qiymatlari va xos funksiyalariga e'tibor qaratamiz. Ushbu yondashuv masalani ikkinchi turdagi Fredgolm integral tenglamasiga samarali o'zgartiradi. Xos funksiyalar sistemasining to'liqligiga asoslanib, biz masalaning yechimini ta'minlash uchun juda muhim bo'lgan yagonalik teoremasini o'rnatamiz. Bundan tashqari, biz ushbu tenglamalarning yechimlarini olish uchun ketma-ket yaqinlashtirish usulidan foydalanamiz. Ushbu uslubiy asos nafaqat integral-differensial tenglamani yechishni osonlashtiradi, balki mavjudlik teoremasini isbotlashga imkon beradi.

Kalit so'zlar: integral-differensial, boshlang'ich-chegaraviy, bir jinsli bo'lmagan, xos funksiyalar, o'zgaruvchilarni ajratish, Fredgolm integral tenglamasi, yagonalik, mavjudlik.

Introduction and statement of the problem. The investigation of transverse vibrations in beams is a critical aspect of structural engineering, where the dynamic behavior of beams under various loading conditions plays a pivotal role in ensuring safety and performance. Among the various mathematical models employed to describe these vibrations, the integro-differential equation stands out for its ability to capture both immediate and historical effects of forces acting on the beam.

The integro-differential equation for the transverse vibration of a beam incorporates not only the classical elements of beam theory but also the complexities introduced by inhomogeneous loading and the time-dependent nature of vibrations. This equation provides a comprehensive framework for analyzing the behavior of beams subjected to distributed loads, accounting for the interactions between various points along the beam over time.

This study focuses on the integro-differential equation governing the transverse vibrations of a beam. By examining its theoretical foundations and employing advanced solution techniques, such as separation of variables and successive approximations, we aim to uncover the intricate relationships between the beam's response and the external forces applied to it. The findings of this investigation will enhance our understanding of beam dynamics, contributing valuable insights for the design and analysis of structural elements in practical engineering applications.

We investigate an inverse problem aimed at identifying the unknown kernel $k(t)$ as well as the transverse bending vibrations $u(x, t)$ of a homogeneous beam of length l . These variables are governed by a fourth-order partial differential equation.

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = \int_0^t k(\tau) u(x, t - \tau) d\tau + f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in (0, l) \times (0, T] =: G,$$

with the initial conditions

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Problem. The problem requires to define the function

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(G) \cap C_{x,t}^{2,1}(\bar{G}), \quad (4)$$

satisfying relations (1) – (3) with the known positive numbers a, l, T and sufficiently smooth functions $\varphi(x), \psi(x), k(t), f(x, t)$.

Study of the problem. The solution of the direct problem (1) – (4) will be found in the following form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \quad (5)$$

where $X(x)$ is the solution to the following problem:

$$X^4(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0.$$

Finding these solutions we get

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x, \quad \lambda_n = -\mu_n^4 = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4, \quad (6)$$

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \sin \mu_n x dx. \quad (7)$$

Formally, from (5) by term-by-term differentiation we compose the series

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x), \quad (8)$$

$$u_{xxxx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^4 u_n(t) X_n(x), \quad (9)$$

By applying the formal scheme of the Fourier method and utilizing equations (1) and (2), we derive the result

$$u_n''(t) + a^2 \mu_n^4 u_n(t) = \int_0^t k(\tau) u_n(t - \tau) d\tau + f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < t \leq T, \quad (10)$$

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n'(0) = \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

where

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx, \quad f_n(t) = \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx. \quad (12)$$

Using the method of [7], we present the solution of the problem (10), (11) as an integral equation

$$u_n(t) = q(t) + \frac{1}{a\mu_n^2} \int_0^t \sin[a\mu_n^2(t - \tau)] \int_0^\tau k(s) u_n(\tau - s) ds d\tau, \quad (13)$$

where

$$q(t) = \varphi_n \cos a \mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{a\mu_n^2} \sin a \mu_n^2 t + \frac{1}{a\mu_n^2} \int_0^t f_n(s) \sin[a\mu_n^2(t - \tau)] ds.$$

Theorem 1. *If there exists a function $u(x, t)$ satisfying relations (1)-(4), then it is unique.*

Proof. Based on the completeness of the system $X_n(x)$ in the space $L_2(0, l)$ we can establish the uniqueness of the solution to the problem defined by equations (1) – (4). Assume, for contradiction, that there exist two distinct functions $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ that serve as solutions to this problem. The difference $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ then becomes a solution to the homogeneous problem (1) – (4), where $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$. Consequently, we have $\varphi_n \equiv 0$, $\psi_n \equiv 0$, $f_n(t) \equiv 0$.

From equation (13), we obtain $u_n \equiv 0$, as u_n satisfies the homogeneous equation:

$$u_n(t) = \frac{1}{a\mu_n^2} \int_0^t \sin[a\mu_n^2(t - \tau)] \int_0^\tau k(s) u_n(\tau - s) ds d\tau$$

This, in conjunction with equation (7), is equivalent to the condition:

$$\int_0^l u(x, t) X_n(x) dx = 0$$

Given the completeness of the system $Y_n(x)$ in the space $L_2(0, l)$, we conclude that the function $u(x, t)$ must be zero almost everywhere in the interval $[0, l]$ and at any $t \in [0, T]$. Furthermore, due to the continuity of u on $\bar{G}$, as stipulated by condition (4), we deduce that $u(x, t) \equiv 0$ on $\bar{G}$.

Thus, we have proven the uniqueness of the solution to the problem defined by equations (1) – (4).

For each fixed n , equation (13) represents a Volterra integral equation of the second kind concerning v_n . According to the established theory of integral equations, provided that the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $k(t)$, and $f(x, t)$ satisfy the necessary conditions, this equation has a unique solution.

The solution to this integral equation can be effectively obtained using the method of successive approximations. This iterative method constructs a sequence of approximations that converges to the unique solution of the equation, thereby providing a practical approach for solving v_n in this context.

Furthermore, from (13) we can obtain an estimate for $u_n(t)$:

$$|u_n(t)| \leq |q(t)| + \left| \frac{1}{a\mu_n^2} \int_0^t \sin[a\mu_n^2(t - \tau)] \int_0^\tau k(s) u_n(\tau - s) ds d\tau \right|,$$

since

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leq |\varphi_n \cos a \mu_n^2 t| + \left| \frac{\psi_n}{a\mu_n^2} \sin a \mu_n^2 t \right| + \left| \frac{1}{a\mu_n^2} \int_0^t f_n(s) \sin[a\mu_n^2(t - \tau)] ds \right| \\ &\leq |\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{T}{a\mu_n^2} \|f_n\|. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{T}{a\mu_n^2} \|f_n\| + \frac{\|k\|}{a\mu_n^2} \left| \int_0^t u_n(s) \int_0^{t-s} \sin a\mu_n^2 \tau d\tau ds \right|$$

$$\leq |\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{T}{a\mu_n^2} \|f_n\| + \frac{2\|k\|}{a^2\mu_n^4} \int_0^t |u_n(s)| ds, \quad t \in [0, T],$$

where $\|k\| = \max_{t \in [0, T]} |k(t)|$, $\|f_n\| = \max_{t \in [0, T]} |f_n(t)|$.

Hence, by virtue of Gronwall's inequality, we can conclude that the solution $u_n(t)$ satisfies:

$$|u_n(t)| \leq \left(|\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{T}{a\mu_n^2} \|f_n\| \right) \exp \left\{ \frac{2T\|k\|}{a^2\mu_n^4} \right\}, \quad t \in [0, T], \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$|u_n''(t)| \leq \|f_n\| + \left(|\varphi_n| + \frac{1}{a\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{T}{a\mu_n^2} \|f_n\| \right) (\|k\|T + a^2\mu_n^4) \exp \left\{ \frac{2T\|k\|}{a^2\mu_n^4} \right\}.$$

Thus, the following statement is true:

Lemma 1. For any $t \in [0, T]$ the following estimates

$$|u_n(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_n| + \frac{1}{n^2} |\psi_n| + \frac{1}{n^2} \|f_n\| \right), \quad (15)$$

$$|u_n''(t)| \leq C_2 (n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n| + n^2 \|f_n\|), \quad (16)$$

are valid, where C_i , $i = 1, 2$ are positive constants depending on T , l , and $\|k\|$.

The series (5), (8) and (9) for any $(x, t) \in \bar{G}$ based on Lemma 1 are majorized by the series

$$C_3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n| + n^2 \|f_n\|), \quad (17)$$

where the constant C_3 depends on T , l , and $\|k\|$.

Lemma 2. Under the conditions

$$\varphi(x) \in C^5[0, l], \quad \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0,$$

$$\psi(x) \in C^3[0, l], \quad \psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0,$$

$$f(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{G}), \quad f(0, t) = f(l, t) = f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

one has the relations

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n^5} \varphi_n^{(5)}, \quad \psi_n = -\frac{1}{\mu_n^3} \psi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = -\frac{1}{\mu_n^3} f_n^{(3)}(t), \quad (18)$$

where

$$\varphi_n^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(5)}(x) \cos \mu_n x dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(3)}(x) \cos \mu_n x dx,$$

$$f_n^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxx}^{(3)}(x, t) \cos \mu_n x dx,$$

with the estimates

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(5)}|^2 \leq \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2[0, l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2[0, l]},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}(t)|^2 \leq \|f_{xxx}^{(3)}(x, t)\|_{L_2[0, l]}. \quad (19)$$

Proof. We integrate equation (13) by parts multiple times: specifically, we perform integration by parts on the integral involving the functions $f(x, t)$ and $\psi(x)$ three times, and on the integral involving the function $\varphi(x)$ five times. Under the conditions specified in Lemma 2, we arrive at the equalities stated in (18). The inequality presented in (19) corresponds to the Bessel inequality for the coefficients of the Fourier

expansions of the functions $\varphi_n^{(5)}$, $\psi_n^{(3)}$ and $F_n^{(3)}(t)$ in the cosine system $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \cos \mu_n x\right\}$ on the interval $[0, l]$. This inequality reflects the relationship between the coefficients derived from the Fourier expansions and demonstrates the convergence properties of the series associated with these functions, thus reinforcing the theoretical foundation for our analysis.

It is important to note that if the conditions of Lemma 2 are satisfied, the series in equation (17) converge. To demonstrate this convergence for the first series, we can apply a similar approach to the other series as well. Specifically, using equation (18) and the Cauchy-Bunyakovsky inequality, we obtain:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\varphi_n^{(5)}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(5)}|^2}.$$

Thus, according to the first inequality in (19), we conclude that the series $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n|$ converges, confirming the convergence of the numerical series as desired.

If the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ and $f(x, t)$ meet the conditions outlined in Lemma 2.2, then, based on inequalities (18) and (19), the series (17) converge. Consequently, this implies that the series in (5), (8) and (9) converge absolutely and uniformly within the rectangle $\bar{G}$. As a result of this uniform convergence, we can assert that the sum of the series in (5) satisfies the relations given in (1)–(4).

Using the above results, we obtain the following statement.

Theorem 2. *Let $k(t) \in C[0, T]$. If the functions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy the conditions of Lemma 2, then there exists a unique solution to the problem (1) – (4).*

REFERENCES:

1. Strutt, J. Baron Rayleigh, *The Theory of Sound*, London: Macmillan, 1877. Translated under the title *Teoriya zvuka*, Moscow: Gosudarstv. Izdat. Tekhn. Teor. Lit., vol. 1, 1955.
2. Krylov, A.N. *Vibratsiya sudov (Ship Oscillations)*, Moscow, 2012.
3. Tikhonov A.N. and Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics)*, Moscow: Nauka, 1966.
4. Timoshenko, S. P., Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 1966.
5. Meirovitch L. *Computational Methods in Engineering*. Springer, 1997.
6. Ascanelli, A., Cicognani, M., and Colombini, F. The global Cauchy problem for a vibrating beam equation // *J. Differ. Equat.*, 2009, vol. 47, pp. 1440–1451.
7. Sabitov, K.B. A remark on the theory of initial–boundary value problems for the equation of rods and beams // *Differ. Equations*, 2017, vol. 53, № 1, pp. 86–98.
8. Sabitov, K.B. Cauchy problem for the beam vibration equation // *Differ. Equations*, 2017, vol. 53, № 5, pp. 658–664.
9. Sabitov K.B. Initial–boundary value problems for the beam vibration equation with allowance for its rotational motion under bending // *Differential Equations*, 2021, vol. 57, № 3, pp. 342–352.
10. Sabitov K.B. and Fadeeva O.V. Initial–boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam // *Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, vol. 25, № 1, pp. 51–66.
11. Durdiev U.D. Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation // *Differential Equations*, 2022, vol. 58, № 1, pp. 36–43.
12. Durdiev U.D. Problem of determining the reaction coefficient in a fractional diffusion equation // *Differential Equations*, 57(9):1195–1204, 2021.
13. Durdiev U.D. Inverse Problem of Determining the Unknown Coefficient in the Beam Vibration Equation in an Infinite Domain // *Differential Equations*, 2023, vol. 59, № 4, 462-472. DOI: 10.1134/S0012266123040031
14. Durdiev U.D. A Time-Nonlocal Inverse Problem for the Beam Vibration Equation with an Integral Condition // *Differential Equations*, 2023, vol. 59, № 3, 359-370. DOI: 10.1134/S0012266123030060.

УДК 004.855.5

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ MATHCAD

*Ярашов Ихтиёр Бахтиёр угли,
преподаватель кафедры прикладной математики и технологий программирования
Бухарского государственного университета*

Аннотация. В ходе численного решения выполняется отделение и уточнение корней – нахождение численного значения корня с указанной точностью. В данной статье анализируется методы нахождения корней алгебраических уравнений с помощью программы Mathcad.

Ключевые слова: градиентный метод касательных, метод хорд, метод деления отрезка пополам, алгоритм, итерация, метод простых итераций, метод касательных.

MATHCAD DASTURI YORDAMIDA ALGEBRAIK TENGLAMALARNING ILDIZLARINI TAQRIBIY TOPISH USULLARI

Annotatsiya. Sonli yechim jarayonida ildizlarni ajratish va aniqlash – belgilangan aniqlik bilan ildizning sonli qiymatini topish amalga oshiriladi. Ushbu maqolada Mathcad dasturidan foydalanib, algebraik tenglamalarning ildizlarini topish usullari tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: gradiyent usuli, vatarlar usuli, kesmani teng ikkiga bo'lish usuli, algoritmi, iteratsiya, oddiy iteratsiyalar usuli, urinmalar usuli.

APPROXIMATE METHODS FOR FINDING THE ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS USING THE MATHCAD PROGRAM

Abstract. During the numerical solution, the separation and refinement of the roots is performed – finding the numerical value of the root with the specified accuracy. This article analyzes an approximate method for finding the roots of algebraic equations using the Mathcad program.

Keywords: gradient tangent method, chord method, bisection method, algorithm, iteration, simple iteration method, tangent method.

Введение. Решением нелинейного уравнения является такая точка, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. На практике не всегда удаётся подобрать такое решение. В этом случае решение уравнения находят с применением приближённых (численных) методов. Тогда решением будет являться такая точка, при подстановке которой в уравнение последнее будет выполняться с определённой степенью точности, т.е., где ϵ – малая величина. Нахождение таких решений и составляет основу численных методов и вычислительной математики.

Решение нелинейных уравнений разделяется на два этапа: отделение корней уравнений и уточнение корней нелинейных уравнений. На первом этапе необходимо исследовать уравнение и выяснить, имеются корни или нет. Если корни имеются, то узнать, сколько их, и затем определить интервалы, в каждом из которых находится единственный корень.

При аналитическом методе исследований необходимо выявить интервалы монотонности функции. Для этого необходимо вычислить критические точки, в которых первая производная равна нулю или не существует. Тогда вся числовая ось разбивается на интервалы монотонности. На каждом из них определяется знак производной, затем выделяются те интервалы монотонности, на которых функция меняет знак.

На втором этапе на каждом из этих интервалов для поиска корня используются численные итерационные методы уточнения корней, например методы половинного деления, простых итераций или Ньютона.

Система Mathcad обладает широкими возможностями численного решения уравнений. Многие задачи, решаемые с помощью математических пакетов, сводятся к решению уравнений – алгебраических, степенных, тригонометрических, к поиску значений неизвестных, превращающих эти уравнения в тождества строго или приближенно.

Основная часть. В MathCad реализуется несколько алгоритмов приближённого вычисления корней уравнений. Это градиентный метод касательных и метод хорд. Но изложение начнём с простейшего метода — метода деления отрезка пополам.

1. Рассмотрим алгоритм вычисления корня уравнения $f(x) = 0$ на интервале $[a, b]$, при этом $f(a), f(b)$ должны иметь разные знаки. Примем, что $c = \frac{a+b}{2}$, при этом данная точка c становится границей вложенного отрезка, причём левой границей, если $f(a), f(c)$ имеют одинаковые знаки, или правой, если $f(a), f(c)$ имеют разные знаки. Затем находится точка середины полученного вложенного отрезка, которая, в свою очередь, становится границей другого вложенного отрезка. Итерации проводятся до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше удвоенной величины значения погрешности. Рассмотрим данный метод на примере нахождения корня уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0$ на отрезке $[0,5]$ с точностью 10^{-3} .

Найдём корни уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0$ на отрезке $[0,10]$ с точностью 10^{-3} . Для этого, вышеприведенный алгоритм применяется 3 раза (по количеству корней) для введённых функций $g(x) = \frac{f(x)}{(x-x_1)}$, $h(x) = \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}$. По алгоритму находятся корни $x_1 = 3,141$, $x_2 = 6,284$, $x_3 = 9,424$.

```

f(x) := sin(x)/x      ε := 0.001      x1 := 3.141      x2 := 6.284
x1 := a ← 0
b ← 10
while |b - a| > 2ε
    c ← (a + b)/2
    a ← c if f(a)·f(c) > 0
    b ← c otherwise
    (a + b)/2
x1 = 3.141
g(x) := f(x)/(x - x1)
x2 := a ← 0
b ← 10
while |b - a| > 2ε
    c ← (a + b)/2
    a ← c if g(a)·g(c) > 0
    b ← c otherwise
    (a + b)/2
x2 = 6.284
h(x) := f(x)/((x - x1)·(x - x2))
x3 := a ← 0
b ← 10
while |b - a| > 2ε
    c ← (a + b)/2
    a ← c if h(a)·h(c) > 0
    b ← c otherwise
    (a + b)/2
x3 = 9.424

```

```

f(x) := sin(x)/x      ε := 0.001
x := a ← 0
b ← 5
while |b - a| > 2ε
    c ← (a + b)/2
    a ← c if f(a)·f(c) > 0
    b ← c otherwise
    (a + b)/2
x = 3.141

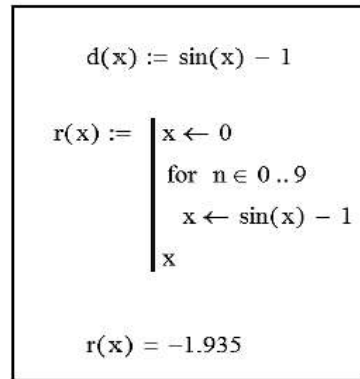
```

1-рисунок. Решение уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0$ на отрезке $[0,10]$ с помощью программы MathCad

2. Если необходимо решить уравнение $f(x) = 0$, то в случае приведения его к виду $x = d(x)$ используется метод простых итераций. При заданном начальном приближении $\tilde{x} = x_0$ принимается, что $x_1 = d(x_0)$, строится последовательность

$$\{x_n\}: x_{n+1} = d(x_n), \text{ тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \tilde{x}$$

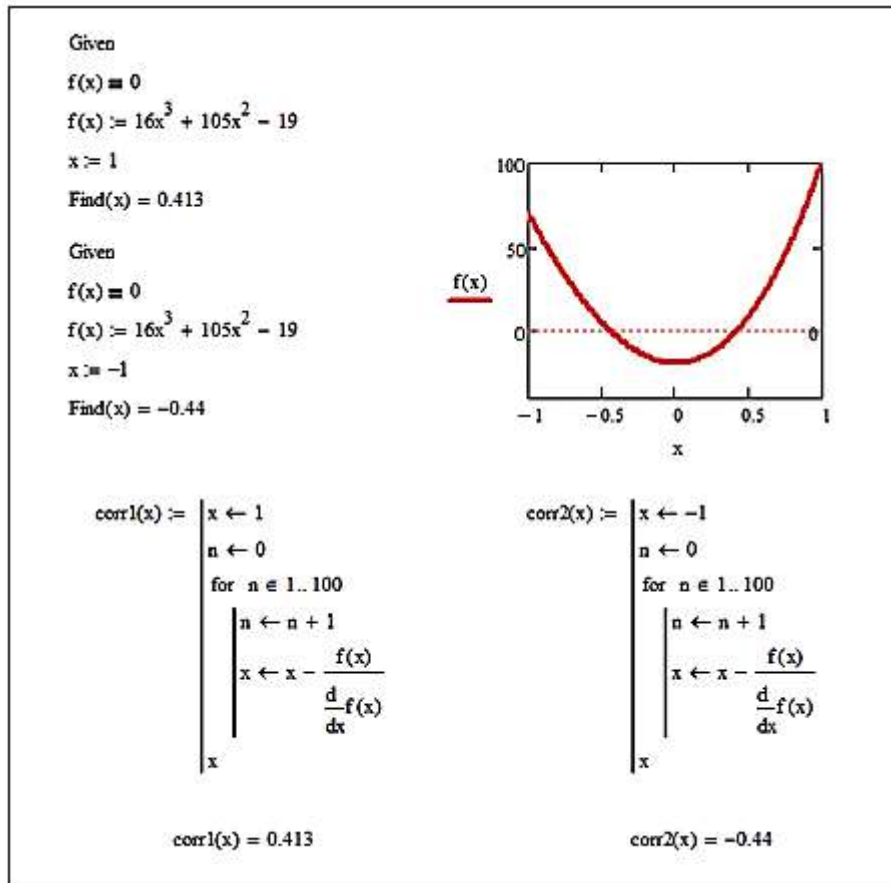
Например, нужно решить уравнение $d(x) = \sin x - 1$. Аналитически его решить невозможно, в то время как метод простых итераций даёт ответ $x = -1.935$.



2-рисунок. Метод простых итераций

3. Метод касательных заложен в блоке *Given-Find*. Его суть заключается в следующем. Пусть $y = f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$. Задаётся приближение корня $x = x_0$, находится значение функции $y = f(x_0)$, через эту точку проводится касательная, которая пересекает ось OX в точке x_1 , снова вычисляется $y = f(x_1)$, через эту точку проводится касательная и т.д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к искомому корню x . Тогда x_{n+1} легко выразить через рекуррентную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



3-рисунок. Метод касательных решения уравнения $16x^3 + 105x^2 - 19 = 0$

4. Следующий численный метод решения уравнений — **метод хорд**. Алгоритм его следующий. Пусть $y = f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$. Задаётся приближение корня $x = x_0$, находится значение функций $y_b = f(b)$, $y = f(x_0)$, через точки (b, y_b) и (x_0, y) проводится хорда, которая пересекает ось OX в точке x_1 , вычисляется $y = f(x_1)$, через точки (b, y_b) и (x_1, y) проводится хорда, которая пересекает ось OX в точке x_2 и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к искомому корню x . Тогда x_{n+1} легко выразить через рекуррентную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n)f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

Метод хорд реализуется в MathCad через функцию *root*. На рисунке 4 приводится пример работы подпрограмм *hord1(x)* и *hord2(x)* для решения уравнения $16x^3 + 105x^2 - 19 = 0$. Подпрограммы отличаются только начальным приближением корня.

$f(x) = 0$
 $f(x) := 16x^3 + 105x^2 - 19$

Задано начальное приближение корня

$x := 1$

$root(f(x), x) = 0.413$

$x := -1$

$root(f(x), x) = -0.44$

Задан интервал локализации корня

$root(f(x), x, 0, 1) = 0.413$

$root(f(x), x, -2, -0.05) = -0.44$

Задана подпрограмма

$a1 := -3$ $b2 := 6$

hord1(x) :=

```

x ← -1
n ← 0
for n ∈ 1 .. 100
    n ← n + 1
    x ← x - ((a1 - x) · f(x)) / (f(a1) - f(x))
x
                    
```

hord1(x) = -0.44

hord2(x) :=

```

x ← 1
n ← 0
for n ∈ 1 .. 100
    n ← n + 1
    x ← x - ((b2 - x) · f(x)) / (f(b2) - f(x))
x
                    
```

hord2(x) = 0.413

4-рисунок. Метод хорд решения уравнений

5. В том случае, если уравнение имеет множество корней, удобно проводить *разбиение на сегменты* и на каждом сегменте находить корень методом хорд. Например, чтобы решить уравнение $\frac{\sin x}{x} = 0$ на отрезке $[-10\pi + 0, 2, 0]$, напомним подпрограмму *FF* (рис.5), которая возвращает корень на заданном отрезке. Столбец *X* задаёт границы интервалов локализации корня. В результате вычислений получено 10 корней *FF(x)*. Значения, выведенные в столбец $g(FF(X))$, порядка 10^{-12} , 10^{-13} , что говорит о том, что значение функции $y = g(X)$ от найденных численным методом корней стремится к нулю. Уравнение $\frac{\sin x}{x} = 0$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Решения уравнения $\frac{\sin x}{x} = 0$ на отрезке $[-10\pi + 0, 2, 0]$ удовлетворяют $x = \pi k$, $k = -1, \dots, -10$.

$FF(X_0) := \begin{cases} X \leftarrow X_0 \\ \text{return root}(g(X), X) \end{cases}$		
$FF(-3) = -3.142 \quad FF(4) = 3.142$		
$X := (-10\pi + 0.1), (-9\pi + 0.1) .. 0$		
$X =$	$FF(X) =$	$g(FF(X)) =$
-31.316	-31.416	0
-28.174	-28.274	$5.065 \cdot 10^{-15}$
-25.033	-25.133	$-2.096 \cdot 10^{-14}$
-21.891	-21.991	$8.114 \cdot 10^{-14}$
-18.75	-18.85	$-3.165 \cdot 10^{-13}$
-15.608	-15.708	$1.33 \cdot 10^{-12}$
-12.466	-12.566	$-6.537 \cdot 10^{-12}$
-9.325	-9.425	$4.275 \cdot 10^{-11}$
-6.183	-6.283	$-1.311 \cdot 10^{-15}$
-3.042	-3.142	$5.981 \cdot 10^{-13}$

5-рисунок. Разбиение на сегменты для решения уравнения $y = \frac{\sin x}{x}$. Столбец X — корни уравнения на отрезке

Заключение. Эти методы позволяют эффективно находить корни алгебраических уравнений, и программа MathCad предоставляет удобные инструменты для их реализации. Выбор метода зависит от свойств функции и необходимых условий точности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Жумаев Ж., Опокина Н.А. Решение математических задач в пакетах математических программ Maxima и MathCAD. Учебное пособие. Казань: КФУ, 2021. – 228 с.
2. Jumayev J. Transport masalasini MathCAD tizimida yechish// BuxDU ilmiy axboroti, 2022, № 6, 27-31 betlar
3. Jumayev J. Ikkinchi tartibli chiziqlar mavzusini mathcad matematik paketi yordamida o'qitish// Педагогик махорат. Махсус сон. 2021 йил декабрь. 26-32 бетлар.
4. Jumayev J., Ismatova K.O. Transport masalasini kompyuterli modellash tirish// Pedagogik mahorat, maxsus son, 2022 yil, dekabr, 27-31 betlar
5. Jumayev J., Shamsiyeva N.R. Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishning kompyuterli modeli// Pedagogik mahorat, maxsus son, 2022 yil, dekabr, 86-90 betlar
6. Исмоилова М.Н., Муродова Г.Н. MAPLE математик пакет ёрдамида тенглама ва тенгсизликлар системаларини ечиш// Учёный XXI века международный научный журнал №4-3(17), 2016. С 25-27
7. Махсума Нарзикуловна Исмоилова, Нилуфар Бахтиёровна Мавлонова. Использование современных информационных технологий в освоении профессиональных навыков // Актуальные научные исследования в современном мире. 2016 - № 5-3. С. 143-145.
8. Шафоат Махмудовна Исмова, Махсума Нарзикуловна Исмоилова. Вычисление наибольшего собственного значения матрицы и соответствующего ей собственного вектора в среде Mathcad // Academy. № 6(57), 2020. С.9-10.
9. Исмоилова М.Н., Тураева Г.Х. Методы обучения на основе мобильных технологий для изложения новых учебных материалов // Вестник Науки и образования. 2021, №8(111), стр. 65-67.

ИЗУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВТОРИЧНЫХ ЧАСТИЦ В ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Саидханов Насир Шакирович,

д.ф-м.н., профессор, учёный секретарь Физико-технического института
АН РУз Ташкент, ул. Ч.Айтматова 2Б.,
said@uzsci.net

Аннотация. В данной статье подробно описаны такие понятия математической статистики как случайная величина, математическое ожидание, дисперсия. Даны представления о пространственных и азимутальных углах вылета вторичных частиц.

Для исследования однородности событий, найденных в фотоэмульсии, применён метод, основанный на анализ азимутальных угловых распределений. Для этого введены величины β_k , которые не зависят от выбора начальной оси для отсчёта углов φ_i и имеющие следующие свойства: корреляции симметричного типа приводят к возрастанию величины β_2 , но не оказывают существенного влияния на величину β_1 ; корреляции асимметричного типа приводят к возрастанию как β_1 так и β_2 .

Изложены результаты применения величин β_k к экспериментальным и теоретическим данным, которые показали высокую чувствительность этих величин к обнаружению неоднородности событий.

Ключевые слова: частицы, ядра, столкновения, ливни, математическое ожидание, дисперсия, критерий, неоднородность, анизотропия, фотоэмульсия, дифракционная диссоциация, множественность.

STUDY OF THE INHOMOGENEITY OF THE ANGULAR DISTRIBUTIONS OF SECONDARY PARTICLES IN NUCLEAR INTERACTIONS USING STATISTICAL METHODS

Abstract. This article describes in detail such concepts of mathematical statistics as a random variable, mathematical expectation, and variance. Explanations are given for such characteristics of secondary particles as spatial and azimuthal angles of departure of secondary particles.

To study the uniformity of events found in the emulsion, a mathematical statistics method based on the analysis of azimuthal angular distributions was applied. To do this, the values of β_k are introduced, which do not depend on the choice of the initial axis for counting the angles φ_i and have the following properties: correlations of the symmetric type lead to an increase in the value of β_2 , but do not significantly affect the value of β_1 ; correlations of the asymmetric type lead to an increase in both β_1 and β_2 .

The results of the application of β_k values to experimental and theoretical data are presented, which have shown a high sensitivity of these values to the detection of heterogeneity of events.

Keywords: particles, nuclei, collisions, showers, mathematical expectation, dispersion, criterion, heterogeneity, anisotropy, photoemulsion, diffraction dissociation, multiplicity.

YADRO TA'SIRLASHUVLARIDA IKKILAMCHI ZARRACHALARNING BURCHAK TAQSIMOTLARI NOBIRJINSLILIGINI STATISTIK USLUBLAR YORDAMIDA O'RGANISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada matematik statistikaning tasodifiy kattalik, matematik kutish, dispersiya kabi tushunchalari batafsil bayon etilgan. Ikkilamchi zarralarning fazoviy va azimutal burchaklari kabi xarakteristiklari tushuntirilgan.

Fotoemulsiyada topilgan hodisalarning birjinsliligini o'rganish uchun ikkilamchi zarrachalarning azimutal burchak taqsimotlarini analiz qilishga asoslangan matematik statistika uslubi qo'llanilgan. Buning uchun, φ_i azimutal burchaklarni hisoblashning bosh o'qini tanlashga bog'liq bo'lmagan β_k kattaliklar kiritilgan. Ular quyidagi xossalarga ega: simmetrik tipdagi korrelyatsiyalar β_2 kattalikning o'sishiga olib keladi, lekin β_1 kattalikka uncha tasir etmaydi. Assimmetrik tipdagi korrelyatsiyalar ham β_1 , ham β_2 , kattaliklarning o'sishiga olib keladi.

β_k kattaliklarni tajribaviy va nazariy olingan natijalarga qo'llash, bu kattaliklarning birjinslimas

hodisalarini aniqlashga o'ta sezgirligini ko'rsatdi.

Kalit so'zlar: zarrachalar, yadrolar, to'qnashuvlar, quyunlar, matematik kutish, dispersiya, mezon, birjinslimaslik, anizotropiya, fotoemulsiya, difraksion dissotsiatsiya, ko'plamchilik.

Введение. Образование вторичных частиц при столкновениях частиц и ядер высокой энергии может быть связано различными механизмами их взаимодействия. Для определения и исследования этих механизмов изучаются такие характеристики элементарных актов ядерного взаимодействия как множественность, угловые и энергетические характеристики вторичных частиц, образование различных резонансов. Даже при отборе взаимодействий (экспериментаторы их обычно называют ливнями, событиями или звёздами) с одинаковыми множественностями, механизмы их образования могут быть различными. Эти различные механизмы приводят к различию угловых распределений вторичных частиц.

Ливни, содержащие события с различными механизмами их образования, называются неоднородными. Для обнаружения неоднородности ливней можно использовать методы, рассматриваемые в математической статистике [1].

Основные понятия математической статистики. Образованные вторичные частицы в ядерных взаимодействиях могут рождаться с различными угловыми, импульсными и прочими характеристиками. В индивидуальных случаях эти характеристики могут сильно флуктуировать. Все они носят случайный характер.

В математической статистике рассмотрение испытаний с некоторым числом исходов (событий) приводит к понятию случайной величины.

Случайная величина — переменная, значения которой представляют собой численные исходы некоторого случайного феномена или эксперимента. Другими словами, это численное выражение результата случайного события. Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей.

Случайные величины характеризуются такими важными понятиями как математическое ожидание и дисперсия. Кратко рассмотрим эти понятия и их свойства.

Математическое ожидание — это средневзвешенное значение случайной величины.

Для дискретных величин оно определяется как сумма произведений возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности их выпадения.

В случае непрерывных случайных величин формула будет как интеграл произведения случайной величины на функцию плотности распределения вероятностей её возможных значений. Математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание (M) постоянной величины (C) равно самой постоянной

$$M(C) = C. \quad (1)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X). \quad (2)$$

3. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин (X и Y) равно алгебраической сумме их математических ожиданий

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \quad (3)$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY) = M(X)M(Y). \quad (4)$$

Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания равно нулю

$$M(X - M(X)) = 0. \quad (5)$$

Только математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину. На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения, которое называется дисперсией.

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата её отклонения от её математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (6)$$

Дисперсия — это мера рассеяния случайной величины около её математического ожидания.

Если X — дискретная случайная величина, то дисперсию вычисляют по следующим формулам:

$$D(X) = \sum (X_i - a)^2 p_i. \quad (7)$$

где $a = M(X)$;

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (8)$$

Свойства дисперсии случайной величины:

1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю

$$D(C) = 0. \quad (9)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X). \quad (10)$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y). \quad (11)$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y). \quad (12)$$

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (13)$$

Среднее квадратическое отклонение характеризует степень отклонения случайной величины от её математического ожидания и имеет размерность значений случайной величины.

Математическое ожидание и дисперсия характеризуют самые важные черты распределения: его положение на оси OX и степень разбросанности. Для более подробного описания распределения служат моменты высших порядков.

Для изучения механизма процесса множественной генерации частиц при взаимодействиях частиц с нуклонами и ядрами при высоких энергиях большой интерес представляет исследование азимутального углового распределения вторичных частиц.

Вторичная частица характеризуется пространственным углом Θ и азимутальным углом φ . Пространственный угол Θ ($0 \leq \Theta \leq \pi$) (смотрите рисунок 1) представляет собой угол между направлением данной вторичной частицы P и продолжением направления первичной частицы SO .

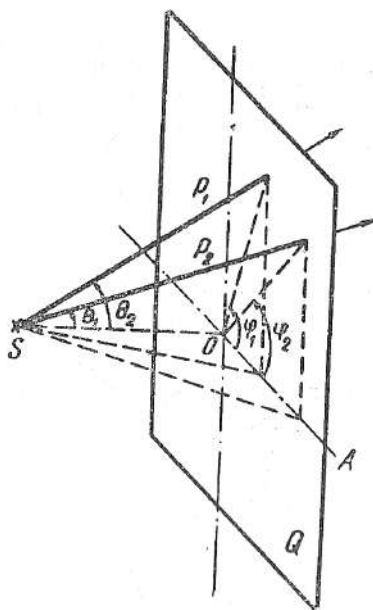


Рисунок 1. Пространственные (Θ_1, Θ_2) и азимутальные (φ_1, φ_2) углы вылета вторичных частиц P_1 и P_2 ; SO -продолжение направления первичной частицы. SOA - плоскость отсчёта азимутальных углов, OA ось отсчета азимутальных углов в плоскости Q .

Азимутальный угол φ отсчитывается на плоскости Q - перпендикулярной направлению первичной частицы и может меняться в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Он определяется как угол между плоскостью, содержащей импульсы данной вторичной и первичной частиц, и произвольной (начальной) плоскостью, содержащей импульс первичной частицы, как показано на рисунке1.

Интерес к изучению азимутальных корреляций вызван тем, что разные модели предсказывают различного типа корреляции азимутальных углов во взаимодействиях. Если распад происходит согласно двухцентровой модели, то будут наблюдаться корреляции типа а) (рисунок 2а). При распаде по одноцентровой модели, наблюдаются корреляции типа б)

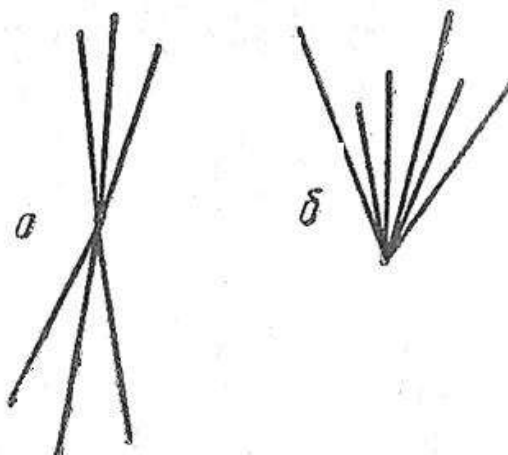


Рисунок 2. Два типа корреляций в азимутальном угловом распределении вторичных частиц. а)-симметричный тип, б) - асимметричный тип

Для анализа угловых распределений в работе [2] было предложено использовать случайную величину β_k

$$\beta_k = \Sigma \cos(k\epsilon_{ij}) / (n(n-1))^{1/2}, \quad (14)$$

где $k = 1, 2$. Множитель $1 / (n(n-1))^{1/2}$, введён для нормировки.

Углы ϵ_{ij} называются парными азимутальными углами.

Парные азимутальные углы ϵ_{ij} между i -ой и j -ой частицами ливня определяются как разность между их азимутальными углами ϕ

$$\epsilon_{ij} = \phi_i - \phi_j \quad (15)$$

($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; ($i \neq j$); $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$; $0 \leq \epsilon_{ij} \leq \pi$; в плоскости, перпендикулярной направлению первичной частицы. Количество таких парных углов в ливне, полное число вторичных частиц в котором есть n , очевидно равно $(n(n-1))/2$.

Для вычисления β_k в ливнях нет необходимости вычислить углы ϵ_{ij} , поскольку величины β_k могут быть легко представлены в функции обычных азимутальных углов ϕ_i .

$$\beta_k = \Sigma \cos(k\epsilon_{ij}) / (n(n-1))^{1/2} = \Sigma \cos k(\phi_i - \phi_j) / (n(n-1))^{1/2} = \{[\Sigma \cos(k\phi_i)]^2 + [\Sigma \sin(k\phi_i)]^2 - n\} / (n(n-1))^{1/2}. \quad (16)$$

Величины β_k не зависят от выбора начальной оси для отсчёта углов ϕ_i , также из их свойств следует, что: а) корреляции симметричного типа (смотрите рисунок 2а) приводят к возрастанию величины β_2 , но не оказывают существенного влияния на величину β_1 ; б) корреляции асимметричного типа (смотрите рисунок 2б) приводят к возрастанию как β_1 (преимущественно) так и β_2 (относительно слабо); в) величины β_k ограничены и могут принимать значения, лежащие в интервале

$$-(n(n-1))^{1/2} \leq \beta_k \leq (n(n-1))^{1/2}. \quad (17)$$

Результаты и их обсуждение. Величины β_k нами были применены для исследования азимутальных корреляций во взаимодействиях протонов с импульсом 20,8 ГэВ/с с тяжёлыми ядрами эмульсии.

Стопка эмульсий Илфорд K5 была облучена в ЦЕРНе протонами с импульсом 20,8 ГэВ/с в сильном магнитном поле напряжённостью $H = 18$ Тл. На длине просмотра 961 м следов первичных протонов исследовались [3] звёзды с большим числом сильноионизирующих частиц ($n_h \geq 8$), имеющие, по крайней мере, две ливневые частицы с углами вылета $\Theta < 17^\circ$ в л.с.к. После определения кривизны [4] ливневых треков с $\Theta < 17^\circ$ измерялась ионизация для двух частиц с наибольшими импульсами по методике [4]. Всего было измерено 722 звёзды. Из дальнейшего анализа исключены 35 звёзд, в которых обе измеренные частицы отрицательно заряжены.

Для отбора $p\pi^\pm$ -звезд, в которых среди ливневых частиц с углами вылета $\Theta < 17^\circ$ максимальные импульсы имеют протон и $\pi^\pm$ мезон, использовался метод наименьших квадратов, описанный в работе [5]. В настоящей работе анализируются 331 звезда с $\chi^2_{\min} < 4$. При таком отборе теряется 13,5% $p\pi^\pm$ -

звезд, а вклад других звёзд в отобранные составляет 13,3%. Для сравнения с экспериментом, были разыграны случайные звёзды, приготовленные по модели [6].

В таблице 1 приведены результаты исследования азимутальных корреляций в отобранных нами экспериментальных событиях и по модели [6]. $\langle\beta_i\rangle$ - средние значения величин (15).

Таблица 1.

Величина	Эксперимент	Модель
$\langle\beta_1\rangle$	0.075 ± 0.069	-0.201 ± 0.037
$\langle\beta_2\rangle$	0.046 ± 0.068	0.032 ± 0.043

В модели [6] наблюдаются чёткие азимутальные корреляции ($\langle\beta_1\rangle < 0$), связанные с законом сохранения поперечного импульса. На эксперименте его влияние компенсируется динамической азимутальной асимметрией. С помощью величины β_2 корреляции не обнаружены ни в случайных звёздах, ни в экспериментальных. Это связано со слабой чувствительностью величины β_2 к закону сохранения импульса [7] и азимутальной асимметрии [2].

В работе [8] нами были исследованы азимутальные корреляции в звёздах с множественностями $n_s = 4 \div 8$ найденных в фотоэмульсии при импульсе первичных протонов 25 ГэВ/с.

В таблице 2 приведены значения величин β_2 для каждой из групп экспериментальных событий.

Таблица 2.

n_s	Число ливней	$\langle\beta_2\rangle$
4	171	$0,117\pm 0,026$
5	124	$0,161\pm 0,036$
6	135	$0,052 \pm 0,020$
7	65	$0,031\pm 0,022$
8	49	0

Как видно из таблицы, при $n_s = 5$ значение величины $\langle\beta_2\rangle$ выше, чем при соседних чётных значениях n_s . Отсюда был сделан вывод, что ливни с $n_s = 5$, отличные от рп-столкновений, имеют в среднем более узкое угловое распределение в л.с. по сравнению с рп-столкновениями имеют в среднем более узкое угловое распределение в л.с. по сравнению с рп-столкновениями той же множественности. Было предположено, что этими ливнями являются когерентные взаимодействия протонов со сложными ядрами эмульсии, при которых всегда образуется нечётное число вторичных заряженных частиц:



Было оценено среднее сечение этой реакции, приводящих к образованию пяти заряженных частиц и любого количества нейтральных, которое оказалось равным:

$$\sigma = 0,60 \pm 0,31 \text{ мбн.} \quad (19)$$

В работе [2] были проанализированы распределения азимутальных углов ϕ_i в 85 ливнях, образованных однозарядными частицами космических лучей и удовлетворяющих следующим критериям отбора: 1) число сильноионизирующих частиц $n_h \leq 5$ (квазинуклонные взаимодействия); 2) число заряженных релятивистских $n_s \geq 8$. Энергия первичных частиц в этих ливнях изменялась в широких пределах (от нескольких десятков до 10^3 ГэВ). Для каждого ливня были подсчитаны значения β_k . Результаты приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Характеристика ливней	Величина	$\langle\beta\rangle$	$\langle\beta\rangle(m)^{1/2}$
$n_h \leq 5$	$\langle\beta_1\rangle$	-0,24	2,2
$8 \leq n_s < 22$	$\langle\beta_2\rangle$	-0,04	0.4

Приведённые данные показывают, что азимутальная изотропия и статистическая независимость углов ϕ_i не имеют места для рассмотренных 85 ливней. В этой работе был сделан вывод о том, что основной причиной нарушающей эти условия является закон сохранения импульса, который приводит к уменьшению математического ожидания величины $\langle\beta_1\rangle$, но который не влияет на распределение величины $\langle\beta_2\rangle$ при $n_s \geq 8$. Высокая чувствительность метода азимутальных корреляций также была подтверждена в работах [9,10].

Закключение. Показана высокая чувствительность величин β_k для обнаружения неоднородности ливней образованных во взаимодействиях частиц с нуклонами ядрами. Впервые азимутальные корреляции, обнаруженные при 25 ГэВ/с, были объяснены вкладом когерентных взаимодействий протонов со сложными ядрами эмульсии, при которых всегда образуется нечётное число вторичных заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Трофимова Е. А., Кисляк Н. В., Гилёв Д. В.. Теория вероятностей и математическая статистика. Екатеринбург. Издательство Уральского университета 2018г. 160 стр.
2. Абдужамидов Ш., Азимов С.А., Чернова Л.П., Чернов Г.М., Чудаков В.М.. Азимутальные корреляции в протон-нуклонных взаимодействиях при импульсе 25 ГэВ/с. ЖЭТФ, т.45, 407 стр., 1963г.
3. Гуламов К.Г., Саидханов Н.Ш., Хаитов М.С., Чудаков В.М.. Соударения протонов с тяжёлыми ядрами эмульсии при 20.8 ГэВ/с. Препринт ФТИ РУз. 154-91-ФВЭ. Ташкент, 1991г.
4. Saidkhanov N.Sh. Application of least squares method for particle identification and sampling events in photoemulsion. // Mental enlightenment scientific methodological journal. V5 No.03, 2024. 178-187.
5. Саидханов Н.Ш. Неупругие взаимодействия протонов и ядер с нуклонами и ядрами при высоких и сверхвысоких энергиях. Изд-во «Фан» АН РУз. Ташкент, 2021г., 214 стр.
6. B. Nilssen-Almkvist, E. Stenlund. Interactions between hadrons and nuclei: The Lund Monte-Carlo – FRITIOF version 1.6. Comp.Phys.Comm. 43 (1987)387.
7. Чудаков В.М. Неупругие взаимодействия протонов с ядрами фотоэмульсии при высоких энергиях. Автореферат докторской диссертации. 1972г. Ташкент.
8. Азимов С.А., Абдужамидов Ш., Саидханов Н.Ш. Когерентная дифракционная генерация пионов протонами при высоких энергиях. В сб. «Множественные процессы при высоких энергиях». Ташкент, ФАН, 1976г. Стр.231-255.
9. Абдурахимов А.У. Исследование множественного рождения частиц в адрон-адронных столкновениях при высоких энергиях. // Молодой ученый. 2017. № 11 (145). С. 8-10. URL: <https://moluch.ru/archive/145/40578/>.
10. Тиль Е.А. Исследование πN – взаимодействий с образованием медленного протона отдачи. В сб. «Неупругие взаимодействия адронов с ядрами при высоких энергиях». Ташкент, ФАН, 1978г. Стр.104-117.

**MAGNETIC PROPERTIES OF RARE EARTH CHROMO BORATES
($\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$) AT HIGH TEMPERATURES**

Kuvandikov Obloqul Kuvandikovich,

Samarkand State University named after Sharof Rashidov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

kuvandikov@rambler.ru

Shodiev Zokir Mirtozayevich,

Samarkand State University named after Sharof Rashidov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

shodiyevzm@gmail.com

Sulaymanov Obid Ablakulovich,

Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant

o-sulaymanov@rambler.ru

Abstract. The magnetic susceptibility of $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ was measured by the Faraday method in the temperature range 300-1200 K and differential thermal analysis of the sample was carried out. It has been established that the dependences $\chi^{-1}(T)$ for each phase obey the Curie–Weiss law. The Curie temperatures, Néel temperatures and magnetic moments corresponding to the chemical formula of the crystals were found.

Keywords: exchange interaction, paramagnetic temperature, magnetic susceptibility, magnetic moment, law of Curie–Weiss, the rare earth borates.

**KAMYOY YER METALLARI ASOSIDAGI XROMOBORATLARINING ($\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$)
YUQORI TEMPERATURALARDA MAGNIT XOSSALARI**

Annotatsiya. 300-1200 K temperaturalar oralig'ida $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ ning magnit qabul qiluvchanligi $\chi(T)$ Faraday usuli yordamida o'lchandi hamda namunaning differensial termik tahlili olindi. Har bir faza uchun $\chi^{-1}(T)$ bog'lanishlar Kyuri-Veys qonuniga bo'ysinishi aniqlandi. Tajriba natijalaridan foydalanib namunaning kimyoviy formula birligiga to'g'ri keluvchi magnit momenti, Kyuri va Neel temperaturalari aniqlandi.

Kalit so'zlar: almashinuv o'zaro ta'siri, paramagnit harorat, magnit qabul qiluvchanlik, magnit moment, Kyuri-Vays qonuni, kamyov Yer boratlari.

**МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ХРОМОБОРАТОВ ($\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$)
ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

Аннотация. В интервале температур 300-1200K методом Фарадея измерена магнитная восприимчивость $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ и проведён дифференциально-термический анализ образца.

Установлено, что зависимости $\chi^{-1}(T)$ для каждой фазы подчиняются закону Кюри-Вейсса. Найдены температуры Кюри, температуры Нееля и магнитные моменты, соответствующие химической формуле кристаллов.

Ключевые слова: обменное взаимодействие, парамагнитная температура, магнитная восприимчивость, магнитный момент, закон Кюри–Вейсса, редкоземельные бораты.

Introduction. The combination $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ belongs to a broad class of borates and has the generic chemical formula $\text{RM}_3(\text{BO}_3)_4$ (where $\text{M} = \text{Al}, \text{Ga}, \text{Sc}, \text{Fe},$ and Cr) [1]. R is a rare earth element. This class of crystals exhibits peculiar magnetoelectric, optical, and magnetic characteristics. The fact that many of them are multiferroics greatly influences researchers' interest in members of this family [2]. Due to f-d interaction, rare-earth borates with two magnetic subsystems-where M is a 3d metal Fe or Cr and R is a 4f element of the lanthanide group-can be differentiated into a distinct group. These rare-earth borates exhibit a variety of peculiar magnetic characteristics. Two structural modifications (R32 and C2/c) were discovered in the case of rare-earth-chromium borates. These modifications frequently coexist in crystals [3], and their ratio appears to be dependent on the particular rare-earth element, production circumstances, and the concentration of the

starting components in the melt. The structures of both modifications are highly similar and may be reduced to be spiral chains of CrO_6 octahedra with a shared edge that are joined into a three-dimensional structure using trigonal prisms RO_6 and flat triangular groups BO_3 . The primary distinction between these alterations lies in the distinct chain structure and a little variation in the Cr-Cr distances within the chains.

The peculiarities of the development of the magnetic structure of the rare earth chromo borates family, which is dictated by the interaction of rare earth ions with chromium ions, have sparked interest in the study of these compounds. The magnetic ion affects the magnetic characteristics of chromo borates. It should be noted that while study on rare-earth chromo borates is now restricted, that on rare-earth ferrobates, the magnetic characteristics are currently rather thoroughly explored [2].

Prior magnetic investigations on rare-earth chromo borates have demonstrated that these substances exhibit antiferromagnetic ordering at approximately 5 K ($\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$) [4], a considerably lower temperature than the magnetic ordering temperatures $T_N \sim 23\text{--}40$ K typical for the subgroup of rare-earth ferrobates.

In this study, we focused on rare earth chromium borates ($\text{RCr}_3(\text{BO}_3)_4$), where the magnetic characteristics should be attributed to the rare earth element [5]. In this work, the temperature dependence of the magnetic susceptibility $\chi(T)$ of rare-earth chromo borates $\text{RCr}_3(\text{BO}_3)_4$ is studied experimentally across a large temperature range (300–1200 K). From the dependence $\chi^{-1}(T)$, the major magnetic properties of these borates are determined. Using high-temperature pendulum balances and an extra atmosphere of pure helium, the relative Faraday technique (using a standard) was used to explore the dependency $\chi(T)$ of rare earth chromo borates [6]. The measurement's maximum relative error of χ was kept around 3%.

Results and discussion. Figure 1 displays the experimental dependences $\chi(T)$ and $\chi^{-1}(T)$ of the $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ sample under study. The temperature dependency of $\chi(T)$ in the 300–1200 K temperature range is displayed in the inset. An examination of Figure 1 reveals that these dependences are changing, with each dependence going through two breakdowns. The temperature breakdowns for the sample under study are noted at 560 and 945 K. It is noteworthy that the $\chi^{-1}(T)$ dependency slope grows after the second break and reduces after the first break. The $\chi^{-1}(T)$ dependences are linear before, between, and after the breaks, indicating that the Curie-Weiss law [7, 8] is followed by the $\chi(T)$ dependence behavior in these temperature intervals:

$$\chi = \frac{C}{T + \theta_a} \quad (1)$$

where C is the Curie-Weiss constant, θ_a is the asymptotic Curie temperature.

The following provides an explanation for the breaks seen in the $\chi^{-1}(T)$ dependency of the borates under study. The examined compounds contain known magnetically active components, Sm and Cr, whose magnetic properties are determined by 4f and 3d electrons located at their crystalline sublattice locations, respectively; the $(\text{BO}_3)_4$ radical exhibits weak paramagnetic capabilities.

A linear dependence of $\chi^{-1}(T)$ is observed over a wide temperature range, which demonstrates the invariance of the spin state of Cr^{3+} and Sm^{3+} ions and the absence of any phase transformations [9, 10].

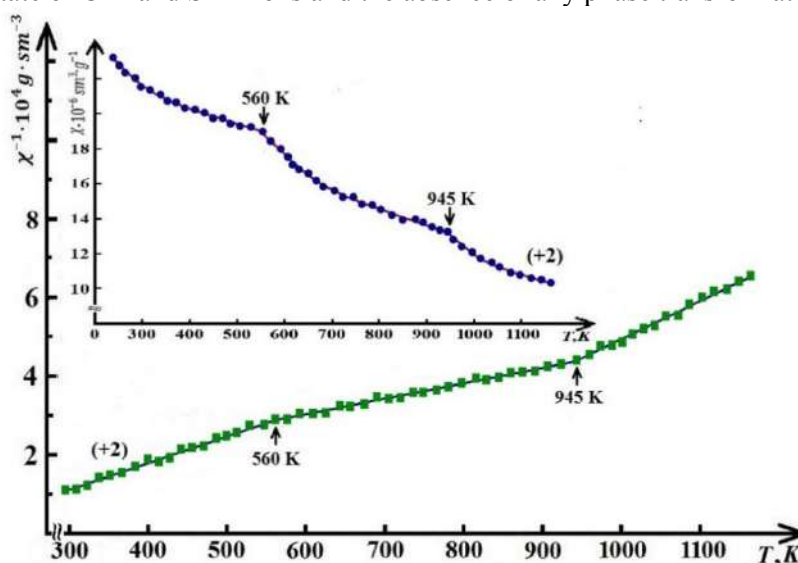


Figure 1. Dependences $\chi(T)$ and $\chi^{-1}(T)$ of rare earth chromo borates $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$

Among the magnetically active elements, below ambient temperature, 4f metals (Sm) exhibit a magnetically ordered state, whereas below 235 K, 3d metal Cr exhibits antiferromagnet properties.

The experimental dependences $\chi(T)$ of the studied borates are theoretically described as follows. The well-known Van Vleck formula [10] can be used to characterize the magnetic susceptibility of the borates under study.

$$\chi = g_J^2 \mu_B^2 \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} \left(\frac{\langle n | \hat{M}_z | n \rangle^2}{k_B T} + 2 \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \hat{M}_z | m \rangle^2}{E_n - E_m} \right), \quad (2)$$

where g_J is the Lande factor, Z is the statistical sum, $\hat{M}_z$ is the operator of the average value of the magnetic moment along z axis, $\langle n | \hat{M}_z | m \rangle$ is the matrix element of the operator $\hat{M}_z$, $\Delta E = E_n - E_m$ is the variation between the ground state and excited state energies of four (or three) electrons; T is the absolute temperature; k_B is the Boltzmann constant; and μ_B is the Bohr magneton. Two sublattices (magnetic subsystems) may be distinguished in the crystal lattice of rare earth chromo borates: R (R=Nd, Sm, Lu) and FeMG (FeMG=Cr). The total of the two contributions from the chromium and rare-earth subsystems still determines the magnetic susceptibility $\chi(T)$:

$$\chi = \chi^R + \chi^{IGM} \quad (3)$$

The linear character of the experimental dependences $\chi^{-1}(T)$ of the studied borates (Fig. 1) indicates that for them the second term in expression (2) has a negligible value. Taking this into account, for rare-earth subsystems (ions) (in the case of wide multiplets $\Delta E \gg k_B T$) equation (2) takes the form [9]:

$$\chi^R = \frac{N_A}{A} \cdot \frac{g_J^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T} = \frac{N_A}{A} \cdot \frac{\mu_J^2}{3k_B T}, \quad (4)$$

where $\mu_J = g_J \sqrt{J(J+1)} \mu_B$ are the effective numbers of magnetic moments per rare earth ion, A is the atomic mass of the rare earth metal, N_A is Avogadro's number, and J is the quantum number of the total mechanical moment of the ground state of the rare earth ion.

Equation (2) takes into consideration the phenomena of "freezing" of the orbital moments of 3d electrons and fields the following form for the IMG subsystem (ions) in the situation of narrow multiplets $\Delta E \approx k_B T$ [10, 11]:

$$\chi^{IMG} = \frac{N_A}{A} \cdot \frac{g_S^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3k_B T} = \frac{N_A}{A} \cdot \frac{\mu_S^2}{3k_B T}, \quad (5)$$

where S is the quantum number of the total spin mechanical moment of the IMG ion's ground state, A is the atomic mass of Cr, and $\mu_S \approx 2\sqrt{S(S+1)} \mu_B$ is the effective number of magnetic moments per iron group metal (IMG) ion.

This is explained by the parameter θ_a , which is proportional to the energy of the magnetic interaction between R (or IMG) ions. In light of this, we can replace T in formulae (4) and (5) with $T + \theta_a$, providing the empirical Curie-Weiss law (1) for each subsystem.

Using the experimental $\chi^{-1}(T)$ dependences of the borates under study and accounting for (1), the primary magnetic properties of each were identified: θ_a , C . Subsequently, based on the value of C , the magnetic moment values for each unit of their chemical formula were computed using the following formula:

$$\mu_{for} = 2,83 \sqrt{CM} \mu_B, \quad (6)$$

where M is the molar mass of rare earth chromo borates.

Details on the contributions of two paramagnetic subsystems are contained in the effective magnetic moment [9]. Considering the presence of three chromium ions Cr^{3+} and one rare earth ion R^{3+} in one formula unit, it is easy to obtain a theoretical estimate of the value of the effective magnetic moment of the compound using the formula

$$\mu_{eff}^{theor} = \sqrt{3\mu_{Cr}^2 + \mu_R^2} \text{ or } \mu_{eff}^2 = 3\mu_{Cr}^2 + \mu_R^2 = 3g_{Cr}^2S_{Cr}(S_{Cr} + 1) + g_R^2S_R(S_R + 1) \quad (7)$$

where μ_{Cr} and μ_R , respectively, are the magnetic moments of the Cr^{3+} and R^{3+} ions.

This approach is fully justified by the high linearity of $\chi^{-1}(T)$ dependence found in the experiment. μ_{Cr} can be calculated from the main term of Cr^{3+} ion (3d configuration) $^4F_{3/2}$ ($S_{Cr}=3/2$ with the Lande factor $g_{Cr}=0$), and μ_R can be calculated from the main term of Sm^{3+} ions $^4I_{9/2}$ ($4f^5$ configuration, $g_{Sm}=2/7$). The computed values for the investigated substances match the experimental data rather well. Table 1 presents the results of the research.

Table 1.

Calculated magnetic characteristics of rare earth chromo borates

Sample	Temperature interval, T (K)	T, K	θ , K	C, $10^{-3} \text{ sm}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{g}^{-1}$	μ_{for}, μ_B	μ_{theor}, μ_B
$SmCr_3(BO_3)_4$	300-560	8	-147	15.7	8.25	6,76
	560-945		-437	19.3	9.15	
	945-1200		-17	14.5	7.9	

The table analysis reveals that the exchange interaction in these compounds appears to match with the antiferromagnetic ordering of the crystal structure of the compounds under study, as shown by the negative value of θ_a . The general rule that states that the magnetic interaction between Cr^{3+} ions increases with decreasing distance between them is supported by this research result. It can be considered that Cr^{3+} ion is in a high-spin state for any of $RCr_3(BO_3)_4$ compounds, which is also confirmed by the large values of μ_{theor} compared to μ_S for the free Cr^{3+} ion ($\mu_S^{Cr} = 3.87\mu_B$) [9]. Therefore, the characteristics of both lanthanide (4f electrons) and chromium (3d electrons) are responsible for the magnetic properties of the borates according to the study.

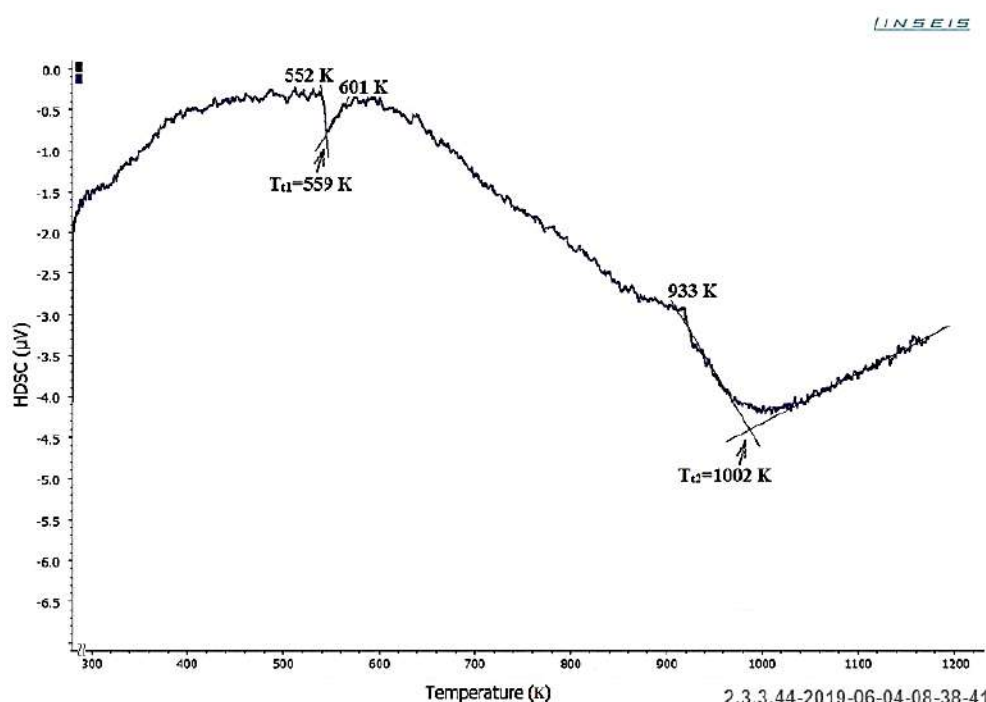


Figure 2. Differential thermal analysis (DTA) curve for rare earth chromoborate $SmCr_3(BO_3)_4$

Differential scanning calorimetry (DSC) curves were recorded on thermograms to estimate thermal effects [12]. Figure 2 shows a thermogram obtained by us as a result of studying rare earth chromoborate; it shows the complete heating cycle.

The rare earth chromoborate $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ was used as the object of study.

Thermal analysis of the studied rare earth chromoborate revealed endothermic effects on the DSC curve with the peak for $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ at 552/601 K and 933/1002 K.

The first of the effects is apparently due to the BCC-FCC phase transition. The thermal effect for $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ at 559 K may be due to the BCC-FCC transition, leading to an increase in the magnetic susceptibility of the rare earth chromoborate.

The effect, which begins at the above-listed temperatures for the samples, consists of two peaks, the appearance of which is associated with the structural rearrangement of rare-earth chromoborate, as well as with magnetic disorder at the Néel temperature, accompanied by a transition from an antiferromagnetic state to a paramagnetic one.

It has been established that the BCC-FCC transition in $\text{SmCr}_3(\text{BO}_3)_4$ is the first-order transition and is characterized by a sharp change in the cell parameters. It is noteworthy that at the same temperature, a magnetic phase transition from a magnetically ordered to a paramagnetic state is observed upon heating [13].

According to thermogravimetry (TG) data, virtually no mass loss was observed.

Chromo borates belong to island structures; the planes of isolated triangular BO_3 radicals practically coincide entirely. Cr atoms are coordinated by six O atoms, forming almost regular CrO_6 octahedra. CrO_6 octahedra, connecting along the edges, form curved chains along the a -axis, which form a framework, connecting to each other at the vertices. The maximum thermal expansion of the structure occurs perpendicular to the coincident planes of triangular BO_3 radicals in the $\text{RCr}_3(\text{BO}_3)_4$ structure.

It was found that the maximum thermal expansion occurs along the a -axis, perpendicular to the preferred orientation of the BO_3 triangles in the crystal structure.

Conclusions. The research results allow for the drawing of the following conclusions:

1. The dependences of rare-earth chromo borates' magnetic susceptibility $\chi(T)$ in the paramagnetic state were measured for the first time between 300 and 1200 K.
2. Based on the $\chi^{-1}(T)$ dependency of the studied chromo borates, the asymptotic Curie temperature θ_a , the Curie-Weiss constant C , the magnetic moment per chemical formula μ_{for} and the theoretical value of the magnetic moment $\mu_{\text{eff}}^{\text{theor}}$ for the compound were determined.
3. It has been proven that the Van Vleck hypothesis of paramagnetism correctly describes the experimental dependences $\chi(T)$ of the examined rare-earth chromo borates.

REFERENCES:

1. A.N. Bludov, Yu.A. Savina, V.A. Pashenko, S.L. Gnatchenko, I.V. Kolodiy, V.V. Maltsev, N.N. Kuzmin, N.I. Leonyuk. *Magnetic properties of $\text{LaCr}_3(\text{BO}_3)_4$ crystal*. // *Low Temperatures Physics*, 2020, volume 46, no. 6, p. 767-770. [in Russian]
2. J. E. Hamann-Borrero, M. Philipp, O. Kataeva, M. v. Zimmermann, J. Geck, R. Klingeler, A. Vasiliev, L. Bezmaternykh, B. Büchner, and C. Hess. *Nonresonant x-ray magnetic scattering on rare-earth iron borates $\text{RFe}_3(\text{BO}_3)_4$* . // *Phys. Rev. B* 82, 094411 – Published 7 September 2010.
3. V.S. Kurazhkovskaya, E.A. Dobretsova, E.Yu. Borovikova, V.V. Maltsev, N.I. Leonyuk. *Infrared spectroscopy and structure of rare earth chromium borates $\text{RCr}_3(\text{BO}_3)_4$ ($R = \text{La-Er}$)*. // *Journal of Structural Chemistry*. 2011. Vol. 52, no. 4. [in Russian]
4. Vasiliev A.N., Popova E.A. // *Low Temp. Phys.* 32, 735 (2006).
5. Yukio Hinatsu, Yoshihiro Doi, Kentaro Ito, Makoto Wakeshima, and Abdolali Alemi. // *Journal of Solid State Chemistry* 172 (2003) 438-445.
6. Kuvandikov O.K., Shakarov Kh.O., *Structural and magnetic properties of compounds of rare earth metals with normal and transition metals at high temperatures*. – Tashkent: Publishing house “Fan Va Technology”, 2017. -308 p. [in Russian]
7. O.K. Kuvandikov, N.I. Leonyuk, V.V. Maltsev, N.N. Kuzmin, Kh.O. Shakarov, Z.M. Shodiev, B.U. Amonov, O.A. Sulaimonov. *Magnetic properties of rare earth chromo borates at high temperatures*. // *News of Higher Educational Institutions*. v. 64, No. 5. 2021. [in Russian]
8. O.K. Kuvandikov, Kh.O. Shakarov, U.T. Usarov, Z.M. Shodiev, B.U. Amonov, O.A. Sulaimonov. *Paramagnetic Properties of Rare Earth Chromium Borates at High Temperatures*. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* 2022, vol. 44, No. 2, pp. 151–157.

9. A.N. Bludov, Yu.A. Savina, V.A. Pashchenko, S.L. Gnatchenko, V.V. Maltsev, N.N. Kuzmin, N.I. Leonyuk. *Magnetic properties of $\text{GdCr}_3(\text{BO}_3)_4$ single crystal*. // *Low Temperature Physics*, 2018, v. 44, no. 5, p. 554–560. [in Russian]
10. Kuvandikov O.K., Shakarov Kh. O., Shodiev Z.M., and Rustamov A. // *Journal of communications technology and electronics*. V.52, Number 9, 2007, pp.1058-1061.
11. Kadomtseva A.M., Popov Yu.F., Vorobyov G.P., Pyatakov A.P., Krotov S.S., Kamilov K.I., Ivanov V.Yu., Mukhin A.A., Zvezdin A.K., Kuzmenko A.M., Bezmaternykh L.N., Gudim I.A., Temerov V.L. // *Low Temperature Physics*, 2010. v. 36. Issue 6. p. 640-653. [in Russian]
12. L.V. Spivak, Yu.N. Simonov, M.A. Dyshlyuk. *Differential scanning calorimetry: new experimental possibilities*. // *Bulletin of Perm University*, 2019, Physics, issue 3, pp. 52-57. Doi:10.17072/1994-3598-2019-3-52-57. [in Russian]
13. Gulyaeva R.I., Selivanov E.N., Vershinin A.D. *Thermal properties of pyrrhotite, bornite and pentlandites*. RMS DPI 2010-1-119-0, http://www.minsoc.ru/2010-*1-119-0.

D18 DONOR POLIMER VA TURLI AKSEPTORLAR BILAN OLINGAN FAOL QATLAMLARNING OPTIK XOSSALARI

Saparbayev Aziz Adamovich,

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti katta ilmiy xodimi

saparbavaziz83@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada D18 donor polimerning va D18 donor polimer bilan turli xil tarkibli akseptorlar asosidagi faol qatlamlarning optik xossalari tadqiq qilindi. Donor va akseptor aralamashmasi asosida olingan faol qatlamlarga asoslangan eng keng tarqalgan polimer quyosh elementidagi donor polimerning bog'lanish va tartiblangan strukturasi D18, PC₇₁BM va L8-Bo larning alohida va aralashma holatidagi qatlamlarning optik xossalarining hajmiy getero-strukturasi asosidagi ta'siri tahlil qilindi. Bunda fulleren bo'lmagan L8-Bo akseptor va D18 donor polimer asosidagi faol qatlamlarning optik xossalari D18:PC₇₁BM asosidagi faol qatlamlarga nisbatan ancha yaxshilangan yutilish spektriga ega bo'lishi aniqlandi va buning sabablari tushuntirildi. Ushbu tadqiqotlardagi eng optimallashtirilgan D18:PC₇₁BM faol qatlamlarga asoslangan PQElarning fotovoltaiik natijalari ochiq zanjir kuchlanishi 0,98 V, qisqa tutashuv tok zichligi 11,26 mA/sm², to'ldirish faktori (FF) 71,4% va EO'S esa 8 % tashkil qilgan bo'lsa, D18:L8-Bo faol qatlam asosli PQElarning fotovoltaiik qiymatlari ochiq zanjir kuchlanishi (V_{oc}) 0,90 V, qisqa tutashuv tok zichligi (J_{sc}) 24.55 mA/sm², to'ldirish faktori (FF) 75,8% va EO'S esa 16,7 % tashkil qildi.

Kalit so'zlar: polimer quyosh elementlari, D18 donor polimeri, fulleren bo'lmagan akseptor, PC₇₁BM.

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АКТИВНЫХ СЛОЁВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОНОРНОГО ПОЛИМЕРА D18 И РАЗЛИЧНЫХ АКЦЕПТОРОВ

Аннотация. В данной статье исследованы оптические свойства донорного полимера D18 и активных слоёв на основе донорного полимера D18 и акцепторов различного состава. На основе объёмной гетероструктуры проанализировано влияние D18, PC₇₁BM и L8-Bo на оптические свойства отдельных и смешанных слоёв, на связывание и упорядоченную структуру донорного полимера в наиболее распространённых полимерных солнечных элементах, основанных на смеси донора и акцептора. Установлен факт и объяснены причины того, что оптические свойства активных слоёв на основе нефуллеренового акцептора L8-Bo и донорного полимера D18 имеют значительно улучшенный спектр поглощения по сравнению с активными слоями на основе D18:PC₇₁BM. Фотоэлектрические значения наиболее оптимизированных PQE на основе активного слоя D18:PC₇₁BM в этих исследованиях составляли J_{sc} , V_{oc} , FF, и ЭПЭ: 11,26 мА/см², 0,98 В, 71,4% и 8 %, соответственно. ПСЭ на основе D18:L8-Bo составили J_{sc} , V_{oc} , FF, и ЭПЭ: 24.55 мА/см², 0,90 В, 75,8% и 16,7 %, соответственно.

Ключевые слова: полимерные солнечные элементы, донорный полимер D18, нефуллереновый акцептор, PC₇₁BM.

OPTICAL PROPERTIES OF ACTIVE LAYERS OBTAINED WITH D18 DONOR POLYMER AND DIFFERENT ACCEPTORS

Abstract. In this article, the optical properties of the donor polymer D18 and the active layers based on different compositions of acceptors with the D18 donor polymer were investigated. The effects of the donor polymer's bonding and ordered structure in the most common polymer solar cells, based on donor-acceptor mixtures, were analyzed. The study examined the optical properties of layers of D18, PC₇₁BM and L8-Bo in separate and mixed states, based on the bulk heterostructure. It was found that the optical properties of active layers based on the fullerene-free acceptor L8-Bo and the D18 donor polymer have significantly improved absorption spectra compared to the active layers based on D18:PC₇₁BM and the reasons for this were explained. The photovoltaic values of the most optimized PSCs based on D18:PC₇₁BM active layers were as follows: J_{sc} , V_{oc} , FF, and PCE were 11,26 mA/cm², 0,98 V, 71,4% and 8 %, respectively, while the photovoltaic values of PSCs based on D18:L8-Bo were 24.55 mA/cm², 0,90 V, 75,8% and 16,7 %, respectively.

Keywords: polymer solar cells, D18 donor polymer, nonfullerene acceptor, PC₇₁BM.

Kirish. D18 polimeri yuqori samarali polimer quyosh elementlari uchun ishlatiladigan materiallardan biri bo'lib, bu turdagi polimerlar PQElarda donor vazifasini bajaradi, ya'ni ular yorug'likni yutib, elektronlarni uyg'otadi va energiya hosil qiladi.

D18 yuqori darajada to'g'ri chiziqli va konjugatsiyalangan zanjirga ega bo'lib, bu uning elektron tashish va yorug'likni yutish xususiyatlarini yaxshilaydi. D18 polimeri bilan yasalgan PQElar boshqa polimerlaridan ishlangan PQElarga nisbatan ko'proq samaradorlikka ega bo'lib, hozirgi paytda EO'S 18% dan oshdi[1-3], bu natija esa PQElar istiqboli uchun yuqori ko'rsatkich hisoblanadi. D18 polimeri organik erituvchilarda yaxshi eriydi, bu esa unga ishlov berish va PQElar tayyorlash jarayonlarini osonlashtiradi[4-7]. D18 polimerining yuqori ionizatsiya potentsiali va past LUMO (Lowest Unoccupied Molecular Orbital) darajasi uni yuqori samaradorlikka erishish uchun optimal xossalarni namoyon qiladi. D18 polimer donorining absorpsion xossalari PQElarda uning samaradorligiga bevosita ta'sir ko'rsatadi[8-10].

Ekspperimental usul. PQElar uchun faol qatlamlar D18, L8-Bo va PC₇₁BM polimerlarining o'zaro aralashmasi teng og'irlikda ya'ni 1:1 nisbatlarida olinib xlorbenzol erituvchisi tayyorlandi. D18, L8-Bo va PC₇₁BM materiallari 10 mg miqdorida olinib, 0,5 ml xlorbenzol erituvchisida eritiladi. Aralashma xona temperaturasida magnitli meshalka yordamida materiallarning suyuqlik bo'ylab bir tekis konsentratsiyali aralashma tayyor bo'lishigacha 6 soat aralashtirildi. Tayyor bo'lgan aralashmani "spin coating" usulida shisha/ITO ustiga yotqiziladi. Buning uchun shisha/ITO tagliklari ultratovushli vannada ketma-ket uchta bosqichda tozalanadi. Izopropil spirtida tozalab bo'lgandan so'ng tagliklar yuzasini yuqori tozalikdagi argon gazi yordamida purkash usuli bilan ITO shisha quritiladi. Tozalangan shisha/ITO tagliklar ustiga PEDOT:PSSni "spin coating" usuli yordamida 4000 ayl/daq. tezlikda 15 sekund davomida aylantirib qalinligi 40 nm atrofida bo'lgan PEDOT:PSS qatlam hosil qilindi. Tayyor bo'lgan shisha/ITO/PEDOT:PSS tagliklar argon gazi bilan to'ldirilgan qo'lqopli maxsus qutiga joylashtiriladi.

Shisha/ITO/PEDOT:PSS tagliklari ustiga sof D18, L8-Bo, PC₇₁BM va ularning aralashmalaridan tayyorlangan D18:L8-Bo va D18:PC₇₁BM yupqa qatlamlar turli xil sharoitlarda yotqiziladi va tayyor bo'lgan yupqa qatlamlarning optik xossalari va fotovoltaiik parametrlari tadqiq qilindi. Tayyor bo'lgan shisha/ITO/PEDOT:PSS/faol qatlam fotoelementi ustiga esa yupqa metall elektrod alyuminiy (Al) kontakti vakuumli kamerada bug'lantirish yordamida yotqizish orqali tayyorlandi.

Tadqiqot namunalarining yutilish spektrlari UV-1280 (Shimadzu, Yaponiya) spektrofotometri yordamida 300-1100 nm spektral sohada o'lchangan. PQElarning fotovoltaiik parametrlari quyosh spektri nurlanishiga yaqin bo'lgan ksenon lampa asosidagi Keithley 2601B (AQSh) voltamometri yordamida o'lchandi.

Natijalar va muhokama. 1-rasm va 2-rasmda D18 polimerining asosiy absorpsion xossalari, ya'ni D18 polimerining yorug'likni yutish spektri grafigi keltirilgan. Grafikdan anglash mumkinki, D18 donor polimerning yutilish spektrining to'lqin soha kengligi 400 nm dan 600 nm gacha diapazonda bo'ladi, bu esa uni fulleren bo'lmagan akseptor materiallar bilan birgalikda faol qatlam hosil qilib, keng to'lqin uzunligi sohasida yorug'likni samarali yutishga imkon beradi. Berilgan grafikda eng yuqori yutilish asosan 600 nm atrofida kuzatilib, bu to'lqin uzunligi atrofida D18 polimer yorug'likning eng katta qismini yutadi. Bu to'lqin uzunligi ko'proq sariq va qizil to'lqin uzunliklari mos keladi, bu esa polimerning fotonlar bilan o'zaro ta'sirini ko'rsatadi. Qisqa to'lqin uzunliklarida ham ya'ni 300-550 nm oralig'ida ham biroz yutilish kuzatilgan. Bu oraliq esa ko'k va ko'k-yashil spektrlarga mos keladi. Katta to'lqin uzunliklarida yutilishini ko'rib chiqadigan bo'lsak, 600 nm dan keyin asosan 700 nm dan yuqori to'lqin uzunliklarida yutilish keskin tushib ketgan va juda past qiymatlarga ega bo'lgan. Bu infraqizil to'lqin uzunligi diapazonida yutilishning ancha past ekanligini bildiradi[11-12]. D18 polimerining molyar absorpsiya koeffitsienti yuqori, ya'ni u yupqa qatlam holatida ham katta miqdorda yorug'likni samarali yutadi. Bu PQElarda materialning minimal miqdori bilan maksimal yorug'lik yutilishini ta'minlaydi. Ko'pincha, bu koeffitsient $1.0 \times 10^5 \text{ L mol}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ga yaqin[13-15]. Yorug'likni yutilish piki 585 nm to'lqin uzunligiga mos keladi. D18 polimerining 585 nm to'lqin uzunligini maksimal yutishining asosiy sababi uning kimyoviy va elektron tuzilishiga bog'liq bo'lib, bu holatni tushuntirib beradigan ba'zi muhim omillar keltirilib o'tsak:

1. Konjugatsiyalangan (tarmoqlangan) strukturasi tufayli: D18 polimeri katta konjugatsiyalangan tizimga ega, ya'ni polimerda uzluksiz ravishda alternatsiyalanuvchi birikmalar (bog'langan ikki va uchli bog'lar) mavjud. Bu tizim elektronlarning erkin harakatlanishiga imkon beradi va yorug'lik fotonlari bilan samarali o'zaro ta'sir qilishiga imkon yaratadi.

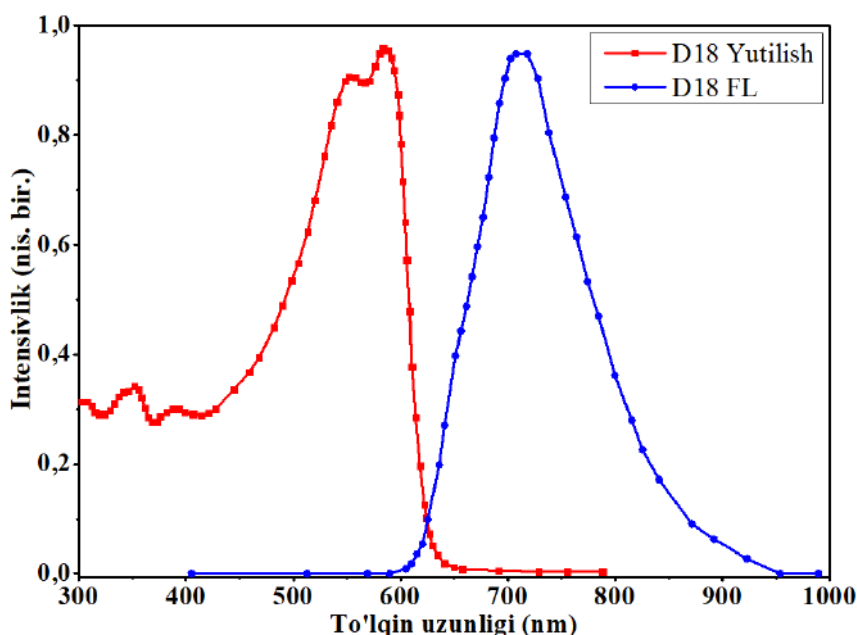
2. Energetik o'tishlar tufayli: 585 nm to'lqin uzunligidagi yorug'lik yutilishi polimerning valentlik va o'tkazuvchanlik zonalari (valence band va conduction band) orasidagi energetik o'tishlarga mos keladi. Bu

o'tishlar, odatda, konjugatsiyalangan polimerlarda foton energiyasini yutish orqali elektronlarni qo'zg'algan holatga olib keladi. 585 nm to'lqin uzunligi ushbu energetik o'tish uchun optimaldir.

3. Polimerning molekulyar orbitalari tufayli: Polimerda HOMO (highest occupied molecular orbital) va LUMO (lowest unoccupied molecular orbital) orasidagi energiya farqi ushbu to'lqin uzunligiga fotonlarni yutish uchun mos keladi. D18 polimerida bu energiya farqi taxminan 2.1 eV ga to'g'ri keldi, bu esa 585 nm to'lqin uzunligidagi fotonlar bilan bog'liq[16-17].

4. Elektronlarning qo'zg'alishi: D18 polimerida 585 nm to'lqin uzunligidagi yorug'lik yutilganda, bu yorug'lik fotonlari yetarli energiya beradi, natijada elektronlar asosiy holatdan qo'zg'algan holatga o'tadi. Bu jarayon PQElarda samarali EO'S natijalari uchun muhim ahamiyatga egadir.

1-rasmda D18 donor polimerining FL spektri ham berilgan bo'lib, FL spektri to'lqin sohasi kengligi 650 nm dan 900 nm gacha tashkil etgan.

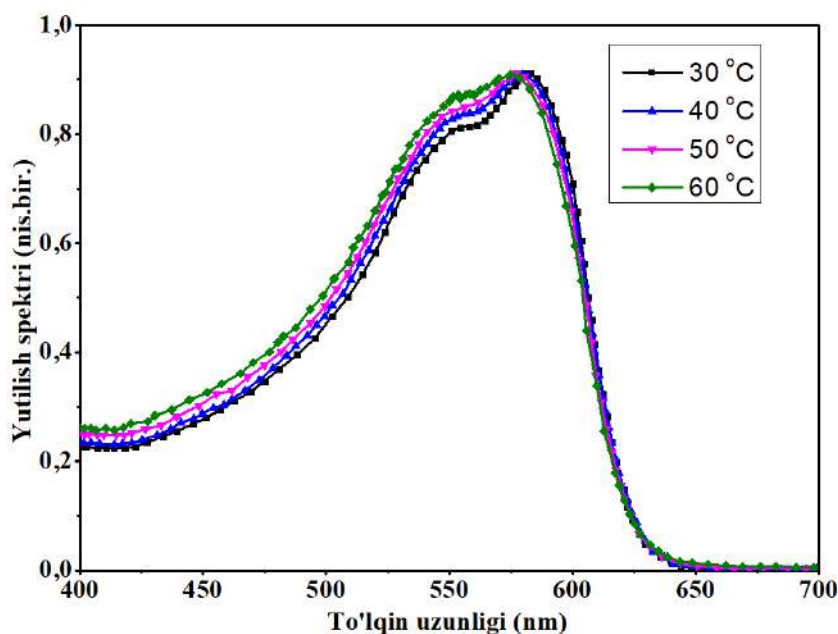


1-rasm. D18 donor polimerining yutilish va FL spektrlari

D18 polimerining FL spektri yutilish spektriga yaqin sohada ekanligini ko'rishimiz mumkin, Bu esa kamroq energiya yo'qotishlarni bildiradi. Kam energiya yo'qotilishi bilan FL spektri polimerning samarali EO'S qiymati uchun optimal bo'lishiga imkon beradi. D18 polimerining FL spektri orqali PQElarning fotovoltaiik parametrlarini baholay olamiz. Fotoluminessensiya polimerdagi fotoqo'zg'atilgan elektronlarni va tuzoqlarda saqlanadigan zaryadlarni aniqlashga yordam beradi. Bu esa fotovoltaiik samaradorlikni baholashda qo'shimcha imkoniyatlar yaratadi. Samarali fotoluminessensiya polimerda ko'proq zaryad ajralishini ko'rsatadi, bu esa PQElar samaradorligini oshirishda juda muhim ahamiyatga ega[18-20].

D18 polimerining FL spektri orqali morfologik va kristallik xususiyatlari haqida ma'lumot olish mumkin. Yuqori intensivlikka ega FL ko'rsatkichlari polimerning optimal tuzilishiga va yaxshi kristallikka ega ekanligini bildiradi. Bu esa materialning barqarorligini oshiradi va elektron tashish jarayonlarini yaxshilaydi [21-23]. D18 polimeri strukturaviy o'zgarishlar yoki boshqa materiallar bilan birlashtirilganda uning absorpsion spektrini bir oz o'zgartirish mumkin. Bu esa D18 ni boshqa polimerlar yoki materiallar bilan kombinatsiyada ishlatishda qulaylik yaratadi va kengroq spektrli yorug'likni yutish imkonini beradi. D18 polimerining nurlanishga nisbatan yaxshi barqarorligi bor, ya'ni vaqt o'tishi bilan uning yorug'lik yutish qobiliyati deyarli kamaymaydi. Bu esa PQElarning uzoq muddatli ishlashiga yordam beradi [24]. Umuman olganda, D18 polimeri yorug'lik yutishda keng va intensiv spektrli, yuqori samaradorlikka ega bo'lib, bu xususiyatlar D18 asosidagi PQElarning yuqori samaradorlik va barqarorlik ko'rsatishiga sabab bo'ladi.

2-rasmda Turli xil haroratlarda tayyorlangan D18 polimer eritmasining yutilish spektr grafigi keltirilgan bo'lib, bu grafik natijalaridan D18 polimerning issiqlikka ham barqaror va chidamliligini to'rt xil haroratda ham ko'rishimiz mumkin.



2-rasm. Turli xil haroratlarda tayyorlangan D18 polimer eritmasining yutilish spektr grafigi

Yutilish spektri grafiklarining siljishi va shakli o'zgarishi kuzatilmagan. Bu natijani shunday tushuntirish mumkin, D18 polimerining turli haroratlarda eritilib tayyorlangan namunalarida yutilish spektrining bir xil bo'lishi, asosan, polimerning molekulyar tuzilishi va eritmadagi o'zaro ta'sirlariga va molekulyar strukturaning o'zgarishligi bilan tushuntiriladi. D18 polimer eritmasi turli haroratlarda tayyorlansa ham, uning kimyoviy va molekulyar tuzilishi bir xil qolgan bo'lsa va qizdirish jarayonida polimerning zanjir uzunligi yoki konjugatsiyalangan strukturasi sezilarli o'zgarishlar sodir bo'lmasa, uning optik xossalari ham o'zgarmaydi. 3.2-rasmdagi natijalarni boshqa tomondan muhokama qiladigan bo'lsak, haroratlar o'zgarganida grafiklar bir-biriga juda yaqin. Biroq, 60°C dagi spektrda biroz yuqoriroq yutilish ko'rinmoqda. Bu polimerning yuqori haroratda ozgina ko'proq yorug'lik yutishini anglatishi mumkin, ammo bu o'zgarish juda kichik. D18 polimerning termal barqarorligi yuqori bo'lgani uchun, qizdirish jarayonida u degradatsiyaga uchramaydi yoki molekulyar zanjirlar buzilmaydi. Natijada, harorat o'zgarishlari molekulyar strukturaga sezilarli ta'sir qilmaydi va polimer o'zining asosiy elektron xususiyatlarini saqlab qoladi. Shu sababli, yutilish spektri turli haroratlarda tayyorlangan namunalar uchun bir xil bo'lib qoladi [25-27]. Agar polimerlar turli haroratlarda qizdirib tayyorlangan eritmalarida polimerning molekullari suyuqlikda bir xil darajada erisa va bir xil fazaga ega bo'lsa, polimerning zanjirlararo o'zaro ta'siri o'zgarishiga yo'l qo'ymaydi, ya'ni turli haroratlar ularning optik xossalari sezilarli ta'sir qilmaydi. Natijada, yutilish spektrida farq kuzatilmaydi.

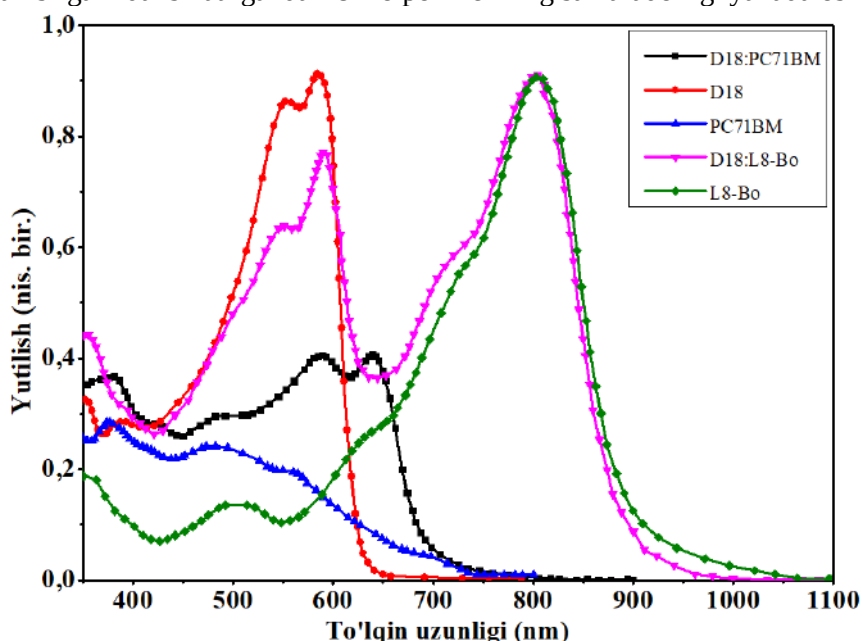
Qisqacha qilib aytganda, turli haroratlar (30°C, 40°C, 50°C, va 60°C) da qizdirilib tayyorlangan D18 polimeri eritmalarining yutilish spektri bir xil bo'lishining sababi polimerning kimyoviy va molekulyar tuzilmasining barqarorligi, termal degradatsiyaga uchramasligi, eritmadagi bir xil dispersiyasi va agregatsiya holatining yo'qligidir. Polimerning optik xossalari asosan uning molekulyar strukturasi va konjugatsiyalangan tizimga bog'liq bo'lib, harorat o'zgarishi bilan polimerning molekulyar va optik xususiyatlari o'zgarmaydi, natijada u quyosh panellari va boshqa optoelektronika qurilmalarida samarali ishlatilishi mumkin.

3-rasmda L8-Bo fulleren bo'lmagan akseptor polimerning yutilish spektri berilgan bo'lib, odatda 300 nm dan 800 nm gacha bo'lgan to'liq uzunliklarida yorug'likni yuta oladi. Demak, L8-Bo polimeri keng spektrda yorug'likni yutish qobiliyatiga egaligini va PQElarning fotovoltaiik samaradorligini oshirish uchun muhimligini xulosa qila olamiz. Yutilish pik to'liq uzunligiga to'xtaladigan bo'lsak, L8-Bo polimerining yutilish spektridagi asosiy maksimum piki odatda 805 nm to'liq uzunligiga mos keladi. Yutilish maksimum orqalig'lar esa 600-850 nm ga to'g'ri kelishini ko'rishimiz mumkin, bundan quyidagicha xulosaga kelish mumkin, L8-Bo akseptor PQElarda faol qatlam tarkibida Quyosh spektrining qizil qismini samarali yutishiga imkon yaratadi.

L8-Bo akseptor polimeri donordan olingan elektronlarni qabul qilish uchun mo'ljallangan. U donor materiallar (masalan, D18 kabi) bilan birga ishlatilganda yutilish spektri kengayadi va samaradorlik oshadi.

Donor va akseptorlar birgalikda ishlaganda, materiallar quyosh spektrining turli qismlarida yorug'likni yutib, fotovoltaiik qurilmalarning umumiy samaradorligini oshiradi.

Xulosa o'rinda, L8-Bo akseptor polimerining absorpsion xossalari keng yutilish spektri, yuqori yutilish koeffitsiyenti va infraqizil spektrga yaqin joylashgan yutilish piki bilan tavsiflanadi. Bu material Quyosh spektrining ko'p qismini samarali yutishi tufayli PQElarda samarali akseptor sifatida qo'llanadi. Donor materiallar bilan birgalikda ishlatilganda L8-Bo polimerining samaradorligi yanada oshadi.



3-rasm. D18, PC71BM, L8-Bo va ular asosidagi faol qatlamlarning yutilish spektrlari

3-rasmda fulleren asosli akseptor bilan D18 polimerning yutilish spektrlari keltirilgan. D18 donor polimeri (qizil chiziq) 450-620 nm to'lqin uzunliklar oralig'ida eng kuchli intensiv yutilishga ega, ammo PC₇₁BM (moviy chiziq) esa D18 ga nisbatan judayam past yutilish intensivligini ko'rsatadi, PC₇₁BM asosan ultrabinafsha to'lqin uzunliklari sohasining qisqa to'lqin uzunliklari (300-400 nm) yaqinida samaraliroq yutilishga ega. Shu sababli, D18:PC₇₁BM faol qatlam aralashmasi (qora chiziq) ikkita materialning yutilish xususiyatlari birlashgan holda yutilish spektrini to'lqin uzunliklari sohasi kengayishishga olib kelgan, ammo yutilish intensivligi D18 polimerning yutilish intensivligiga nisbatan juda keskin pasayib ketgan. Bu yutilish spektri grafigi orqali fulleren tarkibli akseptorlar asosidagi faol qatlamlarning bir necha afzalliklariga qaraganda PQElar samaradorligiga salbiy ta'sir qiluvchi yetarlicha kamchilik va muammolar mavjud, bu kamchiliklarning asosiylarini keltirib o'tsak:

1. Nisbatan past samaradorlik: D18:PC₇₁BM faol qatlamlari PQElar uchun yutilish spektri keng bo'lganiga qaramay, ularning samaradorligi hali ham an'anaviy kremniy quyosh elementlariga nisbatan past. Donor:PC₇₁BM faol qatlamlarga asoslangan PQElar samaradorligi asosan 10-12% atrofida bo'lib, tijorat darajasidagi samaradorlikni yetarli darajada ta'minlay olmaydi.

2. Past barqarorlik: Organik quyosh elementlarida ishlatiladigan ko'plab materiallar, shu jumladan D18 va PC₇₁BM, vaqt o'tishi bilan samaradorligini yo'qotadi. Bu moddalar kislorod va namlik bilan reaksiyaga kirishishi yoki yorug'lik ostida degradatsiyaga uchrashi mumkin. Bu PQElarning uzoq muddatli ishlashi uchun jiddiy muammo hisoblanadi.

3. Energetik sathlari o'rtasidagi nomuvofiqlik: D18 va PC₇₁BM o'rtasidagi energetik sathlarning nomuvofiqligi elektronlarning samarali ajralishiga to'siq bo'lishi mumkin. Bu, ayniqsa, elektron va kovaklar o'rtasidagi rekombinatsiyani oshiradi, bu esa samaradorlikni pasaytiradi.

4. PC₇₁BM va shunga o'xshash fulleren tarkibga ega akseptorlarning cheklangan yorug'likni yutilish xossalari. PC₇₁BM va shu kabi fulleren asosli materiallarning spektral yutilish sohasi asosan ultrabinafsha sohada bo'ladi, ya'ni Quyosh spektrining eng samarali qismini (ko'rinuvchi va yaqin infraqizil) yutmaydi. Undan tashqari Donor:PC₇₁BM asosli faol qatlamlardagi yorug'likning yutilishidan tashqari, ba'zi to'lqin uzunlikdagi yorug'liklar ichki qaytish yoki sochilishga uchraydi. Masalan D18 va PC₇₁BM larni sindirish ko'rsatkichlari bir biriga mos emasligi sababli bunday yorug'lik qaytarishlar yutilish samaradorligini yo'qotishlarga olib keladi. Bunday cheklanagan yutilish xossalari tufayli D18:PC₇₁BM faol qatlamga ega

PQElar faqat D18 donor polimer tomonidan qoplanadigan yorug'lik spektrlar bilan cheklanib qoladi, natijada PQElarning samaradorligi juda past bo'ladi.

Yana bitta optik muammolardan biri bu PCBM akseptorlarning yorug'likka sezgirligi tufayli fotodegradatsiyaga uchrashidir. PC71BM moddasining fotodegradatsiya xususiyatlari bor, ya'ni vaqt o'tishi bilan ultrabinafsha nurlar ta'sirida uning optik va elektr xossalari yomonlashadi. Bu jarayon esa PQElarning uzoq muddat ishlashiga salbiy ta'sir ko'rsatadi.

3-rasmda D18 va donor polimer bilan fulleren bo'lmagan L8-Bo akseptor aralashmasi asosida olingan faol qatlamlarning yutilish spektri berilgan. Eng avvalo, grafikdagi yutilish spektrining shakliga e'tibor qaratadigan bo'lsak, D18: L8-Bo faol qatlam uchun 400–900 nm oralig'ida yaxshi yutilish intensivligini ko'rsatmoqda. Bunday to'liq uzunligi sohasida yutilish spektrining yaxshi bo'lishi quyosh nurlanishi spektrining katta qismini yutishiga imkon berib PQElarning samaradorligini yanada oshiradi. Faol qatlamning yutilish spektrida to'liq uzunligi 600 nm atrofida va 800 nm atrofida kuchli yutilish piklari mavjud. Bunday piklarning shakllanishiga sabab, D18 va L8-Bo polimerlarning yutilish spektr grafika qaralsa o'z o'zidan tushunarli bo'ladi. 3-rasmdagi grafikning 600 nm atrofida yutilish piklari bu D18 polimeriga tegishli bo'lsa, 800 nm atrofida yutilish piklari esa L8-Bo akseptorga tegishli.

Yuqorida keltirilgan barcha spektr natijalardan D18:L8-Bo faol qatlamga asoslangan PQElarning fotovoltaiik parametrlari D18:PC71BM faol qatlamga asoslangan PQElarning fotovoltaiik parametrlaridan juda katta farq bilan yaxshiroq bo'lish kerak degan xulosaga kelish mumkin. Bu xulosalarimizni tekshirish uchun bu ikki xil faol qatlamga asoslangan PQElarning fotovoltaiik parametrlari o'Ichandi. 1-jadvalda D18:L8-Bo va D18:PC₇₁BM asosli PQElarning fotovoltaiik parametrlari berilgan. D18:L8-Bo faol qatlam asosli PQElarning fotovoltaiik ko'rsatkichlarini tahlil qiladigan bo'lsak, bunda ochiq zanjir kuchlanishi (V_{oc}) 0,90 V, qisqa tutashuv tok zichligi (J_{sc}) 24.55 mA/sm², to'ldirish faktori (FF) 75,8% va EO'S esa 16,7 % tashkil qildi.

1-jadval. D18:L8-Bo va D18:PC₇₁BM asosidagi PQElarning fotovoltaiik parametrlari

Faol qatlam	V_{oc} (V)	J_{sc} (mA cm ⁻²)	FF (%)	EO'S (%)
D18:L8-Bo	0.90	24.55	75.8	16.7
D18:PC71BM	0.98	11.26	71.4	8.0

D18:PC71BM faol qatlamlarga asoslangan PQElarning fotovoltaiik natijalari esa, bunda ochiq zanjir kuchlanishi 0,98 V, qisqa tutashuv tok zichligi 11,26 mA/sm², to'ldirish faktori 71,4% va EO'S esa 8 % tashkil qildi. D18:Y6 PQEning EO'S qiymati D18:PC71BM PQE ning EO'S qiymatidan 2 barobar kattaroq natijaga erishilgan. Bunday natijani faol qatlamlarning yutilish spektrining farqi bilan va TKS natijalari orqali izohlash mumkin. Chunki, PQElarning EO'S natijasi yutilish spektriga va donor akseptor juftlik uchun materiallarni to'g'ri tanlash kabi jarayonlarga bog'liqdir.

Xulosa. Xulosa o'rnida D18 yutilish spektri ko'rinadigan va yaqin infraqizil to'liq sohasigacha bo'lgan keng yutilish diapazonida yaxshi yutilish xossalari ega bo'lib, bu L8-Bo fulleren bo'lmagan akseptorning yutilish spektri sohasi bilan birgalikda butun 300-1100 nm oralidagi fotonlarni yutishiga imkon beradi, bu esa PQElarning samaradorligi yanada oshishiga olib keldi. D18 donor va L8-Bo akseptor polimerlarning kengaytirilgan konjugatsiyalangan tuzilishi uning keng yutilish spektriga va samarali yorug'lik yutishiga yordam beradi. Ammo PC71BM ga o'xshash fulleren tarkibli akseptor materiallar bilan PQElarda qo'llanilsa yutilish spektri intensivligi juda past bo'lganligi sababli PQElarda qo'llanilganda fotovoltaiik parametrlar kutilgan natijalarni bermaydi. D18 ning yutilish spektri L8-Bo kabi Y-seriyali strukturaga ega fulleren bo'lmagan akseptorlar bilan birga yutilish spektrining to'liq uzunligi sohasini kengaytirishga olib keladi. Ushbu D18:L8-Bo faol qatlamidagi kabi qo'shimcha yutilish spektrlari hosil bo'lishi D18 polimerni samarali PQElar uchun istiqbolli donor materialga aylantiradi.

Umuman olganda, D18:PC71BM aralashmasi samarador va o'ziga yarasha yaxshi yutilish xususiyatlariga ega bo'lsa ham, bu faol qatlam tijorat darajasidagi PQElar uchun yetarlicha mukammal emas. Shu sababli barqarorlik va samaradorlikni oshirishga yo'naltirilgan tadqiqotlar asosan fulleren bo'lmagan akseptor bo'yicha davom etmoqda.

ADABIYOTLAR:

1. A.T. Yiu, P.M. Beaujuge, O.P. Lee, C.H. Woo, M.F. Toney, J.M. Frechet, *J. Am. Chem. Soc.* 134 (2012) 2180.
2. H. Hu, K. Jiang, G. Yang, J. Liu, Z. Li, H. Lin, Y. Liu, J. Zhao, J. Zhang, F. Huang, Y. Qu, W. Ma, H. Yan, *J. Am. Chem. Soc.* 137 (2015) 14149.

3. X. Xue, K. Weng, F. Qi, Y. Zhang, Z. Wang, J. Ali, D. Wei, Y. Sun, F. Liu, M. Wan, J. Liu, L. Huo, *Adv. Energy Mater.* 9 (2019), 1802686.
4. Z. Wang, Z. Peng, Z. Xiao, D. Seyitliyev, K. Gundogdu, L. Ding, H. Ade, *Adv. Mater.* 32 (2020), 2005386.
5. Y. Cui, H. Yao, J. Zhang, K. Xian, T. Zhang, L. Hong, Y. Wang, Y. Xu, K. Ma, C. An, C. He, Z. Wei, F. Gao, J. Hou, *Adv. Mater.* 32 (2020), 1908205.
6. D. Liu, J. Mun, G. Chen, N.J. Schuster, W. Wang, Y. Zheng, S. Nikzad, J.C. Lai, Y. Wu, D. Zhong, Y. Lin, Y. Lei, Y. Chen, S. Gam, J.W. Chung, Y. Yun, J.B. Tok, Z. Bao, *J. Am. Chem. Soc.* 143 (2021) 11679.
7. H. Bin, Y. Yang, Z.G. Zhang, L. Ye, M. Ghasemi, S. Chen, Y. Zhang, C. Zhang, C. Sun, L. Xue, C. Yang, H. Ade, Y. Li, *J. Am. Chem. Soc.* 139 (2017) 5085.
8. J. Sun, X. Ma, Z. Zhang, J. Yu, J. Zhou, X. Yin, L. Yang, R. Geng, R. Zhu, F. Zhang, W. Tang, *Adv. Mater.* 30 (2018), 1707150.
9. X. Wang, J. Wang, J. Han, D. Huang, P. Wang, L. Zhou, C. Yang, X. Bao, R. Yang, *Nano Energy* 81 (2021), 105612.
10. L.-W. Feng, J. Chen, S. Mukherjee, V.K. Sangwan, W. Huang, Y. Chen, D. Zheng, J. W. Strzalka, G. Wang, M.C. Hersam, D. DeLongchamp, A. Facchetti, T.J. Marks, *ACS Energy Lett.* 5 (2020) 1780.
11. I. Meager, R.S. Ashraf, S. Mollinger, B.C. Schroeder, H. Bronstein, D. Beatrup, M. S. Vezie, T. Kirchartz, A. Salleo, J. Nelson, I. McCulloch, *J. Am. Chem. Soc.* 135 (2013) 11537.
12. C. Sun, S. Qin, R. Wang, S. Chen, F. Pan, B. Qiu, Z. Shang, L. Meng, C. Zhang, M. Xiao, C. Yang, Y. Li, *J. Am. Chem. Soc.* 142 (2020) 1465.
13. D. Mo, H. Chen, J. Zhou, N. Tang, L. Han, Y. Zhu, P. Chao, H. Lai, Z. Xie, F. He, *J. Mater. Chem. A* 8 (2020) 8903.
14. X. Zhang, C. Li, L. Qin, H. Chen, J. Yu, Y. Wei, X. Liu, J. Zhang, Z. Wei, F. Gao, Q. Peng, H. Huang, *Angew. Chem.* 60 (2021) 17720.
15. L. Ye, S. Zhang, W. Zhao, H. Yao, J. Hou, *Chem. Mater.* 26 (2014) 3603.
16. T. Lei, J.H. Dou, J. Pei, *Adv. Mater.* 24 (2012) 6457.
17. S. Feng, C. Zhang, Y. Liu, Z. Bi, Z. Zhang, X. Xu, W. Ma, Z. Bo, *Adv. Mater.* 29 (2017), 1703527.
18. Y. Lin, F. Zhao, Q. He, L. Huo, Y. Wu, T.C. Parker, W. Ma, Y. Sun, C. Wang, D. Zhu, A.J. Heeger, S.R. Marder, X. Zhan, *J. Am. Chem. Soc.* 138 (2016) 4955.
19. H. Jiang, C. Han, Y. Li, F. Bi, N. Zheng, J. Han, W. Shen, S. Wen, C. Yang, R. Yang, X. Bao, *Adv. Funct. Mater.* 31 (2021), 2007088.
20. Y. Li, N. Zheng, L. Yu, S. Wen, C. Gao, M. Sun, R. Yang, *Adv. Mater.* 31 (2019), 1807832.
21. D. Xia, C. Li, W. Li, *Chem. Rec.* 19 (2019) 962.
22. G. Feng, W. Tan, S. Karuthedath, C. Li, X. Jiao, A.C.Y. Liu, H. Venugopal, Z. Tang, L. Ye, F. Laquai, C.R. McNeill, W. Li, *Angew. Chem.* 133 (2021) 25703.
23. L. Han, W. Chen, T. Hu, J. Ren, M. Qiu, Y. Zhou, D. Zhu, N. Wang, M. Sun, R. Yang, *ACS Macro Lett.* 4 (2015) 361.
24. L. Han, H. Jiang, D. Ouyang, W. Chen, T. Hu, J. Wang, S. Wen, M. Sun, R. Yang, *Nano Energy* 36 (2017) 110.
25. L. Zhao, C. Yang, F. Bian, D. Guo, X. Ouyang, *J. Appl. Cryst.* 55 (2022) 195.
26. X. Liu, Z. Liang, S. Du, X. Niu, J. Tong, C. Yang, X. Lu, X. Bao, L. Yan, J. Li, Y. Xia, *ACS Appl. Mater. Interfaces* 14 (2022) 9386.
27. L. Feng, C. Xiao, G. Feng, C. Li, Y. Wu, E. Zhou, W. Li, *ACS Appl. Mater. Interfaces* 12 (2020) 6151.
28. Z. Li, L.Y.P. Zhu, W. Zhong, N. Li, F. Liu, F. Huang, Y. Cao, *Energy Environ. Sci.* 12 (2019) 157.
29. J. Mun, J. Kang, Y. Zheng, S. Luo, H. Wu, N. Matsuhisa, J. Xu, G.N. Wang, Y. Yun, G. Xue, J.B.-H. Tok, Z. Bao, *Adv. Mater.* 31 (2019), 1903912.
30. M. Jeong, J. Oh, Y. Cho, B. Lee, S. Jeong, S.M. Lee, S.H. Kang, C. Yang, *Adv. Funct. Mater.* 31 (2021), 2102371.
31. P.W.M. Blom, V.D. Mihailetschi, L.J.A. Koster, D.E. Markov, *Adv. Mater.* 19 (2007) 1551.
32. J. Xiao, X. Jia, C. Duan, F. Huang, H.L. Yip, Y. Cao, *Adv. Mater.* 33 (2021), 2008158.
33. H. Yin, P. Bi, S.H. Cheung, W.L. Cheng, K.L. Chiu, C.H.Y. Ho, H.W. Li, S.W. Tsang, X. Hao, S.K. So, *Sol. RRL* 2 (2018), 1700239.

YARIMO'TKAZGICHLI NANOSTRUKTURALARDA ELEKTROFIZIK XUSUSIYATLARINING MAHALLIY DIAGNOSTIKASI

Quchqarov Behzod Xoshimjonovich,

Impuls tibbiyot insituti dotsenti,
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Mamatkarimov Odiljon Oxundedayevich,

Namangan muhandislik-texnologiya instituti professori,
fizika-matematika fanlari doktori

Xolmirzayev Akrom Abduqodirovich,

Namangan davlat universiteti dotsenti,
fizika-matematika fanlari nomzodi

Annotatsiya. Bugungi kunda asrda axborot texnologiyalarining rivojlanishi iqtisodiyotning rivojlanishiga turtki berdi. Yarimo'tkazgich materiallarining va nanoelektronika texnologiyalarining rivoji elektron iqtisodiyotdagi innovatsion jarayonlarga ta'sir ko'rsatishi. Ush tadqiqot yarimo'tkazgich materiallarining elektrofizik vositalarni o'rganishga va yangi diagnostika usullarini tatbiq tekshirish bo'yicha, zaryad tashuvchilarning kontsentratsiyasi va energiya darajalarini zamonaviy sharoitlarda ko'rib chiqadi. Yarimo'tkazgich texnologiyalari zamonaviy elektronika va axborot texnologiyalarining asosini tashkil etadi. Ayniqsa, yuqori tezlikdagi telekommunikatsiya tizimlarini yaratishda bu texnologiyalar muhim ahamiyat kasb etadi. Yarimo'tkazgichli elektron qurilmalar asosan mikro- va nanoelektronikaning elementar bazasi hisoblanadi. Shu sababli, bu sohada yangi materiallarni izlash va sintez qilish, ularning elektrofizik xususiyatlarini o'rganish, ishlab chiqarish texnologiyasini ishlab chiqildi.

Kalit so'zlar: material, struktura, diagnostika, kontsentratsiya profili, energiya spektri, diagramma, parameter, mahalliy mikro va makroinhomogenlik, yarimo'tkazgichli konstruksiyalar, chuqur darajadagi relaksatsiya spektroskopiya, skanerlash zond mikroskopiyasi, sig'im-kuchlanish xususiyatlari, mahalliy oqim relaksatsiyasi, nanostrukturalarni diagnostika.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ НАНОСТРУКТУР

Аннотация. В современном веке развитие информационных технологий дало толчок развитию экономики. Влияние развития полупроводниковых материалов и технологий нанoelektroniki на инновационные процессы в электронной экономике. В данном исследовании рассматриваются концентрация и уровни энергии носителей заряда в современных условиях исследования электрофизических инструментов полупроводниковых материалов и применения новых методов диагностики. Полупроводниковые технологии составляют основу современной электроники и информационных технологий. Эти технологии особенно важны при создании высокоскоростных телекоммуникационных систем. Полупроводниковые электронные устройства по сути являются элементарной основой микро- и нанoelektroniki. Поэтому в этой области были развиты исследования и синтез новых материалов, изучение их электрофизических свойств, технологии производства.

Ключевые слова: материал, структура, диагностика, концентрационный профиль, энергетический спектр, диаграмма, параметр, локальная микро- и макронеоднородность, полупроводниковые структуры, релаксационная спектроскопия глубоких уровней, сканирующая зондовая микроскопия, вольт-фарадные характеристики, локальная токовая релаксация, диагностика наноструктур.

LOCAL DIAGNOSTICS OF ELECTROPHYSICAL PROPERTIES IN SEMICONDUCTOR NANOSTRUCTURES

Abstract. In today's century, the development of information technology has given impetus to the development of the economy. Impact of the development of semiconductor materials and nanoelectronics technologies on innovative processes in the electronic economy. This research examines the concentration

and energy levels of charge carriers in modern conditions for the study of electrophysical tools of semiconductor materials and the application of new diagnostic methods. Semiconductor technologies form the basis of modern electronics and information technologies. These technologies are especially important in creating high-speed telecommunication systems. Semiconductor electronic devices are basically the elementary base of micro- and nanoelectronics. Therefore, research and synthesis of new materials, study of their electrophysical properties, production technology were developed in this field.

Keywords: material, structure, diagnostics, concentration profile, energy spectrum, diagram, parameter, local micro- and macro-inhomogeneity, semiconductor structures, deep level relaxation spectroscopy, scanning probe microscopy, capacitance-voltage characteristics, local current relaxation, diagnostics of nanostructures.

Kirish. Ilmiy-texnika taraqqiyoti iqtisodiyotga katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlash imkonini beruvchi raqamli texnologiyalarni joriy etish bilan bog'liq. Raqamli texnologiyalarga asoslangan iqtisodiy faoliyat raqamli iqtisodiyot deb ataladi. U moddiy o'lchovdagi tovar va xizmatlardan kompyuterlarning operativ xotirasidagi virtual operatsiyalarga o'tishga asoslangan bo'lib, unda barcha turdagi operatsiyalar axborot miqdori o'lchov birliklari bilan amalga oshiriladi. 2015 yil, - ma'lumotlar to'planishining eksponensial tendentsiyasi kuzatilgan. Axborot asri o'z o'rnini raqamli asrga bo'shatib bormoqda, bulut xizmati, sun'iy intellekt paydo bo'ldi. Raqamli iqtisodiyotni amalga oshirishni muvaffaqiyatli amalga oshirish uchun ma'lumotlarni saqlash markazlari, ishlab chiqaruvchilar va xizmatlar iste'molchilarini bog'lovchi yuqori tezlikdagi raqamli telekommunikatsiyalardan tobora ko'proq foydalanish zaruriyati tug'lmoqda. Raqamli texnologiyalarning rivojlanishi mavjudlikni oshirish, vazn va o'lcham ko'rsatkichlarini, tezlik va funktsionallikni kamaytirish, energiya sarfini kamaytirish va optimallashtirish yo'lidan ilmiy texnikaviy tadqiqotlar olib bormoqda. Shuning uchun yuqori tezlikdagi telekommunikatsiya radioelektron uskunalari loyihalash va yaratish talab etiladi. Radioelektron uskunalarini ishlab chiqarish mikro va nanoelektronikaning elementar bazasini yaratish va uning sifat ko'rsatkichlarini yaxshilash muammolarini hal qilish bilan birga yarimo'tkazgich moddalar ustida ko'plab ilmiy tadqiqot olib borilishiga olib keladi. Elementar bazani takomillashtirish uchun yangi materiallar va tuzilmalarni izlash va sintez qilish, ularni ishlab chiqarish texnologiyasini ishlab chiqish va takomillashtirish, nanostrukturalardagi fizik jarayonlar va hodisalarni o'rganish, nanotizimlar fizikasini rivojlantirish dolzarb muammolardan biri bo'lib kelmoqda. Jismoniy jarayonlarni tushunish asosida yarimo'tkazgich elementlari va integral mikrosxemalar ishlab chiqarish uchun konstruktiv va texnologik tavsiyalar ishlab chiqiladi.

Yangi materiallar va konstruksiyalarning paydo bo'lishi, yarimo'tkazgichli qurilmalarning faol hududlarini qisqartirish ularning parametrlari va xususiyatlarini kuzatishning ma'lum bo'lganlarini moslashtirish va yangi usullarni ishlab chiqish, amaliy tadqiqot usullari asosidagi fizik modellarni takomillashtirish zaruratini keltirib chiqaradi. Faol hududi kvant quduqlari (QW), kvant nuqtalari (QD), amorf va kristalli yarimo'tkazgichlarning o'zgaruvchan nano o'lchovli qatlamlarini o'z ichiga olgan yarimo'tkazgichli geterostrukturalar bo'lgan nanoelektron qurilmalarning ishlashi zaryad tashuvchilarning o'lchamlari kvantlanishi bilan bog'liq fizik hodisalarga asoslangan. Bunday tuzilmalarning xususiyatlarini o'rganish uchun o'lchash va diagnostika uskunolari sohasidagi so'nggi ishlanmalardan foydalanib, yarimo'tkazgichning eng muhim parametrlariga materiallari va qurilmalari oxirgi radio uskunasi tezligi va quvvat sarfini aniqlaydigan elektrofizik xususiyatlarni o'z ichiga ilmiy tadqiqot texnologiyalaridan foydalanib kelinmoqda. Yarimo'tkazgichli konstruksiyalarning elektrofizik xususiyatlari erkin zaryad tashuvchilarning (NC) konsentratsiyasi, faol hududlar konfiguratsiyasi bilan aniqlangan elektron holatlarning energiya spektri, qattiq eritmalarning tarkibi, donor bilan doping profili kabi muhim parametrlar bilan tavsiflanadi yoki akseptor aralashmali va yarimo'tkazgichning tarmoqli oralig'ida chuqur energiya darajalarini tashkil etuvchi faol qatlamlar orasidagi interfeyslarda va hajmdagi strukturaviy nuqsonlarning mavjudligi va yarimo'tkazgichli to'siq tuzilmalarida konsentratsiya profilini o'lchashning ishonchli buzilmaydigan usuli sig'im-kuchlanish usuli hisoblanadi [1,2]. Hajmi kvantlashning energiya darajalari pozitsiyasi haqida geterointerfeyslarning sifati, geterointerfeysdagi ruxsat etilgan energiya diapazonlaridagi bo'shliqlar hajmi va chuqur va sayoz energiya darajalarini hosil qiluvchi elektr faol nuqsonlarning parametrlari ta'sir qiladi.

Nanostrukturalarni o'rganish uchun sanab o'tilgan usullar makroskopik elektr kontaktlari bo'lgan namunalarni o'rganish uchun mo'ljallangan bo'lib, ular uchun planar to'siqli kontakt modeli ishlab chiqilgan va qo'llaniladi, bunda yo'qolgan qatlamning qalinligi kontaktning minimal lateral o'lchamidan ancha past bo'ladi. Olingan xarakteristikalar to'siq yoki ohmik kontaktning maydoni bo'yicha o'rtacha hisoblanadi, bu odatda o'zgarib turadi $2 \cdot 10^3$ - 10^4 mikron, bilan bog'liq o'lchash moslamalarining kirish yo'llarining sezgirliigi.

Bu kvant nuqtalarining xarakterli lateral o'lchamlari [3], qalinligining uzunligi bir hil bo'lmagan va yarimo'tkazgichli qattiq eritmalarning turli tarkibi bo'lgan hududlar va boshqalardan sezilarli darajada oshadi. Bu hozirgi va kelajak avlodlarning elektron va integral mikrosxemalari uchun materiallar va konstruksiyalarning parametrlari va xususiyatlarini bir necha yuz nanometrgacha bo'lgan fazoviy o'lchamlari bilan o'rganish va nazorat qilish usullariga shoshilinch ehtiyojni keltirib chiqaradi [4].

Material yoki strukturani har tomonlama o'rganishni ta'minlaydigan yangi diagnostika usullarini ishlab chiqish alohida ahamiyatga ega, buning natijasida konsentratsiya profili, zaryad tashuvchilarning energiya spektri, tarmoqli diagrammasi parametrlari, ularning taqsimotlar mahalliy mikro va makroinhomogenlik, shu jumladan nanometr diapazonidagilar. Yarimo'tkazgichli konstruksiyalarning elektr xususiyatlarini o'rganishning murakkabligi va yuqori lokalizatsiyasini ta'minlash uchun yangi texnikani ishlab chiqish taklif etiladi. Ular skanerlash zond mikroskopiyasi va sig'im-kuchlanish xususiyatlari, chuqur darajadagi relaksatsiya spektroskopiyasi va LF shovqin spektroskopiyasidan birgalikda foydalanishga asoslangan [5-6]. Mahalliy sig'im-kuchlanish xususiyatlarini o'lchash uchun ishlab chiqilgan usullarni, chuqur darajalarning mahalliy oqim relaksatsiyasi spektroskopiyasini, yarimo'tkazgichlar, mikro va nanostrukturalarni diagnostika qilish usullarini kompleks qo'llash qo'shimcha ma'lumotlarni olish va fizik jarayonlarni chuqurroq tushunish imkonini beradi. yarimo'tkazgichlar. Bu yarimo'tkazgichlar fizikasining rivojlanishiga hissa qo'shadi [7].

Biznng olib brogan tadqiqot ishlarimizda asosiy **maqsad** shundan iboratki.

1. Energiya spektrini o'rganishning mavjud usullarini tahlil qilish elektron holatlar, dipol konsentratsiyasi profilari, yarimo'tkazgich mikro va nanostrukturalarda chuqur energiya darajalari bilan bog'liq nuqsonlarni o'rganish.

2. Nuqtali yarimo'tkazgichli nanostrukturalarning fizik modelini ishlab chiqish elektr potentsial taqsimotining sferik simmetriyasini yaqinlashtirishda to'siq kontaktning konfiguratsiyasini va o'rganilayotgan yarimo'tkazgich mikro yoki nanostrukturasi hisobga oladigan to'siq kontaktlarni o'tkazuvchanlik tezligini taxlil qilish.

3. Vaqtida bo'shashish oqimini shakllantirishning fizik modelini ishlab chiqish elektr potentsial taqsimotining sferik simmetriyasini hisobga oladigan nuqta-to'siq kontaktga asoslangan yarimo'tkazgichli strukturada energiya darajasini zaryadlash tezligini oshirish.

4. Yarimo'tkazgich strukturalari asoslarini birgalikda qo'llash asosida ishlab chiqish, o'lchamlari o'tkazgich o'lchami bilan belgilanadigan hududlarda yarimo'tkazgich mikro va nanostrukturalarda elektron holatlarning energiya spektrini mahalliy o'rganish imkonini beradigan chuqur darajadagi oqim relaksatsiya spektroskopiyasini, atom kuchi mikroskopiyasi yordamida aniqlash.

5. Yarimo'tkazgichda past chastotali to'liqinni hosil qilish modelini takomillashtirish kvant o'ra chuqurligi bilan nikel geterostrukturalarida tadqiqot o'tkazish.

6. Narml kuchlanish hamda temperature ta'sirlarida kuchlanish xarakteristikasini mahalliy o'lchash texnikasini ishlab chiqish.

Olib borilayotgan ilmiy izlanishlarning tadqiqot obyekti sifatida tanlab olingan materiallar quyidagilardan iborat. Geterostrukturalar tizimlarga asoslangan kvant o'ra chuqurlari (QW). InGaAs/GaAs, ZnMgSSe/ZnSe, ZnCdS/ZnSSe va o'z-o'zidan yig'ilgan kvant nuqtalari bilan geterostrukturalar (CT) asosidagi tizim CdSe/ZnSep, rivojlangan yarimo'tkazgichli mikro tuzilmalar asosidagi sirt relefi-Si, gibrid geterostrukturalarga asoslangan nano o'lchamdagi qatlamlara-Si:H va kristall Si. Murakkabga asoslangan tuzilmalarni A_3IN_5 va A_2IN_6 tanlab olingan. Namunalarni tayorlash jarayoni molekulyar nurli epitaksiya bilan yetishtirildi (MPE) yoki metall-organik bug'fazasi epitaksisi (PFEMOS) usullari yordamida o'stirib olinadi [1-4].

Ilmiy tadqiqotning yangiligi sifatida keltirilgan natijalar quyidagilardan iborat. Namunani skanerlovchi prob mikroskopidan foydalanishga asoslangan yarimo'tkazgich strukturasi, erkin zaryad tashuvchilar konsentratsiyasining uch o'lchovli taqsimlash profilini olish uchun nuqta elektr metall-yarimo'tkazgichli kontakti shakllantirish. Amalga oshirish uchun o'lchov-analitik komplekslarni ishlab chiqish, sig'im-kuchlanish xususiyatlarini mahalliy o'lchash usullarini ishlab chiqdi, past- chuqur darajadagi oqim relaksatsiyasi spektroskopiyasi, past chastotali to'liqin spektroskopiyasilaridan foydalanib.

Yarimo'tkazgichli nanostrukturalarni, rivojlangan tuzilmalarni o'rganish sirt relyefi turli tarkibli va qalinlikdagi kvant chuqurlari bo'lgan nanostrukturalarda ruxsat etilgan energiya diapazonlarining uzilishlarini aniqlashtirish, nuqta hosil bo'lishi paytida ushbu qiymatlarning namuna yuzasi bo'ylab kvant chuqurlarini tashkil etuvchi qatlamga parallel ravishda taqsimlanishini o'rganib ishlab chiqilgan tadqiqot usullaridan foydalangan holda ishlab chiqish. Olingan nazariy va eksperimental natijalarni umimlashtirish yarimo'tkazgich mikro- va nanostrukturalarda fizik jarayonlarni o'rganish.

Ilmiy tadqiqot ishlarida asosiy olib borilgan ishning mazmuni sifatida o'tish davrini tavsiflovchi yangi matematik model taklif etiladi o'lchamni to'ldirishni hisobga olgan holda elektr potentsialining sferik simmetriyasi bilan aloqada bo'lgan kvant o'ra chuqurligi bilan yarimo'tkazgichli nuqta-to'siqli konstruksiyada o'lcham-kvantlash energiya darajalarini qayta zaryadlash paytida elektr kuchlanishining impulsli ta'siri ostida tokning bo'shashish jarayoni kvantlash darajalari o'rganib chiqilgan. Energiya spektrini mahalliy o'rganish usuli yordamida yarimo'tkazgichli tuzilmalardagi elektron holatlar, ya'ni o'lchamlari nanometr diapazonida bo'lgan ularning mintaqalarida (10–100 nm), belgilangan bo'lib elektr kuchlanishining impulsli ta'siri ostida struktura orqali elektr tokining bo'shashish vaqtining haroratga bog'liqligini o'rganish asosida atom kuch mikroskopining (AFM) o'tkazuvchi zondi tomonidan hosil qilingan nuqta to'siqni tashqi ta'sirlar davomida metal –dielektrik-yarimo'tkazgich kontaktining chegara sohasi oralig'i, quyidagicha tavsiflanadi: AFM elektr kontaktini hosil qilish uchun o'tkazuvchi prob ishlatiladi, bu o'lchovlarning joylashishini ta'minlaydi.

Mahalliy sig'im-kuchlanish xarakteristikasini olish uchun yangi texnika ishlab chiqildi. Chegara bo'lim sohasiga tegishli diapazonlarida yarimo'tkazgichli to'siq strukturasining xususiyatlari, bu yarimo'tkazgich namunasi yuzasiga elektr nuqta bilan aloqa qilish uchun atom kuch mikroskopining zond tizimidan foydalanish, namuna orqali oqimning doimiy komponentini tahlil qilishdan iborat. Namunaning elektr sig'imiga mutanosib komponentni o'z ichiga olgan, unga davriy impulsli kuchlanish qo'llanilganda mahalliy sig'im-kuchlanish xususiyatlarini olish imkoniyati ko'rsatilgan. Tashqi kuchlanish berilgan vaqtda mikroskopidan foydalangan holda yarimo'tkazgich namunasi yuzasiga o'tkazuvchi zondning nuqta elektr aloqasi bilan yarimo'tkazgichli struktura ifloslanish kontsentratsiyasining mahalliy profilini hisoblashga erishildi. Masalan, rivojlangan relyefli Si yarimo'tkazgichli struktura poydevorning balandligi va yon tomoni bo'lgan piramidalar ko'rinishidagi sirtlar 3-5 mkm olinadi atom kuch mikroskopining o'tkazgich zondi bilan sirtga nuqta elektr kontaktini hosil qilish orqali sig'im-kuchlanish xususiyatlari aniqlik bilan olinishi yanada osonlashadi.

Yarimo'tkazgich mikro va nanostrukturalarning elektr xususiyatlarini (erkin NC ning kontsentratsiyasi, qarshilik, elektr potentsiali) mahalliy o'lchashni amalga oshirishga imkon beradigan usullar. Elementlarning faol hududlari hajmining kamayishi bilan elektr xususiyatlarini taqsimlashda mikro va makroinhomogenliklarning fizikasiga ta'siri, turli xil strukturaviy nuqsonlar, sirt topografiyasi va interfeyslarning xususiyatlari ortadi. Ushbu mikroeterojenliklarni aniqlash uchun o'ziga xos cheklovlar ega bo'lgan zond usullari qo'llaniladi. Skanerli mikroto'lqinli mikroskopiya va skanerlash tarqaladigan qarshilik mikroskopiya (SMSR) jismoniy asoslari ko'rib chiqiladi. Ushbu tadqiqot usullarining asosiy imkoniyatlari va cheklovlari muhokama qilinadi.

Yarimo'tkazgichli materiallarda erkin zaryad tashuvchilarning kontsentratsiyasini o'lchash uchun elektr zond usullarini ko'rib chiqish asosida yarimo'tkazgichli konstruksiyalarda erkin zaryad tashuvchilarning kontsentratsiya profilini mahalliy o'lchash texnikasini tanlash asoslanadi. Ushbu texnikani qo'llash uchun nuqta chizig'ining elektrofizik xususiyatlari - metall-yarimo'tkazgichli strukturalarini namuna sifatida olingan. Yarimo'tkazgichdagi elektr maydoni va potentsial taqsimotining sferik simmetriyasini va yarimo'tkazgichdagi fazoviy zaryad mintaqasining (SCR) keskin chegarasini yaqinlashtirishda nuqta to'siqli kontakt tahlil qilinadi. Biroq, kontakt o'lchamlari Debay uzunligiga mutanosib bo'lganda, SCR chegarasining surilishini hisobga olish kerak. Nuqta kontaktli metall – yarimo'tkazgichning sferik koordinatalarida Puasson tenglamasining yechimi tasvirlangan.sirtga zaryad yo'qligining yaqinlashuvida n-turi bildiradi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = - \frac{eN(1 - e^{-e\varphi/k_B T})}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (1)$$

Bu yerda e -elementar zaryad, T -mutlaq harorat, ϵ_0 -mutlaq dielektrik o'tkazuvchanlik, ϵ - yarimo'tkazgichning nisbiy o'tkazuvchanligi, N -ionlangan donor aralashmalarining kontsentratsiyasi (bo'lishi mumkin lekin qabul qiluvchi nopokni xuddi shunday muomala qiling), k_B -Boltsman doimiysi, r - geometrik markazdan masofa metall probning yarimo'tkazgich yuzasiga yarimo'tkazgichning asosiy qismidagi nuqtaga tegishi. Bunday holda, sirt holatlaridagi zaryad hisobga olinmadi. Tenglamani yechish natijasida yarimo'tkazgichdagi elektr potentsialining bog'liqligi (1) ifoda bilan ifodalanadi:

$$\varphi(r, r_0) = - \frac{r_0}{r} (U_K + U_R) \exp \left(\frac{r_0 - r}{L_D} \right), \quad (2)$$

Bu yerda r_0 - nuqta kontaktining egrilik radiusi, LD -Debay uzunligi, U_k - diffuziya ion potentsiali, UR - egilish kuchlanishining kattaligi. Nuqta kontaktining elektr to'siq sig'iminining qiymati ionlangan aralashmalar zaryadining hosilasi sifatida hisoblanishi mumkin.

$$C(U) = \frac{dQ}{dU}$$

O'rganilayotgan strukturaning yuzasi bilan aloqa o'tkazuvchan AFM probi tomonidan amalga oshiriladi. Hisob-kitoblarda sirt holatlarining zaryadi e'tiborga olinmadi, bundan tashqari, yarimo'tkazgichdagi ichki chegarasining pozitsiyasi qanoatlantirildi. $R > r_0$, keyin kontakti birinchi yaqinlashuvda yarim sharsimon deb hisoblash mumkin yog'sizlantirish[15-16].

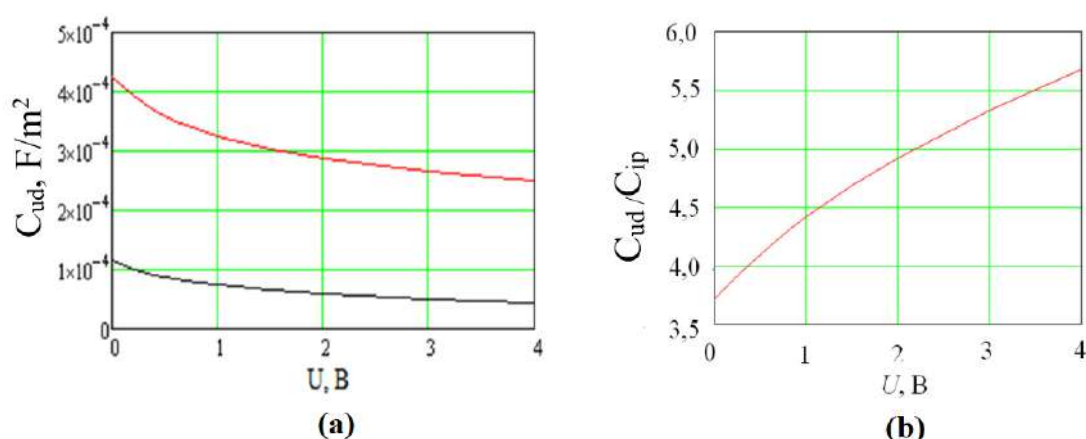
Bundan tashqari, yarim sharsimon kontakt uchun to'siq sig'iminining qiymati quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$C(U) = 2\pi e N R^2(U) \left[\frac{dR(U)}{dU} \right], \quad (3)$$

1-rasmda. Nuqtaning o'ziga xos sig'iminining hisoblangan. Bundan ko'rinadiki bog'liqliklarini tekis to'siq bilan aloqa qilishi (1-rasm a). O'ziga xos sig'im nisbati planar to'siq kontaktining o'ziga xos sig'imiga (1-rasm b). Teskari tomondan sayoz donorlar kontsentratsiyasida nuqta to'siqli aloqada SCRning ichki chegarasini bulg'anishini hisobga olgan holda stress 10^{15}sm^{-3} va nuqta bilan aloqa radiusi 50 nm (n-Si materiali) ekanligini ko'rish mumkin [9-10].

Nazariy hisob-kitoblar natijalaridan C-V xususiyatlari shundan kelib chiqadiki, elektrdagi o'zgarish CVga bog'liq yarimo'tkazgich xususiyatlarini ochib beradi. Kontakt modelini tanlash erkin NS kontsentratsiyasi profilini hisoblashning aniqligiga ta'sir qiladi [16]. Metall yarimo'tkazgichli nuqta to'siqni kontaktining elektr sig'imi ham zaryad tashuvchilarning kontsentratsiyasiga, ham aloqa radiusiga (ishlatiladigan o'tkazgich radiusi) bog'liq. Yarim sharsimon kontakti yaqinlashtirishda, teskari kuchlanish kuchayishi bilan, planar to'siqli kontaktdan farqli o'laroq, sig'im biroz oshadi. Bu tekis to'siqli kontaktda uning maydoni teskari kuchlanishga bog'liq emasligi bilan izohlanadi, yarim sharsimon modelda esa yarimo'tkazgichdagi SCRning ichki chegarasiga mos keladigan sirt maydoni teskari kuchlanish bilan ortadi. Shuningdek, hisob-kitoblardan kelib chiqadiki, o'ziga xos sferik kontakt sig'imi taxminan, 3,7 - 5,7 marta solishtirma quvvat planar aloqa va bu nisbat ortib borayotgan teskari chiziqli kuchlanish bilan ortadi [11].

Olib borilgan tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, mahalliy tok relaksatsiya spektroskopiyasi usuli sinovdan o'tkazilganda chuqur darajalar tok relaksatsiyasi spektroskopiyasi va atom kuchi mikroskopiyasini birgalikda o'rganilayotgan yarimo'tkazgich mikro va nanostruktura yuzasi bo'ylab, geterointerfeyslarga parallel ravishda zaryad tashuvchilarning faollashuv energiyasini taqsimlashni nazorat qilish imkonini ko'rsatdi [13].



1-rasm. a - tekis (pastki egri) va nuqtaning o'ziga xos sig'imiga bog'liqligi (yuqori egri) teskari kuchlanishga qarshi to'siq bilan aloqa qilish;
b - nuqta va tekis to'siqli kontaktlarning o'ziga xos sig'irlarining teskari kuchlanishga bog'liqligi

Ilmiy ishdan **xulosa** qilib shuni aytish mumkinki. Chegaradagi o'lchamlari atom kuchi mikroskopining o'tkazuvchi zondining uchi diametri bilan belgilanadi va qiymatlarda 10-100 nm $Zn_{0.4}Cd_{0.6}S/ZnS_{0.06}Se_{0.94}$ namuna strukturasida misolida bo'shliq o'lchami o'tkazuvchanlik zonalari o'zgardi 391 dan 431 meV gacha olinganda geterostrukturalarning sifatini baholash va epitaksial qatlamlar o'stirilgan maydoni bo'ylab ruxsat etilgan energiya zonalarida uzilishlarni taqsimlanishi yaqqol namoyon bo'lishi kuzatildi. Bundan ko'rib turibdki mikro va makroinhomogenlikni o'rganish imkoniyati yanada oshdi. Mahalliy RTGS ning ishlab chiqilgan usuli yordamida zaryad tashuvchilarning bir nechta (kamroq) emissiya jarayonlarini o'rganish mumkinligi ko'rsatilgan. Kvant nuqtalari bilan CdSe/ZnSe struktura orqali elektr tokining bo'shashish vaqtining quvvatga bog'liqligi, kvant nuqtalaridan elektron chiqarish jarayonining faollashuv energiyasi eksperimental ravishda aniqlandi 620+20 meV [7-17]. O'lchangan mahalliy sig'im-kuchlanish xarakteristikasiga asosanib, fazoviy holati o'rganilayotgan namunadagi kvant chuqurlarining fazoviy holatiga to'g'ri keladigan xarakterli konsentratsiya cho'qqilariga ega bo'lgan erkin elektronlar konsentratsiyasining (ko'rinadigan) taqsimot profili hisoblab chiqish imkonini yaratdi.

ADABIYOTLAR:

1. Литвинов В.Г., Ермачихин А.В., Кусякин Д.С. DLTS исследование диода Шоттки на основе гетероструктуры InGaAs/GaAs с квантовой ямой // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. Вып. 44. № 2. С. 91-96.
2. Ермачихин А.В., Кострюков С.А., Литвинов В.Г., Рыбин Н.Б. Исследование шумовых свойств и электронных состояний диода Шоттки на основе гетероструктуры InGaAs/GaAs с квантовой ямой // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2012. Вып. 41. № 3. С. 98-103.
3. Садофьев Ю.Г., Литвинов В.Г. Исследование электрофизических свойств гетероэпитаксиальных слоев ZnSe на GaAs(001) // Неорганические материалы. 2000. Т. 36. № 12. С. 1432-1437.
4. Luque A., Andreev V. Concentrator Photovoltaics. Madrid: Springer, 2007.
5. Meinel A.B., Meinel M.P. Applied Solar Energy. Addison Wesley Publishing Co., 1976.
6. Rumyantsev V.D., Sadchikov N.A., Chalov A.E., Ionova E.A. Terrestrial Concentrator PV Modules Based on GaInP/GaAs/Ge TJ Cells and Minilens Panels // Photovoltaic Energy Conversion. 2006. pp. 632 - 635.
7. Taggart S. CSP: Dish Project Inch Forward // Renewable Energy Focus, July/August 2008. pp. 52-54.
8. Андреев В.М. и др., "Фотовольтаический концентрирующий модуль," RU 2395136, 2010.
9. Kuchkarov B. Kh., Saparov F.A. "To definition of surface state density of semiconductor-dielectric interface" 2010/4/1 Физика фанининг бузунги ривожиди истеъдодли ёшларнинг ўрни. Str. 137-140.
10. Qochqorov B. Kh., Ehrgasheva M., Rakhimov N., Vlasov S.I. "To study the interface semiconductor-dielectrics centres effect on the state density" 2010/11/1. Конференция посвященная 80-летию академика Саидова М.С.
11. Qochqorov B. Kh., Ehrgasheva M., Rakhimov N., Vlasov S.I. "To study the interface semiconductor-dielectrics centres effect on the state density; Yarimotkazgich-diehlektrik chegara sokhasidagi markazlarning kholat zichligiga ta'sirini" 2010/11/15.
12. Власов С.И., Кучкаров Б.Х., Исмаилов Б.К. "Влияние Термоциклических Обработок На Свойства Границы Раздела SiO_2 - Si Структур Al - SiO_2 -N-Si" Современные Проблемы Физики Полупроводников – 2011. 2011/11/1.
13. Овсянников А.В., Власов С.И., Кучкаров Б.Х. "Генерационные характеристики границы раздела Si - SiO_2 " Современные проблемы физики полупроводников – 2011. 2011/11/1.
14. Kuchkarov B., Mamatkarimov O., Abdulkhayev A. "Influence of the ultrasonic irradiation on characteristic of the structures metal-glass-semiconductor" ICECAE 2020 IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614 (2020) 012027. doi:10.1088/1755-1315/614/1/012027.
15. Kuchkarov B. H., Mamatkarimov O. O., Abdulkarimov A. A., Khalmirzayev A., Mirtojyeva D. M. "Influence of all-round compression on formation of the mobile charge in lead-borosilicate glass structure" AIP Conf. Proc. 2432, 030039 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0089980>.
16. Mamatkarimov O.O., Kuchkarov B.H., Sharibae N.Yu., Abdulkhayev A.A. "Influence Of The Ultrasonic Irradiation On Characteristic Of The Structures Metal-Glass-Semiconductor // European Journal of Molecular & Clinical Medicine. 2021/1/1. №8/01 str. 610-618.

17.Behzod Khoshimjonovich Kuchkarov, Odijon Ohundedaevich Mamatkarimov. "Influence of ultrasonic action on the rate of charge formation of the inversion layer in metal-glass-semiconductor structures" 2019 y. №29/4 str. 125-134.

18.Behzod Khoshimjanovich Kuchkarov, Odiljon Oxundedaevich Mamatkarimov, Abrorbek Abdulloxonovich Abdulkhayev. "Relaxation Dependence Of The Capacity Of A Three-Layer Structure In The Process Of Charge Formation Of An Inversion Layer" // Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology. 2019 y. №1/6 cmp. 26-33.

TIC 354493993 IKKI MODALI VA YUQORI AMPLITUDALI DELTA SCUTI

Jurayev Bolqinjon Shuxratovich,*O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi
Astronomiya instituti tayanch doktoranti
bolkin@astrin.uz***Ergashev Salohiddin Shavkat o'g'li,***Sh.Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti tayanch doktoranti
ergashev.salohiddin@bk.ru***Khamrakulov Farkhodjon Baxronqul o'g'li,***Sh.Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti assistenti
x-farxodjon@mail.ru*

Annotatsiya. Ushbu maqolada TIC 354493993 yulduzining TESS dagi ma'lumotlardan foydalanib, uning pulsatsiyalanish chastotalari aniqlandi. Yulduzning pulsatsiyalanish chastotalari tahlili qilindi, davrlari aniqlandi va ravshanlik egri chiziqlari chizildi. Ravshanlik egri chiziqlarining shakli hamda pulsatsiyalanish chastotalarning qiymatlari asosida bosim kuchlari p va gravitatsion kuchlar g modalar bilan, ya'ni ikki modali pulsatsiyalanishi aniqlandi. Hisoblangan amplituda qiymatlaridan yuqori amplitudali Delta Scuti tipi ekanligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: Delta Scuti, pulsatsiya p , g moda, amplituda, faza, ravshanlik, egri chiziq, yulduz, chastota.

TIC 354493993 ДВУХРЕЖИМНЫЙ И ВЫСОКОАМПЛИТУДНЫЙ DELTA SCUTI

Аннотация. В этой статье частоты пульсаций звезды TIC 354493993 были определены с использованием данных TESS. Рассчитаны частоты пульсаций звезды, определены периоды и построены кривые светимости. По форме кривых лёгкости и значениям частот пульсаций установлено, что значения давления p и гравитационных сил являются пульсирующими с g модами, т.е. двухмодовыми пульсациями. Было обнаружено, что это Delta Scuti с более высокой амплитудой, чем расчётные значения амплитуды.

Ключевые слова: Delta Scuti, пульсация p , g мода, амплитуда, фаза, яркость, кривая, звезда, частота.

TIC 354493993 DUAL-MODE AND HIGH-AMPLITUDE DELTA SCUTI

Abstract. In this paper, the pulsation frequencies of the star TIC 354493993 were determined using TESS data. The pulsation frequencies of the star have been calculated, periods have been determined and lightness curves have been plotted. From the shape of the light curves and the values of the pulsation frequencies, it was found that the pressure p and gravitational force values are pulsating with g modes, i.e., two-mode pulsations. It was found to be Delta Scuti with higher amplitude than the calculated amplitude values.

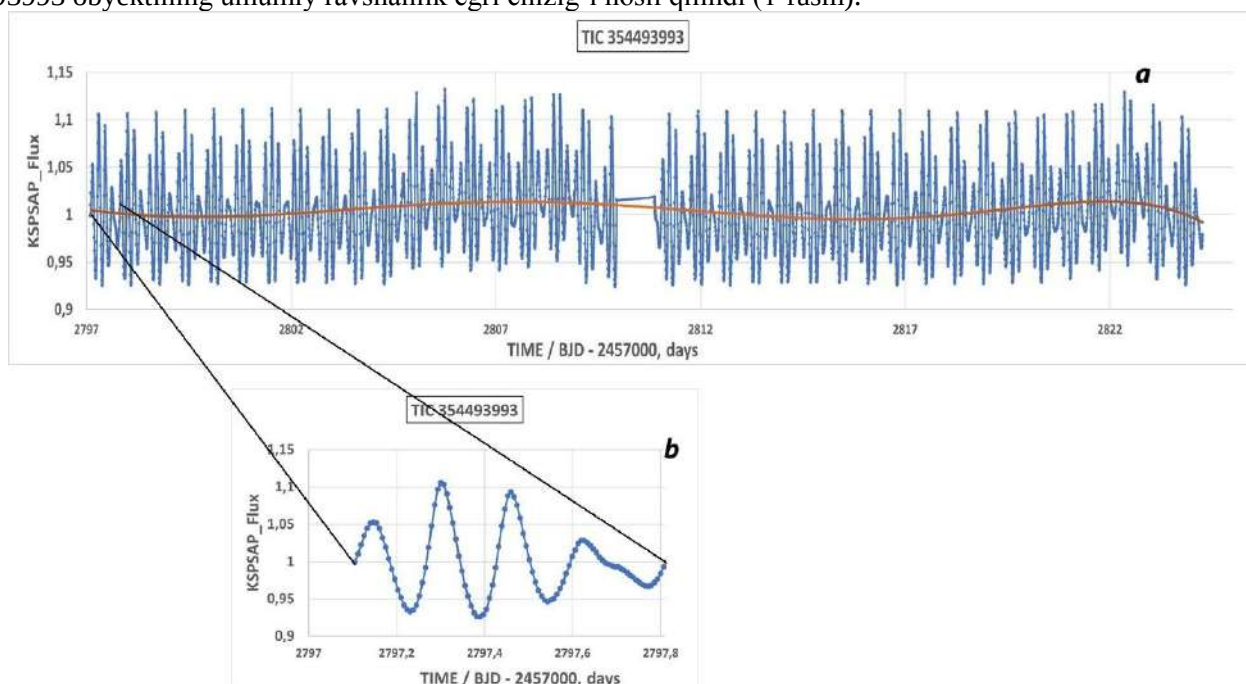
Keywords: Delta Scuti, pulsation, p and g modes, amplitude, phase, brightness, light curve, star, frequency.

Kirish. Delta Scuti yulduzlari odatda A va F spektral sinfiga mansub bo'lib, ular asosiy ketma-ketlik yoki evolyutsion jihatdan biroz rivojlangan yulduzlar hisoblanadi. Delta Scuti yulduzlari astroseismologiya uchun muhim obyektlardir, chunki ularning pulsatsiyalari yulduzning ichki tuzilishini aniqlashga yordam beradi. Ular yulduz evolyutsiyasi jarayonlarini tushunishda asosiy rol o'ynaydi. Chunki bunday yulduzlarning konvektsiya konvertlari radiatsiya konvertiga aylanadigan o'tish zonasida joylashgan [1]. Ushbu zonada energiya uzatish mexanizmini tushunish uchun qo'llanishi mumkin bo'lgan Delta Scuti (DSCT) tadqiqotlari muhimdir. Yorqinlik o'zgarishlari odatda 0.003–0.9 magnituda oralig'ida kuzatiladi. Delta Scuti yulduzlarining massasi $1.2 \div 2.5 M_{\odot}$ gacha. T_{eff} va $\log g$ qiymatiga mos ravishda 6300 – 8500 K va 3.2 – 4.3 oralig'ida bo'ladi [2]. Delta Scuti yulduzlari radial va noradial bo'lgan past va o'rta tartibli bosim (p), gravitatsiya (g) va aralash rejimlarda 3 kun^{-1} va 80 kun^{-1} oralig'idagi chastotalarda

pulsatsiyalanadi [3]. Bu pulsatsiyalar He II ionlanish zonasida ishlaydigan Kappa mexanizmi tomonidan boshqarilishi mumkin [4], vodorodning ionlash zonasida harakat qiluvchi turbulent bosim [5] va edge-bump (sirtiga zarba tufayli sirtning notekisligi) mexanizmi pulsatsiyalanishlarni vujudga keltiradi [6].

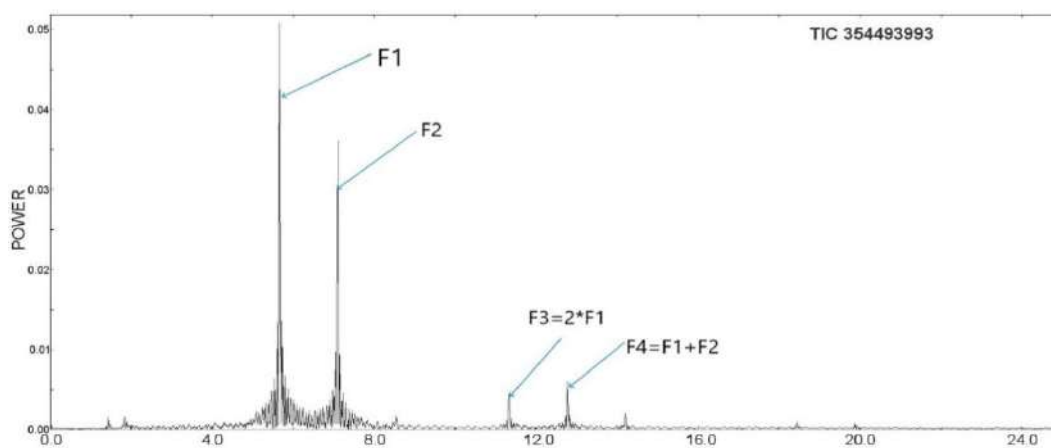
Kuzatuvlar. Koordinatasi $RA_{2000}=20:58:49.64$ $DEC_{2000}=+08:54:05.3$ obyekt turli yulduz kataloglarida har xil nomlangan. Masalan o'zgaruvchan yulduzlar katalogida ASAS 205850+0854.1, va boshqalarida BD+08 4583, TYC 1103-1012 1, NSVS 11548864, NSVS 14320267 kabi nomlar bilan identifikatsiyalangan. Dastlab obyekt osmonning janubiy yarim sharining $9^{\circ} \times 9^{\circ}$ maydonidagi 1300000 ortiq yulduz tahlil qilinib, DSCT deb qayd etilgan [7]. Keyinchalik ikki modali, pulsatsiyalanish davrlari 0.1764484 va 0.1407792 sutkaga tengligi keltirilgan [8]. TESS (Transit Exoplanet Survey Satellite) ma'lumotlar bazasida koordinatasi bo'lgan obyekt TIC 354493993 nomi bilan identifikatsiyalangan va 55 sektorda qayd etilib, quyidagi parametrlari aniqlangan $TESS_{mag}=9.989$, $R=4.621R_{\odot}$, $T_{eff}=6841$ K, $\log g=3.27$.

Ma'lumotlarni qayta ishlash. TIC 354493993 obyektining pulsatsiyalanish chastotalari va amplitudasini baholash uchun quyidagi dasturlardan foydalandik. TOPCAT [9] dasturi yordamida TIC 354493993 obyektining umumiy ravshanlik egri chizig'i hosil qilindi (1-rasm).



1-rasm. a) TIC 35493993 ning umumiy ravshanlik egri chizig'i, b) bir marta to'liq pulsatsiyalanish ravshanlik egri chizig'i

1-rasmning b qismida yuqori va kichik amplitudali chastotalarda pulsatsiyalanishlarini, a qismida umumiy trendning (sariq chiziq) o'zgarishini ham ko'rish mumkin. Bu pulsatsiyalanish chastotalarni baholash uchun obyektining TESS dagi KSPSAP_FLUX (Kepler Space Telescope Simple Aperture Photometry) qiymatlaridan foydalanilib Period04 [10] dasturida Fure transformatsiyasi qo'llanilib quvvat spektri olindi (2-rasm).



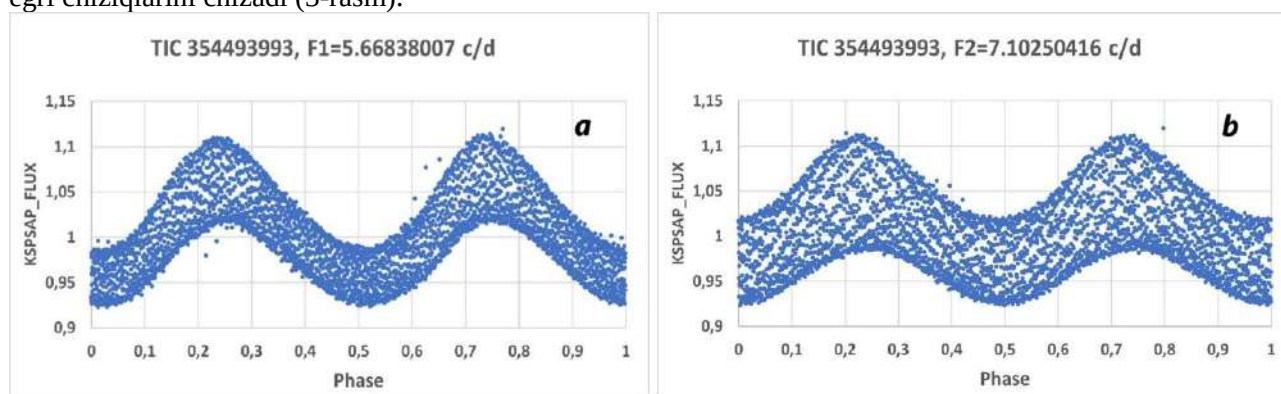
2-rasm. Quvvat spektrida ketma-ketlikda pulsatsiyalanish chastotalar ko'rsatilgan

Chastota tahlili. Odatda Period04 dasturi Fure transformatsiyasidan so'ng yulduzdagi eng kuchli pulsatsiya signalini aniqlaydi. Pulsatsiyalanishlarning keyingi zaifroq signalini aniqlash uchun Period04 dasturida *Prewhitening* amaliyoti bajariladi, bu jarayonni bir necha marta qo'llash orqali barcha pulsatsiya signallarni aniqlash mumkin. Obyektning pulsatsiyalanish chastotalari, amplitudalari va fazalari hisoblandi(1-jadval). 2-rasmdagi quvvat spectridagi piklarga mos ravishda ularning chastotalari ketma – ketlikda qayd etildi.

1-jadval.

N _o	Frequency (c/d)	Amplitude	Phase
F1	5.66838007	0.0509451	0.072189
F2	7.10250416	0.0362957	0.345205
F3	11.3349192	0.00466503	0.189586
F4	12.7708842	0.00619417	0.247191

1-jadvalda keltirilgan barcha pulsatsiyalanish chastotalari tahlil qilinib ularning ichidan asosiy chastotalarni (yoki davrini) topish uchun Pyhtonning *lightcurve* paketida *Lomb-Scargle* matematik algoritimi yordamida TIC 354493993 ning asosiy pulasatsiyalanish chastotalarnini aniqlaydi mos ravishda ravshanlik egri chiziqlarini chizadi (3-rasm).



3-rasm. a – asosiy (F1), b – yondosh (F2) pulsatsiyalanish chastotalarining ravshanlik egri chiziqlari

Bu ravshanlik egri chiziqlari $P \times 2$ ko'rinishda berilgan P – pulsatsiyalanish davri.

Mulohaza. Ko'pchilik adabiyotlardagi DSCT larning ravshanlik egri chiziqlarni o'rganishlardan, yulduz sirtining pulsatsiyalanishi yo'nalishi bilan yulduzning radial kengayish yo'nalishi (nuriy tezligi) bir-biriga mos kelganda ravshanlikning maksimumdan minimum nuqtasiga tezroq erishadi va bu jarayon aksincha bo'lganda ravshanlikning minimumdan maksimum nuqtasiga sekinroq erishadi, bizning holatda yorug'lik oqimining minimal va maksimal qiymatlariga mos keladi, bu jarayonni 3 – rasmning **a** qismida yaqqol, **b** qismida ham payqash mumkin. Bunday ravshanlik egri chiziqlarni odatda p moda bo'yicha pulsatsiyalanishlar vujudga keltiradi. Nisbatan yulduzning sitiga yaqin hududlarda bosim kuchlari tebranishlarni vujudga keltirish sababli p modali pulsatsiyalanishlar hosil bo'ladi, bunday pulsatsiyalnishlarning davri g modaga davriga nisbatan kichikroq bo'ladi. TIC 354493993 obyektining 55 sectoridagi 3774 ta kuzatuv nuqtalarning mavjudligi 3 – rasmdagi ravshanlik egri chiziqlarning kengligiga sabab. Ko'pchilik DSCT larning ravshanlik chiziqlarining ketma-ket pulsatsiyalanishlaridagi minimum nuqtalarning amplituda qiymatlari bir – biriga yaqin bo'ladi. 1-rasmning o'rta qismlarida pulsatsiyalanish tez, boshi va oxirida sekin ro'y berayotganligini, shu bilan birgalikda yorug'lik oqimi amplitudasining ravshanlik egri chizig'ining bosh va oxirgi qismlariga nisbatan katta farqini kuzatish mumkin. Bunday farqlarning vujudga kelish sababi bu yulduz yana qo'shimcha g moda bilan pulsatsiyalanish bo'lishi mumkin. g modali pulsatsiyalanishlar nisbatan yulduzning yadro yaqin qismlarda gravitatsion kuchlar vujudga keltirib uning ta'siri yulduz sirtida kuzatilishi uchun bir oz ko'proq vaqt talab qiladi. Pulsatsiyalanish davri p modaga nisbatan ko'proq. Yulduzda ikki modali pulsatsiyalanish kuzatiliganda ularning pulsatsiyalanish chastotalari bir-biriga yaqin bo'lsa, pulsatsiyalanishlarning bir xil fazada ro'y berishi yorug'lik oqimi amplitudasining oshishiga, qarama-qarshi fazada yuz berishi amplitudaning minimumdagi qiymatda sekinlik bilan erishishiga sabab bo'ladi. Buni 1-rasm **b** qismining oxirida kuztish mumkin. Quvvat spekri va 1-jadvaldagi pulsatsiyalanish chastotalarning tahlilidan F1 va F2 lar asosiy chastotalar, $F3 = 2 \times F1$ ekanligini, F4

chastota $F1$ va $F2$ larning yig'indisi ya'ni $F4 = F1 + F2$ ifoda 1–rasmning **b** qismining pulsatsiyalanish chastotasi ekanligini Lafler & Kinman va Deeming (DFT) metodi ham ko'rsatmoqda [11].

Xulosa. TESS ma'lumotlar bazasida TIC 354493993 nomi bilan indentifikatsiyalangan, 55 sectoridagi kuzatuv ma'lumotlarning TIME/BJD 2457000 va KSPSAP_FLUX qiymatlaridan foydalanib ushbu yulduzning umumiy ravshanlik egri chizig'i, quvvat spektri va pulsatsiyalanish chastotalari hamda shu aniqlangan chastotalar yordamida ravshanlik egri chiziqlari hosil qilindi. Aniqlangan pulsatsiyalanish chastotalarni $P = \frac{1}{F}$ (sutka) ifoda orqali qiymatlarini hisoblaymiz $P_1 = 0.1764172458$, $P_2 = 0.1407954121$, $P_3 = 0.088222949$, $P_4 = 0.0783031139$. Bu aniqlangan pulsatsiyalanish davrlari ichidagi P_1 va P_2 lar yulduzda kuzatiladigan doimiy kuzatilib, hosil qilingan ravshanlik egri chiziqlari shakllarining tahlilidan TIC 354493993 yulduzi pulsatsiyalanishlarning p va g modalarini namoyon qilishini ko'rish mumkin. Umumiy ravshanlik egri chiziqlarning shaklidan hisoblangan amplituda qiymatlaridan yuqori amplitudali Delta Scuti tipligi aniqlandi. Ikki modali pulsatsiyalanishlarni namoyon qiluvchi Delta Scuti yulduzlari astroseismologik tadqiqotlar uchun ajoyib tadqiqot obyekti hisoblanadi. Odatda yulduzlarning ichidagi jarayonlarini tushunish uchun bosim kuchlari p modalar yoki gravitatsion kuchlar g modalar hamda aralash modalar ta'sirida hosil bo'ladigan yulduz sirtlardagi pulsatsiyalanishlarni to'laroq o'rganish talab etiladi. Bu borada kosmik KEPLER, TESS teleskoplaridan olinadigan ma'lumotlardan foydalaniladi. TESS missiyasi tomonidan kuzatilgan ma'lumotlar pulsatsiyalanuvchi yulduzlarni tekshirish uchun yuqori aniqlikni ta'minlaydi. Shuning uchun TESS ma'lumotlar bazasidagi Delta Scutilarni o'rganishga e'tiborimizni qaratdik.

ADABIYOTLAR:

1. Aerts, Christensen-Dalsgaard, Kurtz. *Asteroseismology, Astronomy and Astrophysics* ISBN 978-1-4020-5178-4. Springer Science+Business Media B.V., 2010, p.
2. Kirmizitas O., Cavus S. and Kahraman F. *Alicavuş. "Discovery of new Scuti Stars", // Astrophysical Bulletin. Solar and Stellar Astrophysics. 25 aug, 2022.*
3. Uytterhoeven K, Moya A, Grigahcène A, et al. *The Kepler characterization of the variability among A- and F-type stars. // General overview 2011, A&A, 534, A125*
4. Chevalier C. 1971, *Astronomy & Astrophysics* 14, 24. Breger, M. 2000, *ASP Conf. Ser. 210, Delta Scuti and Related Stars (San Francisco, CA: ASP), 3*
5. Xiong D. R., Deng L., Zhang, C., et al. 2016, *MNRAS*, 457, 3163
6. Gang Li et all. *Asteroseismology of the young open cluster NGC 2516 I. // Photometric and spectroscopic observations A&A, 686, A142. 2024.*
7. Pojmanski G. *The All Sky Automated Survey. Catalog of Variable Stars. I. 0^h - 6^h Quarter of the Southern Hemisphere. Acta, Astronomica. Vol 52, 2002. pp 397-427.*
8. Khruslov A.V. *Six High-Amplitude Double-Mode Delta Scuti Variables "Peremennye Zvezdy", // Prilozhenie, vol. 11, N 30, 2011.*
9. Taylor M. *TOPCAT - Tool for OPerations on Catalogues And Tables Version 4.10, // Starlink User Note253, 2024.*
10. P.Lenz, M.Breger *"Period04 User Guide". // Comm. in Asteroseismology. Vol 146, 2005*
11. <https://scan.sai.msu.ru>

FOTOKONVERTORLI KONSENTRATSIYALI ELEKTR STANSIYALARIDAN FOYDALANISH MUAMMOLARI VA ISTIQBOLLARI

Qo'chqarov Behzod Hoshimjanovich,
Impuls tibbiyot instituti dotsenti, (PhD)

Xolmirzayev Akrom Abdukadirovich,
Namangan davlat universiteti dotsenti, f-m.n.

Izzatillayev Xurmatillo,
Andijon davlat universiteti 2-kurs doktoranti

Annotatsiya. Quyosh energiyasini yarimo'tkazgichli elementlar yordamida konversiyalash samaradorligi quyidagi yo'nalishlarda ishlab chiqishda: yangi materiallar va ularni qayta ishlash usullarini izlash orqali fotoelementlarning samaradorligini oshirish; quyosh energiyasi konsentratorlaridan foydalanish; quyoshni yo'naltirish tizimlarini ishlab chiqish; quyosh energiyasidan samaraliroq foydalanish uchun kogeneratsiya stansiyalarini yaratish. Mavjud ishlab chiqilgan quyosh batareyalari turlaridan kremniyli fotokonvertorlar (arzon narxlari va yaxshi yo'lga qo'yilgan ishlab chiqarish jarayoni tufayli) va eng yuqori samaradorlikka ega bo'lgan ko'p birikmali geterostrukturalar (GaInP/GaIn/Ge) qiziqish uyg'otadi. Fotoelementlarning oxirgi turi 100...1000 konsentratsiya faktoriga ega bo'lgan konsentrlangan quyosh nurlanishida eng yuqori samaradorlikka ega. Yuqori konsentratsiyali omillarni Fresnel linzalari bilan olish eng oson. Fotoelementlarni sovutish uchun issiqlik energiyasidan foydalanish, faol sovutish tizimidan foydalanish tavsiya etiladi. Shu munosabat bilan Fresnel linzalari asosidagi quyosh energiyasini konsentratori bilan tajriba qurilmasini ishlab chiqish vazifasi qo'yildi.

Kalit so'zlar: parabolik olukli konsentrator; chiziqli konsentrator; polivinilxlorid; analog-raqamli konvertor; tranzistor-tranzistorli mantiq (tranzistor-tranzistor mantiqi); universal sinxron-asinxron qabul qiluvchi-uzatuvchi (universal sinxron-asinxron qabul qiluvchi-uzatuvchi); yarimo'tkazgichning tarmoqli oralig'i, quvurdagi sovutish suvining o'rtacha harorati, orbitada Yerning burchak siljishi.

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ С ФОТОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Аннотация. Эффективность преобразования солнечной энергии с использованием полупроводниковых элементов развивается по следующим направлениям: повышение эффективности фотоэлектрических элементов за счёт поиска новых материалов и методов их обработки; использование концентраторов солнечной энергии; разработка систем солнечной ориентации; создание kogenerационных установок для более эффективного использования солнечной энергии. Из разрабатываемых в настоящее время типов солнечных элементов интерес представляют кремниевые фотопреобразователи (из-за дешевизны и отлаженной технологии изготовления) и многопереходные гетероструктуры (GaInP/GaIn/Ge), обладающие наибольшим КПД. Последний тип фотоэлементов имеет наибольшую эффективность в концентрированном солнечном излучении с коэффициентом концентрации 100...1000. Высокие коэффициенты концентрации легче всего получить с помощью линзы Френеля. Для охлаждения фотоэлектрических элементов рекомендуется использовать тепловую энергию, использовать активную систему охлаждения. В связи с этим была поставлена задача разработать экспериментальное устройство с концентратором солнечной энергии на основе линз Френеля.

Ключевые слова: концентратор параболического желоба; линейный концентратор; поливинилхлорид; аналого-цифровой преобразователь; транзисторно-транзисторная логика (транзисторно-транзисторная логика); универсальный синхронно-асинхронный приёмник-передатчик (универсальный синхронно-асинхронный приёмник-передатчик); запрещённая зона полупроводника, средняя температура теплоносителя в трубке, угловое смещение Земли на орбите.

PROBLEMS AND PROSPECTS OF USING CONCENTRATED POWER PLANTS WITH PHOTOCONVERTERS

Abstract. The efficiency of solar energy conversion using semiconductor elements is being developed in the following areas: increasing the efficiency of photovoltaic cells through the search for new materials

and methods of their processing; use of solar energy concentrators; development of solar orientation systems; creation of cogeneration plants for more efficient use of solar energy. Of the types of solar cells currently being developed, silicon photoconverters (due to their low cost and well-established manufacturing technology) and multijunction heterostructures (GaInP/GaIn/Ge), which have the highest efficiency, are of interest. The latter type of photocells has the greatest efficiency in concentrated solar radiation with a concentration coefficient of 100...1000. High concentration factors are most easily achieved using a Fresnel lens. To cool photovoltaic elements, it is recommended to use thermal energy and use an active cooling system. In this regard, the task was set to develop an experimental device with a solar energy concentrator based on Fresnel lenses.

Keywords: parabolic trough concentrator; linear concentrator; polyvinyl chloride; analog-digital converter; transistor-transistor logic (transistor-transistor logic); universal synchronous-asynchronous receiver-transmitter (universal synchronous-asynchronous receiver-transmitter); the band gap of a semiconductor, the average temperature of the coolant in the tube, the angular displacement of the Earth in orbit.

Kirish. Ko'pgina xorijiy tadqiqot va ishlab chiqarish kompaniyalari so'nggi 20 yil ichida yuqori konsentratsiyali omillar bilan ishlaydigan fotoelektr stansiyalarining prototiplari ustida ishlamoqda va ular asosida yetarlicha yirik elektr stansiyalarini sinovdan o'tkazmoqda. Fotovoltaik konsentratsion elektr stansiyalarining faol rivojlanishi 1976- yilda Sandia National Laboratories (SNL) - AQShda boshlangan. Ularning birinchi qurilmalari quyoshni ikki o'qda yo'naltirish qobiliyatiga ega edi, Fresnel linzalari asosidagi konsentratorlarni o'z ichiga olgan va konsentratsiya darajasiga ega edi. Rossiya olimlari tomonidan fotoelementlar asosida konsentratsion qurilmalarni ishlab chiqish bo'yicha ko'plab ishlar amalga oshirildi. D.S. Strebkov, V.V. Xarchenko, V.A. Mayorov, V.A. Gusarov va FGBNU VIESHning boshqa xodimlari ishlab chiqarish texnologiyasi xuddi shu institut tomonidan ishlab chiqilgan vertikal pn-birikmalari bo'lgan fotosellardan foydalanish imkoniyatlarini tavsiflovchi bir qator ishlarni nashr etdilar. Bunday fotoelementlar konsentratsiya koeffitsienti 20 gacha bo'lgan yorug'lik oqimida ishlaganda yaxshi natijalarni ko'rsatadi.

Olish usullari. Fotovoltaik konsentratsiya tizimlarining asosiy printsiplari quyosh nurini kichik fotoelementga qaratish uchun optikadan foydalanishdir [6]. Shunday qilib, quyosh hujayrasi maydoni konsentratsiya faktoriga teng bo'lgan koeffitsientga kamayishi va radiatsiya intensivligini bir xil omilga oshirish mumkin ekanligini ko'rsatdi.

$$A_{pv} = A_c \frac{I_0}{I_c} \quad (1)$$

A_{pv} – absorber (fotosel) faol sirt maydoni, m²;

A_c – konsentratorning teshik maydoni, m²;

I_0 - konsentratsiyasiz quyosh nuri yo'nalishiga perpendikulyar sirtidagi quyosh nurlanishining intensivligi, Vt/m²;

I_c konsentrlangan quyosh energiyasi oqimining zichligi, Vt/m²;

Yorug'likni quyosh batareyasiga yo'naltirish uchun o'rta va yuqori konsentratsiyali tizimlar quyoshga aniq yo'naltirilgan tizimni talab qiladi. Bu tizim narxining oshishiga va operatsion xarajatlarning oshishiga olib keladi. An'anaviy yarimo'tkazgichli konvertorlar bilan solishtirganda, konsentrlangan quyosh nuri uchun mo'ljallangan quyosh hujayralari afzalliklarga ega. Ular yarimo'tkazgich kristalining kamroq maydonini talab qiladi, ularning samaradorligi an'anaviy fotovoltaik hujayralarga qaraganda yuqori va hisob-kitoblar shuni ko'rsatadiki, yuqori konsentratsiyada ularni ishlatadigan elektr stansiyasi CSE bo'lmagan zavodga qaraganda arzonroq bo'ladi [5]. Taxminan 1 sm o'lchamdagi nuqta kontaktlari bo'lgan silikon hujayralar bir nechta konsentratsiyali elektr stansiyalarining rivojlanishiga turtki berdi, ular orasida Amonix versiyasi eng muvaffaqiyatli bo'ldi. [2].

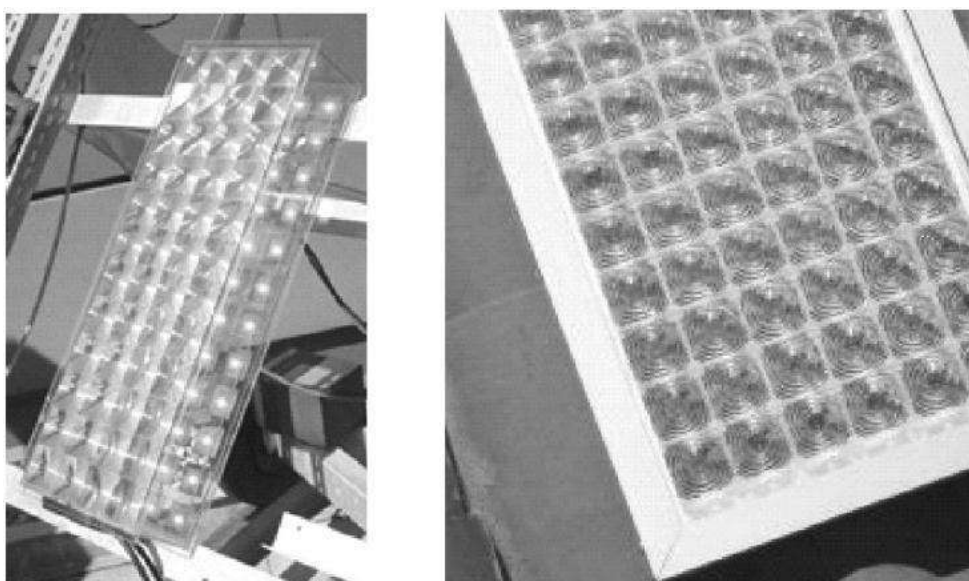


1-rasm. EUCLIDES namoyish birligi. Amonix versiyasi

Yuqori konsentratsiyalar uchun mo'ljallangan quyosh hujayralarini ishlab chiqishda sezilarli yutuqlarga qaramay, ularni ishlab chiqarish kichik miqyosda bo'ldi. Bir tutashuvli quyosh batareyalarining samaradorligini oshirish Shokli-Kvayzer chegarasi bilan cheklanadi, bu fotoelementning tarmoqli bo'shlig'iga qarab, 25-40% oralig'ida joylashgan [7]. Buning sababi shundaki, fotovoltaiik hujayralar ikki darajali qurilmalar bo'lib, yorug'likni kenglikka yaqin energiyaga mos keladigan to'liq uzunligi bilan samarali ravishda aylantiradi. Taqiqlangan zona kamroq energiyaga ega bo'lgan fotonlar butunlay yo'qoladi va yuqori energiyaga ega bo'lganlar tarmoqli bo'shlig'ining energiyasi bilan cheklanadi, ya'ni ular o'z imkoniyatlaridan to'liq foydalanmaydi.

Ilmiy ahamiyati. Ushbu sohadagi ilmiy va texnologik yutuq III-V geterostrukturalarni yaratish bilan bog'liq bo'lib, ularda bugungi kungacha eng yuqori samaradorlikka erishildi. Ko'p o'tishli quyosh hujayralari uchun maksimal mumkin bo'lgan nazariy samaradorlik 86% ni tashkil qiladi, bu bitta p-n-birikmaga ega bo'lgan fotoelementlar uchun Shokli-Kvayzer chegarasidan oshadi va hozirda amalga oshirilgan samaradorlik taxminan 40% ni tashkil qiladi [1], [7]. Bunday quyosh hujayralari quyosh nurlari spektridan to'liqroq foydalanadi.

Ko'p o'tish elementlari asosida 400 va 1000 marta konsentratsiyalarda ishlaydigan tizimlar allaqachon yaratilgan (Konsentriks va Isofoton), 2-rasmda ko'rsatilgan. Ushbu tizimlar mos ravishda 2 va 1 mm diametrli mikrofotosellardan foydalanadi.



2-rasm. Concentrix va Isofoton

GaAs fotoelementlariga asoslangan elektr stantsiyasining maksimal samaradorligi 1000 konsentratsiya darajasida 26,2% ni tashkil etdi [16]. [3] da konsentratsiyaning yuqori darajasida uch tutashuvli kaskadli fotoelementlarning sinovlari va natijalari tasvirlangan. Haqiqiy yorug'lik sharoitida 29% samarali ekanligi ko'rsatilgan [2]. GaInP/GaAs/Ge tuzilmasi bilan uch tutashgan fotosellardan foydalanadigan konsentratsion modullarni tavsiflaydi. Modullar kichik maydon Fresnel linzalariga asoslangan. Modulning samaradorligi 26% dan yuqori, fotokonvertorning samaradorligi esa 1000 konsentratsiya darajasida 31% dan yuqori. Keyinchalik, 700 konsentratsiya darajasida 35% samaradorlikka erishgan uch o'tishli quyosh hujayralari yaratildi. Hozirgi vaqtda quyosh hujayralari 1000 konsentratsiya darajasida va taxminan 50 haroratda amaliy samaradorlik 38% ga teng bo'lgan tijorat maqsadlarida ishlab chiqarilmoqda. °C [8].

Quyosh energiyasi konsentratorlarining fotoelementlar bilan birgalikda ishlashi uchun fotokonvertorning imkoniyatlaridan to'liq foydalanish imkonini beruvchi yagona yorug'lik oqimiga ega bo'lish maqsadga muvofiqdir [6]. Unda bir xil tarqalgan yorug'lik oqimida elektr energiyasini ishlab chiqarish uchun fotokonvertorlar bilan birgalikda ishlatilishi mumkin bo'lgan parabolik konsentratorning loyihasi taklif qilingan. Ish [7] haroratga bog'liq holda ochiq kontaktlarning zanglashiga olib keladigan kuchlanishini analitik aniqlash muammosini hal qildi. Ma'lum bo'lgan nazariy bog'liqliklar eksperimental ma'lumotlarni to'liq aks ettirmasligi ko'rsatildi va aniqroq baholash uchun qo'shimcha parametrlar kiritildi va quyidagi bog'liqlik olindi:

$$U_{xx} = \frac{E_{gX}}{e} \cdot \exp \left[- \left(\frac{T_{pv}}{\sigma_{Si}} \right)^2 \cdot \frac{E_{gSi}}{E_{gX}} \right] \cdot \left\{ 2 - \exp \left[- \frac{I_X}{K_0 I_0} \cdot \left(\frac{T_{pv}}{T_0} \right)^4 \right] \right\}, \quad (1.2)$$

E_{gX} yarimo'tkazgichning tarmoqli oralig'i;

E_{gSi} silikon tarmoqli bo'shlig'i, eV;

I_X – yoritish darajasining joriy va standart qiymati, Vt/m^2 ;

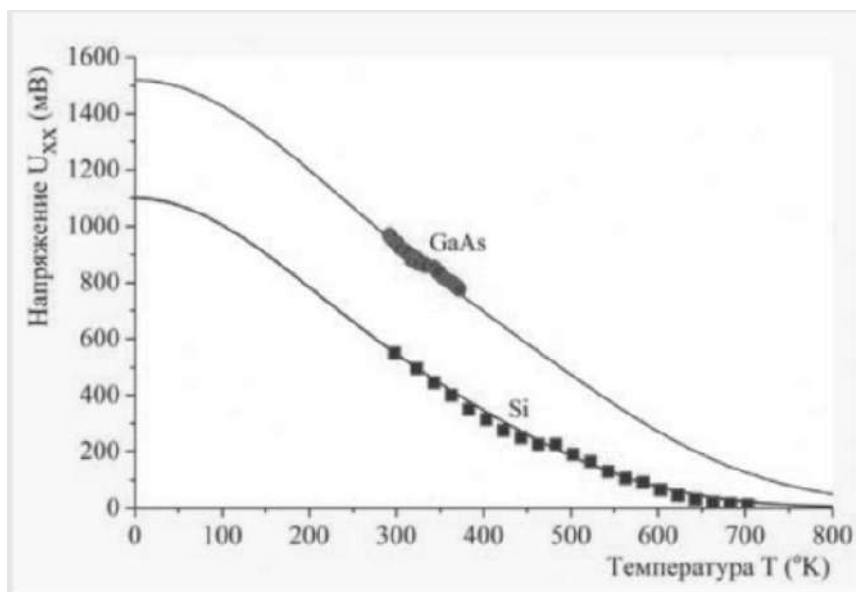
T_{pv} fotosel haroratining joriy qiymati, K;

K_0 o'rganilayotgan fotoelementning individual xususiyatlarini aks ettiruvchi ko'rsatkich parametri;

E elektron zaryad, C;

σ_{Si} kremniy uchun eksperimental ravishda aniqlangan dispersiya;

3-rasmda kremniy va galliy arsenidi uchun olingan ifodalarni qo'llash natijalari ko'rsatilgan. [13]



3-rasm. Ochiq kontaktlarning zanglashiga olib keladigan kuchlanishining haroratga hisoblangan bog'liqligi (markerlar tajriba natijalarini ko'rsatadi)

Grafiklardan ko'rinib turibdiki, ochiq kontaktlarning zanglashiga olib keladigan kuchlanish harorat oshishi bilan ekvivalent tezlikda kamayadi, shuning uchun ikkala turdagi fotoelementlar uchun sovutish tizimi muhim rol o'ynaydi.

Kombinatsiyalangan boyitish zavodlarining parametrlarini optimallashtirish va samaradorligini oshirish bilan bog'liq muammolarni o'rganish elektron hisoblash mashinalari, avtomatlashtirish tizimlari va o'lchash komplekslaridan foydalanmasdan mumkin emas. Ishda [7] fotoelektrik konvertorlar parametrlarini kuzatish uchun kompleks yaratish tasvirlangan. Ta'riflangan o'rnatish bir nechta haroratni, ochiq tutashuv kuchlanishini, qisqa tutashuv oqimini va boshqa parametrlarni o'lchash imkonini beradi. Bu yuqori aniqlik va ishonchlilik bilan sifatli va miqdoriy tadqiqotlar o'tkazish imkonini beradi. Avtomatlashtirilgan ma'lumotlarni qayd etish tizimlarisiz zamonaviy tadqiqotlarni amalga oshirish mumkin emas. Kompyuter simulyatsiyasi hisob-kitoblar va dizayn parametrlarini optimallashtirish vaqtini sezilarli darajada qisqartirishi mumkin. Bunday fotoelementlarni ikki tomonlama nurlantirish imkoniyati faol qo'llaniladi.

Quyosh energiyasini yanada samarali aylantirish uchun mo'ljallangan bunday ikki tomonlama quyosh batareyalarini yaratish sohasidagi yutuqlar [12] da tasvirlangan. [12] statsionar prizmatik konsentratorlardan vertikal p-n o'tishlari bo'lgan fotoelementlar bilan birgalikda foydalanishni ko'rib chiqadi. Natijada, an'anaviy quyosh panellari bilan solishtirganda elektr stantsiyasining narxi 35% ga kamaygan. Isitish vaqtida fotoelementning oqimi va kuchlanishining pasayish darajasini ko'rsatadigan eksperimental termofizik koeffitsientlar ham olingan. [10] ikki tomonlama ko'p o'tkazgichli fotoelementlar bilan assimetrik parabolik olukli konsentratoridan foydalanishni asoslab berdi. Ko'rsatilgan bunday konsentrator notekis nurlanishni beradi, buning natijasida fotoselning ba'zi qismlarida yorug'lik oqimining kuchini 5 baravargacha oshirishga erishiladi, o'rnatishning chiqishidagi quvvat esa 2 barobar ortadi. [13], shuningdek, burchakli panjurli geliostatlar bilan to'ldirilgan assimetrik parabolik olukli konsentratorni ham ko'rib chiqadi. O'rnatish o'rtacha konsentratsiya darajasi 4 ga teng, ikki tomonlama ko'p ulanishli fotosellar ham qabul qiluvchi sifatida

ishlatiladi. Qog'oz qabul qiluvchining soyalı bantlarining o'rnatishning chiqish xususiyatlariga ta'sirini ko'rib chiqadi. Parallel ulanish bilan ko'rsatilgan.

Mavjud dasturiy ta'minot yechimlari orasida bir vaqtning o'zida bir nechta muammolarni hal qilishga qodir bo'lgan va birlashtirilgan tizimlarning ishlashini simulyatsiya qilishga qodir bo'lgan ixtisoslashtirilgan integratsiyalangan dasturiy ta'minot tizimlari mavjud emas. Shu sababli, birlashtirilgan konsentratsion tizimlarni modellashtirish uchun kompyuter dasturini ishlab chiqish vazifasi qo'yildi. Dastur o'rnatish elementlaridagi issiqlik maydonini hisoblash, fotokonvertorlarning oqim kuchlanish xususiyatlarini olish, konsentratoridan qabul qiluvchigacha bo'lgan masofaga qarab quyosh energiyasi konsentratsiyasini simulyatsiya qilish, virtual sinovlarni o'tkazish imkoniyatiga ega bo'lishi kerak. Hududning astronomik va geografik xususiyatlarini va hozirgi atrof-muhit parametrlarini hisobga olgan holda turli xil ob-havo sharoitida turli xil dizayn sxemalari.

Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, ishning maqsadi aniqlandi: quyosh energiyasi konsentratorlari bilan kogeneratsion elektr stansiyalarining samaradorligini oshirish bo'yicha texnik yechimlarni asoslash va ishlab chiqish. Ushbu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalar belgilandi:

1. Quyosh energiyasini konsentratorlari bilan kogeneratsion elektr stansiyasining matematik modelini ishlab chiqish.
2. Quyosh energiyasi konsentratorlari bilan kogeneratsion elektr stansiyasining matematik modelini amalga oshirish algoritmi va kompyuter dasturini ishlab chiqish.
3. Nazariy va eksperimental dastlabki ma'lumotlardan foydalangan holda quyosh energiyasini konsentratorlari bilan kogeneratsion elektr stansiyalarini modellashtirish uchun kompyuter dasturidan foydalanish metodikasini yaratish.
4. Eksperimental ma'lumotlarni avtomatik ro'yxatga olish tizimini ishlab chiqish va ishlab chiqarish.
5. Fresnel linzalari va quyoshni avtomatik yo'naltirish tizimiga asoslangan quyosh energiyasini konsentratori bilan ishlaydigan modulli kogeneratsiya elektr stansiyasini ishlab chiqarish va yig'ish texnologiyasi va usulini ishlab chiqish.

ADABIYOTLAR:

1. Knysh L.I. Quyosh batareyasining harorat rejimini o'rganish, uni konsentrlangan quyosh nurlari oqimi bilan isitishning notekisligini hisobga olgan holda // *Alternativ energiya va ekologiya*, № 1-2 (118), 2013. P. 31-34.
2. Anatichuk L.I., Mochernyuk Yu.M. "Quyoshli issiqlik generatori va elektr", UA 73624 U, 2021 y.
3. Li G., Shi X., Fu C. va Zhou G. Quyoshni kuzatish texnologiyasiga asoslangan yangi MPPT kontrollerini loyihalash va amalga oshirish // *Elektr mashinalari va tizimlari*, ICEMS 2008. Xalqaro konferentsiya. 2008.bet. 2611 – 2615.
4. Kuchkarov B., Mamatkarimov O., Abdulkhayev A. "Influence of the ultrasonic irradiation on characteristic of the structures metal-glass-semiconductor" ICECAE 2020 IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614 (2020) 012027. doi:10.1088/1755-1315/614/1/012027.
5. Fazliddinov Salokhiddin, Kuchkarov Behzod, Sharibaev Nosir, Abdulkhaev Abror and Tulkinov Mukhammad-Ali "Analysis of modern methods of determination of mechanical status and diagnostic models of power transformers" // *APITECH-IV - 2022 Journal of Physics: Conference Series* 2388 (2022) 012173 doi:10.1088/1742-6596/2388/1/012173.
6. Kuchkarov B. H., Mamatkarimov O. O., Abdukarimov A. A., Khalmirzayev A., Mirtojiyeva D. M. "Influence of all-round compression on formation of the mobile charge in lead-borosilicate glass structure" *AIP Conf. Proc.* 2432, 030039 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0089980>.
7. Mamatkarimov O.O., Kuchkarov B.H., Sharibaev N.Yu., Abdulkhayev A.A. "Influence Of The Ultrasonic Irradiation On Characteristic Of The Structures Metal-Glass-Semiconductor" // *European Journal of Molecular & Clinical Medicine*. 2021/1/1. №8/01 str 610-618.
8. Qo'chqarov Bekzod Xoshimjonovich, Nishonov Azizbek, Qo'chqarov Xoshimjon Ortiqovich "The effect of tunneling current on the speed surface generation of charge carriers" // *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*. 2009 y. № 1/7 str 3-6.
9. Kuchkarov Behzod Khoshimjonovich, Mamatkarimov Odiljon Ohundedaevich. "Influence of ultrasonic action on the rate of charge formation of the inversion layer in metal-glass-semiconductor structures" 2019 y. №29/4 str. 125-134.
10. Behzod Khoshimjonovich Kuchkarov, Odiljon Oxundedaevich Mamatkarimov, Abrorbek Abdulloxonovich Abdulkhayev. "Relaxation dependence of the capacity of a three-layer structure in the

process of charge formation of an inversion layer” // Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology. 2019 y. №1/6 стр 26-33.

11. Кучкаров Б.Х., Кахаров М.. МДП-структура и ультразвук Экономика и социум 12 (67) 2019. Стр 623-626.

12. Luque A., Andreev V. Concentrator Photovoltaics. Madrid: Springer, 2007.

13. Meinel A.B., Meinel M.P. Applied Solar Energy. Addison Wesley Publishing Co., 1976.

14. Rumyantsev V.D., Sadchikov N.A., Chalov A.E., Ionova E.A. Terrestrial Concentrator PV Modules Based on GaInP/GaAs/Ge TJ Cells and Minilens Panels // Photovoltaic Energy Conversion. 2006. pp. 632 - 635.

15. Taggart S. CSP: Dish Project Inch Forward // Renewable Energy Focus, July/August 2008. pp. 52-54.

16. Андреев В.М. и др., "Фотовольтаический концентрирующий модуль," RU 2395136, 2010.

SUVLI ISSIQLIK AKKUMULYATORNI HARORAT REJIMINI MODELLASHTIRISHDA MATLAB/SIMULINK SISTEMASIDAN FOYDALANISH

G'aniyev Sarvar Yo'ldosh o'g'li,

Toshkent kimyo-texnologiya instituti Shahrisabz filiali assistenti

sarvar1994ganiyev@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada suvli bak issiqlik akkumulyatorini balans tenglamasi asosida harorat rejimining (zaryadka va razryadka) matematik modeli ishlab chiqilgan. Matematik modelni ishlab chiqishda suvli bak akkumulyatorining turli hajmlari (40,60,80 va 120 m³) va turli suv sarflarini (2,4,10 va 15 m³/soat) hisobga olgan holda harorat rejimining natijalari keltirilgan. Balans tenglamasini tuzishda quyosh energiyasi va biogaz qozon qurilmasidan keltirilgan issiqlik energiyalari hisobga olingan hamda suvli bak akkumulyatorining issiqlik saqlash samaradorligi hisoblangan.

Kalit so'zlar: akkumulyator, quyosh energiyasi, suvli bak issiqlik akkumulyatori, biogaz, issiqlik energiyasi, quyosh energiyasi.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ MATLAB/SIMULINK ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ВОДЯНОГО АККУМУЛЯТОРА ТЕПЛА

Аннотация. В статье на основе уравнения баланса разработана математическая модель температурного режима (заряда и разряда) водоаккумулятора (40, 60, 80 и 120 м³) при различных расходах воды (2, 4, 10 и 15 м³/час), представлены результаты температурного режима. При составлении уравнения баланса были рассчитаны солнечная энергия и тепловая энергия от биогазового котла, а также рассчитана эффективность аккумулирования тепла аккумулятором водяного бака.

Ключевые слова: аккумулятор, солнечная энергия, водонагревательная батарея, биогaz, тепловая энергия, солнечная энергия.

USING MATLAB/SIMULINK SYSTEM FOR TEMPERATURE REGIME MODELING OF A WATER HEAT ACCUMULATOR

Abstract. In the article, a mathematical model of the temperature regime (charge and discharge) of the water tank heat accumulator was developed based on the balance equation. In the development of the mathematical model, different sizes of the water tank accumulator (40, 60, 80 and 120 m³) and different water consumptions (2, 4, 10 and 15 m³/hour) the results of the temperature regime are presented. When creating the balance equation, solar energy and thermal energy from the biogas boiler were calculated, and the heat storage efficiency of the water tank accumulator was calculated.

Keywords: battery, solar energy, water tank thermal battery, biogas, thermal energy, solar energy

Kirish. Past haroratli issiqlikdan foydalanish jahonda energiya iste'mol qilishning muhim ulushini tashkil etadi. Shimoliy o'rta kengliklarda joylashgan mamlakatlarda qish vaqtida uy-joylarni isitishda (haroratni 18+2°C saqlab turish) uchun umumiy energiya iste'molining 50 % sarflanadi. Isitish uchun yuqori haroratli energiya manbalaridan foydalanish shart emas, ulardan texnologik maqsadlar uchun foydalanishi maqsadga muvofik bo'ladi. Isitish uchun quyosh energiyasidan hamda turli xil issiqlik-texnologik qurilmalarning issiqlik chiqindilari bilan birga issiqlik akkumulyatorlardan foydalanish maqsadga muvofik bo'ladi. Isitishda quyosh energiyasidan maksimal samarali foydalanish uchun issiqlikni bir necha sutkadan to uch oygacha saqlaydigan akkumulyatorlar zarur [1-4].

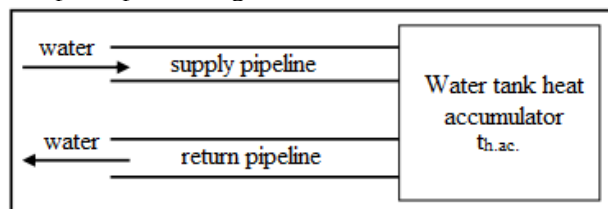
Suvli bak issiqlik akkumulyatorini samaradorligini oshirishda qurilmaning shakli, o'lchamlari, atrofda issiqlik saqlovchi materiallar turi, qalinligi, xamda atmosferaning surunkali bulutli va sovuk sutkalarida biogaz qozon qurilmasidan olinadigan issiq suv ta'minotidan foydalanish kriteriyalarini ishlab chiqish dolzarb masalalardan biridir.

Yassi devor suvli bak issiqlik akkumulyatoriga quyosh havo isitish kollektoridan uzatiladigan issiq havo ta'sirida akkumulyatsiyalangan issiqlik miqdoridan zarur maqsadlar uchun, xususan, issiqxonalarda, uylarda, gelioparrandaxonalarda, meva, uzum quritgichlarda, dush qurilmalarida foydalanish mumkin. Suvli

bak akkumulyator qo'shimcha bioenergetik qurilmadan keltiriladigan issiqlikdan foydalanish uchun ishlab chiqilgan.

Qishloq xo'jalik mahsulotlari quritiladigan bino havosini yassi devor suvli bak akkumulyatorlar orqali ventilyasiya qilinadi. Biogaz qozon qurilmasida qizigan suvni suvli bak akkumulyatorlarga quvurlar orqali uzatadi va issiqligini akkumulyatorga beradi. Natijada biogaz qozon qurilmasidan uzatilgan issiq suv bilan issiqlik akkumulyatoridagi suv aralashib maqbul harorat yuzaga keladi.

Tadqiqot usullari. Bir vaqtda issiqlik akkumulyatoridan haroratda va sarfdagi suv quvur orqali biogaz qozon qurilmasiga uzatiladi yoki boshqa maishiy jarayonlarda foydalanish uchun ishlatiladi. Shu tizim asosida issiq suv oqimi harakati davom etadi. 1-rasmda yassi devor suvli bak issiqlik akkumulyatorining umumiy ishlash prinsipi keltirilgan



1-rasm. Suvli bak issiqlik akkumulyatorida issiqlik tashuvchining harakat oqimi sxemasi

2-rasmdagi hisob sxema asosida suvli bak issiqlik akkumulyatorini issiqlik balansini tuzamiz va haroratining vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodolovchi differensial tenglamani bir qancha chegaraviy shartlarni hisobga olgan holda Runge Kutta usulidan foydalanib yechamiz. Issiqlik akkumulyator ichidagi suvda to'planadigan issiqlik miqdori qizdirilgan suv sifatida saqlanadi yoki vaqt birligida o'zgarib turadi. Bu esa quyosh nur energiyasi ta'sirida va biogaz qozon qurilmasidan quvur orqali uzatiladigan issiq suvning miqdoriga bog'liq bo'ladi [5,6].

Quyosh nur energiyasidan va biogaz qozon qurilmasidan suvli bak issiqlik akkumulyatoriga beriladigan issiqlik $Q_{h.ac}^0$ va issiqlik akkumulyatoridan meva, uzum quritiladigan xonadagi havoga uzatiladigan issiqlik energiyasi $Q_{h.ac}$, shuningdek issiqlik akkumulyator devorlari orqali yo'qotiladigan Q_{loss} issiqlik lardan iborat bo'ladi.



2-rasm. Suvli bak issiqlik akkumulyator issiqlik balansini hisob sxemasi

Suvli bak issiqlik akkumulyatorining issiqlik balansini quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{d(V_{h.ac.} c_p t_{h.ac.})}{d\tau} = Q_{h.ac.}^0 - Q_{h.ac.} - Q_{loss} \quad (1)$$

yoki

$$\frac{d(V_{h.ac.} c_p t_{h.ac.})}{d\tau} = v_{h.ac.} c_p t_{h.ac.}^o - v_{h.ac.} c_p t_{h.ac.} - K_{h.ac.} F_{h.ac.} (t_{h.ac.} - t_{in.}) \quad (2)$$

bu yerda - $V_{h.ac.}$ va $t_{h.ac.}$ mos ravishda suvli bak issiqlik akkumulyatorini hajmi (m^3) va harorati, $^{\circ}C$; c_p - suvning bosim jarayondagi hajmiy issiqlik sig'imi, $J / (m^3^{\circ}C)$; $v_{h.ac.}$ - biogaz qozon qurilmasidan uzatiladigan issiq suv sarfi, m^3/h ; $t_{h.ac.}^o$ - suvli bak issiqlik akkumulyatorga biogaz qozon qurilmasidan keltiriladigan issiq suv harorati, $^{\circ}C$; $K_{h.ac.}$ - suvli bak issiqlik akkumulyatoridan meva quritiladigan honaga issiqlik uzatish koeffisienti, $W / (m^2^{\circ}C)$; $F_{h.ac.}$ - suvli bak issiqlik akkumulyatori devorining yuzasi, m^2 ; $t_{in.}$ - meva quritiladigan xonaning harorati, $^{\circ}C$, (2) tenglamani integrallab, $\tau = 0$, $t_{h.ac.} = t_{in.}$ chegaraviy shart

asosida suvli bak issiqlik akkumulyatoridagi suvning haroratini vaqt bo'yicha o'zgarishini hisobga oluvchi ifodani quyidagicha yozamiz:

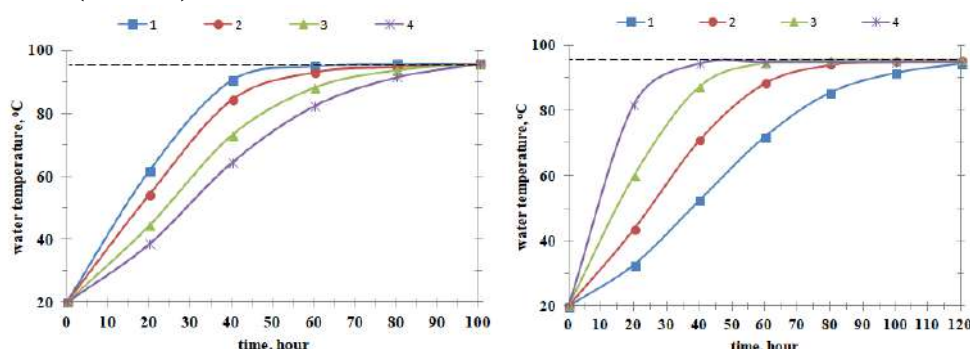
$$t_{h.ac.} = \frac{\left[t_{in.} + \frac{\nu_{h.ac.} c_p t_{h.ac.}^0 + K_{h.ac.} F_{h.ac.} t_{in.}}{\nu_{h.ac.} c_p + K_{h.ac.} F_{h.ac.}} \times \left(\exp\left(\frac{\nu_{h.ac.} c_p + K_{h.ac.} F_{h.ac.}}{V_{h.ac.} c_p} \tau \right) - 1 \right) \right]}{\exp\left(\frac{\nu_{h.ac.} c_p + K_{h.ac.} F_{h.ac.}}{V_{h.ac.} c_p} \tau \right)} \quad (3)$$

Suvli bak issiqlik akkumulyator uch hil rejimda ishlaydi: issiqlikni to'plash (zaryadka), issiqlikni sarflash (razryadka) va issiqlikni issiqlik akkumulyator hajmida saqlash. Issiqlik akkumulyatorlarda issiqlikni to'plash va sarflash rejimi holatini namoyish etish hamda hisoblashlarni bajarish uchun ayrim ruhsat etilgan shartlarni qabul qilish lozim bo'ladi. Xususan, issiqlik akkumulyator juda yaxshi issiqlik saqlash xususiyatiga ega. Suv yoki havo qizdirgich gelio kollektordan quvurlar orqali uzatiladigan rejimda haroratlarini o'rtacha qiymati olinadi, bioenergetik qozon qurilmasidan uzatiladigan issiq suv harorati vaqt birligida o'zgaras, doimiy deb olinadi.

Natijalar. Issiqlik akkumulyatorida quyosh energiyasi va bioenergetik qozon qurilmasidan uzatiladigan issiqlikni suvda to'plash (zaryadka) rejimi: Issiqlik akkumulyatorida to'planadigan issiqlik miqdori mos sharoitda $Q_{h.ac.}^0 > Q_{h.ac.}$, $t_{h.ac.}^0 > t_{h.ac.}$ bo'lishi nazarda tutiladi. Bu holda suvli bak issiqlik akkumulyatoridagi suvning harorati ko'tariladi.

(3) ifodadan foydalanib issiqlik akkumulyatoridagi suvni harorati, va parametrlarga bog'liq holda o'zgarib turishini ko'rish mumkin. 3-rasmdagi grafikda issiqlik akkumulyatoridagi suvning haroratini vaqtga bog'liq o'zgarishi keltirilgan. Dastlab issiqlik akkumulyatoridagi suvning harorati 20°C, quyosh energiyasi va biogaz qozon qurilmasidan uzatiladigan qizigan suv ta'sirida 2 sutka davomida hajmi 60m³ bo'lgan suvli bakdagi suvning harorati 95°C ko'tariladi.

(3a-rasm, (1) egri chiziq). Agar bakda suv hajmi 120m³ bo'lganda 4 sutka isitish davom etadi (3a-rasm, 3 egri chiziq). Ammo issiq suv sarfi 2,4,10 va 15 m³/soat va bakdagi suvning boshlang'ich harorati 20°C bo'lganda issiq suv sarfi $\nu_{h.ac.}$ qancha ortib borsa bakdagi suv haroratining o'zgarishiga ketadigan vaqt ham kamayib boradi (3b-rasm).



3-rasm. Grafikda issiqlik akkumulyatoridagi suvning haroratini vaqtga bog'liq o'zgarishi

Issiqlik akkumulyatorida to'plangan issiqlikdan qishloq xo'jalik mahsulotini quritishga mo'ljallangan xona ichki havo haroratini ($t_{in.}$) sutka davomida normativda talab qiladigan holatda saqlashga erishiladi va samaradorlik kriteriyasi baholanadi. Bu holda suvli bak issiqlik akkumulyatorini issiqlik balans tenglamasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{d(V_{h.ac.} c_p t_{h.ac.})}{d\tau} = -K_{h.ac.} F_{h.ac.} (t_{h.ac.} - t_{in.}) \quad (4)$$

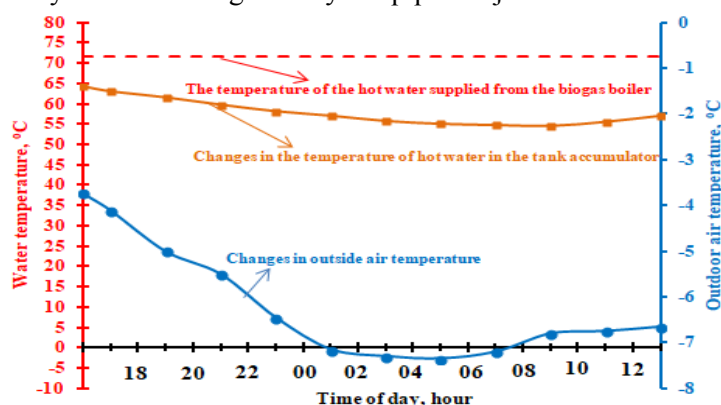
Bu yerda suvli bak issiqlik akkumulyatoridagi suv haroratini o'zgarishi(4) formulaga o'xshash quyidagicha yoritiladi

$$t_{h.ac.} = t_{in.} + \exp\left(\frac{K_{h.ac.} F_{h.ac.}}{V_{h.ac.} c_p} \tau \right) \times (t_{h.ac.(0)} - t_{in.(0)}) \quad (5)$$

Issiqlik akkumulyatorida issiq suv haroratini pasayishi akkumulyatorni va bino ichki havosi o'rtasidagi issiqlik uzatish koeffitsienti kattaligiga bog'liq. Quyosh suv isitish qurilmasini sutka davomida uzluksiz ishlashini ta'minlashda issiqlik akkumulyatori va qo'shimcha bioenergiyadan foydalanish tizimi yo'lga qo'yilishi sistemada issiq suv ishlab chiqarishni ta'minlashiga erishiladi. Ammo issiq suv akkumulyatsiyalanishi belgilangan qurilmadagi issiq suv harorati va atrof muhit harorati orasidagi farq

natijasida ma'lum miqdordagi issiqlik sarfi yuzaga kelishi tufayli kurilmaning issiqlik samaradorligi pasayadi [6,7].

Olingan natijalar. Tadbirkorlik xo'jaliklarida quyosh va bioenergiyadan foydalanib yassi ikki konturli suv isitish qurilmasi va uning issiqlik akkumulyatorini optimal kombinasiyalashtirilgan konstruksiyasini ishlab chiqish bo'yicha ham bir qancha ilmiy tadqiqotlar olib borilgan [8,9]. Ushbu masalani yechish maqsadida Muborakneftgaz MChJ (ma'suliyati cheklangan jamiyat) yordamchi xo'jaligida yassi ikki konturli va hajmi 120 m³ bo'lgan atrofi maxalliy issiqlik saqllovchi (qamish qirqimlarida 0,1 m qalinlikda tayyorlangan qoplama) material bilan o'ralgan issiq suv saqllovchi akkumulyator qurilmasi tayyorlanib tajriba sinovidan o'tkazildi [10]. 2017-yil 24-yanvar kuni quyoshli kunlarda tashqi harorati -5-7 °C bo'lganda quyosh va bioenergiyadan foydalanib issiq suv saqlanadigan bak akkumulyatoridagi issiq suvning harorati o'zgarishi bo'yicha olib borilgan ilmiy tadqiqot natijalari 6-rasmda keltirildi.



4-rasm. Quyosh va bioenergiya bilan isitiladigan suvli bak akkumulyator tajriba qurilmasida o'tkazilgan tajriba tadqiqot natijalari

Olingan natijalarning tahlili shuni ko'rsatadiki, issiq suv jamg'ariladigan bak akkumulyatoridagi issiq suvning harorati 20 soat davomida keyingi sutkaning ertalabki 900 gacha 54,7 °C gacha pasayishi kuzatilib, bu esa bak-akkumulyatorini issiqlik saqlash samaradorligini 19,5% pasaytiradi. Bu holda avtomatik boshqarishi qurilmasini ishga tushishi bilan biogaz qozon qurilmasidan uzatiladigan issiq suv hisobidan ushbu holat bartaraf qilinadi. Muborak neftgaz MChJ yordamchi xo'jaligida qurib tajriba sinovdan o'tkazilgan ikki konturli yassi quyosh suv isitish kollektor issiq suv jamg'ariladigan bak akkumulyator maxalliy issiqlik saqllovchi qoplama bilan o'rganilgan qurilmaning issiq suv saqlash samaradorligi sonli usulda hisoblangandan olingan natijalar, tajribadan olingan ma'lumotlar bilan mos kelishi aniqlangan.

Xulosa. 1. Issiq suv jamg'arishga mo'ljallangan suvli bak akkumulyatorida kun davomida issiq suv harorati 60°C bo'lib, sutkaning keyingi 6 soat ichida 52°C pasayishini e'tiborga olinib avtomatik boshqarish qurilmasi biogaz qozon qurilmasi keltiriladigan issiqlik tashuvchini harorati 70°C bo'lgan issiq suvni qo'shib yuboradi. O'tkazilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, qish faslining sutkalik bulutli va sovuq kunlarida biogaz qozon qurilmasidan uzatiladigan issiq suv bak-akkumulyatorga jamg'arilib is'temolga yuborilishi hisobidan qurilmaning issiqlik samaradorligi 50-56 % gacha ortishi aniqlandi.

2. Suvli bak issiqlik akkumulyatorini matematik modellashirish tizimidan foydalanib, uning turli rejimlarda ishlash jarayonini modellashirildi.

3. Amalda foydalanilgan matematik model suvli bak issiqlik akkumulyatoridagi suvni harorati o'zgarishini qo'shimcha issiqlik manbalaridan olinadigan energiya bilan bog'liq prognoz qilinadigan tizimlar ham qo'llanilishi mumkin.

4. Taklif etiladigan issiqlik akkumulyator modelidan kelgusida suvli bak akkumulyatorlar uchun tadqiqotlar olib borish jarayonida kommunal, texnologik va qishloq xo'jaligi tizimlarida issiqxonalarini isitishda, quritgichlarda meva, uzum singari mahsulotlarni sutka davomida quritish rejimlarini yaratish va qurilmalarning samaradorligi kriteriyalarini sifat ko'rsatgichlarini takomillashtirishga erishiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Dikhtievskii O.V., Konyukhov G.V., Martynenko O.G. et al. Numerical modeling of an optimal heat accumulator with phase change. *Journal of Engineering Physics* 61, 1345-1350 (1991). <https://doi.org/10.1007/BF00872251>.

2. Tomov G. Analytical determination of the water thermal accumulator capacity in a consumption mode with a constant debit and a fixed temperature. (2023) IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 1128 (1), art. no. 012009, DOI: 10.1088/1755- 1315/1128/1/012009.
3. Dusyarov A.S., Ergashev U.Sh., Kholmanova O.P. Method for determining the optimal value of the specific heat capacity and temperature regime of a short-term heat accumulator of passive solar heating systems with a flat reflector of radiation (2022) IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 1070 (1), art. no. 012037, DOI: 10.1088/1755-1315/1070/1/012037.
4. Uzakov G.N., Elmurodov N.S., Davlonov X.A. Experimental study of the temperature regime of the solar pond in the climatic conditions of the south of Uzbekistan (2022) IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 1070 (1), art. no. 012026, DOI: 10.1088/1755- 1315/1070/1/012026.
5. Toshmamatov B., Davlonov K., Rakhmatov O., Toshboev A. Recycling of municipal solid waste using solar energy (2021) IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1030 (1), art. no. 012165. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012165.
6. Faiziev T.A., Toshmamatov B.M. Mathematical model of heat accumulation in the substrate and ground of a heliogreenhouse (2021) IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 723 (3), art. no. 032006. DOI: 10.1088/1755-1315/723/3/032006.
7. Uzakov G.N., Khamraev S.I., Khuzhakulov S.M. Rural house heat supply system based on solar energy // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 1030 (2021) 012167 IOP Publishing doi: 10.1088/1757-899X/1030/1/012167.
8. Mirzaev Sh, Kodirov J., Khamraev S.I. Method for determining the sizes of structural elements and semi-empirical formula of thermal characteristics of solar dryers// APEC-V-2022 IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 1070(2022) 012021 IOP Publishing doi: 10.1088/1755-1315/1070/1/012021.
9. Davlonov Xayrulla, Almardanov Xamidulla, Khatamov Inomjon, Urunboev Sadridin, Kalandarov Palvan, and Olimov Orif, "Study on heat and material balance of heliopyrolysis device". AIP Conference Proceedings 2686, 020023 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0111855>.
10. Faiziev T.A., Muradov I. Ruzikulov G.Yu., Ernafasov S. Energy analysis of heat recovery plants (2021) IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 80S (1), art. no. 012008. DOI: 10.1088/1755-1315/80S/1/012008.

OPTICAL ABSORPTION IN DEFECTS OF AMORPHOUS SEMICONDUCTORS

Muminov Khurshidbek Adhamjon ugli,

Associate Professor of Namangan Institute of Engineering and Technology

xamuminov@mail.ru

Abstract. In the present work, theoretically, the defectiv absorption spectra of amorphous hydrogenated silicon were obtained. It is shown that the values of these spectra are determined by the density distribution of electronic states localized band in the allowed bands. It was also shown that from the experimental data of the defect absorption spectra one can determine the energy positions of the defects.

Keywords: amorphous hydrogenated silicon, density distribution of electron states of defects, density distribution of electronic states in the allowed zones, Kubo-Greenfood formula, Davis-Mott approximation, optical transitions between defects and the allowed zones, defect absorption spectra.

ОПТИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ДЕФЕКТАХ АМОРФНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Аннотация. В настоящей работе теоретически исследовано взаимодействия света на дефекты псевдоделированного аморфного гидрогенизированного кремния, используя метод приближения Дэвиса-Мотта по формуле Кубо-Гринвуда. Показано, что вид спектров коэффициента дефектного поглощения определяется распределением плотности состояний в разрешённых зонах. Определено, что спектры дефектного поглощения имеют максимумы, где расположены максимумы распределение энергетического положения дефектных состояний. Показано, что из экспериментальных данных, полученных для спектров дефектного поглощения, можно определить энергетическое положения дефектов.

Ключевые слова: аморфный гидрогенизированный кремний, распределение плотности состояний дефектов, распределение плотности состояний в разрешённых зонах, формула Кубо-Гринвуда, приближения Дэвиса-Мотта, оптические переходы между дефектами и разрешёнными зонами, спектры дефектного поглощения.

AMORF YARIMO'KAZGICHLAR NUQSONLARIDA OPTIK YUTILISH

Annotatsiya. Ushbu ishda yorug'likning amorf yarimo'tkazgich kremniyning nuqsonlariga o'zaro ta'siri Kubo-Grinvud formulasi bo'yicha Devis-Mott yaqinlashuv usuli yordamida nazariy jihatdan o'rganilgan. Ma'lumki, nuqsonlarni yutish koeffitsiyenti spektrlarining shakli ruxsat etilgan chiziqlardagi holatlar zichligini taqsimlash bilan belgilanadi. Nuqson yutilish spektrlari maksimumlarga ega, bu yerda maksimumlar nuqson holatlarining energiya pozitsiyasini taqsimlashda joylashgan. Nuqsonlarni yutish spektrlari bo'yicha olingan eksperimental ma'lumotlardan nuqsonlarning energiya holatini aniqlash mumkin.

Kalit so'zlar: amorf gidrogenizatsiyalangan kremniy, nuqson holatlari zichligini taqsimlash, ruxsat etilgan zonalarda holatlar zichligini taqsimlash, Kubo-Grinvud formulasi, Devis-Mott yaqinlashuvi, nuqsonlar va ruxsat etilgan zonalarda orasidagi optik o'tishlar, nuqsonlarni yutish spektrlari.

Introduction. As is known, pseudo-doped amorphous hydrogenated silicon ($a\text{-Si:H}$) has no dopants. In this material, the Fermi level is shifted by changing the technological conditions of cultivation. Therefore, it is in $a\text{-Si:H}$ that the term defective absorption spectra belong. In [1], it was shown that the energy position of the main defects (D^0 is a neutral defect, D^- is a negatively charged defect, D^+ is a positively charged defect) of $a\text{-Si:H}$ samples located in the interval $\varepsilon_C - \varepsilon_{D^0} = 0.95 - 1.05 \text{ eV}$, $\varepsilon_C - \varepsilon_{D^-} = 0.65 - 0.75 \text{ eV}$, $\varepsilon_C - \varepsilon_{D^+} = 0.35 - 0.45 \text{ eV}$. Because the energy positions of defects also depend on the technological conditions of cultivation. The experimental results of the spectral characteristics of the defect absorption coefficient in $a\text{-Si:H}$ films are shown in Figure 1.

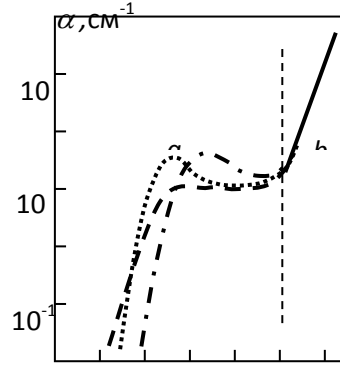


Figure 1. Experimental results of the spectral characteristics a is the defect absorption region of pseudo-doped a-Si: H samples, b is the exponential absorption region

It can be seen that some spectra have clear maxima, and some do not. In the present work, the interaction of light to defects of pseudo-doped a-Si: H is theoretically investigated using the spectral characteristic of the defect absorption. A method for determining the energy positions of defects and conditions for the appearance of maxima in the spectrum of defective absorption are proposed.

As is known, optical transitions of electrons, the participation of defective states, are of three types: between defects, between defects and tails of allowed zones, between defects and allowed zones. It was shown in [1] that the main role of these optical transitions is played by passing between defects and allowed zones. The spectral characteristics of the defect absorption coefficient depend on the energy position of the defects and on the distribution of the density of states in the defects and allowed zones. The spectral characteristics of the defect absorption coefficient of amorphous semiconductors are calculated by the Davis-Mott approximation method from the Kubo-Greenwood formula as follows [2].

$$\alpha(\hbar\omega) \sim \int_{\varepsilon_0 - \hbar\omega}^{\varepsilon_0} g(\varepsilon)g(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}. \quad (1)$$

where ε_0 - is the highest energy position of electrons participating in optical transitions, $g(\varepsilon)$ - and $g(\varepsilon + \hbar\omega)$ are the initial and final density of electronic states involved in optical transitions. In [3, 4], it was shown that when calculating the spectra of the defect absorption coefficient in amorphous semiconductors, the density of states in defects can be chosen in the form of Gaussian distributions or hyperbolic secant, and for state density distributions at the boundaries of the allowed zones in the form of power or hyperbolic secant [4].

The energy dependence of the densities of defective states in the Gaussian distribution is as follows

$$g(\varepsilon) = g(\varepsilon_D) \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_D)^2). \quad (2)$$

where $g(\varepsilon_D)$ is the maximum value of the density distribution of electronic states in defects and ε_D is the energy position of this maximum, and is the parameter that determines the effective half-width Gaussian distribution. The density distribution of states in the form of a hyperbolic secant is recorded as follows:

$$g(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} = \frac{2g(\varepsilon_D)}{\exp(b(\varepsilon - \varepsilon_D)) + \exp(-b(\varepsilon - \varepsilon_D))}. \quad (3)$$

where b is the parameter that determines the effective half width.

In [3, 5] it was shown that in the case when the density distribution of electronic states at the boundaries of the valence and conduction bands has a power dependence, they can be written as follows:

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_V) \left(\frac{\varepsilon_C - \varepsilon}{E_g} \right)^{n_1}, \quad \text{when} \quad \varepsilon \leq \varepsilon_V \quad (4)$$

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_C) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_V}{E_g} \right)^{n_2}, \quad \text{when} \quad \varepsilon_C \leq \varepsilon \quad (5)$$

where $N(\varepsilon_V)$ and $N(\varepsilon_C)$ are effective values of the density of states in the valence band and in the conduction band, ε_V is the highest border of the valence band, and ε_C is the lower boundary of the conduction band. E_g is the energy width of the mobility gap (band gap). Considering that the density distribution of

states at the boundaries of the allowed zones can be parabolic or linear [2, 6], that is, $n_1 = n_2 = 1/2$ and $n_1 = n_2 = 1$. When the densities of electronic states of the allowed zones correspond, the Gaussian distribution can be written as follows way [1, 6]: for the valence band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_v) \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_v)^2), \quad (6)$$

for conduction band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_c) \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_c)^2), \quad (7)$$

As is known, the integral of the Gaussian distribution does not have an analytical solution; therefore, to obtain analytical solutions of the defect absorption spectra, one can apply the distributions in the form of a hyperbolic secant: for the valence bands

$$g(\varepsilon) = \frac{2N(\varepsilon_v)}{\exp(b(\varepsilon - \varepsilon_v)) + \exp(-b(\varepsilon - \varepsilon_v))}, \quad (8)$$

for conduction band

$$g(\varepsilon) = \frac{2N(\varepsilon_c)}{\exp(b(\varepsilon - \varepsilon_c)) + \exp(-b(\varepsilon - \varepsilon_c))}, \quad (9)$$

As shown in [6], the distribution of the density of states in the tails of the allowed bands is exponential and is described by the following expressions: for the tail of the valence band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_v) \exp(-\beta_1(\varepsilon - \varepsilon_v)) \quad \text{when } \varepsilon_v < \varepsilon; \quad (10)$$

and for the tail of the conduction band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_c) \exp(\beta_2(\varepsilon - \varepsilon_c)) \quad \text{when } \varepsilon < \varepsilon_c; \quad (11)$$

where β_1 - and β_2 are the parameters that determine the slope of the tails of the valence band and conduction band,

Calculation and discussion. When the energy of absorbed photons is $\varepsilon_{01} - \varepsilon_v < \hbar\omega$ and $\varepsilon_c - \varepsilon_{02} < \hbar\omega$, where ε_{01} - and ε_{02} are the energy positions of the point of intersection of the tails of the expanded zones and defects (see Figure 2), then optical transitions are formed between the defects and expanded zones.

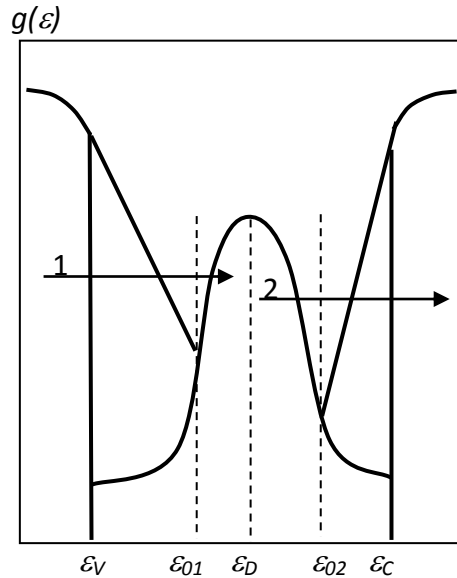


Figure 2. Types of optical transitions in amorphous semiconductors where defective states are involved: 1 from the valence band to the defect, 2 from the defective states to the conduction band

In the case when the density distribution of states in the allowed zones is parabolic ($n_1 = n_2 = 1/2$), the spectra of the defect absorption coefficient are written in the following forms: for optical transitions from a defect to the conduction band

$$\alpha(\hbar\omega) = B \int_{\varepsilon_c - \hbar\omega}^{\varepsilon_c} \frac{g(\varepsilon_D)}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega))} N(\varepsilon_c) \sqrt{\frac{\varepsilon - \varepsilon_v + \hbar\omega}{E_g}} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}, \quad (14)$$

from valence to defect

$$\alpha(\hbar\omega) = B \int_{\varepsilon_V - \hbar\omega}^{\varepsilon_V} N(\varepsilon_V) \sqrt{\frac{\varepsilon_C - \varepsilon}{E_g}} \frac{g(\varepsilon_D)}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega))} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}. \quad (15)$$

where $B = \frac{8\pi^2 e^2 \hbar^3 a}{(m^*)^2 n_0 c}$ [3, 6].

As is known, these integrals have no analytical solution. Therefore, these spectra were obtained using numerical methods. The results of the calculations are shown in Figure 3-a.

If the density distribution in the allowed zones has a linear ($n_1 = n_2 = 1$) dependence:

$$\alpha(\hbar\omega) = B \int_{\varepsilon_C - \hbar\omega}^{\varepsilon_C} \frac{g(\varepsilon_D)}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} N(\varepsilon_C) \frac{\varepsilon - \varepsilon_V + \hbar\omega}{E_g} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}. \quad (16)$$

$$\alpha(\hbar\omega) = B \int_{\varepsilon_V - \hbar\omega}^{\varepsilon_V} N(\varepsilon_V) \frac{\varepsilon_C - \varepsilon}{E_g} \frac{g(\varepsilon_D)}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega))} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}, \quad (17)$$

To obtain an analytical solution of these integrals, they must be divided into two components: for the distribution of the hyperbolic secant, and Gaussian. In the case of such a replacement, the error of error does not exceed the error of the experiment [4].

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_V)E_g\hbar\omega} \left[\int_{\varepsilon_C - \hbar\omega}^{\varepsilon_C} (\hbar\omega - \varepsilon_V) \frac{1}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} d\varepsilon + \int_{\varepsilon_C - \hbar\omega}^{\varepsilon_C} \varepsilon \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_D)^2) d\varepsilon \right]. \quad (18)$$

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)E_g\hbar\omega} \left[\int_{\varepsilon_V - \hbar\omega}^{\varepsilon_V} \varepsilon_C \frac{1}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega))} d\varepsilon - \int_{\varepsilon_V - \hbar\omega}^{\varepsilon_V} \varepsilon \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega)^2) d\varepsilon \right], \quad (19)$$

where $A = BN(\varepsilon_C)N(\varepsilon_V)$, when the $a = b^2 / \pi$ relationship holds, the concentration of defects, determined by the distribution of the hyperbolic secant and gauss, will be equal to [4].

The analytical solutions of these integrals are written as follows.:

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)E_g\hbar\omega} \left\{ \frac{2}{b} (\varepsilon_D - \varepsilon_V + \hbar\omega) [\operatorname{arctg}(\exp(b(\varepsilon_C - \varepsilon_D))) - \operatorname{arctg}(\exp(b(\varepsilon_C - \varepsilon_D - \hbar\omega)))] - \frac{1}{2a} [\exp(-a(\varepsilon_C - \varepsilon_D)^2) - \exp(-a(\varepsilon_C - \varepsilon_D - \hbar\omega)^2)] \right\}. \quad (20)$$

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_V)E_g\hbar\omega} \left\{ \frac{2}{b} (\varepsilon_C - \varepsilon_D + \hbar\omega) [\operatorname{arctg}(\exp(b(\varepsilon_V - \varepsilon_D + \hbar\omega))) - \operatorname{arctg}(\exp(b(\varepsilon_V - \varepsilon_D)))] + \frac{1}{2a} [\exp(-a(\varepsilon_V - \varepsilon_D + \hbar\omega)^2) - \exp(-a(\varepsilon_V - \varepsilon_D)^2)] \right\}. \quad (21)$$

The results obtained from the calculation of formulas (20) and (21) are shown in Figure 3b. It can be seen that these curves in figures 3a and 3b are the same. These results show that the spectra of the defect absorption coefficient do not depend on the degree of distribution of the density of states in the allowed bands. In these spectra, the weak maxima are in the energy position, where the energy of the absorbed photon is equal to $\hbar\omega = \varepsilon_C - \varepsilon_D$ and $\hbar\omega = \varepsilon_D - \varepsilon_V$.

It is determined from the calculations that the change in the maximum (ε_D) of the states of electrons in defects will only change the value of the absorption coefficient.

Experiments show that the appearance of the spectra can vary for different samples as the technology of their growth changes. For example, Figure 1 shows the spectral characteristics of the defect absorption coefficients; all of these samples were grown using the same technology (according to the method of decomposition of silane in a gas discharge). It is seen that some spectral characteristics have obvious maxima and minima.

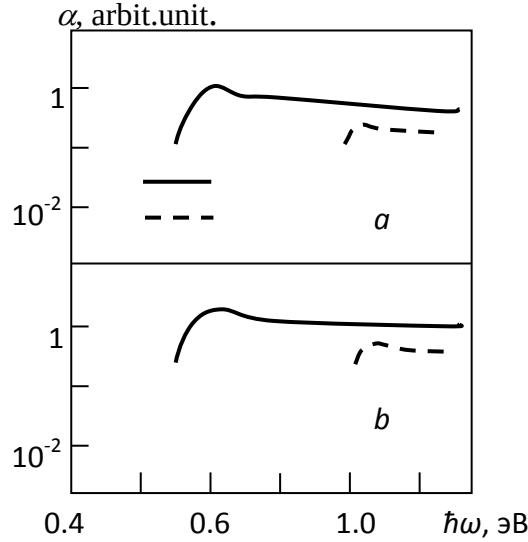


Figure 3. Spectra of optical transitions between expanded zones and defective states 1-from defect to conduction band, 2-from valence band to defect a- $n_1=n_2=1/2$, b- $n_1=n_2=1$. The calculations were performed for $E_g=1,8$ eV, $\varepsilon_C-\varepsilon_D=0,6$ eV.

It is known that the energy dependence of the density of states in the valence band and conduction band is very complex and may have several maxima and minima [2]. Taking this into account, we assume that the density of non-localized electronic states at the boundaries of the allowed zones obeys the distribution of a gauss or hyperbolic secant, i.e. boundary of the conduction band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_C) \exp(-a_1(\varepsilon - \varepsilon_C)^2) \approx N(\varepsilon_C) / \text{ch}(b_1(\varepsilon - \varepsilon_C)), \quad (22)$$

and the border of the valence band

$$g(\varepsilon) = N(\varepsilon_V) \exp(-a_2(\varepsilon - \varepsilon_V)^2) \approx N(\varepsilon_V) / \text{ch}(b_2(\varepsilon - \varepsilon_V)) \quad (23)$$

If b_1 and b_2 have different values, it is impossible to obtain the analytical form of the defect absorption spectra. The method of numerical calculations shows that if the values of b_1 and b_2 in formulas (24) and (25) do not differ much from each other, then instead of them you can use the expressions $b = (b_1 + b_2) / 2$, then the permissible error does not exceed 9 % Given this, you can write them as follows

$$\alpha = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_V)} \int_{\varepsilon_V}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D))\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_C + \hbar\omega))} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}, \quad (24)$$

$$\alpha = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)} \int_{\varepsilon_C - \hbar\omega}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_V))\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D + \hbar\omega))} \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}. \quad (25)$$

From here we obtain the following result for the defect absorption spectra: for optical transitions from a defect to the conduction band:

$$\alpha = \frac{A}{b\hbar\omega} \frac{g(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C) \text{sh}(b(\varepsilon_C - \varepsilon_D - \hbar\omega))} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{g(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)} \right)^2 + 2 \left(\frac{g(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)} \right) \text{ch}(b(\varepsilon_C - \varepsilon_D))}{1 + \left(\frac{g(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)} \right)^2 + 2 \left(\frac{g(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C)} \right) \text{ch}(b(2\hbar\omega - \varepsilon_C - \varepsilon_D))} \right]. \quad (26)$$

And for optical transitions from the valence band to defects:

$$\alpha = \frac{Ag(\varepsilon_D)}{N(\varepsilon_C) b\hbar\omega} \frac{1}{\text{sh}(b(\varepsilon_D - \varepsilon_V - \hbar\omega))} \ln \left[\frac{1 + \left(\frac{N(\varepsilon_V)}{g(\varepsilon_D)} \right)^2 + 2 \left(\frac{N(\varepsilon_V)}{g(\varepsilon_D)} \right) \text{ch}(b(\varepsilon_D - \varepsilon_V))}{1 + \left(\frac{N(\varepsilon_V)}{g(\varepsilon_D)} \right)^2 + 2 \left(\frac{N(\varepsilon_V)}{g(\varepsilon_D)} \right) \text{ch}(b(2\hbar\omega - \varepsilon_D - \varepsilon_V))} \right]. \quad (27)$$

The calculation results obtained from these formulas are shown in Figure 4 (it can be compared with Figure 1). As can be seen from the figure, the defect absorption spectra have obvious maxima and the energy positions of these maxima are located at $\hbar\omega = \varepsilon_C - \varepsilon_D$ or $\hbar\omega = \varepsilon_D - \varepsilon_V$.

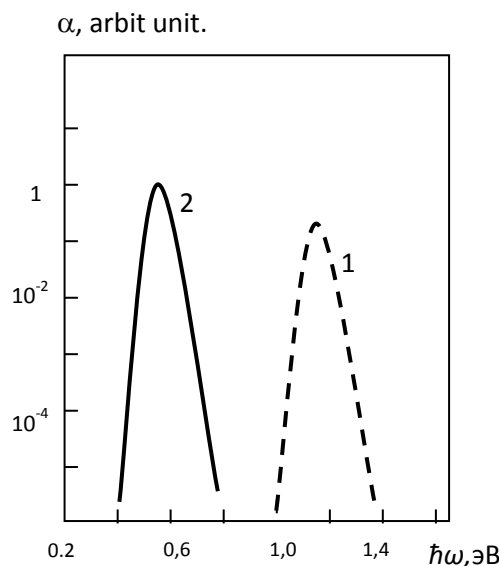


Figure 4. The spectra of the defect absorption coefficient, when the boundary of the allowed zones has clear maxima. Calculations were obtained for $E_g=1,8$ eV, $1-\varepsilon_C-\varepsilon_{D1}=0,6$ eV, $2-\varepsilon_C-\varepsilon_{D2}=1,2$ eV.

These results show that the spectra of defective absorption can differ greatly from each other, due to the difference in the distribution of the density of states in the allowed bands.

Conclusion. From the results obtained, the following conclusions can be made in this study:

- The form of the spectral characteristics of the defect absorption coefficients is determined by the distribution of the density of states in the allowed bands.

- The defect absorption spectra have weak maxima when the distribution of the density of states, at the boundaries of the allowed zones, has a power dependence on the energy at the points where the photon energy is $\hbar\omega = \varepsilon_C - \varepsilon_D$ and $\hbar\omega = \varepsilon_D - \varepsilon_V$.

- the apparent maxima in the spectral characteristics of the defect absorption coefficient corresponding to the experimental results are formed when the distribution of the density of states at the boundaries of the allowed bands has obvious maxima. These maxima are located in the energy position $\hbar\omega = \varepsilon_C - \varepsilon_D$ or $\hbar\omega = \varepsilon_D - \varepsilon_V$.

This suggests that using the defect absorption spectra in a-Si: H, it is possible to reveal the energy position of the defects.

REFERENCES:

1. Tanaka K., Okushi H. Defect states and carrier process in a-Si:H., *J. Non-Cryst. Solids*. 1984, 66, N1&2, pp 205-208.
2. N. Mott, E. Davis, *Electronic processes in non-crystalline substances*. T 1, (Moscow, World, 1982).
3. Zaynobidinov S., Ikramov R. G., Zhalalov R. M., Nuritdinova M. A. Distributions of the density of electron states in allowed bands and interband absorption in amorphous semiconductors. // *Optics and spectroscopy*. –St. Petersburg, 2011, Vol. 1010, No. 5. p. 813-818.
4. R.G. Ikramov. The distribution function of electronic states of dangling bonds in amorphous semiconductors. // *Natural and technical sciences*, 6, 2007, pp.58-63.
5. Brodsky M. *Amorphous semiconductors*. (Moscow: Mir, 1982).
6. S.Zaynobidinov, R.G. Ikramov, R.M. Jalalov Urbach energy and the tails of the density of states in amorphous semiconductors. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2011, Vol. 78, No. 2, pp. 223-227.
7. Zaynobidinov S., Ikramov R.G., Nuritdinova M.A., Zhalalov R.M. The distribution function of defect states and the absorption spectra of amorphous semiconductors. // *Uzbek Journal of Physics*, 2009, Vol.11 (N 1), pp. 52-57.

MANUFACTURING TECHNOLOGY AND PHYSICAL PHOTOELECTRIC CHARACTERISTICS OF TiO_2 -BASED SOLAR CELL WITH SEMICONDUCTOR PROPERTIES

Abdukarimov Abdullaziz Abdubannoyevich,

Professor of Namangan Institute of Engineering and Technology

abdullaziz.abdukarimov@mail.ru

Yokubbayev Anasxon Akmalxonovich,

Assistant of Namangan Institute of Engineering and Technology

muhammadyusuf.muhammadsodiq@bk.ru

Abstract. Dye-sensitized solar cells (DSSC, Dye-Sensitized Solar Cells) have emerged as one of the innovative technologies in solar energy processing. Their main advantages include high efficiency, simple production process and availability of various natural dyes, which make them attractive as a widespread energy source. This article provides detailed information about the working principles and main components of DSSCs. Dye-DSSC is an important factor in the performance of solar cells. The development of dye-sensitized solar cells and its drawbacks are reviewed. At present, the advantages and disadvantages of natural dyes as dye-sensitized solar cells and its potential development have been analyzed. According to the types of natural dyes used in recent years, it will review the research process of natural dye-sensitized cells in detail, and then analyze the development trend of natural dye-sensitized solar cells.

Key words: DSSC, Dye-Sensitized Solar Cells photoelectrode, contour electrode, photoanode, electrolyte, gel polymer electrolyte (GPE), photosensitive dye,) Titanium dioxide TiO_2 , iodine (I_2) , triton-X100 , , polyethylene glycol (PEG).

YARIMO‘TKAZGICH XOSSASIGA EGA TiO_2 ASOSLI QUYOSH ELEMENTINING TAYYORLASH TEXNOLOGIYASI VA FIZIK FOTOELEKTRIK XARAKTERISTIKALARI

Annotatsiya. Yuqori sezgir bo'yoqli quyosh elementlari (DSSC, Dye-Sensitized Solar Cells) quyosh energiyasini qayta ishlashda innovatsion texnologiyalardan biri sifatida paydo bo'ldi. Ularning asosiy afzalliklari yuqori samaradorlik, oddiy ishlab chiqarish jarayoni va turli tabiiy bo'yoqlar mavjudligi bilan birga, ularni keng tarqalgan energiya manbai sifatida jozibador qiladi. Ushbu maqolada DSSClarning ishlash prinsiplari va asosiy komponentlari haqida batafsil ma'lumot beriladi Yarimo'tkazgich xossasiga ega TiO_2 asosli quyosh elementlarini(DSSC) tayyorlash texnologiyasi va ishlash prinsipi keltirilgan. Bo'yoq-DSSC quyosh xujayralari ishlashining muhim omilidir. Bo'yoq bilan sezgir bo'lgan quyosh xujayralarining rivojlanishi va uning kamchiliklarini ko'rib chiqildi. Hozirgi vaqtda bo'yoqqa sezgir quyosh xujayralari sifatida tabiiy bo'yoqlarning afzalliklari va kamchiliklari va uning potentsial rivojlanishini tahlil qilindi. So'nggi yillarda ishlatiladigan tabiiy bo'yoqlar turlariga ko'ra, bu tabiiy bo'yoqqa sezgir bo'lgan hujayralarni tadqiq qilish jarayonini batafsil ko'rib chiqildi, so'ngra tabiiy bo'yoqlarga sezgir bo'lgan quyosh xujayralarining rivojlanish tendentsiyasini tahlil qiladi

Kalit so'zlar: DSSC, Dye-Sensitized Solar Cells fotoelektrod, konturelektrod, fotoanod, elektrolit, gel polimer elektrolit (GPE), yorug'likka yuqori sezgir bo'yoq,) Titan dioksidi TiO_2 , yod (I_2) , triton-X100 , polietilenglikol (PEG).

ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ TiO_2 С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ СВОЙСТВАМИ

Аннотация. Сенситизированные красителем солнечные элементы (DSSC, Dye-Sensitized Solar Cells) появились как одна из инновационных технологий в области обработки солнечной энергии. Их основными преимуществами являются высокая эффективность, простой процесс производства и доступность различных натуральных красителей, что делает их привлекательными в качестве широко распространённого источника энергии. В этой статье представлена подробная информация о принципах работы и основных компонентах DSSC. Дye-DSSC является важным фактором в производительности солнечных элементов. Рассмотрены разработка сенситизированных красителем солнечных элементов и их недостатки. В настоящее время

проанализированы преимущества и недостатки натуральных красителей в качестве сенсibilизированных красителем солнечных элементов и их потенциальное развитие. В соответствии с типами натуральных красителей, используемых в последние годы, будет подробно рассмотрен процесс исследования сенсibilизированных красителем ячеек, а затем проанализированы тенденции развития сенсibilизированных красителем солнечных элементов.

Ключевые слова: DSSC, фотоэлектрод для солнечных элементов, сенсibilизированных красителем, контурный электрод, фотоанод, электролит, гелеобразный полимерный электролит (GPE), светочувствительный краситель, диоксид титана TiO_2 , йод (I_2), тритон-X100, полиэтиленгликоль (ПЭГ).

Introduction. At present, the electricity consumed in the world is mainly made up of energy obtained from fossil fuels, that is, thermal energy and nuclear energy. However, the limited amount of such fuels and the fact that they are not ecologically clean are their main disadvantages [1]. Today, solar energy is the most suitable energy for electricity production. However, the energy produced in silicon-based solar cells is 1% of the electricity produced on a global scale [2].

Global energy consumption is increasing every year: it was 12.7 TW in 1998, it will be around 26.4-32.9 TW in 2050, and it will reach 46.3-8.7 TW by 2100 [3]. The increase in energy consumption leads to a decrease in natural resources, namely gas, oil and coal. In general, the efficiency of silicon-based solar cells of the old type can be increased up to 25% in laboratory conditions, and the efficiency of gallium-arsenide-based solar cells can be increased to 32% in laboratory conditions [3].

Therefore, the current demand forces to look for solar cells with low cost of production technology and electricity production. An example of such solar cells is "Dye sensitized solar cell (DSSC-Dye sensitized solar cell). DSSC solar cells are very different from traditional solar cells due to their low cost and ease of manufacturing technology. At the same time, it was determined that the maximum efficiency of this type of solar cells is 14.1%, and the useful life is more than 15 years, and the cost of the produced solar cells is 3-5 times cheaper than conventional solar cells [4].

The technology of making solar cells, the low cost of their introduction and improvement, and the convenience of their use and production attract specialists in this field [4-6].

At the same time, it is shown that the maximum efficiency of this type of solar cells created by Japanese scientists is 13%, and the useful life is more than 10 years. Since DSSC solar cells are made of organic dyes and polymer materials, the cost of electricity obtained from them is 10-15 times cheaper than electricity obtained from conventional solar cells.

In this work, for the first time in Uzbekistan, the technology of making DSSC solar cells was described. Therefore, in this work, we described the technology of making a solar cell and some of its physical properties.

In the literature, it is stated that highly sensitive natural dye solar cells consist of the following five parts [3] Fig. 1.

1) Transparent electrically conductive glass: 2) Titanium dioxide TiO_2 nanoparticles (photoanode): 3) Paint: 4) electrolyte: 5) Graphite or platinum counter electrode (cathode): The first layer is the glass layer, a conductive (transparent) layer is grown on the glass surface, which transfers the free electrons generated inside the solar cell to the external circuit. This layer is called the transparent conductive surface. A layer of TiO_2 nanoparticles with n-type semiconductor properties is used as the second layer. The advantages of TiO_2 are based on high light sensitivity, structural stability and low cost [7].

The third layer is the dye layer, and the light sensitivity of the dye molecules is the main component of increasing the visible light photon absorption efficiency of DSSCs [8]. The fourth layer is the electrolyte layer, of which there are three most common types:

- 1) liquid solution of I^-/I_3^- dissolved in an organic solvent;
- 2) gel polymer electrolytes prepared from salts or salt solutions;
- 3) solid electrolytes [8].

The fifth layer is an electrode. The electrode is another important component of DSSC. The main purpose of the electrode is to reduce triiodide. The speed of the reduction reaction at the cathode is important, because after reduction of the triode, iodide is formed on the anode side of the electrode, which is used to regenerate the oxidized dye molecule.

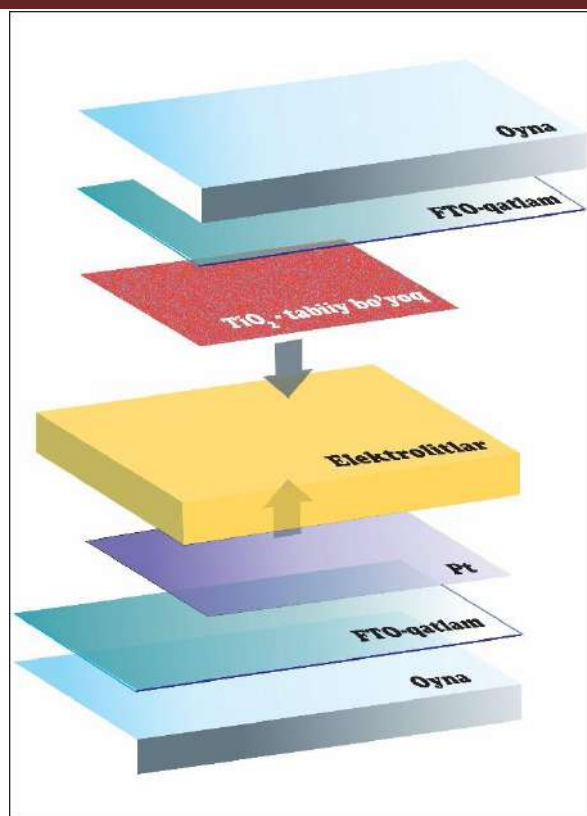


Figure 1. Highly sensitive natural dye solar cells consist of the following five parts.

1) Transparent electrically conductive glass; 2) Titanium dioxide TiO_2 nanoparticles (photoanode); 3) Paint; 4) electrolyte; 5) Graphite or platinum counter electrode (cathode). To get an acceptable cell the reaction on the anode side should be slow and the reaction on the cathode side, which is the electrode, should be fast. The electrode is close to the equilibrium potential of the redox couple, but the anode side is far from the equilibrium potential. This phenomenon creates a voltage difference across the DSSC, causing the triiodide to recover. Although many materials such as platinum, carbon, graphite, and conductive polymers have been used as electrodes, platinum is still the preferred catalyst. Platinum is the best catalyst for iodine, triiodide, redox couple. In addition, the light reflectance of platinum is higher than that of the carbon coating, resulting in more light being reflected into the cell.

Experimental determination of technological parameters

The following chemicals and solutions were used in the preparation of DSSC solar cells. In the preparation of the electrodes of the solar cell, manufactured by Sigma Aldrich, USA: titanium dioxide (TiO_2) P90 with a molecular size of 15 nm and (TiO_2) P25 with a molecular size of 21 nm, polyethylene glycol (PEG), triton-X100, fluorine-doped tin oxide grown glass (FTO) and platinum (Pt), a product of Supelco Analytical, USA, were used. We used polyethylene oxide PEO, dimethylformamide (DMF), 98% pure ethylene carbonate (EC), 99% pure propylene carbonate (PC), tetrabutylammonium iodide (TBAI), potassium iodide (KI) and iodine (I_2) to prepare the electrolyte. In order to localize the solar element, extracts of fruits grown in the Republic of Uzbekistan and plant leaf pigments were used as dyes. Special filter paper made in Malaysia for filtering paints and. Solutions developed in Malaysia: 69% pure nitric acid (HNO_3) dissolved in 99.5% ethanol ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) at pH=1 was used.

Table 1. Gel-polymer electrolyte composition

Namuna	Kaliy yodit	Tetrobutilammoniy yodit	polietilen oksid	Polietilen karbonat	Etilen karbonat	Dimetil-formomid	Yod
No	gr	gr	gr	gr	Gr	gr	gr
1	0.05	-	0.1	0.25	0.25	0.5	0.005
2	0.05	0.05	0.1	0.25	0.25	0.5	0.010
3	0.05	0.10	0.1	0.25	0.25	0.5	0.015
4	0.05	0.15	0.1	0.25	0.25	0.5	0.02
5	0.05	0.2	0.1	0.25	0.25	0.5	0.025
6	-	0.25	0.1	0.25	0.25	0.5	0.005

Table 1 shows the percentage of substances in electrolytes prepared by us.

The percentage of substances in the electrolytes we prepared is presented in Table 1. It can be seen from the table that the electrolytes of the solar cell differ from each other only in the amount of KI, TBAI salt and iodine.

It can be seen from the table that the electrolytes of the solar cell differ from each other only in the amount of KI, TBAI salt and iodine.

Technology of preparation of transparent electrically conductive surface.

Usually, FTO glass is used to make high-sensitivity natural dye solar cells. The main reason for this is that the FTO layer transmits the incident light well. The FTO layer is prepared using solutions of fluorine and tin oxide. First, the solution is thoroughly mixed until it reaches a homogeneous state and is grown by spraying on a cleaned transparent glass surface. In the next step, the sample is heated for one hour at different temperatures. The morphological structure of the obtained samples is that the transparency of the film obtained at a temperature of 150°C is 85%, and the electrical resistance is 5.11 Ohm/cm². This is the best result so far. Photoanode preparation technology: To prepare photoanodes of solar cells with organic natural dyes, firstly, grown tin oxide (FTO) glass doped with fluorine is washed and dried with ethyl alcohol to remove foreign substances. Then, a solution of titanium dioxide TiO₂ P90 type in nitric acid is applied to the glass surface in a thin layer as the first layer and heated at a temperature of 450°C for 0.5 hours. As the second layer, titanium dioxide TiO₂ P25 type, polyethylene glycol PEG, triton-X100 substances are dissolved in nitric acid until they reach a homogeneous state, applied over the first layer and heated again at 450°C for 30 minutes using a muffle furnace. Figure 2 shows a picture of photoanodes prepared by the above method.



Photosensitive dye (Dye) preparation technology: Dye is the main component of DSSC and should absorb incident photons as much as possible. Paints must have the following optical and electrochemical properties: Paints must be fluorescent. The light absorption spectra of paints should cover the ultraviolet and near-infrared fields. The lower part of the conductivity zone of the paint should be located above the lower limit of the conductivity zone of TiO₂

Figure 2 is the finished photoanode. To prepare the dye, which is one of the main working parts of the highly sensitive natural dye solar elements, dyes are first made from spinach, red onion peel, red cabbage, geranium flower, perfume flower, henna plant leaves and chlorophyll. for preparation, their leaves were taken, washed twice with distilled water, cleaned of various dust particles, dried at room temperature for 24 hours in a room away from sunlight, and crushed using a special grinder until it became a powder Figure 2.8 [5]. Then 8g of dried leaf powder was mixed with 40ml of solvent (distilled water and ethanol) [6]. The mixture of ethanol and dye was stirred for one hour at a temperature of 303 K using a magnetic stirrer. The resulting paint was filtered using special papers. In addition, blackberry, raspberry, sardine, pomegranate, and currant fruits were crushed using a special grinder, filtered using paper filters, and dye was prepared from the fruit extract Fig. 3. The photoanode is placed in the prepared dye extract and kept in a dark place for 24 hours.



Figure 3. leaves to make

solar cell electrically cathode is ethanol. The dried, and a 1 hydrochloric while heating order to smooth cathode is muffle furnace. furnace and cathodes are



The process of crushing dried plant paint.

Preparation of organic natural dye cathode: First, the transparent, conductive (FTO) glass from which the prepared is cleaned by washing with cleaned electrically conductive glass is mM solution of platinum (Pt) in acid is dripped over its entire surface the glass to a temperature of 300°C. In the surface of the cathode, the prepared heated for 30 minutes at 450°C using a After 24 hours, it is removed from the washed with ethanol. The finished shown in Figure 4.

Figure 4. A view of the cathode of an organic dye-based solar cell.

We used several natural dyes for semiconductor based highly sensitive dye solar cell (DSSC) applications. It is known that DSSC is a multi-layered structure, consisting of photoanode, natural dye, electrolyte and cathode. In this chapter, the dependence of incident light absorption on natural dye was studied. The natural dyes used in the



experiment are chlorophyll and anthocyanins obtained from cauliflower, geranium, red onion peel, red cabbage, black mulberry and beetroot.

Figure 5 shows the absorption characteristics of all dyes used in this study. Absorption depends on the wavelength of the incident light and the type of paint. Pomegranate contains high content, absorption peaks can be observed at 320, 370 and 520 nm. The color of geranium flowers is from blue-gray to brown [11]. Geranium dye shows the highest absorption peak at 400 nm and 540 nm. Some absorption can also be observed between 600 and 1000 nm. Spinach dye showed a small peak between 500 and 600 nm. J-V

characteristics of DSSCs fabricated using five different dyes. The efficiency of a DSSC is based on its dye absorption. It can be obtained from natural sources or chemical synthesis. The dye plays an important role in absorbing light and introducing electrons into the conduction band of the semiconductor material. It absorbs photons with energy equal to or greater than the energy gap of the dye molecules. These are important factors to improve the efficiency of DSSC.

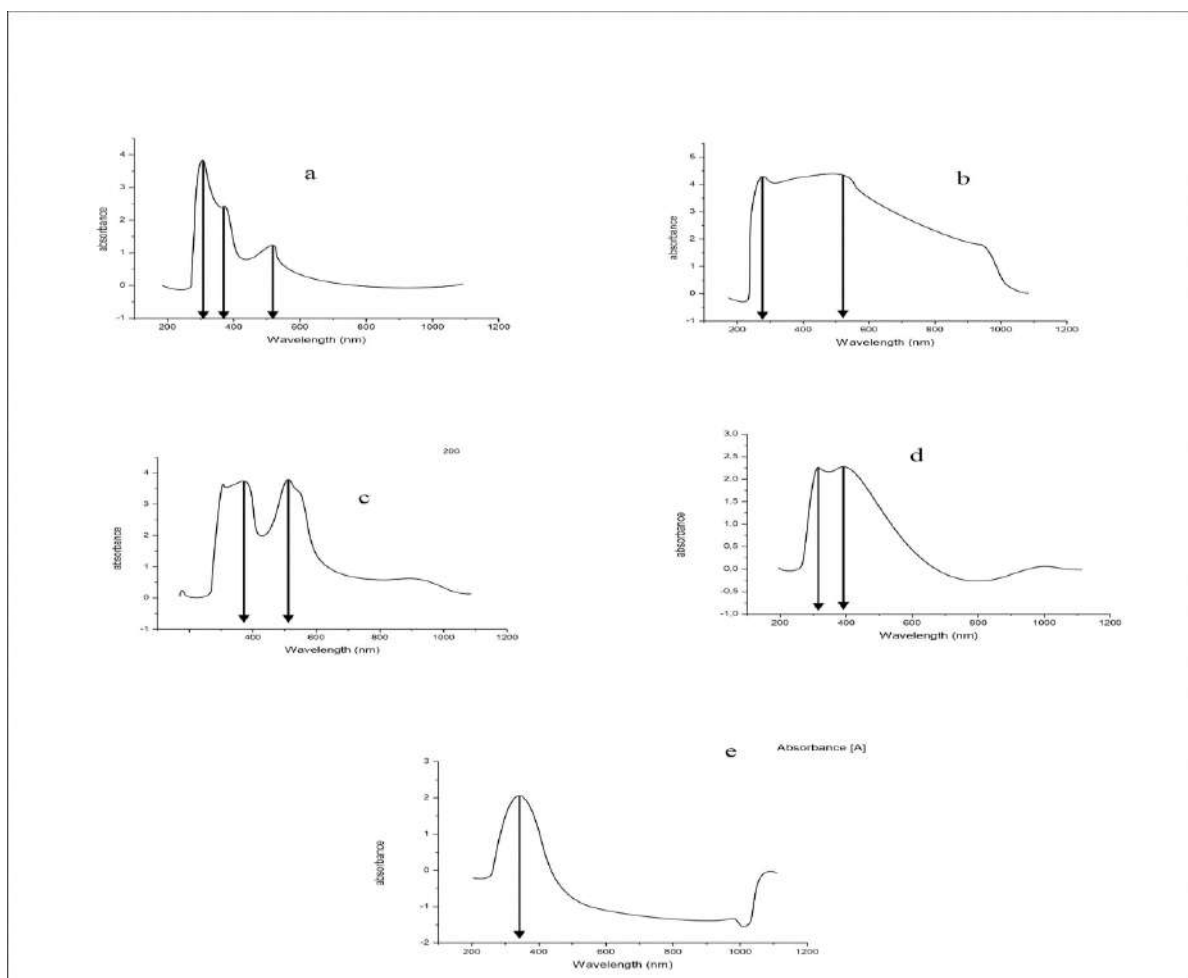


Figure 5. Wavelength dependence of light absorption by dyes for (a) pomegranate, (b) beet, (c) geranium, (d) spinach, and (e) red onion

Conclusion. The materials used in the preparation of semiconductor-based DSSC solar cells are mentioned. The technology of preparation of TiO₂-based DSSC layers with semiconductor properties is presented. Dyes of semiconductor-based DSSC solar cells with photoelectric properties were determined in the wavelength range from 300 nm to 900 nm.

It was found that the gel-polymer electrolyte has a high ionic conductivity when the composition is 0.05 g KI, 0.2 g TBAI and 0.025 g I₂. It was found that the resistance decreases with the increase, and the electrical conductivity increases. The prohibition zone of fotanode made from beetroot and shotut natural dye was determined and its value.

REFERENCES:

1. C. Goodall, *Ten technologies to fix energy and climate*, 2nd ed., Profile books, 2012.
<https://docplayer.ru/>
2. R. Eisenberg and D. G. Nocera, "Preface: overview of the forum on solar and renewable energy," *Inorganic Chemistry*, vol. 44, p. 6799, 2005.
3. B. O'Regan, and M. Grätzel, *Nature* 353 (1991) 737-740.

4. Abdulkarimov A.A, Yokubbayev A.A, Shah S, Arof A.K, Mamatkarimov O.A, Characteristics of natural dye sensitized solar cells// *Molecular Crystals and Liquid Crystals*.Volume 767, 2023 - Issue 1 <https://doi.org/10.1080/15421406.2023.2228643>
5. A.A Yoqubbayev and AA Abdulkarimov Components of the New Generation Thick Layer Solar Elements and Physical Processes in them // *Journal of Nuclear Energy Science & Power Generation Technology Volume 11 • Issue 03 • 251*
6. A.A. Yokubbayev Recent advances in dye-sensitized solar cells using plant pigments // *International Scientific Journal Theoretical & Applied Science ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (97), 146-149.; Scopus ASCC: 2504.)
7. A.A.Yakubbaev; A.Abdulkarimov; SH.Nazarov.Application of pincent of spinal leaf (chlorophylle) as a natural die for paint sensitive sun element (dssc) // *Academica An International Multidisciplinary Research Journal ISSN: 2249-7137 Vol. 11, Issue 8, August 2021*
8. Ёқуббаев А.А., С.Ранг сезгир грэцел қуёш элементларининг яратилиши ва уларни физик хусусиятлари // *NamDU ilmiy axborotnomasi 2021 №.5, pp. 10-16, (01.00.00 №14)*
9. Ёқуббаев А.А, юқори сезгир бўёқли қужш батареяси (dssc) ушун табиий органик бўёқларни тайёрлаш технологияси ва шартлари. // *Наманган Давлат Университети илмий ахборотномаси. 2021. №.12, С.44-48. (01.00.00 №14)*
10. А.А.Ҳақуббайев., Ҳуқори сезгир қуёш элементларида табиий о'симлик пигментларини қо'llаш // *НамДУ илмий ахборотномаси 2022 №.1, С 139-145 (01.00.00 №14)*

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ДЕФЕКТАХ АМОРФНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Икрамов Рустамжон Гуламджанович,
преподаватель Наманганского инженерно-технологического института
rgikramov@mail.ru

Нуриддинова Маишхураhon Анварбековна,
преподаватель Наманганского инженерно-технологического института
sirius-73@mail.ru

Султонов Бобур Кобулджан угли,
научный соискатель Наманганского инженерно-технологического института
b.sultonov2021@mail.ru

Холмирзаев Ойбек Тўрамирзаевич,
научный соискатель Наманганского инженерно-технологического института
oybekjon88@inbox.ru

Аннотация. В настоящей работе предлагается новый метод определения плотности состояний в дефектах аморфных полупроводников. Показано, что если измерена экспериментальная кривая спектра оптического поглощения аморфного полупроводника, используя этот спектр, можно определить распределение плотности электронных состояний дефектов. Используя формулу Кубо-Гринвуда, написанную для спектров дефектного поглощения и экспериментального спектра дефектного поглощения, определены плотности электронных состояний дефектов в аморфных полупроводниках.

Ключевые слова: аморфные полупроводники, оптические переходы электронов с участием дефектов, парциальные спектры дефектного поглощения, плотность электронных состояний в дефектах, валентная зона, формула Кубо Гринвуда.

CALCULATION OF THE DENSITY OF ELECTRON STATES IN DEFECTS OF AMORPHOUS SEMICONDUCTORS

Abstract. This work proposes a new method for determining the density of defect states of amorphous semiconductors. It is shown that if the experimental curve of the optical absorption spectrum of an amorphous semiconductor is measured, using this spectrum it is possible to determine the distribution of the density of electronic states of defects. Using the Kubo-Greenwood formula written for defect absorption and the experimental spectrum of defect absorption, the densities of electronic states of defects in amorphous semiconductors are determined.

Keywords: amorphous semiconductors, optical transitions of electrons involving defects, partial defect absorption spectra, density of electronic states in defects, exponential absorption spectra, valence band, Kubo-Greenwood formula.

AMORF YARIMO‘TKAZGICHGA XOS NUQSONLARDAGI ELEKTRONLARNING HOLAT ZICHLIGINI HISOBLASHNING YANGI USULI

Annotatsiya. Ushbu ish amorf yarim o'tkazgichlarning nuqsonlaridagi elektronlarni holatlar zichligini aniqlashning yangi usulini taklif qiladi. Amorf yarim o'tkazgichning optik yutilish spektrining tajriba egri chizig'i o'lchangan bo'lsa, bu spektrdan foydalanib, nuqsonlarning elektron holatlari zichligini taqsimlashni aniqlash mumkinligi ko'rsatilgan. Kubo-Grinvud formulasidan foydalanib, nuqsonlarni yutish spektrlari va nuqsonlarni eksperimental yutish spektrlaridan amorf yarim o'tkazgichlardagi nuqsonlarning elektron holatlarining zichligi aniqlangan.

Kalit so'zlar: amorf yarimo'tkazgichlar, nuqsonlar ishtirok etgan elektronlarning optik o'tishlari, nuqsonlarda parsial yutilish spektrlari, nuqsonlardagi elektron holatlarning zichligi, valent zona, Kubo Grinvud formulasi.

Введение. Известно, что основные дефекты в гидрогенизированном аморфном кремнии (α -Si:H) разделяются на три типа. D^0 -нейтральный дефект, имеющий один электрон и одну дырку, D^- -дефект с отрицательным зарядом, имеющий два электрона и D^+ -дефект с положительным зарядом, имеющий две дырки.

В работах [1, 2] приведены экспериментальные результаты для энергетических положений и концентраций этих дефектов в α -Si:H, полученных с помощью тлеющего газового разряда следующие значения $\varepsilon_{D^0}-\varepsilon_V \approx 0,78$ эВ, $\varepsilon_{D^-}-\varepsilon_V \approx 0,5$ эВ, $\varepsilon_{D^+}-\varepsilon_V \approx 1,28$ эВ и $N_{D^0} = 4.5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $N_{D^-} = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $N_{D^+} = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$.

В работе [3] показано, что вне зависимости от зарядового состояния дефектов, они участвуют во всех оптических переходах электронов.

Как известно, в α -Si:H спектры поглощения с дефектами начинаются, когда для энергии поглощённых фотонов выполняется условие $1,4 \text{ эВ} \leq \hbar\omega$. С такими энергиями в общем случае, учитывая число дефектных состояний в α -Si:H, одновременно могут происходить восемнадцать оптических переходов с участием этих состояний. А также осуществляется оптический переход от хвоста валентной зоны на хвост зоны проводимости (экспоненциальное поглощение). Расчёт спектров экспоненциального поглощения приведён в работе [4].

Для энергии поглощённых фотонов при выполнении условия $\varepsilon_{D1}-\varepsilon_V > \hbar\omega$ (1 область), электроны переходят только от хвоста валентной зоны в дефект, а при выполнении условия $\varepsilon_{D1}-\varepsilon_V < \hbar\omega$ (2 область) электроны, одновременно переходят от валентной зоны и от её хвоста на дефект. Где ε_{D1} — энергетическое положение точки пересечения распределения электронных состояний, хвоста валентной зоны и дефекта (рисунок 1.), ε_V — верхняя граница валентной зоны.

При выполнении условия 3 - $\varepsilon_C-\varepsilon_{D2} > \hbar\omega$ электроны переходят только от дефектов в хвост зоны проводимости, а при выполнении условия 4 - $\varepsilon_C-\varepsilon_{D2} < \hbar\omega$ оптические переходы электронов одновременно происходят от дефектных состояний в хвост зоны проводимости, а также в зону проводимости. Где ε_{D2} - энергетическое положение точки пересечения распределения электронных состояний хвоста зоны проводимости и дефектных состояний (рисунок 1.), ε_C - нижняя граница зоны проводимости.

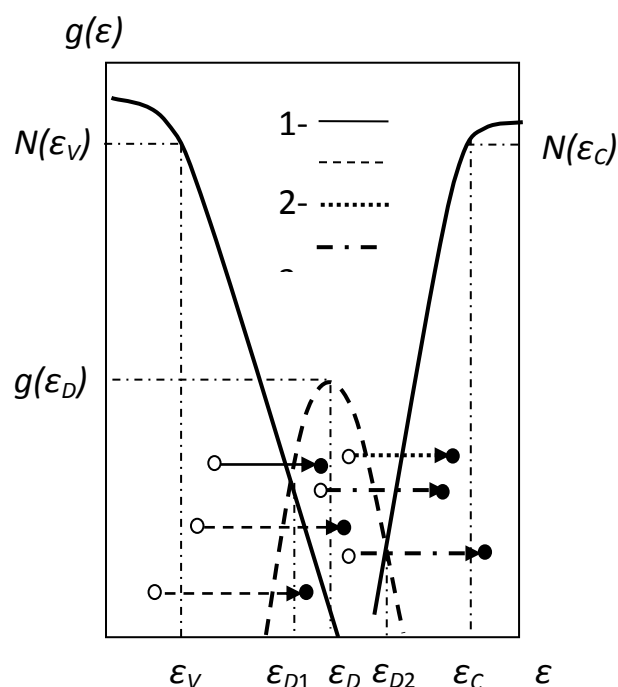


Рисунок 1. Типы оптических электронных переходов с участием дефектных состояний, происходящих в аморфных полупроводниках при энергии поглощённых фотонов. 1 - $\varepsilon_{D1}-\varepsilon_V < \hbar\omega$ и 2 - $\varepsilon_{D1}-\varepsilon_V > \hbar\omega$, 3 - $\varepsilon_C-\varepsilon_{D2} > \hbar\omega$ и 4 - $\varepsilon_C-\varepsilon_{D2} < \hbar\omega$.

Экспериментальные спектры поглощения с дефектами определяются суммой парциальных спектров, соответствующих вышеуказанным оптическим переходам электронов. Поэтому теоретический расчёт спектров поглощения с дефектами в α -Si:H, является очень сложной задачей в физике аморфных полупроводников.

Методика исследования. Спектры коэффициента поглощения в α -Si:H теоретически вычисляются по формуле Кубо-Гринвуда в приближении Дэвиса-Мотта. Эту формулу можно написать для оптических переходов электрона от хвоста валентной зоны на дефект следующим образом, когда, $\varepsilon_{D1}-\varepsilon_V < \hbar\omega$ [5]:

$$\alpha(\hbar\omega) = A \int g_V(\varepsilon) g_D(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}, \quad (1)$$

или

$$\alpha(\hbar\omega) = A \int g_V(\varepsilon - \hbar\omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega}, \quad (2)$$

где A - коэффициент пропорциональности, не зависящий от энергии ($\hbar\omega$) поглощённых фотонов, $g_V(\varepsilon)$, $g_V(\varepsilon - \hbar\omega)$ и $g_D(\varepsilon - \hbar\omega)$, $g_D(\varepsilon + \hbar\omega)$, $g_D(\varepsilon)$ - плотности начальных и конечных электронных состояний, участвующие в оптических переходах, $g_D(\varepsilon)$ - плотность состояний электронов в дефектах, $g_V(\varepsilon)$ - плотности состояний электронов в хвосте валентной зоны и самой валентной зоне. Из этих формул видно,

что значения коэффициента поглощения сильно зависят от распределения плотности состояний электронов, участвующих в оптических переходах.

Для получения аналитических решений спектров вышеуказанных оптических переходов, надо знать распределения плотности состояний электронов, участвующие в оптических переходах. Обычно для этого применяют эмпирические модели, во всех этих моделях распределение плотности состояний электронов в разрешённых зонах выбирается в параболическом или линейном виде. А распределение плотности состояний электронов, расположенных в хвостах разрешённых зон является экспоненциальными [6,7]. Распределение плотности состояний электронов, расположенных в дефектах, подчиняется распределению Гаусса или гиперболического секанса [8]. Учитывая этого, распределение электронных состояний выбираем в таких видах: для валентной зоны и для его хвоста;

$$g_v(\varepsilon) = N(\varepsilon_v) \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{E_g} \right)^{n_1}, \quad n_1 = 1/2, 1 \quad \text{и} \quad g_v(\varepsilon) = N(\varepsilon_v) \exp(-\beta_1(\varepsilon - \varepsilon_v)). \quad (3)$$

А для дефектных состояний;

$$g_D(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon_D)}{ch(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} = \frac{2g(\varepsilon_D)}{\exp(b(\varepsilon - \varepsilon_D)) + \exp(-b(\varepsilon - \varepsilon_D))} \quad (4)$$

или

$$g_D(\varepsilon) = g(\varepsilon_D) \exp(-a(\varepsilon - \varepsilon_D)^2). \quad (5)$$

Где $N(\varepsilon_v)$ - и $N(\varepsilon_c)$ - эффективные значения плотности состояний электронов в валентной зоне и в зоне проводимости, ε_v — верхняя граница валентной зоны и ε_c — нижняя граница зоны проводимости, b_1 — и b_2 — параметры, определяющие кривизну экспоненциальных хвостов валентной зоны и зоны проводимости, n_1 — степень распределения плотности состояний электронов в валентной зоне, n_2 — степень распределения плотности состояний электронов в зоне проводимости. $g(\varepsilon_D)$ -максимальное значение плотности состояний электронов в дефектах. a - и b - параметры, определяющие эффективную полуширину распределения плотности состояний электронов в дефектах, ε_D - энергетическое положение максимума дефекта,

В работе [9] для получения аналитических решений спектров коэффициента поглощения в дефектах интегралы в формулах (1) и (2) написаны в определённой форме, и получены все парциальные спектры дефектного поглощения вышеуказанных оптических переходов. Из расчёта этих спектров показано, что значение спектров поглощения в дефектах в основном определяются оптическими переходами между электронами.

Когда $\varepsilon_{D1} - \varepsilon_v > \hbar\omega$, формулы (1) и (2) написаны следующим образом для оптических переходов электронов, от хвоста валентной зоны на дефект:

$$\alpha = A \int_{\varepsilon_{D1} - \hbar\omega}^{\varepsilon_{D1}} g_v(\varepsilon) g_D(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} \quad (6)$$

$$\alpha = A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_{D1} + \hbar\omega} g_v(\varepsilon - \hbar\omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} \quad (7)$$

А если выполняются условия $\varepsilon_{D1} - \varepsilon_v < \hbar\omega$, учитывая все возможные оптические переходы электрона, то эти выражения можно написать следующим образом:

$$\alpha = A \int_{\varepsilon_{D1} - \hbar\omega}^{\varepsilon_{D1}} g_v(\varepsilon) g_D(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} = A \int_{\varepsilon_v}^{\varepsilon_{D1}} g_v(\varepsilon) g_D(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} + A \int_{\varepsilon_{D1} - \hbar\omega}^{\varepsilon_v} g_v(\varepsilon) g_D(\varepsilon + \hbar\omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (8)$$

$$\alpha = A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_{D1}+\hbar\omega} g_V(\varepsilon - \hbar\omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} = A \int_{\varepsilon_V+\hbar\omega}^{\varepsilon_{D1}+\hbar\omega} g_V(\varepsilon - \hbar\omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} + A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V+\hbar\omega} g_V(\varepsilon - \hbar\omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar\omega} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (9)$$

Где α_1 - парциальный спектр оптических переходов электрона от хвоста валентной зоны на дефект, α_2 – парциальный спектр оптических переходов электрона от валентной зоны на дефект.

Из формулы (7) и (9) видно, что в зависимости от оптических переходов электрона от валентной зоны на дефект можно исследовать спектр коэффициента поглощения в дефектах отдельно.

Учитывая это, в настоящей работе предлагается новый метод определения распределения плотности электронных состояний в дефектах из формулы Кубо-Гринвуда (2).

Результаты и их обсуждение. Экспериментальные результаты спектра оптического поглощения гидрогенизированного аморфного кремния представлены в работе [10] (рисунок 2).

Всем известно, что, эксперимент даёт сумму парциальных спектров соответствующим вышеуказанным оптическим переходам электрона с участием дефектов.

В работе [9] вычислены парциальные спектры для всех оптических переходов электрона с участием дефектных состояний. Но вышеуказанным значениям энергетического положения и концентрации дефектных состояний суммарное значение парциальных спектров не соответствовало экспериментальным результатам спектров дефектного поглощения (рисунок 2).

Дальнейшие расчёты показали, что для D^+ дефекта только в значениях $\varepsilon_D^+ - \varepsilon_V \approx 1,28$ эВ, $N_D^+ = 6 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $b = 10 \text{ эВ}^{-1}$ спектр коэффициента поглощения в дефектах для переходов электрона от валентной зоны в дефект, соответствовало экспериментальным результатам (рисунок 3). Это означает, что в аморфном гидрогенизированном кремнии $\alpha\text{-Si:H}$ (рисунок 2) значения спектров поглощения с дефектами определяется в основном оптическими переходами электронов от валентной зоны в D^+ дефект. Для этих переходов электрона, спектры поглощения тоже исследовано по формулам (6) и (7).

Аналитические парциальные спектры поглощения в дефектах, полученные по этим формулам, дали одно и то же решение. Поэтому для определения парциального спектра поглощения в дефектах можно использовать формулы (6) и (7).

Так как нужно определить распределение плотности электронных состояний в D^+ дефекта, используем формулу (7).

В работе [11] для производной по одной переменной от интеграла двух переменных дана следующая формула:

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial \beta(y)}{\partial y} f(\beta(y), y) - \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y} f(\alpha(y), y). \quad (10)$$

Подставляя формулу (7) в это выражение, получаем для распределений энергетических состояний D^+ дефекта:

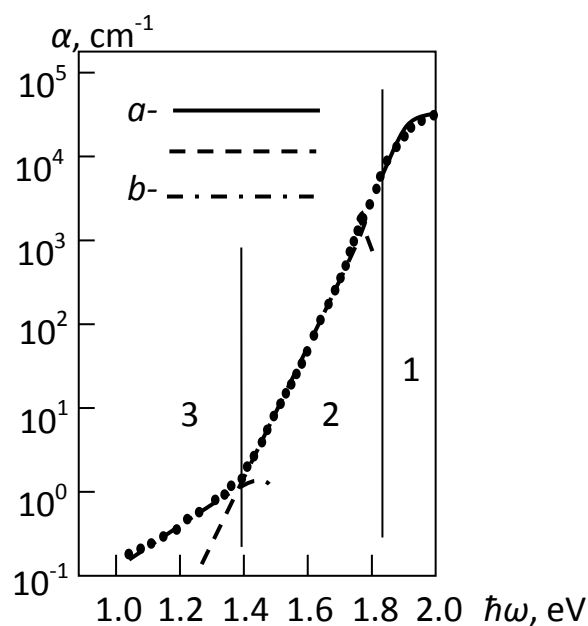


Рисунок 2. Экспериментальный спектр $\alpha\text{-Si:H}$.

Где участки 1 –межзонного, 2 – экспоненциального, 3 – дефектного поглощения. Рассчитанные спектры оптического поглощения $\alpha\text{-Si:H}$ а – межзонного и б –экспоненциального поглощения, с – дефектного поглощения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha}{\partial \hbar \omega} &= A \frac{\partial}{\partial \hbar \omega} \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} g_V(\varepsilon - \hbar \omega) g_D(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\hbar \omega} = \\
 &= A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} g_D(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \hbar \omega} \frac{g_V(\varepsilon - \hbar \omega)}{\hbar \omega} d\varepsilon + g_D(\varepsilon_V + \hbar \omega) g_V(\varepsilon_V) = \\
 &= A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} g_D(\varepsilon) \frac{\hbar \omega \frac{\partial}{\partial \hbar \omega} g_V(\varepsilon - \hbar \omega) - g_V(\varepsilon - \hbar \omega)}{\hbar \omega^2} d\varepsilon + g_D(\varepsilon_V + \hbar \omega) g_V(\varepsilon_V) = \\
 &= A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} g_D(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \hbar \omega} g_V(\varepsilon - \hbar \omega) \frac{d\varepsilon}{\hbar \omega} - \frac{\alpha}{\hbar \omega} + g_D(\varepsilon_V + \hbar \omega) g_V(\varepsilon_V)
 \end{aligned} \quad (11)$$

В эту формулу подставляем распределения электронных состояний в валентной зоне и D^+ дефекте, используя модель в виде (3)-(5):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha}{\partial \hbar \omega} &= A \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} \frac{\partial}{\partial \hbar \omega} (N(\varepsilon_V) \left(\frac{\varepsilon_C - \varepsilon - \hbar \omega}{E_g \hbar \omega} \right) d\varepsilon - \frac{\alpha}{\hbar \omega} + \frac{A}{\hbar \omega} N(\varepsilon_V) \left(\frac{\varepsilon_C - \varepsilon_V}{E_g} \right) + \\
 &+ \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon_V + \hbar \omega - \varepsilon_D))} = \frac{Ag(\varepsilon_D)N(\varepsilon_V)}{E_g \hbar \omega} \int_{\varepsilon_{D1}}^{\varepsilon_V + \hbar \omega} \frac{d\varepsilon}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} - \frac{\alpha}{\hbar \omega} + \frac{Ag(\varepsilon_D)N(\varepsilon_V)}{\hbar \omega} \frac{1}{\text{ch}(b(\varepsilon_V + \hbar \omega - \varepsilon_D))}
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha}{\partial \hbar \omega} &= \frac{2Bg(\varepsilon_D)}{bN(\varepsilon_C)\hbar \omega E_g} [\text{arctg} \exp(b(\varepsilon_V - \varepsilon_D + \hbar \omega)) - \text{arctg} \exp(b(\varepsilon_{D1} - \varepsilon_D))] - \\
 &- \frac{\alpha}{\hbar \omega} + \frac{B}{N(\varepsilon_C)\hbar \omega} g_D(\varepsilon_V + \hbar \omega - \varepsilon_D)
 \end{aligned} \quad (13)$$

Способ определения $g(\varepsilon_D)$ также представлен в работе [9].

Теперь будем определять энергетические положения этих состояний.

$$g_D(\varepsilon - \varepsilon_D) = g_D(\varepsilon_V - \varepsilon_D + \hbar \omega), \quad \varepsilon = \varepsilon_V + \hbar \omega. \quad (14)$$

Из этого следует, что энергетическое положение D^+ дефекта расположено выше $\hbar \omega$ от верхней границы валентной зоны. Из формулы (14) получаем:

$$g_D(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon - \varepsilon_D))} = \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon_V + \hbar \omega - \varepsilon_D))}. \quad (15)$$

Из формулы (13) для $g_D(\varepsilon)$ получаем:

$$\begin{aligned}
 g_D(\varepsilon) &= \frac{N(\varepsilon_C)\hbar \omega}{B} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \hbar \omega} + \frac{\alpha}{\hbar \omega} - \frac{2Bg(\varepsilon_D)}{bN(\varepsilon_C)\hbar \omega E_g} \times \right. \\
 &\times [\text{arctg} \exp(b(\varepsilon_V - \varepsilon_D + \hbar \omega)) - \text{arctg} \exp(b(\varepsilon_{D1} - \varepsilon_D))] \Big)
 \end{aligned} \quad (16)$$

Усредняя значение коэффициента дефектного поглощения и поглощённых фотонов, эту формулу запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 g_{Di}(\varepsilon) &= \frac{N(\varepsilon_C)(\hbar \omega_{i+1} + \hbar \omega_i)}{2B} \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\hbar \omega_{i+1} - \hbar \omega_i} + \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{\hbar \omega_{i+1} + \hbar \omega_i} - \frac{4Bg(\varepsilon_D)}{bN(\varepsilon_C)(\hbar \omega_{i+1} + \hbar \omega_i)E_g} \times \right. \\
 &\times [\text{arctg} \exp(b(\varepsilon_V - \varepsilon_D + (\hbar \omega_{i+1} + \hbar \omega_i)/2)) - \text{arctg} \exp(b(\varepsilon_{D1} - \varepsilon_D))] \Big)
 \end{aligned} \quad (17)$$

А формулу (15) напомним следующим образом:

$$g_{Di}(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon_i - \varepsilon_D))} = \frac{g(\varepsilon_D)}{\text{ch}(b(\varepsilon_V + \frac{\hbar \omega_{i+1} + \hbar \omega_i}{2} - \varepsilon_D))}, \quad (18)$$

где $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \hbar \omega_i, \hbar \omega_{i+1}$ - значения коэффициента поглощения в дефектах и энергии поглощённых фотонов, рассчитанные из формулы (7), полученных для оптических переходов электрона от валентной зоны на D^+ дефект (рисунок 3).

В формулы (17) и (18) подставим значения, полученные из частичного спектра, показанные на рисунке 3.

Рассчитанные плотности состояний электронов в дефекте D^+ показаны на рисунке 4.

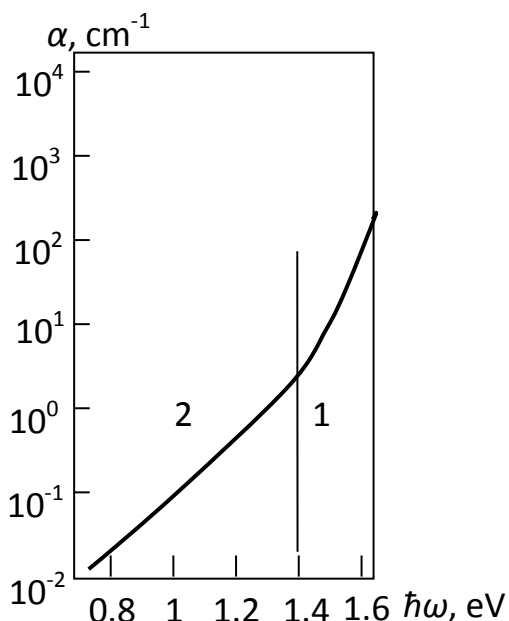


Рисунок 3. Рассчитанные спектры 1 – экспоненциального поглощения и 2 – дефектного поглощения соответствующие переходам электрона от валентной зоны в дефект

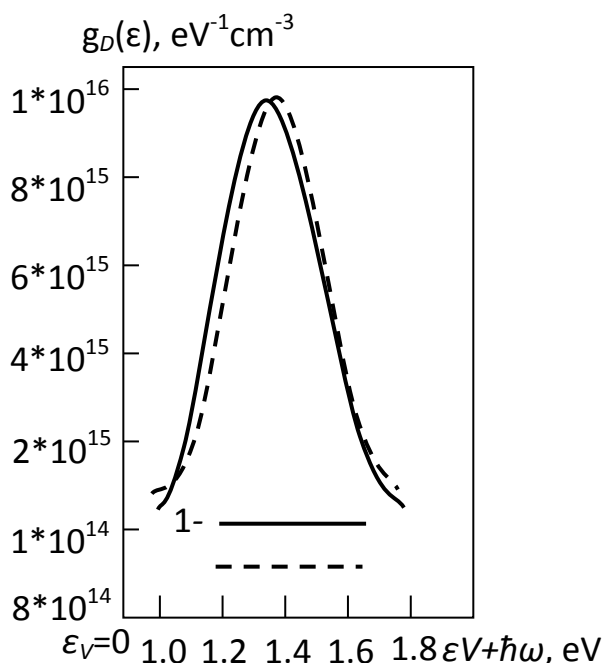


Рисунок 4. Рассчитанные распределения плотности электронных состояний D^+ дефекта 1 - по формуле (17), 2 - по формуле (18)

ЛИТЕРАТУРА:

1. М.С. Аблова, Г.С. Куликов, С.К. Першеев. Метастабильные состояния нелегированного аморфного гидрогенизированного, создаваемые γ – облучением. ФТП, 2002, том 36, вып. 8, с.1001-1003.
2. M. Gunes and Ch. R. Wronski. Differences in densities of charged defect states and kinetics of Staebler – Wronski effect in undoped (nontrinsic) hydrogenated amorphous silicon thin films. AIP, V 81, N 8, pp. 3526-3536.
3. В. И. Фистуль. Введение в физику полупроводников. М.: Высш. шк., 1984. 352 с.
4. Зайнобидинов С., Икрамов Р.Г., Жалалов Р.М. // Журнал прикладной спектроскопии. 2011. Т. 78. № 2. с. 243.
5. Davis E.A., Mott N.F. Electronic Processes in Non Crystalline Materials. // Clarendon Press, Oxford, 1979.
6. G. D. Cody. Hydrogenated Amorphous Silicon. Optical Properties, 1984.V. 21
7. S. K. O'Leary, "On the relationship between the distribution of electronic states and the optical absorption spectrum in amorphous semiconductors," Solid State Commun., 1999.V.109. P. 589–594.
8. Икрамов Р.Г. // Естественные и технические науки. 2007.
9. R.G.Ikramov, Kh.A. Muminov, M.A. Nuriddinova, B.Q. Sultonov, O.T. Kholmirezayev. Dangerous bonds individual of hydrogenated amorphous silicon and defect absorption spectra. East European Journal of Physics. 4. 244-250 (2023)
- 10.F. Orapunt, S.K. O' Leary. A quantitative characterization of the optical absorption spectrum associated with hydrogenated amorphous silicon. Mater Electron. (2009), V 20, pp. 1033-1038.
11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. Наука, Гл. Ред. Физ. Мат. Лит. 1986.С. 544.

CHARM SANOATI CHIQINDISI-MEZDRANI, TERINI QAYTA ISHLASH JARAYONLARIDA QO'LLASHNING NAZARIY TADQIQI

Shamsiyeva Maxbuba Badriyevna,

Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti dotsenti

Abduraxmonova Pokiza Elmurod qizi,

Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti tayanch doktoranti

pokiza.abduraxmonova.95@mail.ru

Annotatsiya. Ma'lumki, charm va mo'yna sanoatida turli xil va tarkibdagi ishlab chiqarish chiqindilari hosil bo'ladi. Bu esa sanoat chiqindilaridan qayta foydalanishni kengaytirish zaruratini tug'diradi. Maqolada charm sanoati chiqindisi hisoblangan mezdralardan qayta foydalanishni kengaytirish imkoniyatlari o'rganilgan. Ajratilgan mezdra yog'ining tarkibi aniqlanib, uning asosida sirt faol modda olishning nazariy tadqiqi keltirilgan. Nazariy tadqiqotlar asosida olingan sirt faol moddalar anion aktiv sirt faol moddalar turkumiga kirib, toza va sifatli bilan ham ahamiyatli ekanligi yoritilgan.

Kalit so'zlar: charm va mo'yna sanoati, mezdra chiqindisi, ho'llash jarayoni, sirt faol modda, anion aktiv, yog' kislotalari, ishqor, kislota, yog'lash jarayoni.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕЗДРОВЫХ ОТХОДОВ КОЖЕВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА В ПРОЦЕССАХ ОБРАБОТКИ КОЖИ

Аннотация. Известно, что в кожевенно-меховой промышленности образуются отходы производства различного вида и состава. Это создаёт необходимость расширения повторного использования промышленных отходов. В статье исследуются возможности расширения повторного использования мездры, которая является отходом кожевенного производства. Определён состав выделенного мездрового жира и на его основе проведено теоретическое исследование получения ПАВ. На основании теоретических исследований поверхностно-активные вещества включены в категорию анионно-активных поверхностно-активных веществ и имеют важное значение по своей чистоте и качеству.

Ключевые слова: кожевенно-меховая промышленность, отходы мездры, процесс отмока, ПАВ, анионное активное вещество, жирные кислоты, щелочь, кислота, процесс жирования.

THEORETICAL RESEARCH OF USING FLESH WASTE OF THE LEATHER INDUSTRY WHICH TAKES IN LEATHER MAKING PROCESSES

Abstract. It is known that the leather and fur industry generates production waste of various types and compositions. This creates the need to expand the reuse of industrial waste. The article examines the possibilities of expanding the reuse of flesh fat, which is a waste from tanning production. The composition of the isolated flesh fat was determined and a theoretical study of obtaining surfactants was conducted on its basis. Based on theoretical studies, surfactants are included in the category of anionic surfactants and are important in their cleanliness and quality.

Keywords: leather and fur industry, flesh waste, soaking process, surfactant, anionic active substance, fatty acids, alkali, acid, fatliquoring process.

Kirish. Terini qayta ishlashda organik chiqindilarning aksariyati to'liq foydalanishga o'tgani yo'q, shuning uchun hali-hanuz axlatxonalarga tashlanadi va bu esa, oqsilning chirishi hisobiga atrof-muhitni sezilari darajada ifloslanishiga olib keladi. Shu kabi salbiy holatlarni bartaraf etish maqsadida charm sanoati chiqindilaridan qayta foydalanishga chuqur ahamiyat qaratmoq maqsadga muvofiqdir.

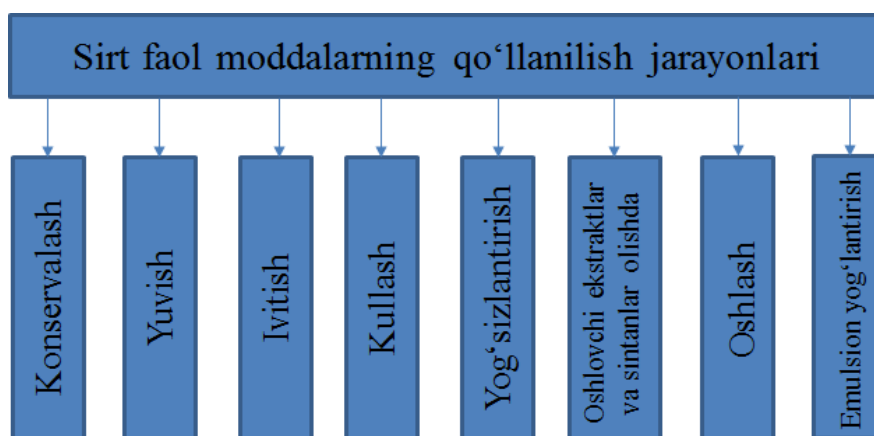
Charm ishlab chiqarishning tayyorlov jarayonlaridan biri hisoblangan mezdralash jarayonida ishlov berilayotgan xom ashyo turi hamda qo'llanilayotgan texnologiyaga bog'liq holda 30-50 % mezdra hosil bo'ladi [1,2].

Tadqiqot ishlarida oshlanmagan chiqindilardan medisina va kosmetikada foydalanish uchun materiallar olingan.

Yaponiyada spilkadan mustahkam kollagen membranalarini olinib, undan oziq-ovqat mahsulotlari uchun qadoqlovchi sifatida foydalangan [3]. Belarusiyada charm sanoati chiqindilarini uglertermik ishlov berish usuli ishlab chiqilgan bo'lib, bunda chiqindilar saqlagan 80 % xrom metallga o'tkazilib, qolgan 20 % dan xavfsiz shishasimon qotishma olinib, qayta ishlangandan so'ng qurilish materiali sifatida qo'llaniladi[4].

Olib borilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, charm va mo'yna sanoati ishlab chiqarish chiqindilaridan turli maqsadlarda foydalanish mumkin. Jumladan, mezdrash jarayonida hosil bo'ladigan mezdra chiqindilarini qayta ishlab ulardan charm sanoatining o'zi uchun sirt faol modda olish maqsad qilib belgilandi.

Asosiy qism. Sirt faol moddalar charm-mo'yna sanoatida keng qo'llaniluvchi kimyoviy modda bo'lib, ularning ba'zilar sanoatda muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan, sirt faol moddalarni qo'llash teri tarkibidagi yog'larni, iflosliklarni ketkazishda, derma bilan sochlarni susaytirishda, charmlarga gidrofoblik va boshqa bir qator xususiyatlar berish maqsadida qo'llaniladi. Sirt faol moddalar charm sanoatining qaysi jarayonlarida qo'llanilishi quyidagi rasmda keltirib o'tilgan (1-rasm).



1-rasm. Sirt faol moddalarning charm sanoati jarayonlarida qo'llanilishi

Sirt faol moddalarni ivitish jarayonida qo'llash teri tarkibidagi yog' moddalarini, iflosliklarni ketkazib, terining ho'llanishini ta'minlaydi va reaksiya qobiliyatining oshishiga yordam beradi. Kullash jarayonida sirt faol moddani natriy sulfidi bilan birgalikda qo'llash orqali sochning derma bilan bog'lanishini susaytiradi va jarayonning samarali borishiga imkon yaratadi [5].

Junsizlantirishdan keyin olib boriladigan yuvish jarayonlarida, yog' va iflosliklardan tozalash maqsadida ham quritish jarayonidan oldin sirt faol moddalar qo'llaniladi. Oshlash jarayonlarini olib borishdan oldin, sirt faol moddalarni yog'sizlantirish maqsadida qo'llash juda samarali hisoblanadi. SN-22SH va SN-22S sirt faol moddalari charm ishlab chiqarish jarayonlarida ho'llovchi-yog'sizlantiruvchi sifatida keng qo'llanilsa, SN-N7 hamda SN-23-50 moddalari mo'yna ishlab chiqarishda foydalaniladi [6].

Xorijlik olimlar tomonidan olib borilgan ilmiy-tadqiqot ishiga ko'ra, aminooksidlarni charm ishlab chiqarishning ivitish va kullash jarayonlarida qo'llash charmning xossalarini bir muncha yaxshilab, sifatli charm olishga va charmning yuza qismida g'ijimlar paydo bo'lishining oldini olishga yordam beradi. Yog'sizlantirish jarayonining turli xil usullarida esa, yog'sizlantirishning to'g'ri va puxta amalga oshirilishiga xizmat qiladi. Junni yuvish jarayonida aminooksidlar junni nisbatan yumshoq bo'lishini, shuningdek, uning oqlik va tozaligini ta'minlab beradi. Shu bilan birga, yaxshi biologik parchalanish xususiyatiga egaligi aminooksidlarning ahamiyatini oshiradi [7].

Tadqiqotchilar tomonidan ikki oksidli aminlar va bir oksidli yog' saqlagan aminooksidlarning anaerob va aerob biologik parchalanish xususiyatlari o'rganilgan bo'lib, bunda aerob biologik parchalangan CO₂ dan foydalanilgan. Tadqiqotlar natijasiga ko'ra, aminooksid asosidagi uchta sirt faol moddalar aerob sharoitda biologik yaxshi parchalanish xususiyatiga ega ekanligi, faqat alkilamidaminooksid anaerob sharoitda oson parchalanish xususiyatiga ega ekanligi ma'lum bo'ldi. Photobacteriumphosphoreum va Daphnia magna larga nisbatan toksinligi o'rganildi. EC(50) bakteriyasi 0,11 dan 11 mg/l gacha bo'lgan aminooksid asosidagi sirt faol moddalar toksin ta'sirga sezgirroq ekanligi aniqlandi. Eng past suv toksinligini yog'li amidoaminooksid moddasini ko'rsatdi [8]. Tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, mazkur moddalarni ishlab chiqarish jarayonlarida qo'llash nisbatan xavfsizroq hisoblanadi.

Xitoylik olimlar tomonidan tadqiq qilingan ishda bir qator noionogen qisqa zanjirli ftorli sirt faol moddalar (Fn-Fn, bu yerda n = 2, 4 yoki 6) tayyorlanib, xromlangan echki terisini yog'lash jarayonida

yordamchi modda sifatida qo'llanilgan. Ushbu noionogen qisqa zanjirli ftorli sirt faol moddalarning kimyoviy tuzilishi FTIS (Fure transformasion infraqizil spektroskopiya) bilan tavsiflanib, molekulyar og'irligi GPX (gel singuvchanlik xromotografiyasi) analizlari orqali aniqlangan. Sirt tarangligini o'lchash natijalarida bu uchta ftorli sirt faol moddalar mukammal sirt faollikni namoyon etdi. Fn-Fn turi va dozasi, shuningdek, yog'lash haroratining xromlangan echki terisini yog'lash xususiyatlariga ta'siri, olingan charmning yumshoqligi va fizik-mexanik xususiyatlari tekshirildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, charm massasiga nisbatan 1% da 40°C haroratda qo'llanilgan F4-F4, charmning umumiy xossalarini, yumshoqligi va fizik-mexanik xossalarini yaxshilanganligi uchun charm yarimmahsulotini yog'lash jarayonida qo'llash uchun eng optimal variant sifatida tanlab olindi. Bundan tashqari, Fn-Fn bilan ishlov berilgan charm kollagenining morfologiyasi va gidrofoblik xususiyatlari o'rganilib, charmni yog'lash jarayonida Fn-Fn qo'shilishi kollagen tolalarining ajralishiga yordam berishi va charm yuzasining suvga barqarorlik xususiyatini oshishiga yordam beradi. Yuqoridagilarni inobatga olgan holda shuni aytish mumkinki, noionogen qisqa zanjirli ftorli sirt faol moddalar charm sanoatida yog'lash jarayoni uchun qo'shimcha sifatida qo'llanilishi mumkin [9-10].

Neft-kimyo mahsulotlarini sintez qilish yo'li bilan olingan sirt faol moddalar bilan solishtirganda, o'simlik yog'idan olingan sirt faol modda ekologik tozaligi va yuqori darajadagi faolligi bilan ajralib turadi. Tadqiqot ishida dissimetrik gemini-sulfosuksinat sirt faol moddalari (DGSSFM) o'simlik yog'laridan sintez qilingan. Olingan mahsulot tuzilishi FT-IR (infraqizil yutilish spektirini hosil qilish orqali molekuladagi kimyoviy bog'lanishlarni aniqlash) va NMR (molekulalarning fizik va kimyoviy xossalarini aniqlash) tajribalari orqali tasdiqlangan. Tadqiqotlardan ma'lum bo'lishicha, DGSSFM moddasi sirt taranglik kuchini kamaytirish, yaxshi emulsiyalanish va namlanish xususiyatiga hamda yomon ko'piklanish xususiyatlarni ko'rsatdi. Mazkur modda yog'lovchilik xususiyatini ham namoyon etdi. Charmni yog'lantirishda DGSSFM ni yog'lovchi agent sifatida qirtirlangan charm massasiga nisbatan 8% ga qo'llanilganda samarali yog'lantirishga erishildi. Bu esa o'simlik yog'idan sintez qilingan DGSSFM ham sirt faol ham yog'lovchi modda sifatida qo'llash imkonini bergan [11].

Shuningdek, olimlar tomonidan metall moddalarning yog'sizlantirishda ikkilamchi spirtning etoksilangan noionogen sirt faol moddalarini xiralanish nuqtasiga va gidrofil-lipofil balans soniga ta'siri o'rganilgan. Unda ikkilamchi spirtning etoksilangan noionogen sirt faol moddalari 3, 7, 9, 12 va 20 molli nisbatlari olingan. Turli xil haroratda tekshirilganda, yuqori haroratda olib borilgan yog'sizlantirish jarayoni, past haroratda olib borilgan jarayonga nisbatan samarali natija bergan. Faqat 3 mol nisbatdagi sirt faol moddada qo'piklanish hodisasi kuzatilmagan. Ko'mir tarkibidan ushbu sirt faol modda metall moddalarini yog'sizlantirish jarayonida qo'llash uchun tavsiya etilgan [12].

Sirt faol moddalarning charm sanoatidagi ahamiyatidan kelib chiqib, charm sanoatidan chiqindi sifatida chiquvchi ikkilamchi mahsulotlardan sirt faol modda yaratishga qaror qilindi. Shu asosda, eng avvalo, xorijiy va mamlakatimiz olimlarining bu boradagi ilmiy-tadqiqot ishlari o'rganib chiqildi. Xususan, pokistonlik olimlar [13] tomonidan olib borilgan ilmiy-tadqiqot ishida kullash jarayondan keyin chiquvchi mezdradan charmga gidrofob xususiyat beruvchi sirt faol modda olingan. Ushbu moddani olish jarayonida, avval, mezdra toza suvda yuvilib, mezdra massasiga mos ravishda 2 % nisbatda ammoniy sulfat bilan mezdra tarkibidagi kuldan tozalangan. Ushbu jarayondan so'ng magniy oksidi va natriy gidrooksid bilan gidrolizlanib, 150-250 °C haroratda avtoklava jihozida 2 soat davomida jarayon olib borilgan. Keyingi bosqichda umumiy massa hosil qilmagan bo'laklar ajratib tashlangan, hosil bo'lgan quyuv massa sirt faol modda tayyorlashning keyingi bir necha bosqichlaridan o'tgan. Ushbu ilmiy-tadqiqot ishida charmlar uchun gidrofoblik xususiyati beruvchi SFMni chiqindi mahsulot mezdra tarkibidan olinishiga qaramay, jarayon o'ta murakkabligi va uzoq vaqt talab etish bilan uni qo'llashda qiyinchiliklar tug'diradi.

Shuningdek, yana bir tadqiqot ishida turli uzunlikdagi gidrofil guruhlar va lipofil guruhlariga ega bo'lgan polipeptid sirt faol moddalar kollagen gidrolizat polipeptidlaridan Shotten-Baumann reaksiyasi orqali sintez qilingan. Xrom saqllovchi charm chiqindilaridan kollagen gidrolizatining polipeptidlari ishqoriy ravishda gidroliz qilish orqali olingan. Fure transformasion infraqizil spektroskopiya polipeptid sirt faol moddalarning sintezi ijobiy natijalarni tasdiqladi. Bundan tashqari, sirt faol moddalarning sirt faolligi gidrofil va lipofil guruhlar uzunligining sirt tarangligi, ko'piklanuvchanligi, ko'pikning barqarorligi, namlanish qobiliyati va gidrofil-lipofil balansi qiymati kabi xususiyatlarga ta'sirini aks ettirish uchun sinovdan o'tkazildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, kollagen gidrolizatsidan tayyorlangan gidrofil guruhlarining uzunligi nisbatan kamroq bo'lgan sirt faol moddalar pastroq sirt tarangligiga va yaxshi ko'piklilikka, ko'pikning barqarorligiga va namlash qobiliyatiga ega bo'lib, ushbu sirt faol moddalarni namlovchi sifatida ishlatilishi mumkinligini ko'rsatadi. Aksincha, ko'proq uzunlikka ega bo'lgan lipofil guruhli sirt faol moddalarning sirt tarangligi sust va yomon ko'piklanish xususiyati, ko'pikning barqaror emasligiga va yaxshi

namlanmaslik xususiyatlarini o'zida aks ettirdi. Oleoil lipofil guruhining C=C bog'lanishining mavjudligi sirt tarangligini pasaytirdi. Kollagen gidrolizatidan tayyorlangan polipeptid sirt faol moddalar nafaqat o'zida xrom saqlagan charm chiqindilaridan samarali foydalanishga, balki atrof-muhitning ifloslanishini oldini olishga va charm sanoatining barqaror rivojlanishiga yordam berishi mumkin [14].

Dunyo miqyosida olib borilgan tadqiqot natijalari shuni ko'rsatmoqdaki, sanoat chiqindilaridan qayta foydalanish, nafaqat sifatli mahsulot ishlab chiqarishga imkon yaratadi, balki atrof-muhitga zaharli chiqindilarni chiqarilishining oldini oladi va bu ekologiya yoxshilanishiga olib keladi.

Oqsil va yog' saqlagan chiqindi mahsulot mezdra mahalliy charm va mo'yna ishlab chiqarish korxonalarida juda ko'p miqdorda hosil bo'ladi. Ulardan qayta foydalanish hisobiga mahsulot assortimentini kengaytirish bugungi davr talabidir.

Yuqoridagilardan kelib chiqib, yirik shoxli mol terilarni mezdralashda hosil bo'ladigan mezdra chiqindisi mahalliy korxonalardan keltirilib, laboratoriya sharoitida Sokslet apparatidan foydalanilgan holda mezdra tarkibidagi yog'ni ajratib olindi. Olingan mezdra yog'ining gazoxromotogramma usuli asosida kimyoviy tarkibi o'rganildi (1-jadval).

1-jadval.

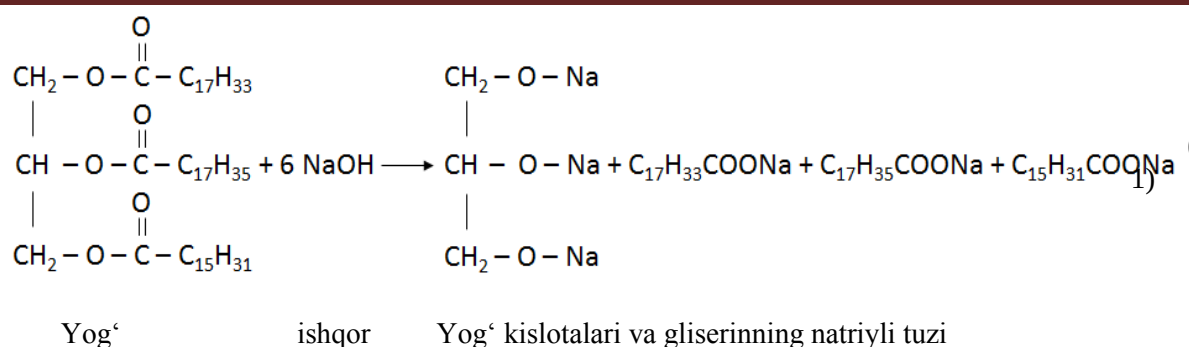
Sokslet apparatida olingan mezdra yog'ining kimyoviy tahlilidagi yog' kislotalari tarkibi

№	Yog' kislotalarining nomi	Mezdra yog'ining yog' kislotalari tarkibi, %
1.	Kaprin, 10:0	0,08
2.	Laurin, 12:0	0,08
3.	Miristin, 14:0	3,16
4.	Miristolein, 14:1	0,93
5.	Pentadekan, 15:0	0,34
6.	Palmitin, 16:0	28,45
7.	Palmitolein, 16:1	3,79
8.	Margarin, 17:0	0,74
9.	Geptadesen, 17:1	0,66
10.	Stearin, 18:0	14,69
11.	Olein, 18:1	39,48
12.	Elaidin (trans-9-oktadesen yog'i), 18:1	4,17
13.	Linol, 18:2	2,27
14.	Linolen, 18:3	0,58
15.	Araxin, 20:0	0,13
16.	Eykozen, 20:1	0,45
$\sum_{\text{to'yingan YoK}}$		47,67
$\sum_{\text{to'vinmagan YoK}}$		52,33

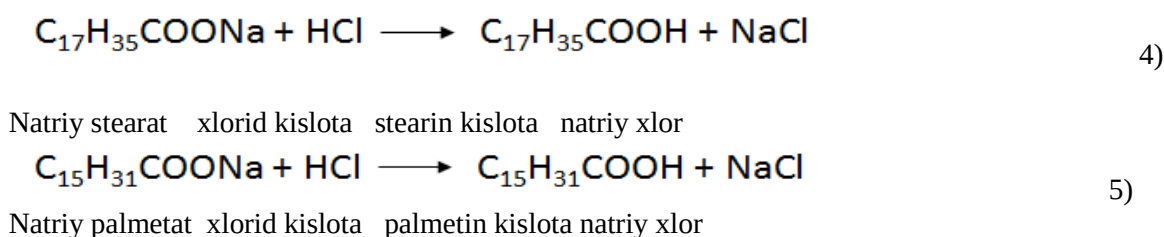
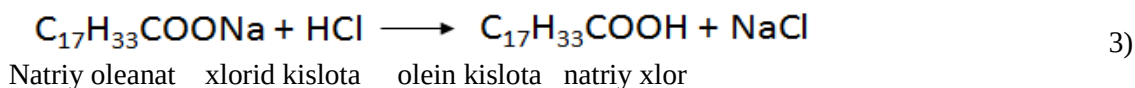
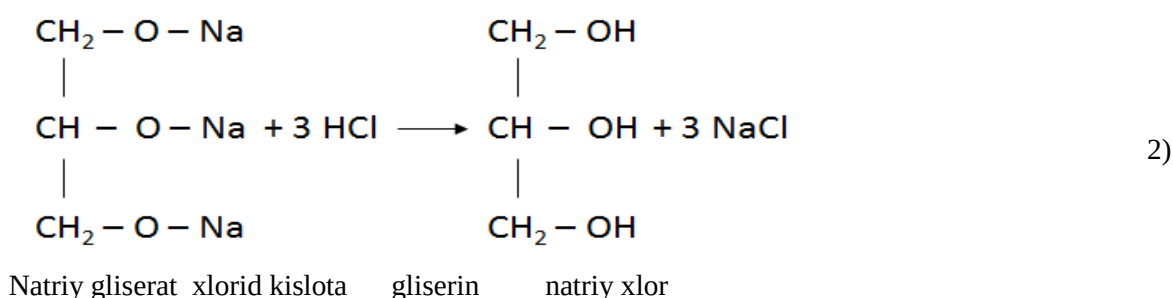
Tahlil natijalariga ko'ra, to'yingan yog' kislotalari miqdori 47.67 % va to'vinmagan yog' kislotalari miqdori 52.33 % ni tashkil etib, undan hosil bo'lgan yog' tarkibida eng ko'p miqdorda olein, palmitin, stearin yog' kislotalari mos ravishda 39.48, 28.45 va 14.69 % ni tashkil etdi. Yog'larning kimyoviy tarkibini aniqlash, mezdra yog'idan nafaqat yog'lovchi modda, balki sirti faol modda olish imkonini mavjudligini ko'rsatdi.

Yog'lar - gliserin va yog' kislotalarining murakkab efiri hisoblanadi. Sirt faol moddalar olish uchun dastlab yog' tarkibidan yog' kislotalarini ajratib olinadi. Buning uchun yog'ni ishqoriy muhitda gidrolizga uchratiladi.

Yog' kislotalari tarkibi to'yingan va to'vinmagan yog' kislotalari aralashmalaridan tarkib topganligi uchun, yog'ning tarkibida ko'p miqdorda mavjud bo'lgan yog' kislotalarining asosiy vakillari asosida dastlabki reaksiya mexanizmlari tuzildi:

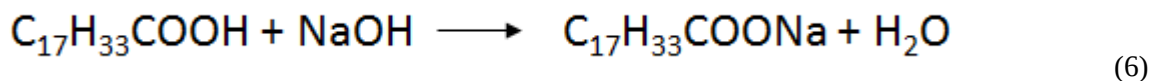


Bunda gliserin va yogʻ kislotalarining natriyli tuzi hosil boʻladi.

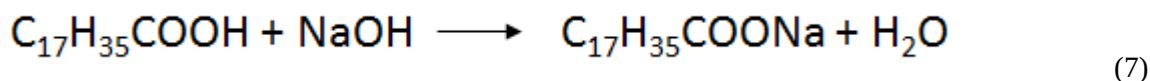


Hosil boʻlgan gliserin va yogʻ kislotalarining natriyli tuzi aralashmasiga kislotaligi yuqori boʻlgan kislota taʼsir ettirganda, gliserin, natriy va yogʻ kislotalari ajralib chiqadi. Bu aralashma tarkibidagi yogʻ kislotalari suvda erimaydi, gliserin va hosil boʻlgan natriy xlor suvda eriydi. Bunda aralashma ikki qismga ajraladi va ajratish voronkasida ajratib olinadi.

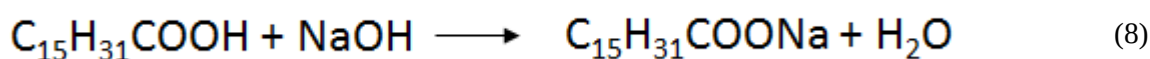
Bu yogʻ kislotalaridan vodorod xloridni kislotaligi yuqori boʻlganligi sabab yogʻ kislotalaridan metallni oladi. Natijada erkin yogʻ kislotalari hamda natriy xlorid hosil boʻladi.



Olein kislota natriy gidroksidi natriy oleat suv



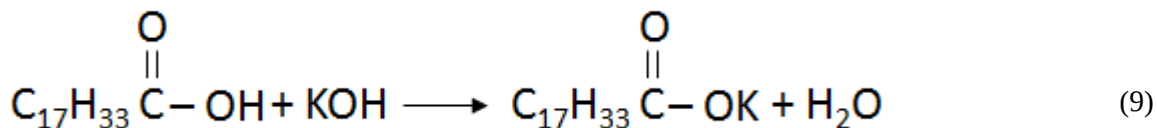
Stearin kislota natriy gidroksidi natriy stearat suv



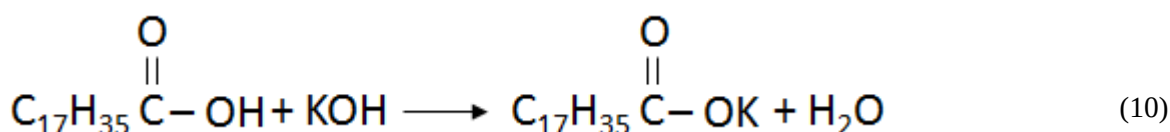
Palmyetin kislota natriy gidroksid natriy palmitat suv

Yogʻ kislotalarning kislotaligi suvdan kuchli boʻlganligi sababli shu kislotalarning natriyli tuzi hosil boʻladi.

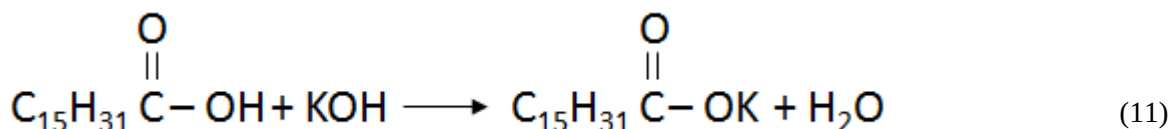
Odatda yuvuvchi vositalar gliserin va yogʻ kislotalarining natriyli tuzidan quyuq eritma (sovun yelimi) koʻrinishida hosil boʻladi. Aralashmadan sof yogʻ kislotalarini ajratib olish, toza sirt faol moddalarning hosil boʻlishiga olib keladi. Jumladan, natriy gidrooksida ishtirokida olingan sirt faol moddaning agregat holati qattiq boʻlib, anionaktiv SFMLar [15] turiga kiradi.



Olein kislota kaliy gidroksid kaliy oleat suv



Stearin kislota kaliy gidroksid kaliy stearat suv



Palmetin kislota kaliy gidroksid natriy palmiat suv

Kaliy gidroksidi bilan ishlov berilganda hosil boʻladigan mahsulotning agregat holati yumshoq yoki suyuq boʻlib, qoʻllanilishi jihatidan hammabop yoki qulay hisoblanadi va anionaktiv sirt faol moddadir.

Xulosa. Olib borilgan nazariy tadqiqotlar shuni koʻrsatdiki, charm sanoati chiqindisi hisoblangan mezdrani qayta ishlash natijasida mezdradan foydalanish assortimentini kengaytirish bilan bir qatorda, toza hamda sifatli mahsulot hisoblangan sirt faol moddalar olish mumkin. Shu bilan birga, bu teri chiqindisini charm sanoatida qayta foydalanish va chiqindisiz texnologiya yaratish imkoniyatini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Бенькевич К., Гжегожевская У. Использование коллагеновых волокон для медицинских целей // Кожевенно-обувная промышленность. 1984. № 12. С. 15.
2. Богданова И. Е. Современные направления переработки коллагенсодержащих отходов кожевенного производства // Кожевенно-обувная промышленность. 2007. № 2. С. 30–31.
3. Сакулина А. А., Левина Н. Т. Использование свиного гольевого стилка для производства белковой колбасной оболочки // Кожевенно-обувная промышленность. 1998. № 8. С. 25.
4. Использование и утилизация хромсодержащих отходов кожевенного производства / О. С. Комаров [и др.] // Современные направления развития производственных технологий и робототехника: материалы Междунар. конф., Могилев, 22–23 апр. 1999 г. / Могилев. машиностроитель- ный ин-т. Могилев, 1999. С. 235.
5. M.B.Shamsiyeva. Tarmoq kimyoviy materiallari. Darslik. Buxoro-2024. 11-12 betlar.
6. Каталог химических препаратов для кожевенной промышленности ООО “Шебекинская индустриальная химия” новинки и лидеры продаж. Шебекино, 2022. 90 стр.
7. F.Nevzer, H. Sarac, A. Volkan, I. Reetz. New Generation Emulsifiers for the Leather Industry. XXXII. Congress of IULTCS May 29th–31th 2013 Istanbul/TURKEY. <https://www.researchgate.net/publication/280156521>

8. García, M.T., Campos, E., Ribosa, I., 2007, *Biodegradability and ecotoxicity of amine oxide based surfactants*, *Chemosphere* 69(10):1574-1578. doi: 10.1016/j.chemosphere.2007.05.089. Epub 2007 Jul 12.
9. Y. Shen, Y. Jin, Sh. Lai, L. Shi. *Nonionic Short-Chain Fluorinated Surfactants in the Fatliquoring of Chrome-Tanned Goat Skin*. *Journal of the American Leather Chemists Association* 115(7):255-262. June 2020. DOI:10.34314/jalca.v115i7.3833
10. M. Shamsieva, Kh. Makhammadieva. *Leather obtained on the basis of fuzel oil and crude fatty acids of cotton soapstock - A fattening agent for fatliquoring leather*. *Proceedings of the III International Conference on Advances in Science, Engineering, and Digital Education*. AIP Conf. Proc. 2969, 060020-1–060020-7; <https://doi.org/10.1063/5.0187471>.
11. Jianzhong M., Jianjing G., Hongdi W., Bin L. *Dissymmetry Gemini sulfosuccinate surfactant from vegetable oil: a kind of environmentally fatliquoring agent in leather industry*. *ACS Sustainable Chemistry & Engineering* 5(11). September 2017. DOI:10.1021/acssuschemeng.7b02662
12. Su-Byung Jeon, Byung-Ki Son, Ji-Won Choi, Injoon Son. *Degreasing efficiency of electroplating pretreatment process using secondary alcohol ethoxylate as nonionic surfactant*. *Appl. Sci.* 2022, 12, 11285. <https://doi.org/10.3390/app122111285>
13. Hafiz R. N., Beena, Z., Hanny O., Uzma N. and Barkat A.S. *Preparation of Protein based Surfactants from Leather Waste Fleshings and their Reutilization in Leather as a Water Resisting Agent*. *Journal of the chemical society of Pakistan* 34(5):1130-1133, October 2012.
14. Y. Li, D. Sun, Ch. Jiang, H. Ding. *Preparation of Polypeptide Surfactants Using Chromium-Containing Waste Leather: Effect of Hydrophilic and Lipophilic Groups*. *Journal of Surfactants and Detergents* 24(6). April 2021. DOI:10.1002/jsde.12513
15. Вережников В.Н., Гермашева И.И., Крысин М.Ю. *Коллоидная химия поверхностно-активных веществ. Учебное пособие для вузов*. Санкт-петербург. Москва.Краснодар 2015. 304 с.

ЎТЛОҚИ-АЛЛЮВИАЛ ТУПРОҚЛАРНИНГ МЕЛИОРАТИВ ҲОЛАТИНИ ЎРГАНИШ

Тўхтаева Гулшан Пўлотовна,
“ТИҚХММИ” МТУ Бухоро табиий
ресурсларни бошқариш институти, ассистенти
gulshantoxtayeva7@gmail.com

Шодиева Сурайё Ниёзовна,
Иброҳим Барака хк. иш юритувчиси
s9978139@gmail.com

Мирзамуротов Мишод Фарход ўғли,
“ТИҚХММИ” МТУ Бухоро табиий ресурсларни бошқариш институти талабаси
mirzamuradovmirshod4@gmail.com

Аннотация. Сугориладиган ўтлоқи - аллювиал тупроқлари қўнғир бўз, чўлли қумли ва сур тусли тупроқлардан иборат. Гидрогеологик мелиоратив шароити Бухоро вилоятида сугориладиган ер майдонларининг ўзига хос хусусиятларига эга. Тупроқ таркибидаги тузларнинг тўпланишида асосий кўрсаткич, сизот сувларининг жойлашиш чуқурлиги, даладан сувнинг буғланиши ҳисобланади. Бухоро вилоятининг қишлоқ хўжалиги учун сизот сувлари сатҳининг йил давомида ўзгариб туриши муҳим аҳамиятга эга.

Калит сўзлар: ўтлоқи-аллювиал тупроқлар, кучсиз ва ўрта шўрланган тупроқлар, тупроқларнинг таркибида гипс учраб туриши, механик таркиби, сизот сувлар, сугориладиган тупроқлар, гидрогеологик мелиоратив шароит.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕЛИОРАТИВНОГО СОСТОЯНИЯ ОРОШАЕМЫХ ЛУГОВО-АЛЛЮВИАЛЬНЫХ ПОЧВ

Аннотация. Лугово-аллювиальные почвы орошаемый представлены буро-серыми, пустынными песчаными и бурыми почвами. Гидрогеологические мелиоративные условия имеют специфические особенности орошаемых земель Бухарской области. Основным показателем накопления солей в почве является глубина просачивания воды, испарение воды с поля. Для сельского хозяйства Бухарской области важно то, что уровень фильтрационных вод меняется в течение года.

Ключевые слова: лугово-аллювиальные почвы, слабо-и среднесоленные почвы, наличие гипса в составе почв, механический состав, фильтрационные воды, орошаемые почвы, гидрогеологические условия улучшения.

STUDY OF THE RECLAMATION OF IRRIGATED GRASSLAND-ALLUVIAL SOILS

Abstract. Meadow-alluvial soils in consist of brown-gray, desert sandy and brown soils. Hydrogeological reclamation conditions have specific characteristics of irrigated land areas in Bukhara region. The main indicator of the accumulation of salts in the soil is the depth of seepage water, evaporation of water from the field. It is important for the agriculture of Bukhara region that the level of seepage water changes throughout the year.

Key words: meadow-alluvial soils, weak and moderately saline soils, presence of gypsum in the composition of soils, mechanical composition, seepage waters, irrigated soils, hydrogeological reclamation conditions.

Кириш. Тупроқларнинг шўрланиш даражаси Бухоро вилоятида ҳам анчагина кучли бўлиб, вилоятнинг Ромитан, Пешкў, Олот, Қорақўл, Жондор ҳамда Бухоро туманларида шўрланиш даражаси юқори бўлиб ҳисобланади. Бухоро вилояти шароитида ўтлоқи - аллювиал тупроқлари қўнғир бўз, чўлли қумли ва сур тусли тупроқлардан иборат. Гидрогеологик мелиоратив шароити Бухоро вилоятида сугориладиган ер майдонларининг ўзига хос хусусиятларига эга.

Асосий қисм. Бухоро вилояти Ромитан туманининг шўрланишга учраган суғориладиган тупроқлари кучсиз ва ўрта шўрланган бўлиб, механик таркиби бошқа туманлардан фарқ қилади. Тупроқлар асосан оғир қумоқли, қумоқли-қумли ва лойли механик таркибга эга.

Ромитан тумани суғориладиган тупроқларини шўрланганлик даражасига кўра тавсифи

Шўрланиш даражаси	Жами суғориладиган ерлар, га	Шўрланмаган, га	Кучсиз, га	Ўртача, га	Кучли, га	Жуда кучли, га
Майдони, гектар тартибда	22948,0	0	13841,5	7103,0	1408,9	594,6
Майдони, % тартибда	100	0	60,32	30,95	6,14	2,6

Ромитан туманида жами суғориладиган ерлари 22948,0 гектар бўлиб, шундан шўрлангани кўра кучсиз шўрлангани 13841,5 гектар, ўртача шўрлангани 7103,0 гектар, кучли шўрлангани 1408,9 гектар, жуда кучли шўрлангани 594,6 гектар майдонни ташкил этади.

Ўтлоқи-аллювиал тупроқларининг характерли томони шундаки, уларнинг таркибида гипс учраб туради. Юқорида келтирилган жадвалдан кўриниб турибдики, гидроморф тупроқларда ер ости сизот сувларининг яқинлиги асосан амал даврида 2,20-2,50 метрни ташкил қилгани, шўрланишга сабаб бўлади.

Экинларни суғориш тартиби тупроқнинг туз режимига, яъни тузларнинг миқдори сизот сувлар таркибига ҳамда уларнинг типлари суғориладиган майдонларда катта таъсир кўрсатади.

Шўрланиши ва иккиламчи шўрланишига таъсир этувчи омилларнинг суғориладиган тупроқларда асосийси, мунтазам суғориш ишларини олиб борилиши ва сизот сувларнинг ер ости ҳаракати ҳисобланади. Суғоришга айрим ҳолларда меъёрдан ортиқ сув сарфланади. Суғориш жараёнида сизот сувларнинг ҳаракати бошқарилмайди. Ерларни қайта шўрланишига сабаб, ўртача ва кучли минераллашган сизот сувлари ер юзасига яқин жойлашганда илдиз тарқалган фаол қатламида кўп туз тўпланади. Ҳар бир ҳудуднинг сизот сувлари тартибини ва уларнинг минераллашганлик даражаларини ўрганиш муҳим. Ер ости сизот сувларини механик таркиби ҳамда суғориш жараёнида тупроқ типи бошқа хоссаларига боғлиқ ҳолда сув сарфланса, бошқариш тизимли йўлга қўйилса, тупроқларнинг шўрланиши туманларда учрамайди.

Тупроқ таркибидаги тузларнинг тўпланишида асосий кўрсаткич, сизот сувларининг жойлашиш чуқурлиги, даладан сувнинг буғланиши ҳисобланади. Бухоро вилоятининг қишлоқ хўжалиги учун сизот сувлари сатҳининг йил давомида ўзгариб туриши муҳим аҳамиятга эга.

Бухоро вилояти ерлари майдон сифатида эски суғориладиган, катта майдонини асосан экин сифатида пахта экини эгаллаган. Шунинг учун тупроқнинг сув-физик хусусиятларини билмасдан амалга ошириб бўлмайдиган рационал суғориш режимларини ишлаб чиқиш, сув-физик хоссаларини тадқиқотларини ўрганиш биринчи даражали вазифадир. Тупроқ пойдеворини қўйиш амалиёти шуни кўрсатдики, ҳажм ва солиштира оғирлик, умумий ғовақлик каби хусусиятларни ўрганиш билан бир қаторда чегараланган дала нам сизими (ЧДНС) ва тупроқ горизонтларидаги намлик захирасини аниқлаш долзарб бўлиб қолди.

Бундан ташқари, олинган маълумотлардан қишлоқ хўжалик экинларининг суғоришда озуқа режимларини ишлаб чиқишда ва мелиоратив лойиҳалашда фойдаланиш мумкин.

Тупроқнинг физикавий хоссаларига, унинг структураси, сув, ҳаво, иссиқлик, умумий физик-механикавий хоссалари киради. Тупроқнинг физикавий хоссалари кўплаб омилларга, жумладан, тупроқнинг қаттиқ, суюқ, газсимон қисми ва тирик фазалари таркиби, улар нисбати ва ўзаро таъсири ҳамда динамикаси сингарилар билан бевосита боғлиқдир.

Ўзанинг амал даврида ер ости сувлари сатҳининг ўртача бўлиши билан тажриба учун сув сарфининг тўлиқ бўлмаганлигини А.Н.Костяковнинг тенгламасидан фойдаланиш мумкин

$$M = E - (10 \cdot M \cdot \mu \cdot \Delta W + W_{gr} - W_f), \quad m^3/га,$$

бу ерда E – сув истеъмоли, $m^3/га$;

μ – ёғиндан фойдаланиш коэффициенти;

P – вегетация давридаги ёғин миқдори, мм;

ΔW – ўсимлик илдиз қатлами наmidан фойдаланадиган сув ҳажми, $m^3/га$;

W_{gr} – фаол қатламга сизот сувларидан қирим сув ҳажми, $m^3/га$;

W_f – суғориш сувининг ер усти ва фаол қатлам остига бўлган ташлама-исрофи, $m^3/га$;

Сув истеъмоли элементларини ҳисоблаш учун тупроқнинг бир метр қатлами қабул қилинди.

Сув истеъмоли коэффициенти - бу сув истеъмоли қийматларининг пахта ҳосилига нисбати:

$$E = \sum (E - P), \quad m^3/га,$$

Бу ерда $E = 0,458 \cdot \gamma \cdot \sum T \cdot (t + 17,8)$ - мазкур ойда ялпи буғланган сув, мм;

P - мазкур ойда ёққан ёмғир миқдори, мм;

γ - экин томонидан сувни сарфлаш жадаллиги коэффициенти;

$\sum T$ – мазкур ойда куёшли соатларнинг миқдори, йиллик миқдордан % ҳисобида; t – ҳавонинг ўртача ойлик ҳарорати, $^{\circ}C$.

Тупроқнинг механик таркиби суғориладиган деҳқончилик шароитида муҳим аҳамиятга эга. Тупроқнинг суғориш тартиблари элементларини белгилашда тури, механик таркиби, морфологик тузилиши, агрофизик (тупроқ хажм ва солиштира массаси ҳамда ғоваклиги) сув хоссалари, намлик миқдори, чекланган дала нам сифими, сув ўтказувчанлиги ва сизот сувининг капилляр найчалари орқали пастдан юқорига кўтарилишининг ҳамда минерал озиқа миқдорлари ҳам тупроқнинг таркибидаги органик моддалари ўсимликни сув билан таъминлашда катта аҳамиятга эга. Соз тупроқлар кумлоқ ва кумли тупроқларга нисбатан ўсимликлар учун озиқа кул моддаларни кўпроқ сақлайди. Тупроқнинг механик таркиби синдириш қобиляти, ерга чириндининг ва озиқ моддаларнинг тўпланишида ҳам муҳим рол ўйнайди. Тупроқнинг қуйи қатламларига тушиб борган сари оч тусли кул ранг, қуруқ донадор, ўрта кумоқ ва унумдор соз тупроққа ўзгариб бориши ва ҳайдалма қатлам остида агроирригацион ётқизиклардан ташкил топган. Кул ранг тупроқнинг намлиги ошиб борганлиги сабабли тупроқнинг зичлашиб бориши ҳам кузатилди. Механик таркибига кўра, ерга ишлов бериш тизимида ўғитлаш меъёри, дала ишларининг муддатлари белгиланади. Тупроқнинг ҳаво ва иссиқлик режимлари, сув, озиқа, экинларни суғориш меъёрлари, муддатлари ва суғориш сонлари, ерга ишлов бериш жараёнида тупроқнинг механик таркибини иноватга олган ҳолда амалга оширилади. Структурасиз оғир тупроқлар ноқулай физик ва физик-механик хоссаларига эга. Тупроқнинг механик таркиби турли хил катталиқдаги тупроқ заррачаларнинг умумий миқдори 0,01 мм билан белгиланади (1 мм.дан $<0,001$ мм заррачалар). Тажриба натижаларида тупроқнинг қатлами (0-30 см) да зичланган ўрта кумоқ. Н.А.Качинскийнинг классификацияси бўйича тупроқнинг механик таркиби баҳоланди.

Тупроқнинг механик таркиби бўйич Смирнова Л.А. (2005), ғўзанинг ўсиши, ривожланиши ва юқори ҳосил олинганлигини исботлаган, бунда тупроқнинг кичик кесакли ва майда заррачали структуралар миқдори 15,4-21,1 фоиз бўлгани, типик бўз тупроқларда агрегатлар ўлчами 5-1 мм бўлганда намликнинг буғланишига сарфланган энг кам буғланиши. Механик таркибли тупроқлар унумдорлик бўлганлиги ўсимликларни озиқлантириш бўйича агротехник тадбирлар олиб борилган. Тупроқда ўсимлик ҳаёти учун зарур бўлган сув ва минераллар мавжуд, ғўза ҳам тупроқдан оксилларни, ёғларни, витаминларни, ўсиш моддаларини ўзлаштиради, улар ўсимликнинг ўсиши ва ҳосили учун зарурдир. Сув тупроқдан минералларни олиши, ўтказувчанлик тизими орқали озиқа моддаларининг узлуксиз оқими, уруғларнинг униб чиқиши, фотосинтез, эластиклик, ҳужайра шакли учун зарурдир. Сув ўсимликларнинг ҳаётий фаолиятини белгиловчи муҳим омил ҳисобланади. Тупроқдан илдишлар орқали сув ва унда эриган минерал тузлар ўсимликларга киради натижада минерал озиқланиш содир бўлади. Энг муҳими, ўсимлик азот, калий ва фосфорга муҳтож.

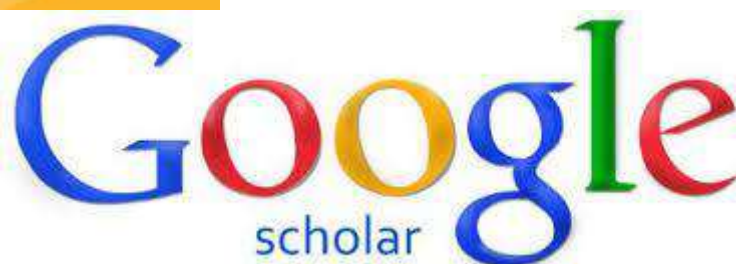
Хулоса. Шўрланган тупроқларда ўсимликлардаги фосфор миқдори асосан тупроқдаги мавжуд шакллари таркиби билан белгиланади, озиқлантириш шароитлари яхшиланиши билан ортади. Тупроқ унумдорлиги асосан фосфор, калий ва азотнинг мавжуд шакллари миқдори билан белгиланади. Фосфор кишлок хўжалиги экинлари ҳаётида жуда муҳим рол ўйнайди. Кўпгина биокимёвий жараёнлар фақат унинг иштирокида амалга оширилади.

АДАБИЁТЛАР:

1. Костяков А.Н. Основы мелиорации. Сельхозгиз, Москва. 1960, 411. С.
2. Вильямс В.Р. Собранные сочинения, том VII.Травопольная система земледелия. Изд., с/х литературы, Москва, 1951, 420 с.
3. Чаповская Е.В. Дрожжина Т.М.Исламов И. «Экономия времени и труда» Ж. с/х Таджикистана, 8,1973, 55-56 с.
4. Исломов И., Тухтаева Г.П. «Режим орошения хлопчатника сорта Бухара – 8 в условиях аллювиально – луговые почвы Бухарской области» Хоразм, 2021.

5. Kabildjanov Alexander, Bozorov Elmurod, Okhunboboyeva Charos, Tuhtaeva Gulshan. «Intellectualization of Decision Making Support in Tasks of Optimization of Complex Technical Systems based on Anfis Neuro-Fuzzy Network» *Annals of the Romanian Society for Cell Biology* 2021.

6. A Anarbaev, O Tursunov, R Zakhidov, D Kodirov, U Vakhidov, E Bozorov, G Tuhtaeva, and A Babaev «Determination the installation efficiency of the evaporative air cooling in the greenhouse by temperature-moisture regime» *ICECAE* 2020.



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
29.10.2024 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara,
K.Murtazayev street, 344