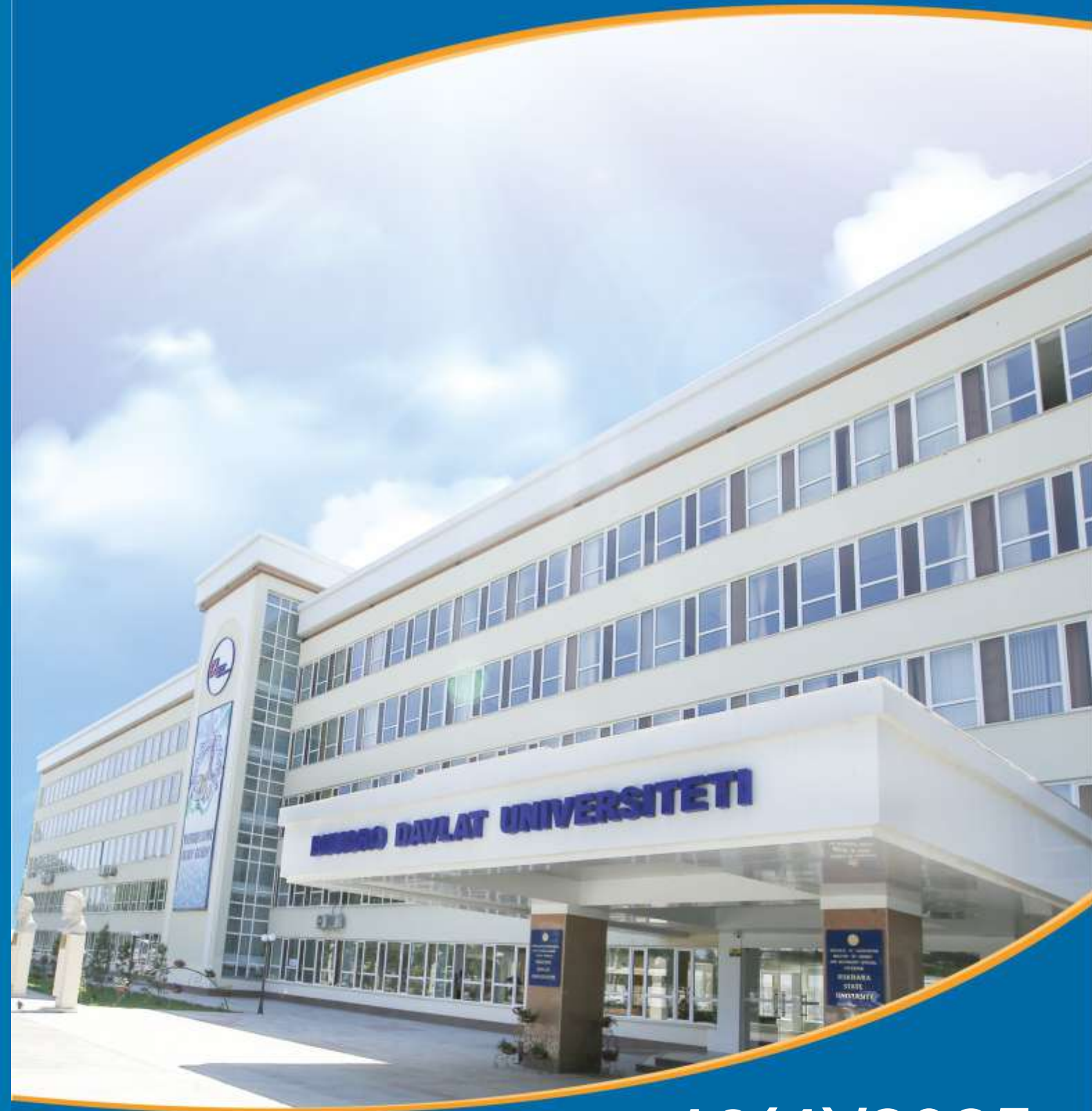




BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

10(4)/2025



10(4)/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2025, № 10, oktabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), dotsent

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor

Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

SERIYA: МАТЕМАТИКА

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ: Д.К. ДУРДИЕВУ – 60 ЛЕТ		3
Абдуллаев Ж. И., Муйдинова Ш. Н.	О существовании собственных значений оператора Шрёдингера системы трёх бозонов на решётке	7
Болтаев Х.Х.	Пространства L^2 для возрастающих последовательностей вещественных конечных подфакторов	15
Расулов Т.Х., Акрамов И. И.	Спектральное вложение для операторных матриц относительно рафинирования разложения	25
Akramov I.I., Rasulov T.Kh.	Enhancing the spectral deferred correction method using AI-based initial guesses	32
Журакулова Ф.М.	Принцип Бирмана-Швингера для операторной матрицы третьего порядка	38
Bakhronov B.I., Juraeva V.B.	On the spectrum of the tensor sum of Friedrichs models	43
Маматов Т.Ю.	Метод конечных элементов решения дробно-дифференциального уравнения	48
Ergasheva N.Sh., Shomurodov N.A., Gaffarov I.I., Zaripov B.Sh., Tojirov G.F.	Elastik muhitda joylashgan silindrik qobiqda nostatsionar to'liq difraksiyasi	55
Норматов Э.П.	Периодические гармонические функции на дереве Кэли	60
Akramov I.I.	Convergence properties of non-standard Monge-Ampère measure	64
Boltayev Z.I., Namozov J.Sh., Abloqulov Sh.Z., Sabirova R.A., Ruziyev T.R.	Kichik massa osilgan to'rtburchakli deformatsiyalanuvchan plastinkaning erkin tebranishlari	74
Durdiev D.K., Rajabova M.O.	Determining a source function in the mixed parabolic-hyperbolic equation with characteristic type change line	82
Jumaev J.J., Abdullaev B.R.	Investigation of an integro-differential pseudoparabolic equation with nonclassical boundary conditions	86
Khaydarov Z.	Conditions on existence of resonances in Hamiltonian system	92
Odinaev R.R.	The vibration equation of a beam with initial conditions involving higher-order time derivatives	104
Qudratov A.E.	Dinamik so'ndirgichlar o'rnatilgan sterjenning ko'ndalang tebranishlari	110
Turdiev Kh.Kh.	Uniqueness-solvability of the initial boundary value problem for the time fractional diffusion equation in a bounded domain	116
Turdiyev H.H., Rashidov R.R.	Yuklangan bir o'lchamli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala	121
Turdiev Kh.Kh., Kholikov S.Kh.	On the uniqueness of the solution of the initial boundary value problem for the diffusion equation with piecewise-continuous time delay	124
Subkhonova Z.A.	The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with a time-fractional derivative	132

Болтаев З.И., Хожиев А.Х., Махмудова Д.М., Бутунов Ж., Гаффарова Р.И.	Осесимметричные волны в вязкоупругих двухслойных цилиндрических оболочках с заполнителем	137
Пардабаев М., Мухаммадиева М.	Пороговые резонансы и асимптотика собственных значений дискретного билапласиана на трёхмерной решётке	146
Рахматов Р.Р.	Расчёт действия волны Релея на трубопровод (длинный упругий стержень), вложенный в упругой среде	151
Сафаров Ж. Ш.	Решение одного интегро-дифференциального уравнения дефокусации	159
Суяров Т.Р., Карординов С.Р.	Обратная задача об определении функции времени в правой части гиперболического уравнения с переменными коэффициентами	164
Хасанов И.И.	Начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка	172
Asrorov D.U.	On the classification of two-dimensional flexible algebras over arbitrary fields	177
G'ulomov U.H.	Iqtisodiy nazariyada differensial hisobning roli va ahamiyati	183
Kucharov R.R., Pardayev Sh.A., Arzikulov G.P.	On the dynamics of 1-Lipschitz functions in the context of p -adic number theory	188
Xolikov S.X., Qodirova M.Z.	Eyler formulasining matematika va fizika fanlaridagi ba'zi bir tatbiqlari	197
G'aniyev D.M., Abdumannonova S.K.	Turg'un qonunlarning xarakteristik funksiyalari haqidagi teorema	201
Sabirova R.A., Mirzoyeva G.T., Ruziyev T.R., Ibodov N.M., Jumayeva A.A.	Elastik muhitdagi ideal suyuqlik bilan to'ldirilgan silindrik qatlamning xos tebranishi	206
Мирсабурова Г.М.	Вывод интегрального уравнения Винера-Хопфа и вычисление его индекса	211
Umirqulova G.H.	Fridrixs modellari oilasiga mos Fredgolm determinantining asosiy xossalari	218
Тошева Н.А.	Аналог уравнения Вайнберга для семейства операторных матриц третьего порядка	223
Шарипова М.Ш.	Соотношения для спектра операторной матрицы третьего порядка	229
Усмонов Б.З.	Анализ аналога задачи Геллерстедта для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа	235
Неъматова Ш. Б.	Применение принципа Бирмана-Швингера для 3×3 операторной матрицы на нецелочисленной решётке	241
Алимова В.Б.	Влияние параметров смешанной задачи для гиперболической системы с нелокальными характеристическими скоростями на дискретную функцию Ляпунова	246
Маматов Ш.К., Усмонов Б.З., Улугбекова А.У.	О нетеровости сингулярных интегральных операторов с растягивающим сдвигом в обобщённых пространствах Гельдера	254

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ: Д.К. ДУРДИЕВУ – 60 ЛЕТ

10 октября 2025 года исполняется 60 лет известному математику, профессору, доктору физико-математических наук, заведующему Бухарским отделением института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, профессору Бухарского государственного университета Дурдимуроду Каландаровичу Дурдиеву.

Его родители – Дурдиев Каландар и Дурдиева Пулатгул – были тружениками колхоза имени Навои Алатского района Бухарской области. Они воспитали своего сына трудолюбивым, целеустремлённым и исключительно порядочным человеком.

В 1972 году Дурдимурод Каландарович пошёл в первый класс средней школы № 12 имени Фурката Алатского района. Учёба в 9–10 классах, по его признанию, стала поворотным моментом в его профессиональной жизни: именно тогда в его жизни открылся «мир увлечённости наукой».

Учитель математики Ёшузак Тухтаев и учитель физики Чори Очилов, а также их коллеги сыграли важную роль в формировании в школе атмосферы дружеской конкуренции. Благодаря этому у обычных, в целом, подростков успешно развивались интерес к науке, стремление к познанию нового и навыки самостоятельного, творческого мышления. Интерес к математике и физике, возникший ещё в школьные годы, впоследствии привёл его к научной деятельности в сфере высшей математики.

В 1982 году, окончив школу с золотой медалью, Д.К. Дурдиев поступил на отделение прикладной математики факультета прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета (ныне – Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека). «Учёба в университете стала для меня своего рода продолжением школы – только на новом, более высоком уровне, – вспоминал будущий учёный. С одной стороны – высококлассные, требовательные преподаватели, с другой – целеустремлённые, ориентированные на учёбу студенты».

После службы в армии в 1983–1985 годах он продолжил учёбу в том же университете. В 1986 году Д.К. Дурдиев перевёлся на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета. С теплотой и благодарностью Дурдимурод Каландарович вспоминает, как в этом университете вели занятия выдающиеся математики и талантливые педагоги: М.М. Лаврентьев, С.К. Годунов, В.Г. Романов, Б.Н. Врагов, А.Б. Кажихов, Г.В. Демиденко, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин и другие. Особенно он отмечает великолепные спецкурсы, «в которых обучали самым современным методам теории некорректных и обратных задач для дифференциальных уравнений», которые читали М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В.Г. Яхно, С.И. Кабанихин.

Студенческая, как и школьная, жизнь проявила лучшие черты характера Д.К. Дурдиева – гармоничное сочетание отличной учёбы, помощи однокурсникам, активной исследовательской работы и яркой гражданской позиции. Особенно выделялись его организаторские способности: три года подряд – в 1987, 1988 и 1989 годах – он был командиром студенческого строительного отряда «Лучо» при Новосибирском государственном университете. Под его руководством отряд, сформированный из студентов университета, в летние каникулы участвовал в строительных работах в Якутии, на Дальнем Севере России.

Д.К. Дурдиев окончил Новосибирский государственный университет в 1990 году. В том же году он успешно сдал вступительные экзамены и был принят в аспирантуру при этом университете. Свою научную деятельность будущий учёный начал ещё в студенческие годы, занимаясь исследованиями под руководством выдающегося математика, лауреата Государственных премий, члена-корреспондента РАН (впоследствии академика), профессора В.Г. Романова. Ранние научные работы Д.К. Дурдиева были посвящены обратным задачам для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа – одному из новых направлений в теории обратных задач для уравнений математической физики. В 1992 году, Д.К. Дурдиев успешно защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения – на тему «Обратные задачи для гиперболических уравнений с памятью» на специализированном совете Новосибирского



государственного университета и досрочно окончил аспирантуру.

Он с 1993 года начал работать доцентом кафедры математического анализа Бухарского государственного университета, а затем занял должность заведующего кафедрой математики. Наряду с педагогической и административной деятельностью Д.К. Дурдиев продолжал активную научную работу в Бухарском государственном университете. Результаты своих исследований он обсуждал со своим наставником В.Г. Романовым из института Математики Сибирского отделения РАН, а также с учёными других авторитетных научных учреждений. Его научные изыскания в этот период, являвшиеся продолжением кандидатской диссертации, были посвящены исследованию процессов распространения волн в средах с последствием и изучению свойств этих сред. Если первые работы Дурдиева Д.К. относились к изучению задач определения одномерного ядра интегрального оператора, входящего в гиперболическое уравнение, обременённое интегральным членом, то затем подобные исследования были выполнены для значительно более сложного случая, когда ядро зависит не только от временной, но и пространственной переменной. Исследованы задачи об определении нескольких коэффициентов, входящих в различные дифференциальные уравнения. Во всех изучаемых задачах установлены теоремы единственности и оценки устойчивости.

Полученные результаты легли в основу докторской диссертации, успешно защищённой в 2010 году на специализированном учёном совете НИИ Математики и Информационных технологий АН РУз под председательством академика Ш.А. Аюпова по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения. Тема диссертации – «Обратные задачи для сред с последствием». Результаты диссертационной работы были также опубликованы в одноимённой монографии Д.К. Дурдиева, изданной в 2014 издательством «Турон-Икбал» в Ташкенте.

С 2012 года он совместно со своей ученицей из России Ж.Д. Тотиевой начал проводить исследования в области прямых и обратных задач для системы уравнений вязкоупругости, основанных на модели Больцмана. Основной особенностью работ в этом направлении стало систематическое использование локализованных в точке или на границе источников, инициирующих процесс распространения волн. С одной стороны, это повышало прикладную значимость рассматриваемых задач, а с другой – позволило говорить о формировании нового научного направления в теории обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Результаты этих исследований были представлены в международной монографии Д.К. Дурдиева и Ж.Д. Тотиевой «Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations», опубликованной издательством *Springer* в 2023 году. Кроме того, совместно со своим учеником Ж.Ш. Сафаровым он провёл исследования по обратным задачам определения свёрточного ядра для более общих интегро-дифференциальных уравнений, важной особенностью которых является наличие в принципиальной части уравнения общего гиперболического оператора второго порядка. Рассматривались случаи, в которых прямая задача формулировалась как задача Коши, так и как начально-краевая задача.

Уравнения, изучаемые в данном направлении, тесно связаны с дробными диффузионно-волновыми уравнениями. Д.К. Дурдиев, опираясь на известную формулу Хилле-Тамаркина-Джрбашяна, доказал, что если ядро в интегралах интегро-дифференциальных уравнений теплопроводности и волновых уравнений выбрать в специальной форме через функции Миттага-Леффлера, то такие уравнения оказываются эквивалентны дробным диффузионно-волновым уравнениям с производной Герасимова-Капуто по времени.

С 2021 года Д.К. Дурдиев совместно со своими учениками активно занимается обратными задачами для дифференциальных уравнений с дробными производными, преимущественно для дробных диффузионно-волновых уравнений. Им были адаптированы методы исследования обратных задач, применявшиеся ранее для классических уравнений диффузии и колебаний, к более сложному случаю – уравнениям с дробными производными различных типов. В результате были получены новые теоремы существования и единственности решений, а также оценки устойчивости. Результаты проведённого цикла исследований нашли отражение в монографии: «D.K. Durdiev, Inverse Problems for Fractional Diffusion Equations, Springer, Singapore, 2025».

Д.К. Дурдиев исследовал ряд обратных задач, связанных с определением неизвестных коэффициентов при младшем члене в уравнениях смешанного парабола-гиперболического типа с характеристическими и нехарактеристическими линиями изменения типа. Им доказаны новые теоремы о корректности таких задач в смысле Адамара при различных условиях переопределения.

Он активно занимается научным руководством студентов, бакалавров, магистрантов, соискателей степени PhD, а также докторантов, тем самым сформировав крепкую научную школу.

Под его руководством успешно защитили свои диссертации одиннадцать кандидатов (PhD) и три доктора наук. Многие из его учеников – докторанты, магистранты и специалисты – в настоящее время являются преподавателями различных вузов Узбекистана и России. Они в полной мере следуют основным принципам своего наставника: высокой требовательности к себе и своим ученикам, преданности делу, добросовестности, самоотдаче и высокому профессионализму.

Д.К. Дурдиев с 2020 года возглавляет Бухарское отделение Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан. За более чем 30 лет активной научной деятельности он опубликовал свыше 200 научных работ, большая часть которых издана в высокорейтинговых международных журналах, таких как *Physica D*, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Сибирский математический журнал, Математические заметки, Дифференциальные уравнения и др. Он входит в состав редакционных коллегий журналов «SOCAR Proceedings», «Uzbek Mathematical Journal», «Вестник Полоцкого государственного университета», а также ряда научных изданий Бухарского государственного университета.

Педагогическая карьера Д.К. Дурдиева началась 5 января 1993 года, когда его пригласили преподавателем на кафедру «Математический анализ» Бухарского государственного университета. За 32 года работы он прошёл путь от ассистента до профессора, занимал должности заведующего кафедрой, декана физико-математического факультета и факультета экономики, а также проректора по учебной работе БухГУ. В 2019 году была издана книга Д.К. Дурдиева «Уравнения в частных производных», рекомендованная Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов бакалавриата университетов по направлениям «Математика» и «Прикладная математика и информатика». Кроме того, он является автором нескольких учебных и учебно-методических пособий по дифференциальным уравнениям, предназначенных для студентов бакалавриата и магистратуры. В настоящее время он продолжает педагогическую деятельность в Бухарском государственном университете, являясь профессором кафедры дифференциальных уравнений.

Рядом с Дурдимуродом Каландаровичем всегда находятся самые близкие ему люди, полностью разделяющие его научные интересы и гражданскую позицию (жена Маралджан Кадилова – доцент кафедры Зелёной экономики Бухарского государственного университета; сын Умиджан Дурдиев – заведующий кафедрой Дифференциальных уравнений того же университета; сын Дилшод Дурдиев – постдокторант-исследователь в Дармштадтском университете Германии; дочь Дилноза Дурдиева – магистрантка Узбекского государственного университета мировых языков; дочь Дурдона Дурдиева – ученица частной Кембриджской школы в Бухаре).

Д.К. Дурдиев – известный учёный, талантливый педагог, требовательный руководитель и мудрый наставник. В беседе с ним всегда ощущается постоянный поток новых научных идей и свежих мыслей. В эти дни он отмечает свой 60-летний юбилей.

От всей души поздравляем Дурдимуро́да Каландаровича и желаем ему крепкого здоровья, радости в жизни, новых творческих успехов и благодарных учеников!



Международная научно-практическая конференция на тему «Актуальные проблемы математической физики и современного анализа», посвящённая 60-летию Д. К. Дурдиева, состоялась 10-11 октября 2025 года в городе Бухаре.

В данном международном конференции приняли участие не только отечественные специалисты и квалифицированные кадры различных отраслей, но и учёные из Объединённых Арабских Эмиратов, Турции, Ирана, Китая, Южной Кореи, России, Азербайджана, Казахстана, Кыргызстана и Туркменистана, представившие свои доклады и тезисы. Общее количество представленных тезисов составило 335.

Тотиева Жанна Дмитриевна,

доктор физико-математических наук,
заведующая отделом математического моделирования
Южного математического института Владикавказского
научного центра Российской академии наук

Расулов Тулкин Хусенович,

доктор физико-математических наук, профессор,
руководитель Центра передового опыта в науке и образовании
Бухарского государственного университета

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА СИСТЕМЫ ТРЁХ БОЗОНОВ НА РЕШЁТКЕ

Абдуллаев Жаникул Ибрагимович,
Самаркандский государственный университет
jabdullaev@mail.ru

Муйдинова Шодия Нажмиддиновна,
Самаркандский государственный университет
shodiya94.com@gmail.com

Аннотация. Рассматривается оператор Шрёдингера $H_\mu(K)$ системы трёх бозонов, взаимодействующих с парными контактными потенциалами на одномерной решётке. При больших значениях энергии взаимодействия двух частиц $\mu > 0$ доказано существование двух собственных значений оператора $H_\mu(\pi)$ ниже существенного спектра. Доказывается, что собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению чётна, а собственная функция, соответствующая второму собственному значению, нечётна.

Ключевые слова: решётка, гамильтониан, квазиимпульс, оператор Шрёдингера, инвариантное подпространство, собственное значение, собственная функция.

ON THE EXISTENCE OF EIGENVALUES OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR OF A SYSTEM OF THREE BOSONS ON A LATTICE

Abstract. The Schrödinger operator $H_\mu(K)$ of a system of three bosons interacting with a pair contact potential on a one-dimensional lattice is considered. At large values of the particle interaction energy $\mu > 0$, it is proved that the operator $H_\mu(\pi)$ has two eigenvalues the bottom of the essential spectrum. It is proved that the eigenfunction corresponding to the smallest eigenvalue is even, and the eigenfunction corresponding to the second eigenvalue is odd.

Keywords: lattice, Hamiltonian, quasimomentum, Schrödinger operator, invariant subspace, eigenvalue, eigenfunction.

PANJARADAGI UCH BOZONLI SISTEMAGA MOS SHRYODINGER OPERATORI XOS QIYMATLARINING MAVJUDLIGI HAQIDA

Аннотация. Бу ишда бир о'лчамли панжарада жуфти-жуфти билан контакт та'сирлашувчи uch бозонли системга mos $H_\mu(K)$ Shryodinger operatori qaralgan. Zarrachalar o'zaro ta'sir energiyasi $\mu > 0$ ning katta qiymatlarida $H_\mu(\pi)$ operatorning muhim spektr tubida ikkita xos qiymati mavjudligi isbotlangan. Eng kichik xos qiymatga mos keladigan xos funksiya juft, ikkinchi xos qiymatga mos keladigan xos funksiya toq ekanligi isbotlangan.

Калит so'zlar: panjara, Hamiltonian, kvaziimpuls, Shryodinger operatori, invariant qism fazo, xos qiymat, xos funksiya.

Введение. В отличие от систем двух частиц о спектральной теории многочастичных операторов известно не очень многое. В работах [1,2] представлены некоторые результаты, связанные с конечностью многочастичного дискретного спектра. Кроме того, помимо эффекта Ефимова, некоторые достаточные условия существования собственных значений были получены, например, в [3,4,5] для непрерывных операторов Шрёдингера в [6,7] для дискретного случая с использованием вариационных методов. Более того, вариационную технику можно применять не напрямую к оператору $H(K)$, а (компактному самосопряжённому) оператору типа Фаддеева $F(K, z)$, полученному при исследовании уравнения собственных значений для $H(K)$, ниже существенного спектра. Известный эффект Ефимова также доказывается с помощью $F(K, z)$ [8,9,10].

В данной работе рассматривается оператор Шрёдингера $H_\mu(K)$ системы трёх бозонов, взаимодействующих с парными контактными потенциалами на одномерной решётке. При больших значениях энергии взаимодействия двух частиц $\mu > 0$ доказано существование двух собственных

значений оператора $H_\mu(\pi)$ ниже существенного спектра.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ – одномерный тор, $L^{2,s}(\mathbb{T}^m)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определённых на \mathbb{T}^m и симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В импульсном представлении системы двух и системы трёх одинаковых частиц (бозонов) с парными контактными потенциалами действуют соответственно в гильбертовых пространствах $L^{2,s}(\mathbb{T}^2)$ и $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$ по формулам [13]:

$$\begin{aligned} (h_\mu f)(k_1, k_2) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \\ &- \frac{\mu}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2. \\ (H_\mu f)(k_1, k_2, k_3) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3) - \\ &- \frac{\mu}{8\pi^3} \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3. \end{aligned}$$

Здесь $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$ и $\delta(k)$ – дельта-функция Дирака,

$$\varepsilon(p) = 1 - \cos p, \quad p \in (-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Пусть $k = k_1 + k_2$ и $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полные квазиимпульсы системы двух и системы трёх частиц, соответственно.

Операторы h_μ и H_μ разлагаются в прямые интегралы [11, 12, 13]

$$h_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus h_\mu(k) dk, \quad H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K) dK,$$

где ограниченные самосопряжённые операторы $h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v$, $k \in \mathbb{T}$ и $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$, $K \in \mathbb{T}$, действуют в гильбертовых пространствах $L^2(\mathbb{T})$ и $L^{2,s}(\mathbb{T}^2)$ соответственно по формулам:

$$\begin{aligned} h_\mu(k)f(p) &= \varepsilon_k(p)f(p) - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(s) ds, \\ H_\mu(K)f(p, q) &= E_K(p, q)f(p, q) - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [f(K - p - q, s) + f(p, s) + f(s, q)] ds. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_k(p) = \varepsilon(k - p) + \varepsilon(p)$, $E_K(p, q) = \varepsilon(K - p - q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q)$.

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Существует $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu > \mu_1$ оператор $H_\mu(\pi)$ имеет равно два собственных значения, лежащих ниже существенного спектра.*

Спектр двухчастичного оператора. В соответствии с теоремой Вейля о существенном спектре [11], существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ совпадает со спектром $\sigma(h_0(k))$ невозмущённого оператора $h_0(k)$, т.е. с отрезком $[m(k), M(k)]$, где

$$m(k) = \min_{p \in \mathbb{T}} \varepsilon_k(p), \quad M(k) = \max_{p \in \mathbb{T}} \varepsilon_k(p).$$

Заметим, что при $k = \pi$ выполняется тождество $\varepsilon_k(q) \equiv 2$, и поэтому отрезок $[m(k), M(k)]$ превращается в точку $\{2\}$.

Для функции ε имеет место представление (1), поэтому имеем:

$$m(k) = 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right), \quad M(k) = 4 - 2\varepsilon\left(\frac{k}{2}\right), \quad k \in [-\pi, \pi].$$

Заметим, что функции $m(k) = 2\varepsilon(k/2)$ и $M(k) = 4 - 2\varepsilon(k/2)$ чётны по $k \in [-\pi, \pi]$. Функция $m(k)$ строго возрастает, а $M(k)$ строго убывает по $k \in [0, \pi]$. Следовательно,

$$\min_{k \in \mathbb{T}} m(k) = m(0) = 0, \quad \max_{k \in \mathbb{T}} M(k) = M(0) = 4.$$

Пусть $\Delta_\mu(k, z)$ определитель Фредгольма оператора $I - \mu v r_0(z)$, $r_0(z)$ – резольвента невозмущённого оператора $h_0(k)$. Функция $\Delta_\mu(k, z)$ имеет вид:

$$\Delta_\mu(k, z) = 1 - \frac{\mu}{\sqrt{(2-z)^2 - 4 \cos^2 \frac{k}{2}}}, \quad z \in (-\infty, m(k)). \tag{2}$$

Функция $\Delta_\mu(k, \cdot)$ непрерывна и строго убывает на каждой из полуосей $(-\infty, m(k))$ и $(M(k), \infty)$.

Лемма 1. *Число $z \in \mathbb{R} \setminus [m(k), M(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда*

и только тогда, когда $\Delta_\mu(k, z) = 0$.

Решая уравнение $\Delta_\mu(k, z) = 0$ относительно z и пользуясь леммой 1 получим:

Лемма 2. Для любого $\mu > 0$ и $k \in \mathbb{T}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное простое собственное значение $z_\mu(k) = 2 - \sqrt{\mu^2 + 4 \cos^2 \frac{k}{2}}$ на полуоси $(-\infty, m(k))$.

Замечание. Собственное значение $z_\mu(k)$ четна по $k \in [-\pi, \pi]$ и строго возрастает по $k \in [0, \pi]$. При этом

$$\min_{k \in \mathbb{T}} z_\mu(k) = z_\mu(0) = 2 - \sqrt{\mu^2 + 4}, \quad \max_{k \in \mathbb{T}} z_\mu(k) = z_\mu(\pi) = 2 - \mu.$$

Кроме того $z_\mu(k)$, как функция от μ строго убывает на полуоси $(0, \infty)$.

Существенный спектр трёхчастичного оператора. Сначала мы опишем существенный спектр трёхчастичного оператора $H_\mu(K)$, а исследование собственных значений этого оператора сводим к изучению собственных значений компактного оператора $A_\mu(K, z)$.

Как известно (см. [13]) существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из объединения области значений двух функций $\lambda_{\mu,K}(q) = z_\mu(K - q) + \varepsilon(q)$ и $E_K(p, q)$, т.е.

$$\sigma_{ess}(H(K)) = [\lambda_{min}(\mu, K), \lambda_{max}(\mu, K)] \cup [E_{min}(K), E_{max}(K)], \quad (3)$$

где

$$E_{min}(K) = \min_{p,q \in \mathbb{T}} E_K(p, q) = 3\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right), \quad E_{max}(K) = \max_{p,q \in \mathbb{T}} E_K(p, q),$$

$$\lambda_{min}(\mu, K) = \min_{q \in \mathbb{T}} \lambda_{\mu,K}(q), \quad \lambda_{max}(\mu, K) = \max_{q \in \mathbb{T}} \lambda_{\mu,K}(q).$$

Пусть $K = \pi$ и $\mu > \frac{3}{2}$. Тогда

$$\min_{q \in \mathbb{T}} \lambda_{\mu,K}(q) = \min_{q \in \mathbb{T}} \{z_\mu(\pi - q) + \varepsilon(q)\} = z_\mu(\pi) = 2 - \mu,$$

$$\max_{q \in \mathbb{T}} \lambda_{\mu,K}(q) = \max_{q \in \mathbb{T}} \{z_\mu(\pi - q) + \varepsilon(q)\} = 4 - \sqrt{\mu^2 + 4}.$$

Известно, что

$$\min_{p,q \in \mathbb{T}} E_\pi(p, q) = \frac{3}{2}, \quad \max_{p,q \in \mathbb{T}} E_\pi(p, q) = 6.$$

Поэтому существенный спектр состоит из двух непересекающихся отрезков:

$$\sigma_{ess}(H_\mu(\pi)) = [2 - \mu, 4 - \sqrt{\mu^2 + 4}] \cup \left[\frac{3}{2}, 6\right].$$

Первая часть $[\lambda_{min}(\mu, K), \lambda_{max}(\mu, K)]$ множества (3) называется двухчастичной ветвью существенного спектра трёхчастичного оператора $H_\mu(K)$, вторая часть $[E_{min}(K), E_{max}(K)]$ совпадает со спектром невозмущённого трёхчастичного оператора $H_0(K)$ и называется трёхчастичной ветвью существенного спектра оператора $H_\mu(K)$.

Дискретный спектр трёхчастичного оператора. В дальнейшем мы рассматриваем только случай $K = \pi$ и $\mu > \frac{3}{2}$

Пусть $A_\mu(z)$, $z < z_\mu(\pi)$ самосопряжённый оператор, определяемый формулой:

$$A_\mu(z)\psi(p) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p, z)}(E_\pi(p, q) - z)\sqrt{\Lambda(q, z)}}, \quad \psi \in L^2(\mathbb{T}),$$

где

$$\Lambda(p, z) := \Delta_\mu(\pi - p, z - \varepsilon(p)),$$

и функция $\Delta_\mu(\cdot, \cdot)$ – определена по формуле (2). Следующее уравнение есть аналог уравнения Фаддеева:

$$A_\mu(z)\psi(p) = \psi(p).$$

Известна (см. [13]) следующая лемма.

Лемма 3. Число $z < z_\mu(\pi)$ является n кратным собственным значением оператора $H_\mu(\pi)$ тогда и только тогда, когда число 1 есть n кратное собственное значение оператора $A_\mu(z)$.

Если ψ неподвижная точка оператора $A_\mu(z)$, то

$$f(p, q) = \frac{\mu}{E_\pi(p, q) - z} \left[\frac{\psi(p)}{\sqrt{\Lambda(p, z)}} + \frac{\psi(q)}{\sqrt{\Lambda(q, z)}} + \frac{\psi(\pi - p - q)}{\sqrt{\Lambda(\pi - p - q, z)}} \right] \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению $H_\mu(\pi)f = zf$.

Для самосопряжённого оператора B обозначим через $n[\lambda, B]$ число собственных значений, больших $\lambda > 0$. Следующая лемма следует из известного принципа Бирмана-Швингера (см. например [12, 13]).

Лемма 4. Для каждого $z < z_\mu(\pi)$ имеет место равенство:

$$n[-z, -H_\mu(\pi)] = n[1, A_\mu(z)].$$

Используя равенство $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$, ($x \neq 1$), и учитывая обозначение (1), имеем:

$$\frac{1}{E_\pi(p, s) - z} = \frac{1}{a(z)} \left(1 - \frac{\zeta(p, s)}{a(z)} + \frac{\zeta^2(p, s)}{a(z)(E_\pi(p, s) - z)} \right), \quad (5)$$

где

$$a(z) = 2 - z, \quad \zeta(p, s) = \varepsilon(p)\varepsilon(s) - \sin p \sin s. \quad (6)$$

Пользуясь равенством (5) оператор $A_\mu(z)$ представим в виде суммы:

$$A_\mu(z) = A_\mu^{(0)}(z) + A_\mu^{(1)}(z),$$

Конечномерный оператор $A_\mu^{(0)}(z)$, действующий по формуле:

$$(A_\mu^{(0)}(z)\psi)(p) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{[a(z) - \zeta(p, q)]\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p, z)}\sqrt{\Lambda(q, z)}},$$

назовём «главной частью» оператора $A_\mu(z)$, а оператор $A_\mu^{(1)}(z)$:

$$(A_\mu^{(1)}(z)\psi)(p) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta^2(p, q)\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p, z)}(E_\pi(p, q) - z)\sqrt{\Lambda(s, z)}}$$

«остаточной частью» оператора $A_\mu(z)$ и докажем, что $\|A_\mu^{(1)}(z)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ для $z < 2 - \mu = z_\mu(\pi)$.

Пусть $L^{2,e}(\mathbb{T})$ (соответственно $L^{2,o}(\mathbb{T})$) – подпространство чётных (соответственно нечётных) функций. Известно, что

$$L^2(\mathbb{T}) = L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T}).$$

Лемма 5. Подпространства $L^{2,e}(\mathbb{T})$ и $L^{2,o}(\mathbb{T})$ инвариантны относительно операторов $A_\mu(z)$, $A_\mu^{(0)}(z)$ и $A_\mu^{(1)}(z)$.

Доказательство леммы 5. Из определения $\Lambda(\cdot, z)$ и ε (см. (2) и (1)) следует, что $\Lambda(\cdot, z) \in L^{2,e}(\mathbb{T})$ и $\varepsilon \in L^{2,e}(\mathbb{T})$. Если $\psi \in L^{2,e}(\mathbb{T})$, то делая замену переменного $s = -q$, учитывая соотношения $E_\pi(-p, -q) = E_\pi(p, q)$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(-p) &= (A_\mu(z)\psi)(-p) = \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(s) ds}{\sqrt{\Lambda(-p, z)}(E_\pi(-p, s) - z)\sqrt{\Lambda(s, z)}} = \\ &= \frac{\mu}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p, z)}(E_\pi(-p, -q) - z)\sqrt{\Lambda(q, z)}} = \tilde{\psi}(p). \end{aligned}$$

Следовательно, подпространство $L^{2,e}(\mathbb{T})$ инвариантно относительно $A_\mu(z)$.

Ядро $A_\mu^{(0)}(p, s; z)$ оператора $A_\mu^{(0)}(z)$ удовлетворяет условию:

$$A_\mu^{(0)}(-p, -s; z) = A_\mu^{(0)}(p, s; z).$$

Отсюда следует инвариантность подпространства $L^{2,e}(\mathbb{T})$ относительно $A_\mu^{(0)}(z)$. Из представления $A_\mu^{(1)}(z) = A_\mu(z) - A_\mu^{(0)}(z)$ вытекает инвариантность подпространства $L^{2,e}(\mathbb{T})$ относительно оператора $A_\mu^{(1)}(z)$. Поскольку операторы $A_\mu(z)$, $A_\mu^{(0)}(z)$ и $A_\mu^{(1)}(z)$ – самосопряжённые, ортогональное дополнение $L^{2,o}(\mathbb{T})$ подпространства $L^{2,e}(\mathbb{T})$ также инвариантно относительно этих операторов.

Обозначим через $A_\mu^{(0,e)}(z) := A_\mu^{(0)}(z)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ и $A_\mu^{(0,o)}(z) := A_\mu^{(0)}(z)|_{L^{2,o}(\mathbb{T})}$ сужения оператора $A_\mu^{(0)}(z)$ на подпространства $L^{2,e}(\mathbb{T})$ и $L^{2,o}(\mathbb{T})$, соответственно, т.е.

$$(A_\mu^{(0,e)}(z)\psi)(p) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{[a(z) - \varepsilon(p)\varepsilon(q)]\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p, z)}\sqrt{\Lambda(q, z)}},$$

и

$$\left(A_{\mu}^{(0,0)}(z)\psi\right)(p) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin p \sin q \psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p,z)}\sqrt{\Lambda(q,z)}}. \quad (7)$$

Из представления (7) следует:

Лемма 6. Для любого $z < z_{\mu}(\pi)$ оператор $A_{\mu}^{(0,0)}(z)$ положителен, и имеет единственное простое собственное значение:

$$\lambda^0(z) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 p dp}{\Lambda(p,z)}.$$

Лемма 7. Оператор $A_{\mu}^{(0,e)}(z)$ имеет два собственных значения:

$$\lambda_1^e(z) = \frac{1}{2} \left[a(z)b_0(z) - b_2(z) + \sqrt{(a(z)b_0(z) + b_2(z))^2 - 4b_1^2(z)a(z)} \right], \quad (8)$$

$$\lambda_2^e(z) = \frac{1}{2} \left[a(z)b_0(z) - b_2(z) - \sqrt{(a(z)b_0(z) + b_2(z))^2 - 4b_1^2(z)a(z)} \right]. \quad (9)$$

Здесь

$$b_{\alpha}(z) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon^{\alpha}(p) dp}{\Lambda(p,z)}, \quad \alpha = 0,1,2.$$

Представляя $z = z_{\mu}(\pi) - \beta$, $\beta > 0$, получим асимптотические формулы для $b_{\alpha}(z)$, $\alpha = 0,1,2$:

$$b_0(z) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{dq}{\Lambda(q,z)} = \frac{4}{\sqrt{\beta}} + 1 + o(\beta), \quad \beta \rightarrow 0,$$

$$b_1(z) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos q) dq}{\Lambda(q,z)} = 4 + o(\beta), \quad \beta \rightarrow 0,$$

$$b_2(z) = \frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \cos q)^2 dq}{\Lambda(q,z)} = 4 + o(\beta), \quad \beta \rightarrow 0,$$

Доказательство леммы 7. Пусть уравнение

$$\left(A_{\mu}^{(0,e)}(z)\psi\right)(p) = \lambda\psi(p)$$

или

$$\frac{\mu}{\pi a^2(z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{[a(z) - \varepsilon(p)\varepsilon(q)]\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(p,z)}\sqrt{\Lambda(q,z)}} = \lambda\psi(p), \quad (10)$$

$\lambda \neq 0$ имеет ненулевое решение $\psi \in L_2^e(T)$. Вводим обозначения

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(q,z)}}, \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon(q)\psi(q) dq}{\sqrt{\Lambda(q,z)}}. \quad (11)$$

Пользуясь этими обозначениями уравнение (10), перепишем в виде:

$$\lambda\psi(p) = \frac{2\mu}{a^2(z)\sqrt{\Lambda(p,z)}} [a(z)C_1 - \varepsilon(p)C_2]. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), получим систему уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} (\lambda - a(z)b_0(z))C_1 + b_1(z)C_2 = 0 \\ -a(z)b_1(z)C_1 + (\lambda + b_2(z))C_2 = 0 \end{cases}$$

Однородная система уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{Det}(\lambda I - A_{\mu}^{(0,e)}(z)) &= \begin{vmatrix} \lambda - a(z)b_0(z) & b_1(z) \\ -a(z)b_1(z) & \lambda + b_2(z) \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - [a(z)b_0(z) - b_2(z)]\lambda - a(z)b_0(z)b_2(z) + a(z)b_1^2(z) = 0. \end{aligned}$$

Нули квадратного уравнения относительно λ имеют вид (8) и (9).

Лемма 8. При всех $z < z_{\mu}(\pi)$ имеют место

$$\frac{(-z_{\mu}(p))(-z)}{\mu(z_{\mu}(\pi - p) + \varepsilon(p) - z)} \leq \frac{1}{\Lambda(p,z)} \leq \frac{(4 - z_{\mu}(\pi - p))(6 - z)}{\mu(z_{\mu}(\pi - p) + \varepsilon(p) - z)}, \quad (13)$$

где $z_{\mu}(p)$ – собственное значение двухчастичного оператора $h_{\mu}(p)$. Кроме того, верна асимптотика

$$\frac{1}{\Lambda(p, z)} = \frac{(2 - z_\mu(p))(3 - z)}{\mu(z_\mu(\pi - p) + \varepsilon(p) - z)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right], \mu \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Доказательство леммы 8. Из равенства

$$\Lambda(p, z_\mu(p)) := \Delta_\mu(\pi - p, z_\mu(p) - \varepsilon(p)) = 0$$

следует, что для всех $p \in \mathbb{T}$ имеет место

$$\frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) - z_\mu(\pi - p)} \equiv 1.$$

Пользуясь этим, имеем

$$\begin{aligned} \Lambda(p, z) &= 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{E_\pi(p, s) - z} = \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) - z_\mu(\pi - p)} - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) + \varepsilon(p) - z} \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z_\mu(\pi - p) + \varepsilon(p) - z) ds}{(E_\pi(p, s) - z)[\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) - z_\mu(\pi - p)]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из неравенств $0 \leq \varepsilon(p) \leq 2$ и $0 \leq E_\pi(p, s) \leq 6$ следуют, что

$$\frac{1}{4 - z_\mu(p)} \leq \frac{1}{\varepsilon(s) + \varepsilon(p - s) - z_\mu(p)} \leq \frac{1}{-z_\mu(p)}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{6 - z} \leq \frac{1}{E_\pi(p, s) - z} \leq \frac{1}{-z} \quad (17)$$

Из соотношений (15) - (17) непосредственно вытекает (13).

Для доказательства равенства (14) воспользуемся соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) - z_\mu(\pi - p)} &= \frac{1}{2 - z_\mu(\pi - p)} \left[1 + \frac{\cos s + \cos(\pi - p - s)}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) - z_\mu(\pi - p)} \right], \\ \frac{1}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) + \varepsilon(p) - z} &= \frac{1}{3 - z} \left[1 + \frac{\cos s + \cos(\pi - p - s) + \cos p}{\varepsilon(s) + \varepsilon(\pi - p - s) + \varepsilon(p) - z} \right]. \end{aligned}$$

Так как $z < z_\mu(\pi) = 2 - \mu$, из равенства (15) можно заключить, что

$$\Lambda(p, z) = \frac{\mu(z_\mu(\pi - p) + \varepsilon(p) - z)}{(2 - z_\mu(\pi - p))(3 - z)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right],$$

при достаточно больших $\mu > 0$.

Лемма 9. Существуют $C > 0$ и $\mu_1 > 0$ такие, что для любого $\mu > \mu_1$ верна оценка

$$\|A_\mu^{(1)}(z)\| \leq \frac{C}{\mu},$$

которая выполняется равномерно по $z \in (-\infty, z_\mu(\pi))$.

Доказательство леммы 9. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ и $\|\psi\| = 1$. Пользуясь (6) и неравенство

$$\zeta^2(p, s) \leq 2\varepsilon^2(p)\varepsilon^2(s) + 2\sin^2 p \sin^2 s$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| (A_\mu^{(1)}(z)\psi, \psi) \right| &\leq \frac{\mu}{\pi a^2(z)(-z)} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{(2\varepsilon^2(p)\varepsilon^2(s) + 2\sin^2 p \sin^2 s) |\psi(s)| |\overline{\psi(p)}| ds dp}{\sqrt{\Lambda(s, z)} \sqrt{\Lambda(p, z)}} = \\ &= \frac{2\mu}{\pi a^2(z)(-z)} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon^2(p) |\psi(p)| dp}{\sqrt{\Lambda(p, z)}} \right)^2 + \frac{2\mu}{\pi a^2(z)(-z)} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 p |\psi(p)| dp}{\sqrt{\Lambda(p, z)}} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из неравенства (13) вытекает

$$\frac{1}{\Lambda(p, z)} \leq \frac{(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\mu\varepsilon(p)}.$$

Из этого и неравенства Шварца получим:

$$\frac{2\mu}{\pi a^2(z)(-z)} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon^2(p) |\psi(p)| dp}{\sqrt{\Lambda(p, z)}} \right)^2 \leq \frac{2\mu(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\pi a^2(z)(-z)\mu} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon^2(p) |\psi(p)| dp}{\sqrt{\varepsilon(p)}} \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{2(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\pi a^2(z)(-z)} \int_{\mathbb{T}} \varepsilon^3(p) dp \int_{\mathbb{T}} |\psi(s)|^2 ds \leq \frac{C_1}{\mu}. \quad (19)$$

Известно, что $\sin^2 p = (1 + \cos p)\varepsilon(p)$. Отсюда получим

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{\pi a^2(z)(-z)} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 p |\psi(p)| dp}{\sqrt{\Lambda(p, z)}} \right)^2 &\leq \frac{2(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\pi a^2(z)(-z)} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{(1 + \cos p)\varepsilon(p) |\psi(p)| dp}{\sqrt{\varepsilon(p)}} \right)^2 \\ &\leq \frac{2(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\pi a^2(z)(-z)} \int_{\mathbb{T}} (1 + \cos p)^2 \varepsilon^2(p) dp \int_{\mathbb{T}} |\psi(s)|^2 ds \leq \frac{C_2}{\mu}. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как

$$\frac{(4 - z_\mu(\pi))(6 - z)}{\pi a^2(z)(-z)} \leq 4,$$

из (18) и (19), (20) при $\mu > 4$ имеем

$$\left| (A_\mu^{(1)}(z)\psi, \psi) \right| \leq \frac{C}{\mu},$$

где $C = C_1 + C_2$.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 получим

$$n[-z, -H_\mu(\pi)] = n[1, A_\mu(z)],$$

при $z \leq z_\mu(\pi)$. По леммы 9, существует $\mu_1 > 0$ такое что, для любого $\mu > \mu_1$ имеет место равенство

$$n[1, A_\mu(z)] = n[1, A_\mu^{(0)}(z)].$$

Из леммы 5 имеем следующие равенства:

$$n[1, A^{(0)}(z)] = n[1, A_\mu^{(0,e)}(z)] + n[1, A_\mu^{(0,o)}(z)]$$

Из леммы 6 и (14) следует, что

$$\lim_{z \rightarrow z_\mu(\pi)} \lambda^0(z) = 2.$$

Из этого следует $n[1, A_\mu^{(0,o)}(z)] = 1$ при всех $z \in (z_\mu(\pi) - \delta, z_\mu(\pi))$ и некотором $\delta > 0$. Из леммы 7 и асимптотических формул для $b_0(z)$, $b_1(z)$ и $b_2(z)$ имеем $\lambda_1^e(z) > 1$ при $z \in (z_\mu(\pi) - \delta, z_\mu(\pi))$ и $\lambda_2^e(z) < 0$ при $z \in (z_\mu(\pi) - \delta, z_\mu(\pi))$.

Из выше изложенных утверждений следует, что

$$n[1, A^{(0)}(z)] = 1 + 1 = 2 \quad \text{при } z \in (z_\mu(\pi) - \delta, z_\mu(\pi)).$$

При этом собственному значению $\lambda_1^e(z_1) = 1$ соответствует чётная собственная функция $\psi_1^e \in L_2^e(\mathbb{T})$. Собственному значению $\lambda^0(z_2) = 1$ соответствуют нечётная собственная функция $\psi_2^o \in L_2^o(\mathbb{T})$. Поэтому наименьшему собственному значению $z_1 \in (-\infty, z_\mu(\pi))$ оператора $H_\mu(\pi)$ соответствует чётная собственная функция $f_1^e(p, q)$, определённая по формуле (4), при этом вместо ψ берётся ψ_1^e , а второму собственному значению $z_2 \in (-\infty, z_\mu(\pi))$ оператора $H_\mu(\pi)$ соответствует нечётная собственная функция $f_2^o(p, q)$, определённая по формуле (4).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sigal I. On the discrete spectrum of the Schrodinger operators of multi-particle systems, *Commun. Math. Phys.*, 48 (1976), 137–54.
2. Simon B. Geometric methods in multi-particle quantum systems *Commun, Math. Phys.*, 55 (1977), 259–74.
3. Chadan K. and Martin A. A sufficient condition for the existence of bound states in a potential without spherical symmetry, *J. Phys. Lett.*, 41 (1980), 205–
4. Fernando P.J., Malta C.P. and Coutinho F.A. Bound states of N particles: A variational approach *Citation, Journal of Mathematical Physics.*, 26 (1985), 2262.
5. Yanxia Liu, Yi-Cong Yu and Shu Chen, Three-body bound states of two bosons and one impurity in one dimension, *Phys. Rev. A.*, 104(2021), 033303.
6. Kholmatov Sh.Yu. and Muminov Z. I. Existence of bound states of N-body problem in an optical lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 51(2018), 265202.
7. Lakaev S.N., Dell’Antonio G. F. and Khalkhuzhaev A. M. Existence of an isolated band of a system

of three particles in an optical lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 49 (2016), 145204 – 15.

8. Lakaev S.N. On Efimov's Effect in a System of Three Identical Quantum Particles, *Funct. Anal. Appl.*, 27:3 (1993), 166 – 175.

9. Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics, *Commun. Math. Phys.*, 156 (1993), 127 – 168.

10. Tamura H. Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect, *Spectral and Scattering Theory and Applications (Advanced Studies in Pure Mathematics)*, 23 (1994), 311 – 322.

11. Reed M., and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics Analysis of Operators* 4. 1979.

12. Лакаев С.Н., Муминов М.Э. Существенный и дискретный спектр трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке, *ТМФ*, 135(2003), 478-503.

13. Лакаев С.Н., Абдуллаев Ж.И. Спектр разностного трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке. *Матем. заметки* 71, 5(2002), 686–696.

14. Muminov M.E. A Hunziker-van Winter-Zhislin theorem for a four-particle lattice Schrödinger operator, *Theoret. and Math. Phys.*, 48 (2006), 1236 – 1250.

15. Яфаев Д.Р. К теории дискретного спектра трёхчастичного оператора Шрёдингера. *Матем. сб.* 94, 136(1974), 567–593.

ПРОСТРАНСТВА L^2 ДЛЯ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ПОДФАКТОРОВ

Болтаев Хабибжон Хамитович,
доцент кафедры “Математика” Национального
педагогического университета Узбекистана
имени Низами, Ташкент, Узбекистан
Ташкентский международный университет
bkhhabibzhan2020@mail.ru

Аннотация. Данная статья посвящена изучению свойств индекса конечных вещественных подфакторов. Дана связь между понятием индекса обёртывающего (комплексного) фактора с вещественными факторами. По аналогии с комплексным случаем, построим возрастающую последовательность вещественных конечных подфакторов, называемая «Башня Джонса», с помощью которой получим множество возможных значений индекса вещественных подфакторов вещественного фактора типа Π_1 .

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, индекс, коммутант, проектор, комплексный фактор, вещественный фактор, вещественная C^* - алгебра, обёртывающая W^* -алгебра, условное ожидание, изоморфизм, инволютивный *-антиавтоморфизм.

HAQIQIY CHEKLI L^2 SUBFAKTORLARING O‘SUVCHI KETMA-KETLIKLARI
FAZOLARI

Annotatsiya. Bu maqolada chekli haqiqiy qism faktorlar indeksining xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Kompleks faktor indeksi tushunchasi bilan haqiqiy faktorlar indeksi o‘rtasidagi bog‘liqlik berilgan. Kompleks holatga o‘xshab, biz “Jones Tower” deb nomlangan chekli haqiqiy qism faktorlarning ortib boradigan ketma-ketligini quramiz, bu esa Π_1 tipdagi faktordagi haqiqiy qism faktorlar indeksining mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plamini beradi.

Kalit so‘zlar: Fon Neyman algebrasi, indeks, kommutant, proyektor, kompleks faktor, haqiqiy faktor, haqiqiy C^* -algebra, kompleks W^* -algebra, shartli kutish, izomorfizm, involutiv *-antiautomorfizm.

SPACES FOR L^2 INCREASING SEQUENCES OF REAL FINITE SUBFACTORS

Abstract. This chapter is devoted to studying the properties of the index of finite real subfactors. The relationship between the concept of the index of an enveloping (complex) factor and real factors is given. By analogy with the complex case, we construct an increasing sequence of real finite subfactors, called the “Jones Tower,” which yields the set of possible values of the index of real subfactors of a real factor of type Π_1 .

Key words: von Neumann algebra, index, commutator subgroup, projector, complex factor, real factor, real C^* -algebra, enveloping W^* -algebra, conditional expectation, isomorphism, involutive *-antiautomorphism.

Введение. Пусть A – комплексная банахова *-алгебра. A называется C^* -алгеброй, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$, для $\forall a \in A$. C^* -алгебра A называется абелевой (или коммутативной), если $ab=ba$ для $\forall a, b \in A$. Алгебру всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H , обозначим через $B(H)$. Пусть M – *-подалгебра в $B(H)$. Коммутантом M называется подмножество $M' = \{a \in B(H) : ba=ab, \forall b \in M\}$. Если $M=M'$, то M называется алгеброй фон Неймана, где $M'=(M)'$. Известно (теорема о бикоммутанте), что M – алгебра фон Неймана тогда и только тогда, когда M – W^* -алгебра, т.е. M – слабо замкнута и $1 \in M$. Пусть M – W^* -алгебра. Множество всех элементов M , коммутирующих со всеми

элементами алгебры M , называется *центром* M , и оно обозначается как $Z(M)$. Очевидно, что $Z(M) = M \cap M'$. Элементы $Z(M)$ называют *центральными*. Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda \cdot \mathbf{1}$, $\lambda \in \square$, называют *фактором*. W^* -алгебра M называется:

- дискретной, или типа I , если для каждого ненулевого центрального проектора z существует ненулевой абелевый проектор q такой, что $q \leq z$;

- типа II , если M полуконечна и непрерывна;
- типа I_{fin} (соотв. I_∞), если M – типа I и конечна (соотв. бесконечна);
- типа II_1 (соотв. II_∞), если M – типа II и конечна (собственно бесконечна);
- типа III , если M – чисто бесконечна.

Из теории алгебр фон Неймана известно [1], что произвольная W^* -алгебра единственным образом разлагается по центру в прямую сумму W^* -алгебр типов: I_{fin} , I_∞ , II_1 , II_∞ и III .

Линейное отображение $\alpha: M \rightarrow M$ называется **-автоморфизмом* (соответственно **-антиавтоморфизмом*), если $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ и $\alpha(xy) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ (соотв. $\alpha(xy) = \alpha(y) \cdot \alpha(x)$), $(\forall x, y \in M)$, *инволютивным*, если $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = x$, $\forall x \in M$.

Банахова $*$ -алгебра R над полем \square называется *вещественной C^* -алгеброй*, если норму на R можно продолжить на $A = R + iR$ так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C^* -алгеброй (см. [2]). В работе ([2], теорема 5.2.10) доказано, что вещественная банахова $*$ -алгебра R является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R – эрмитова алгебра и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$. Эрмитовость R эквивалентна обратимости элемента $1 + aa^*$ для любого $a \in R$.

Пусть $R \subset B(H)$ – вещественная $*$ -подалгебра. Известно [2], что существует H_r – вещественное гильбертово пространство такое, что

$$H_r + iH_r = H \text{ и } R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

Тогда коммутант вещественной $*$ -алгебры R определяется аналогично комплексному случаю:

$$R' = \{a \in B(H_r) : ba = ab, \forall b \in R\}.$$

Непосредственно проверяется, что $(R + iR)' = R' + iR'$.

Если $R = R'$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана*. Пусть теперь R – вещественная C^* -алгебра. Тогда $R + iR$ является (комплексной) C^* -алгеброй. Вещественная C^* -алгебра R называется *вещественной W^* -алгеброй*, если C^* -алгебра $R + iR$ является (комплексной) W^* -алгеброй (см. определение 6.1.1 из [31]). Аналогично для вещественных $*$ -подалгебр верен аналог теоремы о бикоммутанте, а именно R – вещественная алгебра фон Неймана тогда и только тогда, когда R – вещественная W^* -алгебра, и это эквивалентно тому, что алгебра R – слабо замкнута, $R \cap iR = \{0\}$ и $\mathbf{1} \in R$.

Простым некоммутативным примером вещественных W^* -алгебр является алгебра $M_n(\square)$ – всех вещественных $n \times n$ -матриц относительно обычных алгебраических операций.

Пусть R – вещественная W^* -алгебра. Наименьшую W^* -алгебру $U(R)$, содержащую R , называем *обёртывающей W^* -алгеброй* для алгебры R . Тогда $U(R) = R + iR$. Кроме того, всякая вещественная W^* -алгебра R порождает естественный инволютивный $*$ -антиавтоморфизм α_R обёртывающей W^* -алгебры $U(R)$, а именно: $\alpha_R(x + iy) = x^* + iy^*$, где $x + iy \in U(R)$, $x, y \in R$, такой, что $R = \{x \in U(R) : \alpha_R(x) = x^*\}$; и обратно, если на W^* -алгебре U задан некоторый инволютивный $*$ -антиавтоморфизм α , то множество $\{x \in U : \alpha(x) = x^*\}$ является вещественной W^* -алгеброй (см. теорему 3.1 из [3]). В дальнейшем всякую вещественную W^* -алгебру R мы отождествим с парой (M, α) .

Аналогично, всякая вещественная W^* -алгебра является вещественной C^* -алгеброй, но обратное утверждение не верно. Заключая, напомним, что вещественная W^* -алгебра R называется

вещественным фактором, если её центр совпадает с $1 \cdot \square = \{\lambda 1, \lambda \in \square\}$; R имеет тип $I_n, I_\infty, II_1, II_\infty$ или III , если её обёртывающая W^* -алгебра имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W^* -алгебры [8,9].

Пусть $M \subset B(H)$ - конечный фактор и пусть τ - единственный α - инвариантный точный нормальный след на M . Обозначим через $\mathcal{L}(M)$ пополнение алгебры M относительно нормы $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Аналогично, $\mathcal{L}(M, \alpha)$ - пополнение вещественного фактора (M, α) . Тогда $\mathcal{L}(M)$ есть гильбертово пространство и $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M, \alpha) + i\mathcal{L}(M, \alpha)$. Кроме того, для алгебры $B(\mathcal{L}(M))$ также имеем: $B(\mathcal{L}(M)) = B_r(\mathcal{L}(M, \alpha)) + iB_r(\mathcal{L}(M, \alpha))$.

Для каждого $x \in M$ определим отображение $\lambda(x)y = xy$ для всех $y \in M$. Так как $\|\lambda(x)y\|_2 \leq \|x\| \|y\|_2$, то λ имеет единственное продолжение на $\mathcal{L}(M)$, являющееся ограниченным линейным оператором, обозначаемым опять через $\lambda(x)$. Тогда мы получаем точное W^* -представление $(\lambda, \mathcal{L}(M))$ алгебры M (см. [4]). Аналогично, определяя отображение λ_r как $\lambda_r(x)y = xy$ (для всех $x, y \in (M, \alpha)$), мы получим точное вещественное W^* -представление $(\lambda_r, \mathcal{L}(M, \alpha))$ алгебры (M, α) .

Используя результат В.Джонса указано множество возможных значений индекса для конечных вещественных W^* -подалгебр [4]. А именно показано, что это множество есть

$$\left\{4\cos^2 \frac{\pi}{q}, q \geq 3\right\} \cup [4, \infty].$$

Этот результат мы доказали методом перехода в обёртывающую W^* -алгебру. Этот результат доказывается другим методом. В частности, следуя схеме Джонса, строим возрастающую последовательность конечных вещественных подфакторов, и построим вещественный аналог, так называемую «Башню Джонса», с помощью которой получим искомое множество.

Пусть $P: \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(N)$ – естественная проекция. Проекционное отображение $Q: \mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N, \alpha) + i\mathcal{L}(N, \alpha) \rightarrow \mathcal{L}(N, \alpha)$ определим как $Q(a+ib) = a$. Тогда отображение, определяемое как

$$P = Q \circ P: \mathcal{L}(M, \alpha) \rightarrow \mathcal{L}(N, \alpha),$$

также является проекцией.

Пусть $E: M \rightarrow N$ – α -инвариантное условное ожидание [7]. Сужение $E|_{(M, \alpha)}: (M, \alpha) \rightarrow (N, \alpha)$ обозначим как $E = E|_{(M, \alpha)}$. Напомним вспомогательное утверждение из [5].

Утверждение. [5, 17.3.2]. Имеют место следующие утверждения:

- (i) $P(x) = E(x), \forall x \in M$;
- (ii) $P\lambda(x)P = \lambda(E(x)), \forall x \in M$;
- (iii) если $x \in M$, то $x \in N \Leftrightarrow E\lambda(x) = \lambda(x)P$;
- (iv) $\lambda(N)' = \{\lambda(M)', P\}''$;
- (v) $JP = PJ$ и $JPJ = P$.

Здесь $(\cdot)'$ - штрих означает коммутант алгебры, т.е.

$$M' = \{x \in B(H) : xy = yx, \forall y \in M\}.$$

Имеет место вещественный аналог этого результата.

Предложение 1. Имеют место:

- 1) $P(x) = E(x), \forall x \in (M, \alpha)$;

- 2) $P\lambda_\gamma(x)P = \lambda_\gamma(E(x)), \quad \forall x \in (M, \alpha)$;
- 3) если $x \in (M, \alpha)$, то $x \in (N, \alpha) \Leftrightarrow E\lambda_\gamma(x) = \lambda_\gamma(x)P$;
- 4) $\lambda_\gamma(N, \alpha)' = \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}''$;
- 5) $JP = PJ$ и $JPJ = P$.

Доказательство. 1). По утверждению (i), имеем $P(x) = E(x)$ для $\forall x \in M$, в частности, для $\forall x \in (M, \alpha)$. Так как $E = E|_{(M, \alpha)}$, то для $\forall x \in (M, \alpha)$ имеем $E(x) = E(x)$. Тогда из $(N, \alpha) \subset \tilde{L}(N, \alpha)$ мы получим

$$P(x) = P_1 \circ P(x) = P_1 \circ E(x) = P_1 \circ E(x) = E(x), \quad \text{для } \forall x \in (M, \alpha).$$

2). Так как $(M, \alpha) \subset M$, то для $\forall x \in (M, \alpha)$ имеем $P\lambda_\gamma(x)P = P\lambda(x)P$. В силу утверждения (ii) получим $P\lambda(x)P = \lambda(E(x))$. Тогда для $x \in (M, \alpha)$ имеем $E(x) = E(x)$, следовательно, $\lambda(E(x)) = \lambda_\gamma(E(x))$. Так как $E(x) \in (N, \alpha) \subset N$ и $\lambda_\gamma + i\lambda_\gamma = \lambda$, то получим $\lambda(E(x)) = \lambda_\gamma(E(x))$. Таким образом, имеем $P\lambda_\gamma(x)P = \lambda_\gamma(E(x))$.

3). Пусть $x \in (N, \alpha)$. Так как $(N, \alpha) \subset N$, то в силу утверждения (iii) имеем $E\lambda(x) = \lambda(x)P$. Поскольку $\lambda_\gamma + i\lambda_\gamma = \lambda$ и $x \in (M, \alpha)$, то получим $P\lambda_\gamma(x) = \lambda_\gamma(x)P$. Обратно, пусть $x \in (M, \alpha)$ и $P\lambda_\gamma(x) = \lambda_\gamma(x)P$. Так как $(M, \alpha) \subset M$, то $P\lambda(x) = \lambda(x)P$. В силу утверждения (iii) имеем $x \in N$. Тогда $x \in (N, \alpha)$, поскольку $x \in (M, \alpha)$.

4). Из $\lambda_\gamma + i\lambda_\gamma = \lambda$ и утверждения (iv) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_\gamma(N, \alpha)' + i\lambda_\gamma(N, \alpha)' &= \lambda(N)' = \{\lambda(M)', P\}'' = \{\lambda_\gamma(M, \alpha)' + i\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}'' = \\ &= \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}'' + i \cdot \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}'' = \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}'' + i \cdot \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}'' . \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_\gamma(N, \alpha)' = \{\lambda_\gamma(M, \alpha)', P\}''$.

5) В силу $P = E$, (i) и (v), для любого $x \in (M, \alpha)$ мы имеем $JP(x) = JE(x) = JE(x) = JP(x) = PJ(x) = EJ(x) = EJ(x) = PJ(x)$, т.е. $PJ = JP$. Аналогично показывается, что $JPJ = P$. Предложение доказано.

По аналогии с определением алгебры $\langle M, P \rangle = \{\lambda(M), P\}''$, положим $\langle (M, \alpha), P \rangle = \{\lambda_\gamma(M, \alpha), P\}''$. Ясно, что $\langle (M, \alpha), P \rangle$ является вещественной W^* -алгеброй, действующей на $\tilde{L}(M, \alpha)$.

Имеет место следующий результат.

Предложение 2. Имеют место следующие утверждения:

- (i) $\langle (M, \alpha), P \rangle$ является вещественным фактором и $\langle (M, \alpha), P \rangle = J\lambda_\gamma(N, \alpha)'J$;
- (ii) $\left\{ \sum_i \lambda_\gamma(x_i)P\lambda_\gamma(y_i), \quad x_i, y_i \in (M, \alpha) \right\}$ – слабо плотная * подалгебра алгебры $\langle (M, \alpha), P \rangle$;
- (iii) отображение $x \rightarrow \lambda_\gamma(x)P$ является *-изоморфизмом из (N, α) на $P\langle (M, \alpha), P \rangle P$;
- (iv) вещественный фактор $\langle (M, \alpha), P \rangle$ – конечен тогда и только тогда, когда $\lambda_\gamma(N, \alpha)'$ –

конечна, и это эквивалентно условию $[(M, \alpha):(N, \alpha)] < \infty$;

(v) Если вещественные факторы (N, α) и (M, α) являются типа Π_1 и $[(M, \alpha):(N, \alpha)] < \infty$, то $\langle (M, \alpha), P \rangle$ также имеет тип Π_1 ;

Доказательство. (i). По [5, 17.3.2(i)] имеем $\langle M, P \rangle = J\lambda(N)'J$ и алгебра $\langle M, P \rangle$ является фактором. Отсюда получим:

$$\langle (M, \alpha), P \rangle + i\langle (M, \alpha), P \rangle = \langle M, P \rangle = J\lambda(N)'J = J\lambda_\tau(N, \alpha)'J + iJ\lambda_\tau(N, \alpha)'J,$$

следовательно, $\langle (M, \alpha), P \rangle = J\lambda_\tau(N, \alpha)'J$ и $\langle (M, \alpha), P \rangle$ – вещественный фактор.

(ii). Так как $\left\{ \sum_k \lambda(a_k)P\lambda(b_k), a_k, b_k \in M \right\}$ – слабо плотно в $\langle M, P \rangle$, то, в силу равенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_i \lambda_\tau(x_i)P\lambda_\tau(y_i), x_i, y_i \in (M, \alpha) \right\} + i \cdot \left\{ \sum_j \lambda_\tau(z_j)P\lambda_\tau(s_j), z_j, s_j \in (M, \alpha) \right\} = \\ & = \left\{ \sum_k \lambda(a_k)P\lambda(b_k), a_k, b_k \in M \right\} \subset \langle M, P \rangle = \langle (M, \alpha), P \rangle + i\langle (M, \alpha), P \rangle, \end{aligned}$$

вещественная *-подалгебра $\left\{ \sum_i \lambda_\tau(x_i)P\lambda_\tau(y_i), x_i, y_i \in (M, \alpha) \right\}$ является слабо плотной в $\langle (M, \alpha), P \rangle$.

(iii). Так как

$$\begin{aligned} \langle (M, \alpha), P \rangle + i\langle (M, \alpha), P \rangle &= \{ \lambda_\tau(M, \alpha), P \}'' + i\{ \lambda_\tau(M, \alpha), P \}'' = \\ &= \{ \lambda_\tau(M, \alpha) + i\lambda_\tau(M, \alpha), P \}'' = \{ \lambda(M), P \}'' = \langle M, P \rangle \end{aligned}$$

и в силу того, что отображение

$$(N, \alpha) + i(N, \alpha) = N \mapsto P\langle M, P \rangle P = P\langle (M, \alpha), P \rangle P + iP\langle (M, \alpha), P \rangle P,$$

определённое как $x \mapsto \lambda(x)P$ является *-изоморфизмом, отображение $(N, \alpha) \rightarrow P\langle (M, \alpha), P \rangle P$, определённое как $x \mapsto \lambda_\tau(x)P$ также является *-изоморфизмом.

(iv). По [5, 17.3.4(iv)], конечность алгебры $\langle M, P \rangle$ эквивалентна конечности алгебры $\lambda(N)'$, и это эквивалентно условию $[M, N] < \infty$. Тогда, в силу $\langle (M, \alpha), P \rangle + i\langle (M, \alpha), P \rangle = \langle M, P \rangle$ и $\lambda_\tau(N, \alpha)' + i\lambda_\tau(N, \alpha)' = \lambda(N)'$ мы получаем доказательство утверждения (iv).

(v). В силу [5, 17.3.4(v)], алгебра $\langle M, P \rangle$ имеет тип Π_1 . Тогда, опять по $\langle (M, \alpha), P \rangle + i\langle (M, \alpha), P \rangle = \langle M, P \rangle$, алгебра $\langle (M, \alpha), P \rangle$ также имеет тип Π_1 . Предложение доказано.

Предложение 3. Если $\beta = [(M, \alpha):(N, \alpha)] < \infty$, то

$$tr(\lambda_\tau(x)) = \tau(x) \text{ и } \beta tr(\lambda_\tau(x)P) = \tau(x) \text{ для всех } x \in (M, \alpha),$$

где $tr(\cdot)$ – единственный точный нормальный след на $\langle (M, \alpha), P \rangle$. В частности, имеем:

$$tr(P) = [(M, \alpha):(N, \alpha)]^{-1} \text{ и } [\langle (M, \alpha), P \rangle:(M, \alpha)] = [(M, \alpha):(N, \alpha)].$$

Доказательство. Так как $tr \circ \lambda_\tau(\cdot)$ также является точным нормальным следом, то $tr \circ \lambda_\tau = \tau$.

В силу предложения 1 (2), $P \in \lambda_\zeta(N, \alpha)'$. Поскольку, по предложению 1 (3), отображение $x \rightarrow \lambda_\zeta(x)P$ является *-изоморфизмом, то для $x \in (M, \alpha)$ имеет место $tr(\lambda_\zeta(x)P) = k\tau(x)$, где k – некоторое положительное число. При $x=1$ мы получим $k = tr(P)$. По предложению 1 (4), $\lambda_\zeta(N, \alpha)'$ – конечна, следовательно, имеем $[(M, \alpha) : (N, \alpha)] = \dim_{(N, \alpha)} \mathcal{L}(M, \alpha) = \frac{tr(e)}{tr'(e')}$, где ξ – произвольный ненулевой вектор, tr' – единственный точный нормальный конечный след на $\lambda_\zeta(N, \alpha)'$, e_ξ и e'_ξ – циклические проекторы из $\mathcal{L}(M, \alpha)$ на $\lambda_\zeta(N, \alpha)'\xi$ и $\overline{\lambda_\zeta(N, \alpha)}\xi$, соответственно. Так как $\lambda_\zeta(N, \alpha)' \supset \lambda_\zeta(M, \alpha)'$, то $e_\xi = 1_{\mathcal{L}(M, \alpha)}$. Кроме того, $\overline{\lambda_\zeta(N, \alpha)}\mathbf{1} = \overline{(N, \alpha)} = \mathcal{L}(M, \alpha)$. Отсюда $tr(P)^{-1} = [(M, \alpha) : (N, \alpha)]$. Тогда, используя предложения 1 (3) и предложения 2 (1), мы получим: $[(M, \alpha) : (N, \alpha)] = tr'(P)^{-1} = tr(JPJ)^{-1} = tr(P)^{-1}$. Следовательно, для любого $x \in (M, \alpha)$ мы имеем:

$$tr(\lambda_\zeta(x)P) = tr(P\lambda_\zeta(x)) = tr(P)tr(\lambda_\zeta(x)) = [(M, \alpha) : (N, \alpha)]^{-1} \cdot \tau(x).$$

Тогда, по определению индекса, получаем:

$$\begin{aligned} [\langle (M, \alpha), P \rangle : (M, \alpha)] &= [\lambda_\zeta(N, \alpha)' : (M, \alpha)] = \dim_{\lambda_\zeta(N, \alpha)'} \mathcal{L}(M, \alpha) = \\ &= \dim_{(N, \alpha)} \mathcal{L}(M, \alpha) = [(M, \alpha) : (N, \alpha)]. \end{aligned}$$

И наконец, для $x \in (M, \alpha)$ имеем:

$$\begin{aligned} \beta tr(\lambda_\zeta(x)P) &= \beta tr(P\lambda_\zeta(x)) = [(M, \alpha) : (N, \alpha)] \cdot tr(P)tr(\lambda_\zeta(x)) = \\ &= [(M, \alpha) : (N, \alpha)] \cdot [(M, \alpha) : (N, \alpha)]^{-1} \cdot tr(\lambda_\zeta(x)) = \tau(x). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Таким образом, при $[(M, \alpha) : (N, \alpha)] < \infty$, по предложению 2, мы имеем две новых конечных вещественных фактора: $\lambda_\zeta(M, \alpha)$ и $\langle (M, \alpha)P \rangle = \{ \lambda_\zeta(M, \alpha), P \}''$ на вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{L}(M, \alpha)$. Введём следующие обозначения: $(M, \alpha)_0^{(0)} = (N, \alpha)$, $(M, \alpha)_0^{(1)} = (N, \alpha)$, $(M, \alpha)_1^{(1)} = (M, \alpha)$, $(M, \alpha)_1^{(2)} = \lambda_\zeta((M, \alpha)_1^{(1)})$, $P_1 = P$, $(M, \alpha)_2^{(2)} = \langle (M, \alpha), P \rangle = \langle (M, \alpha)_1^{(2)}, P_1 \rangle = \{ (M, \alpha)_1^{(2)}, P_1 \}''$. Поскольку $[(M, \alpha)_2^{(2)} : (M, \alpha)_1^{(2)}] = [(M, \alpha)_1^{(1)} : (M, \alpha)_0^{(1)}] = [(M, \alpha) : (N, \alpha)] < \infty$, то для последовательности, применяя предложение 2, мы имеем следующую картину:

$$\begin{array}{c}
 (M, \alpha)_0^{(0)} \\
 \downarrow \lambda_0 \\
 (M, \alpha)_0^{(1)} \subset (M, \alpha)_1^{(1)} \\
 \downarrow \lambda_1 \\
 (M, \alpha)_1^{(2)} \subset (M, \alpha)_2^{(2)} = \langle (M, \alpha)_1^{(2)}, P_1 \rangle \\
 \downarrow \lambda_2 \\
 \dots \dots \dots \\
 \downarrow \lambda_k \\
 (M, \alpha)_k^{(k+1)} \subset (M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)} = \langle (M, \alpha)_k^{(k+1)}, P_k \rangle \\
 \downarrow \lambda_{k+1} \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

Отсюда следует, что, существует индуктивная система конечных вещественных факторов:

$$(M, \alpha)_0^{(0)} \xrightarrow{\Phi_0} (M, \alpha)_1^{(1)} \xrightarrow{\Phi_1} \dots \xrightarrow{\Phi_k} (M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)} = \langle (M, \alpha)_k^{(k+1)}, P_k \rangle \xrightarrow{\Phi_{k+1}} \dots,$$

где $(M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)}$ - вещественный конечный фактор на $L((M, \alpha)_k^{(k)})$, $P_k: L((M, \alpha)_k^{(k)}) \rightarrow L((M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)})$ - естественный проектор и Φ_k - *-изоморфизм из $(M, \alpha)_k^{(k)}$ на $(M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)}$, $\forall k \geq 1$.

Введём следующие обозначения $\times_k(M, \alpha) = \{(x_s)_{s \geq 0} : x_s \in (M, \alpha)_s^{(s)}\}$, $A = \{(x_s) \in \times_k(M, \alpha) : x_{s+1} = \Phi_s(x_s), \text{ для всех } s \geq k_0, \text{ для некоторого } k_0\}$, $I = \{(x_s) \in A : x_s = 0, \text{ для } s \geq k_0\}$. Не трудно показать, что множество $\times_k(M, \alpha)$ естественным образом является вещественной *-алгеброй, A является её *-подалгеброй. При этом I является двухсторонним *-идеалом A , а индуктивный лимит последовательности $\{(M, \alpha)_k^{(k)}, \Phi_k\}$ будет фактором алгебры A/I , т.е. $\varinjlim \{(M, \alpha)_k^{(k)}, \Phi_k\} = A/I$. Теперь положим:

$(M, \alpha)_k = \{x \in A/I : \text{существует } (0, 0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \in \mathcal{X}, \text{ где } x_{s+1} = \Phi_s(x_s), s \geq k\}$. Тогда мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 \in (M, \alpha)_0^{(0)} & \xrightarrow{\Phi_0} & (M, \alpha)_1^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_1} & (M, \alpha)_2^{(2)} & \xrightarrow{\Phi_2} & \dots \xrightarrow{\Phi_{k-1}} & (M, \alpha)_k^{(k)} & \xrightarrow{\Phi_k} & \dots \\
 \downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & & \downarrow \psi_k & & \\
 1 \in (M, \alpha)_0 & \subset & (M, \alpha)_1 & \subset & (M, \alpha)_2 & \subset & \dots & \subset & (M, \alpha)_k & \subset \dots
 \end{array}$$

где, ψ_k *-изоморфизм из $(M, \alpha)_k^{(k)}$ на $(M, \alpha)_k$, определённый как $\psi_k(x_k) = x$ для всех $x_k \in (M, \alpha)_k^{(k)}$. Положим $e_k = \psi_{k+1}(P_k), \forall k \geq 1$. Так как $(M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)} = \langle \Phi_k((M, \alpha)_k^{(k)}), P_k \rangle$, то $(M, \alpha)_{k+1} = \langle (M, \alpha)_k, e_k \rangle$, следовательно, $(M, \alpha)_{k+1}$ является вещественным конечным фактором с

$$[(M, \alpha)_{k+1} : (M, \alpha)_k] = [(M, \alpha) : (N, \alpha)] = [M, N], \quad \forall k \geq 0.$$

Определение. Последовательность $1 \in (M, \alpha)_0 \subset (M, \alpha)_1 \subset (M, \alpha)_2 \subset \dots \subset (M, \alpha)_{k+1} = \langle (M, \alpha)_k, e_k \rangle \subset \dots$ - возрастающих вещественных подфакторов назовём *вещественным аналогом башни Джонса*.

Предложение 4. Пусть M – конечный фактор, α – инволютивный *-антиавтоморфизм M и пусть $N \subset M$ – подфактор с $[M:N] < \infty$ и $\alpha(N) \subset N$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) пара $(M, \alpha)_0 \subset (M, \alpha)_1$ *-изоморфна к парам $(N, \alpha) \subset (M, \alpha)$, соответственно;
- (ii) $(M, \alpha)_k$ – конечный вещественный фактор и $[(M, \alpha)_{k+1} : (M, \alpha)_k] = [(M, \alpha) : (N, \alpha)] = [M, N], \quad \forall k \geq 0;$
- (iii) пусть τ_k – единственный точный нормальный след на $(M, \alpha)_k$. Тогда для любого $x \in (M, \alpha)_k$ и $k \geq 1, \tau_{k+1}|_{(M, \alpha)_k} = \tau_k$ и $\beta \tau_{k+1}(xe_k) = \tau_k(x)$. В частности, $\tau(e_k) = \beta^{-1}$ и $\tau|_{(M, \alpha)_k} = \tau_k, \forall k \geq 1;$
- (iv) $(M, \alpha)_{k+1}$ порождается алгеброй $(M, \alpha)_k$ и проекторами $\{e_1, \dots, e_k\}, \forall k \geq 1;$
- (v) $e_k e_{k+1} e_k = \beta^{-1} e_k, e_{k+1} e_k e_{k+1} = \beta^{-1} e_{k+1}$ и $e_k e_j = e_j e_k$, для $|k-j| \geq 2$.

Доказательства утверждений (i)–(iv) следуют из приведённых выше. Докажем утверждение v): пусть $(k-j) \geq 2$ и $j \geq 1$. Заметим, что

$$e_j \in (M, \alpha)_{k-1}, \quad e_k \in (M, \alpha)_{k+1}.$$

Ясно, что равенство $e_k e_j = e_j e_k$ влечет то, что элементы $\phi_k \circ \phi_{k-1} \circ \Psi_{k-1}^{-1}(e_j)$ и $\Psi_{k+1}^{-1}(e_k)$ коммутируют. Положим

$$(\overline{N, \alpha}) = \phi_{k-1} \left((M, \alpha)_{k-1}^{(k-1)} \right), \quad (\overline{M, \alpha}) = \left((M, \alpha)_k^k \right), \quad P = P_k, \quad (\overline{M, \alpha})_1 = \left((M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)} \right).$$

Тогда для проекции $P: \mathcal{L}(\overline{M, \alpha}) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{N, \alpha})$ имеем:

$$(\overline{M, \alpha})_1 = \langle \lambda(\overline{M, \alpha}), P \rangle = \left\{ \lambda(\overline{M, \alpha}), P \right\}''.$$

Так как $\phi_k \circ \phi_{k-1} \circ \Psi_{k-1}^{-1}(e_j) = \phi_k \circ \phi_{k-1}(P_j) \in \lambda(\overline{N, \alpha})$, и $\Psi_{k+1}^{-1}(e_k) = P$, то из предложения 1 (iii) следует, что $\phi_k \circ \phi_{k-1}(P_j)$ и P коммутируют. Следовательно, мы получим $e_k e_j = e_j e_k$.

Пусть $\forall k \geq 1$ и пусть

$$\begin{aligned} (\overline{N, \alpha}) &= \left((M, \alpha)_{k-1}^{(k)} \right), \quad (\overline{M, \alpha}) = \left((M, \alpha)_k^{(k)} \right), \quad \phi = \phi_k (= \lambda); \\ (\overline{M, \alpha})_1 &= \left((M, \alpha)_{k+1}^{(k+1)} \right), \quad \Psi = \phi_{k+1} (= \lambda); \quad \text{и} \quad (\overline{M, \alpha})_2 = \left((M, \alpha)_{k+2}^{(k+2)} \right). \end{aligned}$$

Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} & \left((\overline{N, \alpha}) \subset (\overline{M, \alpha}) \xrightarrow{\phi = \lambda} \langle \phi(\overline{M, \alpha}), P_1 \rangle = \right. \\ & \left. = (\overline{M, \alpha})_1 \xrightarrow{\Psi = \lambda} \langle \Psi(\overline{M, \alpha})_1, P_2 \rangle = (\overline{M, \alpha})_2, \right. \end{aligned}$$

где $P_1: \mathcal{L}(\overline{M, \alpha}) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{N, \alpha})$ – проекция, $(\overline{M, \alpha})_1$ – конечный вещественный фактор на $\mathcal{L}(\overline{M, \alpha})$, порождённый алгеброй $\phi(\overline{M, \alpha}) = \lambda(\overline{M, \alpha})$ и проектором P_1 ; $P_2: \mathcal{L}((\overline{M, \alpha})_1) \rightarrow \mathcal{L}(\phi(\overline{M, \alpha}))$ – проекция и $(\overline{M, \alpha})_2$ – конечный вещественный фактор на $\mathcal{L}(\overline{M, \alpha})_1$, порождённый алгеброй $\Psi(\overline{M, \alpha})_1 = \lambda(\overline{M, \alpha})_1$ и проектором P_2 .

Рассмотрим условные ожидания:

$$E: (\overline{M, \alpha}) \rightarrow (\overline{N, \alpha}) \quad \text{и} \quad F: (\overline{M, \alpha})_1 \rightarrow \phi(\overline{M, \alpha}),$$

т.е., $E = (P_1|_{(\overline{M, \alpha})}), \quad F = (P_2|_{(\overline{M, \alpha})_1})$. Тогда равенства $e_k e_{k+1} e_k = \beta^{-1} e_k$, и

$e_{k+1}e_k e_{k+1} = \beta^{-1}e_{k+1}$ эквивалентно к равенствам $P_2\Psi(P_1)P_2 = \beta^{-1}P_2$, и $\Psi(P_1)P_2\Psi(P_1) = \beta^{-1}\Psi(P_1)$.

Сначала докажем, что $F(P_1) = \beta^{-1}\mathbf{1}$. Действительно, так как $F(P_1) = P_2(P_1)$, то

$$\begin{aligned} F(P_2) = \beta^{-1}\mathbf{1} &\Leftrightarrow (P_1 - \beta^{-1}\mathbf{1}) \perp L^2(\overline{M, \alpha}) \\ &\Leftrightarrow \langle (P_1 - \beta^{-1}\mathbf{1}), \lambda(x^*) \rangle = 0, \quad \forall x \in \overline{M, \alpha}. \end{aligned}$$

Если tr – канонический след на $(\overline{M, \alpha})_1$, тогда равенство $F(P_1) = \beta^{-1}\mathbf{1}$ эквивалентно

$$\beta tr(\lambda_r(x)P_1) = tr(\lambda_r(x)) = \tau(x), \quad \forall x \in \overline{M, \alpha}_1$$

где τ – канонический след на $(\overline{M, \alpha})$. Отсюда, по предложению 3 имеем $F(P_1) = \beta^{-1}\mathbf{1}$.

Теперь для любой $x \in \overline{M, \alpha}_1 (\subset L^2(\overline{M, \alpha})_1)$, мы имеем

$$P_2\Psi(P_1)P_2x = F(P_1 \cdot F(x)) = F(P_1)F(x) = \beta^{-1}F(x) = \beta^{-1}P_2x$$

Отсюда $P_2\Psi(P_1)P_2 = \beta^{-1}P_2$.

Из предложения 2 следует, что множество $\left\{ \sum_i \phi(x_i)P_1\phi(y_i) \mid x_i, y_i \in \overline{M, \alpha} \right\}$ плотно в

$L^2(\overline{M, \alpha})_1$. Теперь достаточно показать, что

$$\Psi(P_1)P_2\Psi(P_1)(\phi(x)P_1\phi(y)) = \beta^{-1}\Psi(P_1)(\phi(x)P_1\phi(y)) \quad \forall x, y \in \overline{M, \alpha}.$$

Пусть $x, y \in \overline{M, \alpha}$. Так как

$$\begin{aligned} P_1\phi(x)P_1\phi(y)z &= E(xE(yz)) = \\ &= E(x)E(yz) = \phi(E(x))P_1\phi(y)z, \quad \forall z \in \overline{M, \alpha} (\subset L^2(\overline{M, \alpha})), \end{aligned}$$

то $P_1\phi(x)P_1\phi(y) = \phi(E(x))P_1\phi(y)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi(P_1)P_2\Psi(P_1)(\phi(x)P_1\phi(y)) &= P_1F(P_1\phi(x)P_1\phi(y)) = \\ &= P_1F(\phi(E(x))P_1\phi(y)) = P_1\phi(E(x))F(P_1)\phi(y) = \beta^{-1}P_1\phi(E(x))\phi(y). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} P_1\phi(E(x))z &= E(E(x)z) = E(x)E(z) = \\ &= E(xE(z)) = P_1\phi(x)P_1z, \quad \forall z \in \overline{M, \alpha} (\subset L^2(\overline{M, \alpha})), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi(P_1)P_2\Psi(P_1)(\phi(x)P_1\phi(y)) &= \\ &= \beta^{-1}P_1\phi(x)P_1\phi(y) = \beta^{-1}\Psi(P_1)(\phi(x)P_1\phi(y)), \quad \forall x, y \in \overline{M, \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем, что $\Psi(P_1)P_2\Psi(P_1) = \beta^{-1}\Psi(P_1)$. Теорема доказана.

Сформулируем один вспомогательный результат из работ [4,5].

Теорема 1. ([2,6]) Пусть $\{e_j \mid j \geq 1\}$ – последовательность ненулевых проекторов на комплексном гильбертовом пространстве H такая, что для некоторого числа $\beta \geq 1$ имеет место:

$$\beta e_i e_j = e_i, \text{ если } |i-j|=1, \text{ и } e_i e_j = e_j e_i, \text{ если } |i-j| \geq 2, \quad (1)$$

Тогда либо $\beta = 4 \cos^2 \frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$), либо $\beta \geq 4$.

Ещё раз заметим, что для любой системы $(e_n)_1^\infty$ проекторов со свойством (1) имеет место

$\beta \in \{4\cos^2(\pi/n), n \geq 3\} \cup [4, \infty]$. В предложениях 3 и 4 для числа $\beta = [(M, \alpha) : (N, \alpha)] < \infty$ построена такая система проекторов, а это значит, что в силу теореме 1 имеем следующий результат.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть M – конечный фактор и пусть α – инволютивный *-антиавтоморфизм M . Если N – подфактор M с $\alpha(N) \subset N$, то для вещественных факторов $R=(M, \alpha)$ и $Q=(N, \alpha)$ имеем:

$$\text{либо } [(M, \alpha) : (N, \alpha)] = 4\cos^2 \frac{\pi}{q} \ (q \geq 3), \text{ либо } [(M, \alpha) : (N, \alpha)] \geq 4,$$

$$\text{т.е. } [R:Q] = 4\cos^2 \frac{\pi}{q} \ \text{для } q \geq 3, \text{ либо } [R:Q] \geq 4.$$

Доказательство теоремы 2 следует из предложения 4 и теоремы 1.

Заключение. В статье изучены свойства индекса конечных вещественных подфакторов. Дана связь между понятием индекса обёртывающего (комплексного) фактора с вещественными факторами. По аналогии с комплексным случаем, построим возрастающую последовательность вещественных конечных подфакторов, называемую «Башня Джонса», с помощью которой получим множество возможных значений индекса вещественных подфакторов вещественного фактора типа II_1 .

Благодарность. Автор благодарен профессору А.А.Рахимову и доценту М.Э.Нуриллаеву за тщательную работу над статьёй, которая содействовала существенному улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Takesaki M. *Theory of operator algebras.* // I, II, III. Berlin: Springer. 1979, VIII + 415 p., 518 p, 548 p.
2. Li B.R. *Introduction to Operator Algebras.* // World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. Singapore, 1992, 738p.
3. Аюпов Ш.А. *Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.* // Ташкент, Изд. "ФАН", 1986, .121 с.
4. Jones V.F.R., *Index for Subfactors, Inventiones Math.* 72 (1983) 1-25.
5. Li B.R. *Introduction to Operator Algebras.* // World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. Singapore, 1992, 738p.
6. Murray F., von Neumann J. *On rings of operators.* // IV Ann. Math., 1943, Vol. 44, P. 716-808.
7. Usmanov Sh.M. *Conditional expectations on real W*-algebras and JW-algebras.* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2001, no. 7, 43-47.
8. Болтаев Х.Х. *Индекс подфакторов вещественного фактора типа II_1* // Доклады академии наук Республики Узбекистан. – 2014. № 2. – С. 5-6.
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. *Индекс вещественных подфакторов W^* -алгебр* // Дальневосточный математический журнал. – 2020. Т20. №2. – С. 234-246.
10. Boltaev Kh.Kh. *Index of real subfactors and graphs of real W^* -subalgebras* // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. № 3. – P. 47-55.

**СПЕКТРАЛЬНОЕ ВЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО
РАФИНИРОВАНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ**

*Расулов Тулкин Хусенович,
Бухарский государственный университет,
Бухара, Узбекистан
Акрамов Икром Исроил угли,
Бухарский государственный университет,
Бухара, Узбекистан*

Аннотация. В данной статье изучается числовая область значений для линейного оператора, квадратичная числовая область значений для операторных матриц второго порядка и блочно числовая область значений для операторных матриц n -го порядка. Представлены основные свойства этих трёх понятий и дополнены примерами. Установлено включение между блочно числовыми областями значений относительно рафинирования разложения пространства.

Ключевые слова: операторная матрица, блочно числовая область значения, прямая сумма, спектральное включение, спектр, точечный спектр.

**OPERATOR MATRITSALAR UCHUN YOYILMANING IXCHAMLASHUVIGA
NISBATAN SPEKTRAL JOYLASHTIRISH**

Annotatsiya. Ushbu maqolada chiziqli operator uchun sonli tasvir, ikkinchi tartibli operatorli matritsalar uchun kvadratik sonli tasvir va n -tartibli operatorli matritsalar uchun blok sonli tasvir tushunchalari o'rganilgan. Bu uchta tushunchalarning asosiy xossalari bayon qilindan va misollar bilan boyitilgan. Fazoning yoyilmasiga nisbatan blok sonli tasvirlar orasidagi munosabatlar o'rnatilgan.

Kalit so'zlar: operatorli matritsa, blok sonli tasvir, to'g'ri yig'indi, spektral munosabatlar, spektr, nuqtali spektr.

**SPECTRAL EMBEDDING FOR OPERATOR MATRICES WITH RESPECT TO REFINING
DECOMPOSITION**

Abstract. In this paper we study the numerical range for a linear operators, the quadratic numerical range for second-order operator matrices, and the block numerical range for n -th order operator matrices. The main properties of these three notions are given and supplemented with examples. The inclusion between block numerical ranges is established upon refinement of the decomposition of space.

Key words: operator matrix, block numerical range, direct sum, spectral inclusions, spectrum, point spectrum.

Введение. Теория линейных операторов является фундаментальной частью многих областей математики, таких как математический анализ, алгебра, функциональный анализ и математическая физика, а их изучение является важным инструментом решения теоретических и практических задач. Одним из основных понятий теории линейных операторов является понятие спектра. В случаях, когда формула действия линейного оператора не задана, задача определения области, где расположен спектр, на основе его свойств является одной из актуальных задач спектральной теории таких операторов. Нахождение указанной области осуществляется путём определения числовой области значения линейного оператора [1].

Следует отметить, что числовая область значений линейных операторов важна для изучения их алгебраических и геометрических свойств, моделирования их на компьютере и использования в различных математических моделях. В последние годы числовые области значений линейных операторов и их обобщений приобрели особое значение при решении различных физических процессов, систем дифференциальных уравнений и инженерных задач с помощью численных методов, алгоритмических подходов и компьютерного моделирования операторов в функциональных пространствах.

Одним из обобщений понятия числовой области значений является понятие квадратичной

числовой области значений [2]. Это понятие было введено для блочно-операторных матриц второго порядка, то есть матриц, элементы которых состоят из линейных операторов, действующих в банаховых или гильбертовых пространствах [3]. Одним из специальных классов блочно-операторных матриц являются Гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квантовых частиц на целочисленной решётке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозонов [4,5] или ограниченным, как в случае урезанных моделей спин-бозонов [6, 7]. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твёрдого тела [8], квантовой теории поля [9], статистической физики [10], магнито-гидродинамики [11] и квантовой механики [12].

В настоящей статье установлена связь между обычной, квадратичной, блочно числовой областью значений и спектром соответствующего типа линейных операторов. Первый пункт – это введение. Во втором пункте приведено понятие числовой области значения линейных операторов, перечислены основные свойства, и вычислены числовые области значения нескольких линейных операторов. В третьем пункте приведено понятие квадратичного числового области значения для операторных матриц второго порядка, описаны их основные свойства, и приведены некоторые примеры. В четвёртом пункте сформулированы основные свойства блочной числовой области значений для операторных матриц n -го порядка, и продемонстрированы некоторые примеры. В пятом пункте установлено спектральное вложение для неограниченных операторных матриц порядка n относительно рафинирования разложения.

Числовая область значений: основные свойства и примеры. Для операторов в гильбертовом пространстве в различных приложениях оказывается важным понятие числовой области значений (или поля значений).

Пусть \mathcal{H} - комплексное гильбертово пространство и $\mathcal{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ - линейный оператор с областью определения $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$.

Множество

$$W(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}x, x) : x \in D(\mathcal{A}), \|x\| = 1\}$$

называется числовой областью значений оператора \mathcal{A} . В общем случае множество $W(\mathcal{A})$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор \mathcal{A} замкнут.

Из определения видно, что множество $W(\mathcal{A})$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(\mathcal{A})$ дают некоторую информацию об операторе \mathcal{A} .

Понятие числовой области значений впервые введено в работе Теплица [1] в конечномерном случае для матриц и доказано, что числовая область значений этих матриц содержит все её собственные значения, то есть спектр матрицы содержится в её числовой области значений. В работе Хаусдорфа [13] показано, что числовая область значений линейного оператора является выпуклой. В работе Вингнера [14] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании числовой области значений этого оператора. Ниже для удобства читателя перечислим основные свойства числовой области значений линейного оператора [15]:

Свойство 2.1. Если \mathcal{A} ограниченный оператор, тогда $W(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|\}$;

Свойства 2.2. $W(\mathcal{A}^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(\mathcal{A})\}$;

Свойство 2.3. $W(I) = \{1\}$. Если α и β произвольные комплексные числа, тогда имеет место:

$$W(\alpha\mathcal{A} + \beta) = \alpha W(\mathcal{A}) + \beta;$$

где операции умножения множества на число и арифметического прибавления числа к множеству понимаются следующим образом:

$$\alpha\Omega := \{\alpha\lambda : \lambda \in \Omega\}, \Omega + \beta := \{\lambda + \beta : \lambda \in \Omega\}.$$

Свойство 2.4. Для самосопряжённого оператора \mathcal{A} имеет место соотношение $W(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$;

Свойство 2.5. Если \mathcal{H} конечномерное пространство, тогда множество $W(\mathcal{A})$ является компактным;

Свойство 2.6. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ унитарно эквивалентные операторы, тогда $W(\mathcal{A}) = W(\mathcal{B})$.

Пусть \mathcal{A} - замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Определим аппроксимативно точечный спектр оператора \mathcal{A} как

$$\sigma_{\text{app}}(\mathcal{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\}_1^\infty \subset D(\mathcal{A}), \|x_n\| = 1, (\mathcal{A} - \lambda)x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

Обозначим спектр и точечный спектр линейного оператора через $\sigma(\mathcal{A})$ и $\sigma_p(\mathcal{A})$ соответственно.

Свойство 2.7 (спектральное включение). Имеет место соотношение:

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A}), \sigma_{\text{app}}(\mathcal{A}) \subset \overline{W(\mathcal{A})}$$

Если $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, то $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W(\mathcal{A})}$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления числовой области значений линейного оператора.

Пример 2.1. Вычислить числовую область значений оператора

$$\mathcal{A}_1: l_2 \rightarrow l_2, \mathcal{A}_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right)$$

Легко можно проверить, что

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Видно, что

$$\inf_{\|x\|=1} (\mathcal{A}_1x, x) = 0, \sup_{\|x\|=1} (\mathcal{A}_1x, x) = \|\mathcal{A}_1\| = 1.$$

Но ни при каких значениях $x \in l_2, \|x\| = 1$ квадратичная форма (\mathcal{A}_1x, x) не принимает значение 0.

Пример 2.2. Вычислить числовую область значений оператора

$$\mathcal{A}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{A}_2(x_1, x_2) = (ax_1, bx_2),$$

где a и b произвольные вещественные числа.

Возьмём произвольный элемент $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = 1$. Тогда

$$(\mathcal{A}_2x, x) = ax_1^2 + bx_2^2$$

Если обозначить $x_1^2 = t$, тогда $x_2^2 = 1 - t$, где $t \in [0, 1]$. Поэтому

$$(\mathcal{A}_2x, x) = at + b(1 - t) = b + (a - b)t$$

Так как $t \in [0, 1]$, то

$$W(\mathcal{A}_2) = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$$

Поэтому $W(\mathcal{A}_1) = (0, 1]$. Таким образом $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \overline{W(\mathcal{A}_1)}$.

Пример 2.3. Вычислить числовую область значений оператора

$$\mathcal{A}_3: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \mathcal{A}_3(z_1, z_2) = (z_2, 0).$$

Возьмём произвольный элемент $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Обозначим $\arg z_k = \varphi_k, k = 1, 2$. Тогда $z_k = |z_k|e^{i\varphi_k}, k = 1, 2$. Для элементов $z \in \mathbb{C}^2, \|z\| = 1$ рассмотрим квадратную форму

$$(\mathcal{A}_3z, z) = \overline{z_1}z_2 = |z_1|e^{-i\varphi_1}|z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Здесь $\varphi_2 - \varphi_1 \in [0, 2\pi)$. Если обозначить $|z_1| = t$, тогда $|z_2| = \sqrt{1 - t^2}$ и $0 \leq t \leq 1$. Поэтому

$$(\mathcal{A}_3z, z) = e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}t\sqrt{1 - t^2}.$$

Видно, что когда $\varphi_2 - \varphi_1$ пробегает от 0 до 2π , квадратная форма (\mathcal{A}_3z, z) описывает окружность с центром в начале координат и с радиусом $t\sqrt{1 - t^2}$. Тогда $W(\mathcal{A}_3) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1/2\}$.

Пример 2.4. Вычислить числовую область значений оператора

$$\mathcal{A}_4: L_2[0; 1] \rightarrow L_2[0; 1], (\mathcal{A}_4f)(x) = x \int_0^1 tf(t)dt.$$

Можно показать, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_4) = \{0\}, \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_4) = \{1/3\}$.

Следовательно, $W(\mathcal{A}_4) = [0; 1/3]$.

Вывод. Пусть \mathcal{H} гильбертово пространство и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in L(\mathcal{H})$. Тогда $\overline{W(\mathcal{A})} = [m_{\mathcal{A}}, M_{\mathcal{A}}]$, где

$$m_{\mathcal{A}} := \inf_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x), M_{\mathcal{A}} := \sup_{\|x\|=1} (\mathcal{A}x, x)$$

Квадратичная числовая область значений: основные свойства и примеры. Надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовая область значений не всегда даёт достаточно хорошую структуру.

Например, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \in L(\mathcal{H})$ и

$$\sigma(\mathcal{A}) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2, \max\Omega_1 < \min\Omega_2,$$

то $\Omega_k \subset \mathbb{R}$ и $\overline{W(\mathcal{A})} = [\min\Omega_1; \max\Omega_2]$.

Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанном случае, в работе [2] введено понятие квадратичной числовой области значений. Для полноты картины ниже мы приводим определение этого понятия.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, где \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 гильбертово пространство. Тогда оператор $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ всегда записывается в виде блочно-операторной матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с линейными ограниченными операторами $A_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 1, 2$.

Отметим, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow A_{ii} = A_{ii}^*, A_{21} = A_{12}^*.$$

Для неограниченного линейного оператора \mathcal{A} в \mathcal{H} , его область определения $D(\mathcal{A})$ необязательно должна быть разложимой как прямая сумма $D_1 \oplus D_2$ подпространств $D_1 \subset \mathcal{H}_1$, $D_2 \subset \mathcal{H}_2$ и следовательно, утверждение о том, что оператор \mathcal{A} имеет представление (1) является дополнительным предположением. В этом случае

$$D(\mathcal{A}) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Пусть $(\cdot, \cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i$ -скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}_i, i = 1, 2$, соответственно.

Определение 3.1. Множество всех собственных значений матрицы

$$\mathcal{A}_f := \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}, f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$$

таких, что $\|f_i\|_i = 1, i = 1, 2$ называется квадратичной числовой областью значений оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, соответствующей представлению (1) блочно операторной матрицы \mathcal{A} и обозначается как $W^2(\mathcal{A})$, т.е.

$$W^2(\mathcal{A}) := \bigcup_{\|f_i\|_i=1, i=1,2} \sigma_p(\mathcal{A}_f), f = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$$

Теперь перечислим основные свойства (без доказательства) квадратной числовой области значений.

Свойство 3.1. $W^2(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$.

Свойство 3.2. Если операторная матрица \mathcal{A} имеет нижнюю или верхнюю треугольную форму, т.е.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ или } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

то $W^2(\mathcal{A}) = W(A_{11}) \cup W(A_{22})$.

Свойство 3.3. Если $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$, то

$$W^2(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|\}$$

и оно замкнуто если $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Свойство 3.4. Пусть $U_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ и $U_2 \in L(\mathcal{H}_2)$ унитарные операторы и $U = \text{diag}(U_1, U_2)$. Тогда $W^2(U^{-1}\mathcal{A}U) = W^2(\mathcal{A})$.

Приведём дополнительную удобную формулу для исследования квадратичной числовой области значений.

Для $f = (f_1, f_2), \|f_i\| = 1$ положим $a_{ij}(f) := (A_{ij}f_j, f_i)$ и

$$E_{\pm}(f) := \frac{a_{11}(f) + a_{22}(f) \pm \sqrt{(a_{11}(f) - a_{22}(f))^2 + 4|a_{12}(f)|^2}}{2}.$$

Тогда в случае $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ имеет место равенство:

$$W^2(\mathcal{A}) = \bigcup_{\|f_i\|=1} \{E_+(f), E_-(f)\}.$$

Теорема 3.1. Если $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H}), \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, то имеет место соотношение:

$$\sigma_p(\mathcal{A}) \subset W^2(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^2(\mathcal{A})}.$$

Для доказательства см. [2].

Замечание 3.1. Вообще говоря, множество $W^2(\mathcal{A})$ невыпуклое, оно состоит из не более двух компонент.

Пример 3.1. Вычислить квадратичной числовой области значений оператора

$$\mathcal{A}_5: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{A}_5 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

Легко можно проверить, что для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x_i\| = 1$ верна

$$(\mathcal{A}_5)_x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \sigma_p((\mathcal{A}_5)_x) = \{a, b\}.$$

Поэтому, по определению $W^2(\mathcal{A}_5) = \{a, b\}$. Следовательно,

$$W^2(\mathcal{A}_5) \subset W(\mathcal{A}_5) = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}].$$

Пример 3.2. Вычислить квадратичную числовую область значений оператора

$$\mathcal{A}_6: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{A}_6 = \begin{pmatrix} 10 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Из

$$\det \begin{pmatrix} 10 - \lambda & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0$$

следует, что $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 11$.

Следовательно,

$$W(\mathcal{A}_6) = [2, 11], W^2(\mathcal{A}_6) = \{2, 11\}.$$

Видно, что $W^2(\mathcal{A}_6) \subset W(\mathcal{A}_6)$.

Пример 3.3. Пусть $\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_2 := L_2[0, 1]$. В гильбертовом пространстве \mathcal{H}_1 рассмотрим

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$A_{11}f_1 = af_1, A_{12}f_2 = \int_0^1 f_2(t)dt, (A_{22}f_2)(x) = af_2(x), a \in \mathbb{R}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$E_{\pm}(f) = a \pm \left| \int_0^1 f_2(t)dt \right|.$$

Следовательно,

$$W^2(\mathcal{A}) = [a - 1, a + 1].$$

Блочно числовая область значений для операторных матриц n-го порядка: основные свойства и примеры. Блочно-числовая область значений для любого n с ограниченными элементами была введена в работе [3]. Здесь мы обобщим понятие блочно-числовой области значений для $n \times n$ операторных матриц с неограниченными элементами и изучим некоторые её элементарные свойства.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ натуральное число с условием $n \geq 3$, $\mathcal{H}_i, i = 1, \dots, n$ - гильбертовы пространства и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$. В гильбертовом пространстве \mathcal{H} рассмотрим линейные операторы \mathcal{A} , действующие как $n \times n$ - операторные матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где матричные элементы $A_{ij}: \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 1, \dots, n$, плотно определенные, допускающие замыкание линейные операторы и область определения

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n D(A_{ij}) \right),$$

оператора \mathcal{A} также плотна в \mathcal{H} .

Блочно-числовая область значений для 2×2 -операторных матриц также называется квадратичночисловой областью значений, которая введена в работе [2] и в дальнейшем исследована в серии работ, в частности [16], [17] (см. также [3]), в последних двух публикациях спектральные включения доказаны для диагонально доминирующих и вне диагонально доминирующих операторных матриц. Блочно-числовая область значений для любого n с ограниченными элементами была введена в работе [18].

В этом пункте мы обобщим блочно-числовую область значений для $n \times n$ -операторных матриц с неограниченными элементами и изучим некоторые её элементарные свойства. С этого момента предположим, что $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ - гильбертовы пространства; через $(\cdot, \cdot)_i$ и $\|\cdot\|_i$ обозначим скалярное произведение и соответствующую норму в $\mathcal{H}_i, i = \overline{1, n}$, соответственно.

Пусть \mathcal{A} -операторная матрица в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ с областью определения

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^n \left(\bigcap_{i=1}^n D(A_{ij}) \right).$$

Положим

$$\mathbb{S}^n := \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} := \left\{ f = (f_1, \dots, f_n)^t \in \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n, \|f_j\|_j = 1, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Для $f \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}^n$ определим $n \times n$ -матрицу

$$\mathcal{A}_f := \left((A_{ij}f_j, f_i)_i \right)_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{C}).$$

Тогда множество собственных значений этих матриц

$$W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}) := \bigcup \{ \sigma_p(\mathcal{A}_f) : f \in \mathbb{S}^n \}$$

называется блочно-числовой областью значений оператора \mathcal{A} относительно $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$; для фиксированного разложения \mathcal{H} мы также пишем:

$$W^n(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}(\mathcal{A}).$$

Так как $\sigma_p(\mathcal{A}_f) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0 \}$ для всех $f \in \mathbb{S}^n$, имеет место эквивалентное представление:

$$W^n(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists f \in \mathbb{S}^n, \det(\mathcal{A}_f - \lambda) = 0 \}.$$

При $n = 1$, блочно-числовая область значений - это обычная числовая область значений оператора \mathcal{A} . При $n = 2$ блочно-числовая область значений - это квадратичная числовая область значений, которая введена в работе [2]. При $n = 3$ блочно-числовая область значений - это кубическая числовая область значений. Если $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{C})$ - $n \times n$ -матрица, то $W^n(\mathcal{A})$ совпадает с множеством собственных значений матрицы \mathcal{A} . Если \mathcal{A} - симметрическая, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, то $W^n(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$.

5. Спектральное вложение для операторных матриц относительно рафинирования разложения. Следующее утверждение является прямым обобщением факта, что числовая область значений содержится в квадратично-числовой области значений (см. утверждение 3.2 из [4]):

$$W^n(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A}).$$

Если при $n > k$, имеют место разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ и $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{H}}_k$, то включение $W^n(\mathcal{A}) \subset W^k(\mathcal{A})$ не всегда верно.

Включение будет верно, если $n \geq k$ и $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ есть рафинирование (продолжение) пространства $\tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{H}}_k$. Следовательно, в этом случае множество $W^n(\mathcal{A})$ может дать хорошее спектральное вложение, чем $W^k(\mathcal{A})$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$, и пусть $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ есть рафинирование пространства $\tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{H}}_k$, т.е. существуют целые числа $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_k = n$ такие, что

$$\tilde{\mathcal{H}}_l = \mathcal{H}_{i_{l-1}} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{i_l}, l = 1, \dots, k.$$

Тогда $W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} \subset W_{\tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\mathcal{H}}_k}$, или, коротко, $W^n(\mathcal{A}) \subset W^k(\mathcal{A})$ при $n \geq k$ относительно рафинирования разложения.

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству для ограниченной \mathcal{A} , см. [18]; поэтому здесь дадим только схему доказательства. Достаточно рассмотреть случай $k = n - 1$; общий случай следует из индукции. Если $k = n - 1$, то существует $k_0 \in \{1, \dots, n - 1\}$ такое, что

$$\tilde{\mathcal{H}}_l = \mathcal{H}_l, l \in \{1, \dots, k_0 - 1\}, \tilde{\mathcal{H}}_{k_0} = \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1}, \tilde{\mathcal{H}}_l = \mathcal{H}_{l+1}, l \in \{k_0 + 1, \dots, n - 1\};$$

заметим, что при $k_0 = 1$ и $k_0 = n - 1$ первое и последнее множества, соответственно, являются пустыми. Если применим теорему о спектральном включении [18] для блочно-числовой области значений матриц к каждой матрице \mathcal{A}_f с $f \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}$, получим:

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} &= W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} \\ &= \bigcup \{ \sigma(\mathcal{A}_f) : f \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} \} \\ &\subset \bigcup \{ W_{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}(\mathcal{A}_f) : f \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} \}. \end{aligned}$$

Теперь, следуя схеме доказательства [3], можно закончить доказательство теоремы, показывая, что для каждой пары

$$f \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{k_0} \oplus \mathcal{H}_{k_0+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n} \text{ и } x \in \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C},$$

существует $g \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}$ такое, что $\sigma \left((\mathcal{A}_f)_x \right) = \sigma(\mathcal{A}_g)$ и следовательно,

$$W_{\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}}(\mathcal{A}_f) \subset W_{\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n}.$$

Замечание. Отметим, что включение $W^n(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$ для каждого разложения гильбертова пространства $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n$ является специальным случаем $k = 1$ теоремы 5.1.

Закключение. В данной статье вводятся понятия числовой области значений линейных операторов, квадратичной числовой области значений для операторных матриц второго порядка и блочной числовой области значений для операторных матриц n -го порядка (в общем неограниченном случае); их основные свойства описываются и демонстрируются на нескольких примерах. Описан удобный метод вычисления числовой области значений линейного ограниченного самосопряжённого

оператора. Приведено эквивалентное представление для блочной числовой области значений. Кроме того, установлено спектральное вложение для неограниченных операторных матриц порядка n относительно рафинирования разложения. Представленные данные используются для оценки нижней и верхней границ спектра матриц с линейно ограниченными операторами n -го порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. O.Toeplitz. *Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer*. *Math. Z.*, 2:1-2 (1918), pp. 187-197.
2. H.Langer, C.Tretter. *Spectral decomposition of some non-self-adjoint block operator matrices*, *J. Oper. Theory*, 39 (1998), pp. 339-359.
3. C.Tretter. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*. Imperial College Press, 2008.
4. H.Spohn. *Ground states of the spin-boson Hamiltonian*. *Comm. Math. Phys.*, 123 (1989), pp. 277-304.
5. M.Hübner, H.Spohn. *Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian*. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 62:3 (1995), pp. 289-323.
6. Ю.В.Жуков, Р.А.Минлос. *Спектр и рассеяние в модели «спин-бозон» с не более чем тремя фотонами*. *Теор. и матем. физика*, 103:1 (1995), С. 63-81.
7. R.A.Minlos, H.Spohn. *The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons*. *Topics in Statistical and Theoretical Physics, American Mathematical Society Translations-Series 2*, 177 (1996), pp. 159-193.
8. A.I.Mogilner. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*. *Advances in Sov. Math.* 5 (1991), pp. 139-194.
9. К.О.Фридрихс. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве*. М.: Мир, 1972.
10. V.A.Malishev, R.A.Minlos. *Linear infinite-particle operators*. *Translations of Mathematical Monographs*. 143, AMS, Providence, RI, 1995.
11. A.E.Lifschitz. *Magnetohydrodynamic and spectral theory*. Vol. 4 of *Developments in Electromagnetic Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
12. B.Thaller. *The Dirac equation*. *Texts and Monographs in Physics*. Springer, Berlin, 1992.
13. F.Hausdorff. *Der Wertvorrat einer Bilinearform*. *Math. Z.*, 3:1 (1919), pp. 314-316.
14. A.Wintner. *Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen*. *Math. Z.*, 30:1 (1929), pp. 228-281.
15. K.E.Gustafson, D.K.M.Rao. *Numerical range*. *Universitext*. Springer, New York, 1997. *The field of values of linear operators and matrices*.
16. H.Langer, A.S.Markus, V.I.Matsaev, C.Tretter. *A new concept for block operator matrices: The quadratic numerical range*. *Linear Algebra Appl.*, 330 (2001), pp. 89-112.
17. C.Tretter. *Spectral inclusion for unbounded block operator matrices*. *J. Func. Anal.*, 256 (2009), pp. 3806-3829.
18. C.Tretter, M.Wagenhofer. *The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix*. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 24 (2003), No. 4, pp. 1003-1017.

ENHANCING THE SPECTRAL DEFERRED CORRECTION METHOD USING AI-BASED INITIAL GUESSES

Akramov Ikrom Isroil ugli,
Bukhara State University
ikrom960623@gmail.com
Rasulov Tulkin Khusenovich,
Bukhara State University
t.h.rasulov@buxdu.uz

Abstract. This paper presents a detailed exposition of the Spectral Deferred Correction (SDC) method with a focus on (1) writing the SDC iteration in direct u -form and (2) the integral approximations used in the iteration. We then present an AI-augmented initialization strategy where a neural network provides the initial values at collocation nodes. We compare two neural models (“old” and “improved”), describe their architectures and training procedures in detail, and explain how to validate and safely use an AI initial guess inside SDC. In the numerical example section, we illustrate the SDC sweep process and the MLP architecture used for the AI.

Key words: SDC, collocation problem, initial guess, neural network.

SUN’IY INTELLEKTGA ASOSLANGAN DASTLABKI TAXMINLAR YORDAMIDA SPEKTRAL KECHIKTIRILGAN TUZATISH USULINI TAKOMILLASHTIRISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada Spektral Kechiktirilgan Tuzatish (SDC) usuli batafsil yoritiladi. Asosiy e’tibor (1) SDC iteratsiyasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri u -ko‘rinishda yozish va (2) iteratsiyada ishlatiladigan integral yaqinlashuvlarga qaratiladi. Shundan so‘ng, neyron tarmoq kollokatsiya nuqtalarida boshlang‘ich qiymatlarni beradigan sun’iy intellekt yordamida initsializatsiya strategiyasi taklif etiladi. Ikkita neyron modeli (“eski” va “takomillashgan”) taqqoslanadi, ularning arxitekturasi va o‘qitish jarayoni batafsil tushuntiriladi hamda AI boshlang‘ich taxminini SDC ichida xavfsiz ishlatish yo‘llari izohlanadi. Sonli misollar bo‘limida SDC sikli va AI uchun ishlatilgan MLP arxitekturasi tasvirlanadi.

Kalit so‘zlar: SDC, kollokatsiya masalasi, boshlang‘ich taxmin, neyron tarmoq.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНОЙ ОТЛОЖЕННОЙ КОРРЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Аннотация. В данной статье подробно рассматривается метод спектральной отложенной коррекции (SDC). Основное внимание уделяется (1) записи итерации SDC в прямой u -форме и (2) аппроксимациям интеграла, используемым в итерации. Далее представлена стратегия инициализации с использованием искусственного интеллекта, где нейронная сеть задаёт начальные значения в узлах коллокации. Сравниваются две нейронные модели («старая» и «улучшенная»), подробно описываются их архитектуры и процедуры обучения, а также объясняется, как проверять и безопасно использовать начальное приближение AI внутри SDC. В разделе с численным примером показаны процесс SDC и архитектура MLP, используемая для AI.

Ключевые слова: SDC, задача коллокации, начальное приближение, нейронная сеть.

Introduction. Spectral Deferred Correction (SDC) methods [1, 2] are iterative high-order time integration schemes designed to solve initial value problems (IVPs) of the form

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0.$$

Rather than constructing a single high-order formula, SDC achieves high-order accuracy through a sequence of *correction sweeps*, each of which iteratively improves an approximate solution. This iterative process transforms a low-order method (such as Forward Euler [6]) into a high-order one by repeatedly reducing the local residual error over a set of collocation nodes within a time step.

The SDC approach originated from the seminal work of Dutt, Greengard, and Rokhlin (2000) [1], and it has since been extended and refined for stiff, nonlinear, and multiscale problems [2]. It provides a flexible

framework that bridges the gap between *explicit* and *implicit* integrators, allowing practitioners to achieve high-order accuracy without solving fully coupled nonlinear systems as required in classical collocation methods. Moreover, SDC methods serve as a foundation for advanced multi-level algorithms such as MLSDC and PFAST (Parallel Full Approximation Scheme in Space and Time) [7,8], enabling parallel-in-time integration for large-scale dynamical systems.

A central insight in SDC theory is that the *quality of the initial guess* at the collocation nodes significantly affects both the convergence rate and computational efficiency. Typically, one initializes the collocation nodes using a simple low-order scheme—often Forward Euler or midpoint rule [6]. While this approach is computationally inexpensive, it may fail to provide an accurate representation of the true solution, especially for problems that exhibit rapid oscillations, stiffness, or nonlinear coupling. Consequently, the SDC iteration may require many correction sweeps to achieve convergence, increasing the overall computational cost.

To address this issue, recent research in computational mathematics and scientific machine learning has begun to explore **AI-assisted initialization strategies**. Neural networks, and particularly **Multi-Layer Perceptrons (MLPs)**, can approximate continuous nonlinear mappings with high precision [3]. When trained appropriately, they can serve as *data-driven surrogate models* capable of predicting the solution $u(t)$ at arbitrary times t . This observation motivates the use of neural networks to provide *smart initial guesses* at collocation nodes, potentially reducing the number of required SDC sweeps.

Collocation Problem. Consider the general initial value problem (IVP)

$$u'(t) = f(u(t), t), \quad u(t_0) = u_0$$

on a single time interval $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

Our goal is to approximate the solution $u(t)$ at a discrete set of *collocation nodes* within this interval.

Let us introduce M collocation nodes

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = t_0 + \Delta t$$

and denote by $u_m \approx u(\tau_m)$ the approximate solution at node τ_m .

Integrating the differential equation from t_0 to an arbitrary time $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$, we obtain the equivalent integral equation:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u(s), s) ds.$$

At the collocation node $t = \tau_m$, the exact solution satisfies

$$u(\tau_m) = u_0 + \int_{t_0}^{\tau_m} f(u(s), s) ds, \quad M = 1, \dots, M. \tag{1}$$

Equation (1) is the **collocation formulation** of the IVP.

However, since $f(u(s), s)$ is generally not known exactly, the integral must be **approximated numerically**.

Quadrature approximation

Let us define the *normalized local coordinate* $\xi \in [0, 1]$ such that

$$t = t_0 + \xi \Delta t, \text{ and } \tau_m = t_0 + \Delta t \xi_m,$$

where $\xi_m \in [0, 1]$ are the normalized collocation nodes.

Then the integral in (1) can be written as

$$u(\tau_m) = u_0 + \Delta t \int_0^{\xi_m} f(u(t_0 + \xi' \Delta t), t_0 + \xi' \Delta t) d\xi'.$$

To approximate this integral, we introduce a quadrature rule based on the collocation nodes $\{\xi_j\}$:

$$\int_0^{\xi_m} f(u(t_0 + \xi' \Delta t), t_0 + \xi' \Delta t) d\xi' \approx \sum_{j=0}^M q_{m,j} f(u_j, \tau_j),$$

where the quadrature weights $q_{m,j}$ are defined as

$$q_{m,j} = \int_0^{\xi_m} l_j(\xi') d\xi'$$

and $l_j(\xi)$ denotes the **Lagrange basis polynomial** associated with node ξ_j i.e.

$$l_j(\xi) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^M \frac{\xi - \xi_k}{\xi_j - \xi_k}.$$

We can then define the **collocation matrix**

$$Q = (q_{m,j})_{m,j=0}^M$$

which encodes the integration of Lagrange polynomials from 0 to ξ_m .

Using this quadrature, equation (1) becomes

$$u_m = u_0 + \Delta t \sum_{j=0}^M q_{m,j} f(u_j, \tau_j), \quad m = 1, \dots, M$$

This nonlinear system (2) couples all node values $\{u_j\}$. If solved simultaneously (e.g., by Newton's method), it yields the **collocation solution**, which is of very high order—depending on the quadrature rule, this can be of order $2M$ for Gaussian nodes or $M + 1$ for equidistant nodes. However, solving (2) directly can be computationally expensive since it requires solving a large coupled nonlinear system at every time step. This motivates iterative strategies that progressively approximate the collocation solution—one such method is the **Spectral Deferred Correction (SDC)** scheme.

Spectral deferred correction (SDC). The main idea of SDC [1, 2] is to obtain the collocation solution (2) *iteratively* rather than solving it directly. Starting from an initial guess $\{u_m(0)\}$, SDC performs a sequence of *correction sweeps* that gradually improve the accuracy.

For a given approximation $u^{(k)}(t)$ at iteration k , define the residual function

$$r^{(k)}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(u^{(k)}(s), s) ds - u^{(k)}(t).$$

The residual measures how far $u^{(k)}(t)$ deviates from satisfying the exact integral equation (1).

The correction $\delta^{(k)}(t)$ is then defined implicitly by

$$(u^{(k)} + \delta^{(k)})'(t) = f(u^{(k)} + \delta^{(k)}, t),$$

with the condition that $u^{(k)} + \delta^{(k)}$ satisfies (1) more accurately. This leads to an iterative correction process that can be viewed as a Picard iteration with spectral quadrature.

Each sweep corrects the residual error of the integral equation, effectively increasing the overall order of accuracy by one per sweep (for sufficiently smooth problems). A commonly used explicit form of the SDC sweep (using a base explicit integrator such as Forward Euler for the local propagation) is the following node-to-node update written without introducing δ :

$$\Delta t_m = \tau_{m+1} - \tau_m, \quad I_m^{(k)} := \sum_{j=0}^M Q_{mj} f(u_j^{(k)}, \tau_j),$$

where $I_m^{(k)}$ denotes the quadrature approximation to $\int_{\tau_n}^{\tau_m} f(u^{(k)}(\tau), \tau) d\tau$ build from iterates $u_j^{(k)}$.
 Given $u_0^{(k+1)} = u(t_n)$ (initial condition at the left node), and assuming $u_0^{(k)} = u(t_n)$, for $m=0, \dots, M-1$ compute

$$u_{m+1}^{(k+1)} = u_m^{(k+1)} + \Delta t_m f(u_m^{(k+1)}, \tau_m) + (I_{m+1}^{(k)} - I_m^{(k)})$$

where $I_m^{(k)}$ are computed using the previous sweep values $u_j^{(k)}$. The term $I_{m+1}^{(k)} - I_m^{(k)}$ approximates the integral of f over the subinterval $[\tau_m, \tau_{m+1}]$ using information from the older iterate; the $(\Delta t_m f(u_m^{(k+1)}))$ part is the base integrator using the updated left-node value. The scheme above is explicit in the sense that the right-hand side uses only quantities known at the time the formula is applied (in particular, the unknowns are $u_{m+1}^{(k+1)}$ only).

AI-Based Initial Guess for Spectral Deferred Correction. This section provides a comprehensive description of the neural network models used to generate initial approximations for the Spectral Deferred Correction (SDC) method and explains their impact on convergence. The goal is to construct a parametric function

$$\mathcal{N}_\theta(t),$$

with trainable weights θ , that predicts the numerical solution $u(t)$ of a given differential equation at arbitrary time points $t \in [t_n, t_{n+1}]$. In the SDC framework, the network is evaluated specifically at the collocation nodes $\{\tau_m\}_{m=0}^M$ to obtain the initial guess

$$u_m^{(0)} = \mathcal{N}_\theta(\tau_m), \quad m = 0, \dots, M.$$

This initialization replaces the classical low-order predictor (e.g. Forward Euler) and serves as a high-quality starting point for the iterative correction process.

Model Architecture: Multi-Layer Perceptron (MLP)

A Multi-Layer Perceptron (MLP) is adopted as the base architecture owing to its universal approximation capabilities and ease of training for smooth functions. The mapping is defined as

$$\mathcal{N}_\theta(\mathbf{t}) = \mathbf{W}_L \sigma(\mathbf{W}_{L-1} \sigma(\dots \sigma(\mathbf{W}_1 \mathbf{t} + \mathbf{b}_1) \dots) + \mathbf{b}_{L-1}) + \mathbf{b}_L,$$

where W_i, b_i are weights and biases, and $\sigma(\cdot)$ is a nonlinear activation function. The specific architecture used in our experiments is as follows:

- Input: scalar time variable t (optionally normalized to $[-1,1]$ or standardized to zero mean and unit variance).
- Hidden layers: two fully connected layers with $n_1 = 50$ and $n_2 = 50$ neurons respectively.
- Activation function: hyperbolic tangent (tanh), chosen for its smoothness and suitability for representing continuous trajectories of ODE solutions. Other activations such as ReLU, GELU, or sigmoid were tested, but tanh provided the most stable training and lowest interpolation error for smooth systems.
- Output: linear scalar neuron producing the predicted value $\hat{u} = \mathcal{N}_\theta(t)$. No activation is applied in the output layer, enabling the network to represent both positive and negative values freely.

This simple feedforward network is sufficient for one-dimensional or low-dimensional dynamical systems and can be extended to vector-valued functions by increasing the output dimension.

Loss Function, Optimizer, and Training Procedure. The network parameters θ are obtained by minimizing the Mean Squared Error (MSE) between the predicted and reference values:

$$\mathcal{L}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathcal{N}_\theta(\mathbf{t}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{t}_i)|^2,$$

where $\{(t_i, u(t_i))\}_{i=1}^N$ are training pairs. Reference values can be obtained from either analytical solutions or high-accuracy numerical solvers (e.g. Runge–Kutta of order 5–8).

- Optimizer: Adam (adaptive gradient method) with learning rate $\eta = 10^{-3}$, optionally decayed after every 50 epochs.
- Alternative: For small networks or smooth objectives, L-BFGS can provide faster convergence to a high-precision minimum.
- Batch size: Typically 32–128; full-batch used for small datasets.
- Regularization: L_2 weight decay term $\lambda = 10^{-4}$ to prevent overfitting and encourage smooth weights.
- Early stopping: Training stops when the validation loss does not improve for 50 consecutive epochs to avoid overtraining.
- Normalization: Inputs t and outputs $u(t)$ are normalized to the interval $[-1,1]$, improving numerical conditioning and learning stability.

Training data generation: To ensure smooth interpolation, the training dataset consists of many uniformly sampled time points (e.g. 500–1000 samples on $[0, T]$), with corresponding $u(t)$ values computed using a reference integrator. For chaotic or stiff problems, logarithmic or adaptive sampling can be used to emphasize regions with higher gradients.

Two versions of the neural predictor were implemented to assess the influence of network quality on SDC convergence.

Old AI (Baseline).

- Training set: Small (about 50 training points in $[0,1]$).
- Network size: Two hidden layers, each with 10 neurons.
- Training: Limited epochs, minimal regularization, no normalization of input/output.
- Optimizer: Default Adam with constant learning rate, no validation-based early stopping.

Consequences: The baseline model exhibited underfitting, resulting in oscillatory or noisy predictions. Its accuracy at unseen collocation nodes was poor, especially near the domain boundaries. Consequently, the SDC initialization using this model produced initial residuals comparable to, or worse than, those from a low-order Euler guess.

Improved AI (Proposed Model).

- Training set: Dense (about 500 uniformly spaced samples on $[0,1]$).
- Network size: Two hidden layers with 50 neurons each.
- Activation: tanh, ensuring smooth and differentiable approximations.

- Training: Extended training with early stopping on validation loss, weight regularization, and input/output normalization.
- Optimizer: Adam with adaptive decay schedule.

Consequences: This improved model generated predictions that closely matched the true trajectories of the ODE. It provided smooth, accurate values at collocation nodes, significantly reducing the initial residuals of the SDC iteration. Empirically, for several test ODEs, the improved AI initialization reduced the number of SDC sweeps required to achieve a fixed error tolerance by 30–50% compared to both the Euler and baseline AI initializations.

Why the Improved Model Accelerates SDC. The efficiency of SDC relies on iterative correction of the defect (residual) between the current approximation and the collocation integral equation. If the initial approximation $\mathbf{u}_m^{(0)}$ is already close to the collocation solution \mathbf{u}_m^* , then the defect

$$\mathbf{r}_m^{(0)} = \mathbf{u}_m^{(0)} - \mathbf{u}_0 - \int_{t_0}^{t_m} \mathbf{f}(\mathbf{u}^{(0)}(s)) \, ds$$

is small, and subsequent correction sweeps converge rapidly. A poor initial guess (e.g. from Euler) leads to large residuals that require multiple sweeps to diminish.

In contrast, the AI-based initialization provides a globally smooth and accurate prediction over the interval, reducing the magnitude of the initial defect. The improved model, trained on a dense dataset with proper normalization, offers:

- better interpolation within collocation subintervals,
- reduced phase lag and amplitude errors,
- smaller correction terms in early sweeps, and
- improved numerical stability for explicit SDC variants.

Thus, the neural network acts as a learned high-order predictor, transforming SDC into an effectively accelerated iterative scheme. In summary, the combination of SDC with a neural initialization merges the interpretability and error control of numerical analysis with the approximation power of data-driven models.

Numerical Experiments. We test on:

$$\frac{du}{dt} = -u, \quad u(0) = 1,$$

whose exact solution is $u(t) = e^{-t}$.

We use $M=5$ collocation nodes, $K=2$ sweeps over $[0,1]$.

Figure 1 shows the solution curves demonstrate that all three methods closely follow the exact solution $u(t) = e^{-t}$ but the Improved AI-SDC tracks it more accurately across the entire interval. The Old AI-SDC model exhibits noticeable deviations near $t=1$, indicating that its initial guess did not sufficiently reduce the iteration burden for SDC

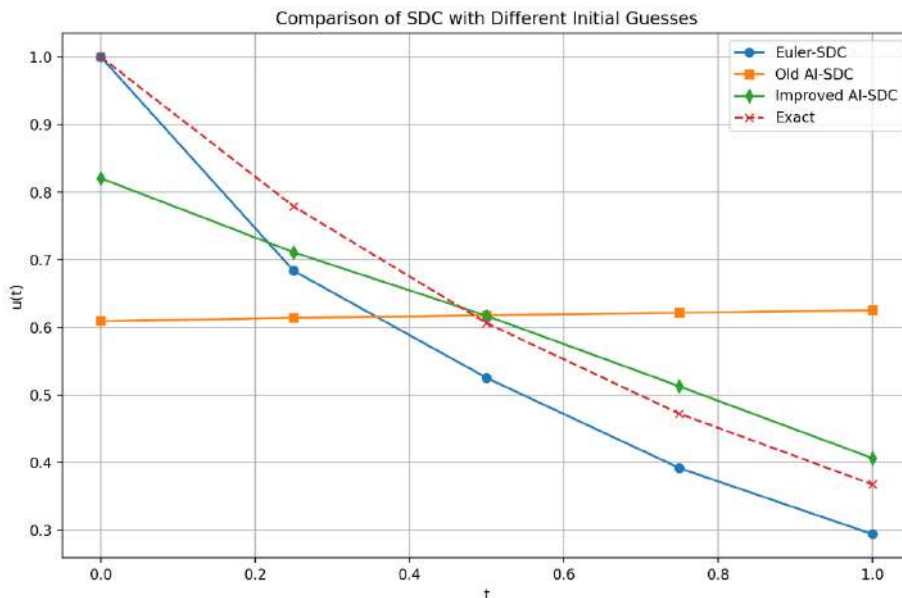


Figure 1. Solutions after two SDC sweeps

Figure 1 shows the comparison among the Euler–SDC, old AI–SDC, improved AI–SDC, and the exact solution of the problem. We can see that all numerical methods converge except the old AI model. Furthermore, the improved AI model remains much closer to the exact solution over long time steps. This behavior can be attributed to the fact that, as time increases, the improved AI model—being better trained—maintains higher accuracy and stability over extended intervals.

The table 1 quantifies these findings by reporting the final absolute error at $t=1$. The significant improvement from Euler-SDC to Improved AI-SDC underscores the value of high-quality AI-based initial guesses. Conversely, the Old AI-SDC result serves as a cautionary example: if the neural network is under-trained or trained on a restricted domain, its predictions can mislead the SDC sweeps and degrade overall accuracy.

Table 1. Absolute error of the final time $t=1$.

Method	Final error at $t = 1$
Euler-SDC	0.0736
Old AI-SDC	0.2576
Improved AI-SDC	0.0387

Conclusion. We presented the Spectral Deferred Correction (SDC) method in its direct Q -form, starting from the collocation formulation of the ODE. The derivation showed how the continuous integral equation is approximated using a collocation matrix Q built from Lagrange basis functions, leading to a systematic high-order discretization. We also outlined the node-to-node SDC update process using precomputed quadrature weights.

Furthermore, we introduced neural-network-based initialization for SDC, using a Multi-Layer Perceptron (MLP) trained offline to predict approximate solution values at collocation nodes. Detailed aspects of architecture, training, and normalization were discussed, showing how a well-trained model provides accurate and smooth initial guesses that accelerate SDC convergence.

We compared a basic “old AI” model with an “improved AI” version featuring richer training data, stronger regularization, and better optimization. The improved model achieved higher accuracy at collocation points, reduced residuals, and required fewer SDC sweeps.

This integration of AI-based initialization with high-order iterative methods demonstrates how machine learning can enhance classical solvers. By starting closer to the collocation solution, AI-SDC achieves faster and more robust convergence. Future work will extend this framework to systems of equations and explore adaptive, data-driven training strategies for broader problem classes.

REFERENCES:

1. A. Dutt, L. Greengard, and V. Rokhlin. *Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations*. *BIT Numerical Mathematics*, 40(2):241--266, 2000.
2. M. L. Minion. *Semi-implicit spectral deferred correction methods for ordinary differential equations*. *Communications in Mathematical Sciences*, 1(3):471--500, 2003.
3. K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White. *Multilayer feedforward networks are universal approximators*. *Neural Networks*, 2(5):359--366, 1989.
4. M. Raissi, P. Perdikaris, and G. E. Karniadakis. *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*. *Journal of Computational Physics*, 378:686--707, 2019.
5. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
6. Hairer, Ernst & Wanner, Gerhard. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 10.1007/978-3-662-09947-6.
7. Speck, Robert, et al. "A multi-level spectral deferred correction method." *BIT Numerical Mathematics* 55.3 (2015): 843-867.
8. Schöbel, Ruth, and Robert Speck. "PFASST-ER: combining the parallel full approximation scheme in space and time with parallelization across the method." *Computing and visualization in science* 23.1 (2020): 12.

ПРИНЦИП БИРМАНА-ШВИНГЕРА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Журакулова Фарангис Мурот кизи,
Бухарский государственный университет
Бухара, Узбекистан
f.m.juraqulova@buxdu.uz

Аннотация. В данной статье рассматривается операторная матрица \mathcal{A}_μ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$. Она соответствует системе с несохраняющимся и не более трёх частиц на одномерной решётке и рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряжённый оператор в обрезанном подпространстве пространства Фока. Аналог изученного уравнения Фаддеева для собственных вектор-функций операторной матрицы \mathcal{A}_μ . Доказано утверждение, являющееся реализацией известного принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы \mathcal{A}_μ .

Ключевые слова: пространство Фока, операторная матрица, спектральный параметр, уравнения Фаддеева, собственная вектор-функций, существенный спектры, принцип Бирмана-Швингера.

BIRMANN-SCHWINGER PRINCIPLE FOR THE THIRD-ORDER OPERATOR MATRIX

Abstract. In this paper, we consider the third-order operator matrix \mathcal{A}_μ for a spectral parameter $\mu > 0$. It corresponds to a system with a non-conserved number of particles and at most three particles on a one-dimensional lattice, and it is treated as a linear, bounded, and self-adjoint operator in a truncated subspace of the Fock space. An analogue of the well-known Faddeev-type equation for the eigenvector functions of the operator matrix \mathcal{A}_μ is derived. Furthermore, a result realizing the well-known Birman–Schwinger principle for the operator matrix \mathcal{A}_μ is established.

Keywords: Fock space, operator matrix, spectral parameter, Faddeev equation, eigenfunction, essential spectrum, Birman–Schwinger principle.

UCHINCHI TARTIBI OPERATOR MATRITSA UCHUN BIRMANN-SHVINGER
TAMOYILI

Annotatsiya. Ushbu maqolada spektral parametri $\mu > 0$ bo'lgan uchinchi tartibli \mathcal{A}_μ operator matritsa ko'rib chiqiladi. U zarralar soni saqlanmaydigan va bir o'lchovli panjarada eng ko'pi bilan uchta zarrachadan iborat tizimga mos keladi hamda Fok fazosining qirg'ilgan qism fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida qaraladi. \mathcal{A}_μ operator matritsasining xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev tenglamasining analogi keltirib chiqarilgan. Shuningdek, \mathcal{A}_μ operator matritsasi uchun mashhur Birman–Shvinger prinsipining amaliy ifodasi bo'lgan natija isbotlangan.

Kalit so'zlar: Fok fazosi, operatorli matritsa, spektral parametr, Faddeyev tenglamasi, xos vektor-funksiya, muhim spektr, Birman-Shvinger prinsipi.

Введение. Вопросы, связанные со спектральными свойствами операторных матриц третьего порядка, соответствующих гамильтонианам систем с не сохраняющимся и не более трёх частиц на решётке, являются актуальными проблемами в физике твёрдого тела [1], квантовой теории поля [2], статистической физике [3], квантовой механике [4] и во многих других областях.

В настоящей работе рассматривается операторная матрица \mathcal{A}_μ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$, соответствующая системе с не сохраняющимся и не более трёх частиц на одномерной решётке. Изучаемая операторная матрица действует в прямой сумме ноль-частичных, одно-частичных и двух-частичных подпространств бозонного пространства Фока, т.е. в обрезанном подпространстве бозонного пространства Фока. Для собственных вектор-функций рассматриваемой операторной матрицы построен аналог уравнения Фаддеева. Как известно, уравнение Фаддеева имеет особое значение при определении положения существенного спектра

заданной операторной матрицы. Кроме того, симметризованный вариант данного уравнения широко применяется при определении условий, при которых число собственных значений исследуемой операторной матрицы является конечным или бесконечным. В частности, используется принцип Бирмана–Швингера.

Через $\mathbb{T} := (-\pi; \pi]$ обозначим одномерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на \mathbb{T} и $\mathcal{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^2)$ – гильбертово пространство (комплекснозначных) квадратично-интегрируемых симметричных функций двух переменных, определённых на \mathbb{T}^2 . Положим $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

В комплексном гильбертовом пространстве \mathcal{H} рассмотрим операторную матрицу:

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mu\mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mu\mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $\mathcal{A}_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i \leq j, i, j = 0, 1, 2$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{00}f_0 &= af_0, \quad \mathcal{A}_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt, \quad (\mathcal{A}_{11}f_1)(x) = f_1(x), \\ (\mathcal{A}_{12}f_2)(x) &= \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t)dt, \quad (\mathcal{A}_{22}f_2)(x, y) = w(x, y)f_2(x, y) \quad f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $a \in \mathbb{R}; \mu$ – вещественное положительное число, $v(\cdot)$ – вещественнозначная непрерывная функция на \mathbb{T} , а функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет вид:

$$w(x, y) := 3 - \cos x - \cos y - \cos(x + y).$$

Операторы \mathcal{A}_{01} и \mathcal{A}_{12} называются операторами уничтожения, а операторы \mathcal{A}_{01}^* и \mathcal{A}_{12}^* называются операторами рождения, причём

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{01}^*: \mathcal{H}_0 &\rightarrow \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{01}^*f_0)(x) = v(x)f_0, \\ \mathcal{A}_{12}^*: \mathcal{H}_1 &\rightarrow \mathcal{H}_2, \quad (\mathcal{A}_{12}^*f_1)(x, y) = \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}. \end{aligned}$$

Можно легко проверить, что операторная матрица \mathcal{A}_μ является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Принцип Бирмана-Швингера.

Вводим следующие обозначения:

$$m(x) := 3 - \cos x - \sqrt{2 + 2\cos x}, \quad M(x) := 3 - \cos x + \sqrt{2 + 2\cos x}.$$

Для каждого $\mu > 0$ и $x \in \mathbb{T}$ определим регулярную функцию:

$$\Delta_\mu(x; z) := \begin{cases} 1 - z - I_\mu(x; z), & z < m(x), \\ 1 - z + I_\mu(x; z), & z > M(x) \end{cases}$$

в области $\mathbb{C} \setminus [m(x); M(x)]$, где

$$I_\mu(x; z) := \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos x - z)^2 - 4\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

Обозначим через $E_\mu^{(1)}(x)$ и $E_\mu^{(2)}(x)$ нули функции $\Delta_\mu(x; \cdot)$, лежащие слева от $m(x)$ и справа от $M(x)$, соответственно, т.е. $E_\mu^{(1)}(x) < m(x)$ и $E_\mu^{(2)}(x) > M(x)$.

Причём $E_\mu^{(\alpha)}: x \in \mathbb{T} \rightarrow E_\mu^{(\alpha)}(x), \alpha = 1, 2$ является непрерывной функцией на одномерном торе \mathbb{T} .

Пусть:

$$\Sigma_\mu = \text{Im } E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \text{Im } E_\mu^{(2)}(x).$$

Для каждого фиксированного элемента $x \in \mathbb{T}$ и числа $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ рассмотрим операторную матрицу, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как операторная матрица второго порядка:

$$T_\mu(z) := \begin{pmatrix} T_{00}(\mu, z) & T_{01}(\mu, z) \\ T_{10}(\mu, z) & T_{11}(\mu, z) \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы $T_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i \leq j, i, j = 0, 1$ определяются следующим образом:

$$T_{00}(\mu, z)g_0 = (1 + a - z)g_0, \quad (T_{01}(\mu, z)g_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)g_1(t)dt,$$

$$(T_{10}(\mu, z)g_0)(x) = \frac{-\mu v(x)g_0}{\Delta_\mu(x, z)},$$

$$(T_{11}(\mu, z)g_1)(x) = \frac{\mu^2}{2\Delta_\mu(x, z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{g_1(t)dt}{w(x, t) - z}, \quad g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1.$$

Следующая теорема является аналогом известного результата Фаддеева для операторной матрицы и устанавливает связь между собственными значениями операторной матрицы \mathcal{A}_μ и операторной матрицы $T_\mu(z)$.

Лемма 1. При каждом $x \in \mathbb{T}$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ является собственным значением операторной матрицы \mathcal{A}_μ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением операторной матрицы $T_\mu(z)$. Кроме того, собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ – собственное значение операторной матрицы \mathcal{A}_μ и $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ соответствующая собственная вектор-функция. Тогда f_0, f_1 и f_2 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} (a - z)f_0 + \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt = 0, \\ \mu v(x)f_0 + (1 - z)f_1(x) + \mu \int_{\mathbb{T}} f_2(x, t)dt = 0, \\ \frac{\mu}{2}(f_1(x) + f_1(y)) + (w(x, y) - z)f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$, для всех $x, y \in \mathbb{T}$ имеем $w(x, y) - z \neq 0$. Тогда из третьего уравнения системы (1) для f_2 имеем:

$$f_2(x, y) = -\frac{\mu(f_1(x) + f_1(y))}{2(w(x, y) - z)}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) для f_2 во второе уравнение системы (1), имеем:

$$\begin{cases} (a - z)f_0 + \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt = 0, \\ \mu v(x)f_0 + (1 - z)f_1(x) - \frac{\mu^2}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(x) + f_1(t)}{(w(x, t) - z)} dt = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Следовательно, уравнение (1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений (3) имеет ненулевое решение. Из определения множества Σ_μ следует, что для всех $z \notin \Sigma_\mu$ и $x \in \mathbb{T}$ верно $\Delta_\mu(x, z) \neq 0$.

Следовательно, уравнение (1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений:

$$\begin{cases} (1 + a - z)f_0 + \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)f_1(t)dt = f_0, \\ -\frac{\mu v(x)}{\Delta_\mu(x, z)}f_0 + \frac{\mu^2}{2\Delta_\mu(x, z)} \int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(t)}{(w(x, t) - z)} dt = f_1(x) \end{cases} \quad (4)$$

или операторное уравнение

$$T_\mu(z)g = g, \quad g = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \quad (5)$$

имеет ненулевое решение. Поэтому кратности собственных значений z и 1 операторов \mathcal{A}_μ и $T_\mu(z)$ соответственно совпадают.

Теперь докажем, что собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ – n – кратное собственное значение операторной матрицы \mathcal{A}_μ и число $\lambda = 1$ является m – кратным собственным значением операторной матрицы $T_\mu(z)$. Докажем, что $n = m$.

Допустим противное. Пусть $m > n$. Тогда существуют линейно независимые собственные функции $g^{(i)} = (g_0^{(i)}, g_1^{(i)}) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, i = \overline{1, m}$, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$ операторной матрицы $T_\mu(z)$. В этом случае при $i = \overline{1, m}$ ненулевая вектор-функция $f^{(i)} = (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}) \in \mathcal{H}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{A}_\mu f^{(i)} = z f^{(i)}$. Здесь $f_0^{(i)} = g_0^{(i)}, f_1^{(i)} = g_1^{(i)}$, а функция $f_2^{(i)} (i = \overline{1, m})$ определяется по формуле (2) с условием $f_1 = f_1^{(i)}$. Поскольку $m > n$, существует ненулевой вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{C}^m$, такой что

$$\sum_{i=1}^m c_i g^{(i)} = \sum_{i=1}^m c_i (g_0^{(i)}, g_1^{(i)}) \neq \theta$$

и

$$\sum_{i=1}^m c_i f^{(i)} = \sum_{i=1}^m c_i (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}) = \theta.$$

Тогда

$$\theta = \sum_{i=1}^m c_i f^{(i)} = \left(\sum_{i=1}^m c_i g_0^{(i)}, \sum_{i=1}^m c_i g_1^{(i)}, \frac{-\mu}{2(w(x,y) - z)} \sum_{i=1}^m c_i (g_1^{(i)}(x) + g_1^{(i)}(y)) \right) \neq \theta.$$

Это противоречит соотношению $m > n$.

Пусть теперь $m < n$. Тогда для $i = \overline{1, n}$ существуют линейно независимые собственные вектор-функции $f^{(i)} = (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, f_2^{(i)})$ соответствующие собственному значению z операторной матрица \mathcal{A}_μ . А функции $g^{(i)} = (f_0^{(i)}, f_1^{(i)})$, $i = \overline{1, n}$ являются собственными функциями, соответствующими собственному значению $\lambda = 1$ операторной матрицы $T_\mu(z)$.

Поскольку $m < n$, существует вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, такой что

$$\sum_{i=1}^n c_i g^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}) = \theta$$

и

$$\sum_{i=1}^n c_i f^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i (f_0^{(i)}, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}) \neq \theta;$$

Поэтому

$$\theta \neq \sum_{i=1}^n c_i f^{(i)} = \left(\sum_{i=1}^n c_i f_0^{(i)}, \sum_{i=1}^n c_i f_1^{(i)}, \frac{-\mu}{2(w(x,y) - z)} \sum_{i=1}^n c_i (f_1^{(i)}(x) + f_1^{(i)}(y)) \right) = \theta.$$

Отсюда вытекает, что соотношение $m < n$ не выполняется. Лемма 1 доказана.

Замечание. Отметим, что уравнение $T_\mu(z)g = g$, является аналогом системы интегральных уравнений типа Фаддеева для собственных векторов оператора \mathcal{A}_μ .

Теорема 1. Для существенного спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \Sigma_\mu$. Более того, множество Σ_μ представляет собой объединение не более трёх отрезков.

Теорема 1 доказывается с использованием критерия Вейля, характеристического свойства уравнения Фаддеева и аналитической теоремы Фредгольма [6].

Обозначим через $\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ и $\tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$ нижнюю и верхнюю грани существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ операторной матрица \mathcal{A}_μ , соответственно, т.е.,

$$\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu) := \min \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) \quad \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu) := \max \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu).$$

Отметим, что для любых $x \in \mathbb{T}$ и $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ (соответственно $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$), функция $\Delta_\mu(x, z)$ (соответственно $-\Delta_\mu(x, z)$) положительна и, следовательно, существует её положительный квадратный корень. В исследованиях дискретного спектра операторной матрица \mathcal{A}_μ основную роль играет оператор $\hat{T}_\mu(z)$, $z \in R \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$, действующий в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как

$$\hat{T}_\mu(z) := \begin{pmatrix} \hat{T}_{00}(\mu, z) & \hat{T}_{01}(\mu, z) \\ \hat{T}_{01}^*(\mu, z) & \hat{T}_{11}(\mu, z) \end{pmatrix}.$$

Здесь матричные элементы $\hat{T}_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1$ определяются следующим образом:

$$\hat{T}_{00}(\mu, z)\varphi_0 = (1 + a - z)\varphi_0, \quad (\hat{T}_{01}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(t, z)}},$$

$$(\hat{T}_{11}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(t, z)}(w(x, t) - z)}, \quad (\hat{T}_{01}^*(\mu, z)\varphi_0)(x) = \frac{-\mu v(x)\varphi_0}{\sqrt{\Delta_\mu(t, z)}},$$

при $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$,

$$(\hat{T}_{01}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\sqrt{-\Delta_\mu(t, z)}}, \quad (\hat{T}_{01}^*(\mu, z)\varphi_0)(x) = \frac{-\mu v(x)\varphi_0}{\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}}$$

$$(\hat{T}_{11}(\mu, z)\varphi_1)(x) = \frac{-\mu^2}{2\sqrt{-\Delta_\mu(x, z)}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{-\Delta_\mu(t, z)}(w(x, t) - z)}, \quad \varphi_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1.$$

при $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$.

Следующая теорема является реализацией известного принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы \mathcal{A}_μ [5].

Теорема 2. При каждом $x \in \mathbb{T}$ число $z \in \mathbb{R} \setminus [\tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu); \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)]$ является собственным значением операторной матрицы \mathcal{A}_μ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением операторной матрицы $\hat{T}_\mu(z)$. Кроме того, собственные значения z и 1 имеют одинаковую кратность.

Доказательство. В доказательстве леммы 1 было показано, что для того, чтобы число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_\mu$ было собственным значением матрицы оператора \mathcal{A}_μ , необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (4) имела ненулевое решение. Пусть $x \in \mathbb{T}$. Для всех чисел $z < \tau_{\min}(\mathcal{A}_\mu)$ выражение $\Delta_\mu(x, z)$ положительно, поэтому для таких пар (x, z) существует квадратный корень $\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}$. Следовательно, в системе уравнений (4) проводится замена $f_0 = \varphi_0$ и $\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}f_1(x) = \varphi_1(x)$. Это

$$(1 + a - z)\varphi_0 + \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{v(t)\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(t, z)}} = \varphi_0$$

$$\frac{-\mu v(x)\varphi_0}{\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}} + \frac{\mu^2}{2\sqrt{\Delta_\mu(x, z)}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_\mu(t, z)}(w(x, t) - z)} = \varphi_1(x)$$

система уравнений или

$$\hat{T}_\mu(z)\varphi = \varphi, \quad \varphi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H} \quad (6)$$

можно записать в виде операторного уравнения. При этом для того, чтобы система уравнений (4) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы операторное уравнение (6) имело ненулевое решение, при этом подпространства решений этих уравнений имеют одинаковую размерность.

То же самое верно и для $z > \tau_{\max}(\mathcal{A}_\mu)$, который будет отображаться.

Заключение. В данной работе исследуется операторная матрица \mathcal{A}_μ третьего порядка со спектральным параметром $\mu > 0$, возникающая в ряде современных направлений математического анализа. Указанная операторная матрица соответствует системе с несохраняющимся числом частиц, содержащей не более трёх частиц на одномерной решётке. Матрица \mathcal{A}_μ рассматривается как линейный, ограниченный и самосопряжённый оператор, действующий в усечённом подпространстве пространства Фока. Для собственных вектор-функций операторной матрицы \mathcal{A}_μ получен аналог уравнения Фаддеева. Кроме того, установлено утверждение, представляющее собой реализацию известного принципа Бирмана-Швингера, применительно к операторной матрице \mathcal{A}_μ .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Mogilner A.I. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results* *Advances in Sov. Math.* 5 (1991). p 139–194.
2. Фридрихс К.О. *Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве*. М. Мир 1972.
3. Malishev V.A., Minlos R.A. *Linear infinite-particle operators* *Translations of Mathematical Monographs*. 143, Amer. Math. Soc. Providence, 1995.
4. Thaller B. *The Dirac equation. Texts and Monographs in Physics* Berlin, Springer. 1992.
5. S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov. *On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics*. *J. Stat. Phys.*, 127:2 (2007), P. 191-220.
6. Farangis Jurakulova. *Estimates for the lower and upper bounds of the essential spectrum of a 3x3 operator matrix*. *AIP Conf. Proc.* 3377, 030018 (2025) <https://doi.org/10.1063/5.0299531>

ON THE SPECTRUM OF THE TENSOR SUM OF FRIEDRICHS MODELS

Bakhronov Bekzod Islom ugli,

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

b.i.bahronov@buxdu.uz

Juraeva Vazira Bakhtiyorovna,

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

Abstract. *In this article, we present a three-particle lattice model Hamiltonian H by making use non-local potential. The Hamiltonian under consideration acts as a tensor sum of two Friedrichs models h which comprises a rank 1 perturbation associated with a system of three quantum particles on a two-dimensional lattice. The current study investigates the number of eigenvalues associated with the Hamiltonian. Furthermore, an essential spectrum of H has been studied.*

Keywords: *model Hamiltonian, lattice, perturbation, non-local-potential, tensor sum, Friedrichs model, discrete spectrum, essential spectrum.*

О СПЕКТРЕ ТЕНЗОРНОЙ СУММЫ МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

Аннотация. *В данной статье представлен гамильтониан H трёхчастичной решёточной модели, построенный с использованием нелокального потенциала. Рассматриваемый гамильтониан действует как тензорная сумма двух моделей Фридрихса h , содержащих возмущение ранга 1, связанное с системой из трёх квантовых частиц, движущихся на двумерной решётке. В работе исследуется количество собственных значений, соответствующих данному гамильтониану. Кроме того, изучен существенный спектр оператора H .*

Ключевые слова: *модельный гамильтониан, решётка, возмущение, нелокальный потенциал, тензорная сумма, модель Фридрихса, дискретный спектр, существенный спектр.*

FRIDRIXS MODELLARI TENZOR YIG'INDISINING SPEKTRI TO'G'RISIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada nolokal potensial yordamida qurilgan uch zarrachali panjaraviy modelning H gamiltoniani taqdim etilgan. Ko'rib chiqilayotgan gamiltonian ikki o'lchamli panjarada harakatlanayotgan uchta kvant zarrachasi tizimi bilan bog'liq bo'lgan 1-rangli g'alayonlanishni o'z ichiga olgan ikkita Fridrixs modelining tenzor yig'indisi sifatida ta'sir qiladi. Ishda mazkur gamiltonianga mos keluvchi xos qiymatlar soni tadqiq qilingan. Bundan tashqari, H operatorining muhim spektri ham o'rganilgan.*

Kalit so'zlar: *model gamiltonian, panjara, g'alayonlanish, nolokal potensial, tenzor yig'indi, Fridrixs modeli, diskret spektr, muhim spektr.*

Introduction. The discrete Schrödinger operators acts as the analogs to three-particle Schrödinger operator in \mathbb{R}^3 and emerges in the models of solid state physics, see [1, 2, 3, 4]. Such kind of operators also show up in the lattice quantum field theory and for further details, we refer to see [5]. In [6, 7, 8], Hamiltonian models associated with system of three quantum particles moving on three dimensional lattice \mathbb{Z}^3 were presented and the essential spectrum as well as the number of eigenvalues has been investigated. An extensive amount of research work has been done on the finiteness of the eigenvalues of such Hamiltonian models and is easily available in literature.

The presence of local potentials, that is, the multiplication of operators with a function is typically used in the physical literature. But, on the other hand the potentials can act as the non-local potentials, for instance, in the case of pseudo-potential theory, for more details we refer to [9]. For the periodic operators, these acts as the sum of both local and finite dimensional potentials. Non-local separable two-body interactions have often been used in nuclear physics and many-body problems because of the fact that the two-body Schrödinger equation is easily solvable for them, and eventually this leads to closed expressions for a large class of such interactions.

In this article, we consider a tensor sum H of two Friedrichs models h with rank 1 perturbation. The Hamiltonian under consideration is associated with a system of three quantum particles on a two-

dimensional lattice. Usually such operators are arising in Hubbard model [10]. We aim to investigate the number and location of the eigenvalues of H .

Some spectral properties of the Friedrichs model. Let \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Z} and \mathbb{N} denotes the set of all complex, real, integer and positive integer numbers, respectively. For $\mathbf{d} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$ let $\mathbb{T}^{\mathbf{d}}$, be the \mathbf{d} -dimensional torus. The "addition" and "scalar (real) multiplication" with an elements of $\mathbb{T}^{\mathbf{d}} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{d}}$ should be regarded as operations on $\mathbb{R}^{\mathbf{d}}$ modulo $(2\pi\mathbb{Z}^{\mathbf{1}})^{\mathbf{d}}$. For example, if $\mathbf{d} = \mathbf{2}$ and

$$a = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right), b = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}\right) \in \mathbb{T}^2,$$

then

$$a + b = \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right), 6a = (\pi, \pi) \in \mathbb{T}^2.$$

Let $L_2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space consisting of square integrable (complex) functions defined on \mathbb{T} . We consider the bounded and self-adjoint Friedrichs model h acting on the Hilbert space $L_2(\mathbb{T})$ as

$$h := h_0 - k,$$

where h_0 is the multiplication operator:

$$(h_0 g)(x) = (1 - \cos(2x))g(x),$$

and k are non-local interaction (integral) operator:

$$(kg)(x) = \sin(2x) \int_{\mathbb{T}} \sin(2t)g(t)dt, \quad g \in L_2(\mathbb{T}).$$

In this paper, unlike the above mentioned papers, we mainly study the eigenvalues of the Friedrichs model h , located to the left and right of the essential spectrum. Here and throughout the article, the spectrum, the essential spectrum and discrete spectrum corresponding to self-adjoint operators is denoted with $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ and $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$, respectively.

Next, by making use of the definition of the perturbation $-k$ of the operator h_0 acts a self-adjoint operator of rank 1. The Weyl theorem [11] on the invariance of the essential spectrum under finite rank 1 perturbation yields the fact that the essential spectrum of the operator h coincides with the spectrum of h_0 :

$$\sigma_{\text{ess}}(h) = \sigma(h_0) = [0; 2].$$

We define the analytic functions $\Delta(\cdot)$ (the Fredholm determinant associated with the operator h) in $\mathbb{C} \setminus [0; 2]$ by

$$\Delta(z) := 1 - I(z),$$

where

$$I(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2(2t)dt}{1 - \cos(2t) - z}.$$

The following Lemma 1 is the characterization of the relation between the eigenvalues of the operators h and zeros of the function $\Delta(\cdot)$.

Lemma 1. *The number $z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]$ is an eigenvalue of h if and only if $\Delta(z) = 0$.*

Proof. Let the number $z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]$ be an eigenvalue of h and $g \in L_2(\mathbb{T})$ be the corresponding eigenfunction. Then, the function g does satisfies an equation of the form

$$(1 - \cos(2x) - z)g(x) - \sin(2x) \int_{\mathbb{T}} \sin(2t)g(t)dt = 0. \tag{1}$$

It can easily be spotted that for any any $z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]$ the relation $1 - \cos(2x) - z \neq 0$ holds tru for all $x \in \mathbb{T}$. Then, the equation (1) implies

$$g(x) = \frac{\sin(2x)a}{1 - \cos(2x) - z}, \tag{2}$$

where

$$a := \int_{\mathbb{T}} \sin(2t)g(t)dt. \tag{3}$$

Substituting the expression (2) for $g(\cdot)$ into the equality (3), we conclude that the equation (1) has a nontrivial solution if and only if the equality $\Delta(z) = 0$ holds.

Thus, as a result the Lemma 1 implies that for the discrete spectrum of h , the equality

$$\sigma_{\text{disc}}(h) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]: \Delta(z) = 0\} \tag{4}$$

holds true. Therefore,

$$\sigma(h) = [0; 2] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [0; 2]: \Delta(z) = 0\}. \tag{5}$$

Detrmine

$$I(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2(2t)dt}{1 - \cos(2t) - z} \quad z \in \mathbb{R} \setminus [0; 2].$$

Since the function $I(\cdot)$ is an increasing in the intervals $(-\infty; 0)$ and $(2; +\infty)$, by the Lebesgue

dominated convergence theorem there exist the following finite or infinite limits

$$I(0) = \lim_{z \rightarrow 0-0} I(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2(2t)dt}{1 - \cos(2t)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \cos^2(2t)dt}{1 - \cos(2t)} = \int_{\mathbb{T}} 1 + \cos(2t)dt = 2\pi.$$

Lemma 2. (a) The operator h has unique eigenvalue to the left of zero.

(b) The operator h hasn't eigenvalue to the right of two.

Proof. (a) We have

$$\Delta(0) = 1 - I(0) = 1 - 2\pi < 0.$$

Taking into account the last two facts and the equalities

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(z) = 1,$$

we conclude that there exist the point $z_0 \in (-\infty; 0)$ such that $\Delta(z_0) = 0$. By the lemma 1 it means that the number z_0 are the eigenvalues of h .

(b) It is lasey to see that $\Delta(z) \geq 1$ for any $z > 2$. From here using the lemma 1 we obtain that the opotor h hasn't eigenvalues in $(2; +\infty)$. Lemma 2 is completely proved.

Thus, as a result the Lemma 2 and equality (4) implies that for the spectrum of h , the equality

$$\sigma_{\text{disc}}(h) = \{z_0\}, \quad \sigma_{\text{ess}}(h) = [0; 2] \tag{6}$$

holds true. Therefore,

$$\sigma(h) = \{z_0\} \cup [0; 2].$$

Spectrum of the Tensor Sum of Friedrichs Models

The Hilbert space of square integrable symmetric complex valued functions defined on \mathbb{T}^2 is denoted with $L_2^{(s)}(\mathbb{T}^2)$. We consider the Hamiltonian model of the form

$$H: L_2^{(s)}(\mathbb{T}^2) \rightarrow L_2^{(s)}(\mathbb{T}^2), \quad H: = H_0 - V_1 - V_2, \tag{7}$$

where H_0 is the multiplication operator :

$$(H_0 f)(x, y) = (2 - \cos(2x) - \cos(2y))f(x, y),$$

and $V_\alpha, \alpha = 1, 2$ are non-local interaction operators:

$$(V_1 f)(x, y) = \sin(2x) \int_{\mathbb{T}^2} \sin(2t) f(t, y) dt,$$

$$(V_2 f)(x, y) = \sin(2y) \int_{\mathbb{T}^2} \sin(2t) f(x, t) dt.$$

Here, $f \in L_2^{(s)}(\mathbb{T}^2)$. By the definition, the operators $V_\alpha, \alpha = 1, 2$ are partial integral operators with degenerated kernel of rank-1.

Lemma 3. That the operator H is linear, bounded and self-adjoint in $L_2^{(s)}(\mathbb{T}^2)$.

Proof. First, we verify the linearity of the operator H . To do this, we show that for any complex numbers $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and for any elements $f, g \in L_2^{(s)}(\mathbb{T})^2$, the following equality holds:

$$H(\alpha f + \beta g) = \alpha Hf + \beta Hg.$$

Indeed,

$$\begin{aligned} H(\alpha f + \beta g)(x, y) &= (2 - \cos(2x) - \cos(2y))(\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \\ &\quad - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)(\alpha f(x, t) + \beta g(x, t))dt - \\ &\quad - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)(\alpha f(t, y) + \beta g(t, y))dt = \\ &\alpha \left[(2 - \cos(2x) - \cos(2y))f(x, y) - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)f(x, t)dt - \right. \\ &\quad \left. - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)f(t, y)dt \right] + \\ &+ \beta \left[(2 - \cos(2x) - \cos(2y))g(x, y) - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)g(x, t)dt - \right. \\ &\quad \left. - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)g(t, y)dt \right] = \alpha(Hf)(x, y) + \beta(Hg)(x, y). \end{aligned}$$

Thus, H is a linear operator.

To show that the operator H is bounded, we consider $\|Hf\|^2$ and estimate it as follows:

$$\begin{aligned}
 \|Hf\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(Hf)(x, y)|^2 dx dy = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| (2 - \cos(2x) - \cos(2y))f(x, y) - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)f(x, t) dt - \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) f(t, y) dt \right|^2 dx dy \leq 3 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |2 - \cos(2x) - \cos(2y)|^2 \cdot \\
 &\quad \cdot |f(x, y)|^2 dx dy + 3 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)f(x, t) dt \right|^2 dx dy + \\
 &\quad + 3 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) f(t, y) dt \right|^2 dx dy \leq 48 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^2 dx dy + \\
 &\quad + 3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2y) dy \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2t) dt \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)|^2 dx dt + \\
 &\quad + 3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2x) dx \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2t) dt \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t, y)|^2 dt dy = \\
 &\quad = (48 + 6\pi^2) \|f\|^2.
 \end{aligned}$$

Hence

$$\|Hf\| \leq \sqrt{48 + 6\pi^2} \|f\|.$$

Thus, H is a bounded operator.

Now, let us verify that the operator H is self-adjoint:

$$\begin{aligned}
 (Hf, g) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Hf)(x, y) \overline{g(x, y)} dx dy = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(2 - \cos(2x) - \cos(2y))f(x, y) - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t)f(x, t) dt - \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) f(t, y) dt \right] \overline{g(x, y)} dx dy = \\
 &\quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 - \cos(2x) - \cos(2y))f(x, y) \overline{g(x, y)} dx dy - \\
 &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2y) \sin(2t) f(x, t) \overline{g(x, y)} dx dy dt - \\
 &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \sin(2t) f(t, y) \overline{g(x, y)} dx dy dt = \\
 &\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \left[\overline{(2 - \cos(2x) - \cos(2y))g(x, y) -} \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) g(x, t) dt - \sin(2x) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) g(t, y) dt \right] dx dy = \\
 &\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \overline{(Hg)(x, y)} dx dy = (f, Hg).
 \end{aligned}$$

Hence, $H^* = H$, that is, H is a self-adjoint operator.

Main result of the note is the following theorem.

Theorem 1. The number $2z_0$ is a simple eigenvalue of model operator H and $\sigma_{\text{ess}}(H) = [z_0; z_0 + 2] \cup [0; 4]$, $\sigma_{\text{disc}}(H) = \{2z_0\}$.

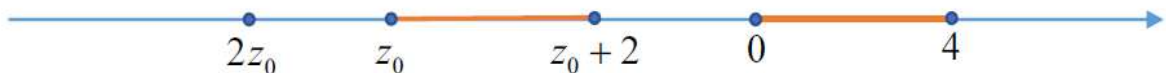


Figure 1. The spectrum of H .

Proof of Theorem 1. From the definitions of H and h , we obtain the representation

$$H = h \otimes I + I \otimes h,$$

where I is an identity operator on $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Therefore, using the theorem on the spectrum of tensor sum of two operators we have

$$\sigma(H) = \sigma(h) + \sigma(h). \quad (8)$$

Therefore, by virtue of Lemma 2 and equality 6, the operator h has the unique eigenvalue z_0 and

$$\sigma_{\text{disc}}(h) = \{z_0\} \quad \sigma(h) = \{z_0\} \cup [0; 2].$$

In view of equality (8), the number $2z_0$ is a simple eigenvalue of H and

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [z_0; z_0 + 2] \cup [0; 4] \quad \sigma_{\text{disc}}(H) = \{2z_0\}.$$

Conclusion. The results on the spectrum of tensor sum of two operators allows us to define an essential spectrum and discrete spectrum for lattice three-particles Hamiltonian. Furthermore, we have shown that the lattice three-particle Hamiltonian has exactly one eigenvalues.

REFERENCES:

1. G.M.Graf, D.Schenker. *2-Magnon Scattering in the Heisenberg Model* *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 67, pp 91–107, 1997.
2. P.A.Faria da Veiga, L.Ioriatti, M.O'Carroll. *Energy-Momentum Spectrum of Some Two-Particle Lattice Schrödinger Hamiltonians* *Phys. Rev. E.* 66 (3), 016130, 2002.
3. D.Mattis. *The few-body problem on a lattice* *Rev. Modern Phys.* 58 (2), pp 361–379, 1986.
4. A.I.Mogilner. *Hamiltonians of Solid State Physics at Few-Particle Discrete Schrödinger Operators: Problems and Results* *Advances in Sov. Math.* 5, pp 139–194, 1992.
5. V.A.Malyshev, R.A.Minlos. *Linear Infinite-Particle Operators. Translations of Mathematical Monographs.* Providence American Mathematical Society, 1995.
6. S.Albeverio, S.N.Lakaev, R.Kh.Djumanova. *The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles* *Rep. Math. Phys.* 63 (3), pp 359–380, 2009.
7. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov. *On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices* *Russ. J. Math. Phys.* 14 (4), pp 377–387, 2007.
8. T.Kh.Rasulov, R.T.Mukhitdinov. *The finiteness of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice* *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 58 (1), pp 52–59, 2014.
9. V.Heine, M.Cohen, D.Weaire. *The Pseudopotential Concept* New York–London Academic Press 1970.
10. B.V.Karpenko, V.V.Dyakin, G.A.Budrina. *Two electrons in Hubbard model* *Fiz., Met., Metalloved.* 61 (4), pp 702–706, 1986.
11. M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators* New York Academic Press, 1978.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ

Маматов Тулкин Юсупович,
доцент Бухарского государственного
технического университета, PhD физ.-мат.наук
mamатов.tulkin@mail.ru

Аннотация. В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова-Галеркина и Рунца для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. Задана структура численного решения, и получена оценка погрешности приближённого решения по метрике энергетического пространства, порождённого оператором дробного дифференцирования. Для частного случая дробно-дифференциального уравнения построена вычислительная схема метода, получены приближённые решения, и дан анализ сходимости приближённого решения к точному решению исходной задачи.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, уравнение, метод, решение, метод Бубнова-Галеркина, метод Рунца.

СHEKLI ELEMENTLAR USULDA KASR TARTIBLI DIFFERENTIAL TENGLAMANI
YECHISH

Annotatsiya. Maqolada kasr tartibli differentsial operatorlari bilan tenglamalarning sonli yechimini topish uchun Bubnov-Galerkin va Rits usulidan foydalanishni nazariy asoslash natijalari keltirilgan. Sonli yechimning strukturasi ko'rsatilgan va kasr tartibli differentsial operatori tomonidan yaratilgan energiya fazosining metrikasiga ko'ra taxminiy yechimning xatosi bahosi olinadi. Kasr tartibli differentsial tenglamaning alohida holati uchun usulning hisoblash sxemasi tuziladi, taqribiy yechimlar olinadi va taqribiy yechimning dastlabki masalaning aniq yechimiga yaqinlashish tahlili beriladi.

Kalit so'zlar: kasrli differentsiallashtirish, tenglama, usul, yechim, Bubnov-Galerkin usuli, Rits usuli.

FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL
EQUATION

Abstract. The paper presents the results of theoretical justification of the application of the Bubnov-Galerkin and Ritz method for finding numerical solutions of equations with fractional differentiation operators. The structure of the numerical solution is specified and the estimation of the error of the approximate solution by the metric of the energy space generated by the fractional differentiation operator is obtained. For a special case of fractional differential equation the computational scheme of the method is constructed, approximate solutions are obtained and the convergence of the approximate solution to the exact solution of the original problem is analysed.

Keywords: fractional differentiation, equation, method, solution, Bubnov-Galerkin method, Ritz method.

Введение. В последние годы наблюдается растущий интерес в области дробного исчисления. Дробные дифференциальные уравнения привлекли повышенное внимание. Актуальность этой работы состоит в том, что дробно-дифференциальные уравнения имеют применение в различных областях науки и техники. Многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, финансах и других науках можно описать моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления. Данные задачи, как правило, точно не решаются, поэтому весьма остро стоят вопросы разработки и применения приближённых методов решения с последующим их теоретическим обоснованием для этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений. Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остаётся открытым вопрос теоретического обоснования применения приближённых методов для более общего класса подобных задач.

Методика исследования. Целью этой работы является разработка вычислительной схемы для численного решения дробно-дифференциального уравнения. В работе предлагается обобщённый метод Бубнова-Галеркина и Ритца для нахождения приближённого решения дробно-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, f \in L_2[0, 2\pi], \quad (1)$$

где $D^{(\alpha)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} (D_+^{(\alpha)} + D_-^{(\alpha)})$ определяется с помощью операторов дробного

дифференцирования $D_{\pm}^{(\alpha)}$, определяемых для дробных производных для функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, по формулам:

$$(D_{a+}^{(\alpha)}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

$$(D_{b-}^{(\alpha)}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty,$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Производные (2) принято также называть производными Римана-Лиувилля порядка α , левосторонним и правосторонним, соответственно. u - неизвестная, а f - заданная функции из пространства $L_2[0, 2\pi]$. T - некоторый оператор, для которого $(D^{(\alpha)} + T)$ - линейный оператор и в общем случае неограниченный и не положительно определённый.

Для достаточно хороших функций оператор $D^{(\alpha)}$ совпадает с оператором Вейля для дробного дифференцирования и действует по правилу:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\alpha u_k e^{ikx}. \quad (3)$$

Здесь u_k - суть коэффициенты Фурье для функции u .

Рассмотрим теперь случай, когда дробная производная (2) порядков $\alpha \geq 1$, тогда её выражение задаётся следующим образом.

Число α - дробный порядок производной можно представить в виде: $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, через сумму целой и дробной частей соответственно.

Если α - целое число, то под дробной производной будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Если же число α - не целое, то целесообразно ввести производные:

$$D_{a+}^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_+^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f,$$

$$D_{b-}^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_-^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f,$$

здесь $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ и $I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f$ дробные интегралы порядка $1 - \{\alpha\}$. Таким образом, дробные производные высших порядков задаются как:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n=[\alpha]+1,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n=[\alpha]+1.$$

Для оператора справедливы следующие леммы.

Лемма 1. $D^{(\alpha)}$ положительно определённый оператор.

Доказательство. Известно, что $D^{(\alpha)}$ будет положительно определённым оператором, если выполняется следующее условие: $(D^{(\alpha)}u, u) > 0$. Кроме того, система e^{ikx} полна в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, то справедливо:

$$(D^{(\alpha)}u, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (D^{(\alpha)}u, e^{ikx})(u, e^{ikx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k^2 > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. $D^{(\alpha)}$ - симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $D_+^{\alpha}u$ и v для $\forall u, v \in L_2[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} (D_+^{\alpha}u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ikx} dt v(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ik(x-t)} dt v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-ik)^{\alpha} e^{ikx} dx u(t) dt = (u, D_-^{\alpha}v). \end{aligned}$$

Аналогично для D_-^{α} имеем: $(D_-^{\alpha}u, v) = (u, D_+^{\alpha}v)$.

Отсюда следует, что оператор $D^{(\alpha)}$, который выражается через операторы D_+^{α} и D_-^{α} , является симметричным оператором, на основании свойства скалярного произведения.

Учитывая это, введём скалярное произведение и норму соответственно:

$$[u, v] = (D^{(\alpha)}u, v), \quad [u] = (D^{(\alpha)}u, u)^{\frac{1}{2}}.$$

В явном виде скалярное произведение будет выражено как:

$$[u, v] = (D^{(\alpha)}u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k |k|^{\alpha} e^{ikx} v(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k v_k.$$

Пополняя $D(D^{(\alpha)})$ по введённой норме, получим энергетическое пространство, обозначим которое через H_D .

Умножая исходное уравнение (1) на произвольную функцию $v \in D(D^{(\alpha)})$, получим следующее уравнение:

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \tag{4}$$

Уравнение (4) допускает обобщённую постановку задачи. Обобщённым решением уравнения (1) назовём функцию, удовлетворяющую уравнению (4) для любой функции $v \in H_D$.

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в энергетическом пространстве H_D выбирается система

базисных функций $\varphi_j, j = \overline{1, N}$. Приближённое решение ищется в виде многочлена по выбранной системе базисных функций в виде:

$$u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j. \tag{5}$$

Неизвестные коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида:

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Учитывая представление (5) и линейность введённого и обыкновенного скалярных произведений, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N a_j [\varphi_j, \varphi_k] + \sum_{j=1}^N a_j (T\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = \overline{1, N}. \tag{7}$$

Теорема 1 Пусть 1) уравнение (1) имеет единственное решение при данной правой части. 2) Форма $\mathcal{L}(u, v) = [u, v] + (Tu, v)$ является H_D определённой и H_D ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, \quad \mathcal{L}(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \quad \gamma_0, \gamma_1 \equiv \text{const}$$

3) Последовательность подпространств H_N линейных оболочек функций $\varphi_j, j = \overline{1, N}$ является предельно плотной в H_D .

Тогда при любом конечном N однозначно разрешима система (6) и приближённое решение u_N сходится к точному решению u при $N \rightarrow \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности:

$$[u - u_N] \leq \varepsilon(u, N),$$

где $\varepsilon(u, N)$ заданная функция от N (оценка погрешности приближения), удовлетворяющая неравенству:

$$\min_{c_j} \left\| D^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right) \right\| \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0.$$

Рассмотрим задачу:

$$D^{(\alpha)} u + qu = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{8}$$

Результаты и их обсуждение. Приближённое решение (8) будем искать методом Рунца, согласно которому в качестве базисных функций возьмём собственные функции оператора $A = D^{(\alpha)} + q$ с областью определения $D(A)$, состоящие из непрерывных на $[0, 1]$ и обладающие производными до второго порядка включительно функций $u(x)$, удовлетворяющих условиями $u(0) = u(1) = 0$. Отметим, что собственное значение λ_i и соответствующая ему собственная функция φ_i оператора A , имеют вид $\lambda_i = i^2 \pi^2 + q, \varphi_i = \sin i \pi x, i = 1, 2, \dots$. Тогда приближённое решение (8) будем искать в виде:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sin i \pi x, \tag{9}$$

где неизвестные коэффициенты разложения (9) задаются явно в виде:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2 \pi^2 + q_0} \int_0^1 f(x) \sin i \pi x dx.$$

Рассмотрим примеры численной реализации предложенной вычислительной схемы для задачи (1).

Возьмём для задачи (1) значения $\alpha = 2,5, q = 1$. Тогда уравнение примет вид:

$$D^{(2.5)}u + u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (10)$$

где правая часть уравнения (10) в явном виде задана как функция:

$$f(x) = (1 + b^{2.5}) \sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5}) \sin(\pi - b)x.$$

Легко показать, что точное решение имеет вид:

$$u(x) = \sin bx - \sin(\pi - b)x.$$

Действительно, применим точное решение к уравнению (10) и воспользуемся равенством $D^{(\alpha)}(\sin bx) = b^\alpha \sin bx$, получим:

$$\begin{aligned} b^{2.5} \sin bx - (\pi - b)^{2.5} \sin(\pi - b)x + \sin bx - \sin(\pi - b)x = \\ = (1 + b^{2.5}) \sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5}) \sin(\pi - b)x. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации метода приближённые решения (10) будем искать в виде тригонометрического многочлена (9), неизвестные коэффициенты которого найдём из определённого интеграла:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2 \pi^2 + 1} \int_0^1 \left((1 + b^{2.5}) \sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5}) \sin(\pi - b)x \right) \sin i\pi x dx.$$

Подставляя в формулу $b=1$ получим приближённое решение для $N=10$, график которого представлен на рисунке 1. График соответствующего точного решения представлен на рисунке 2. [7]

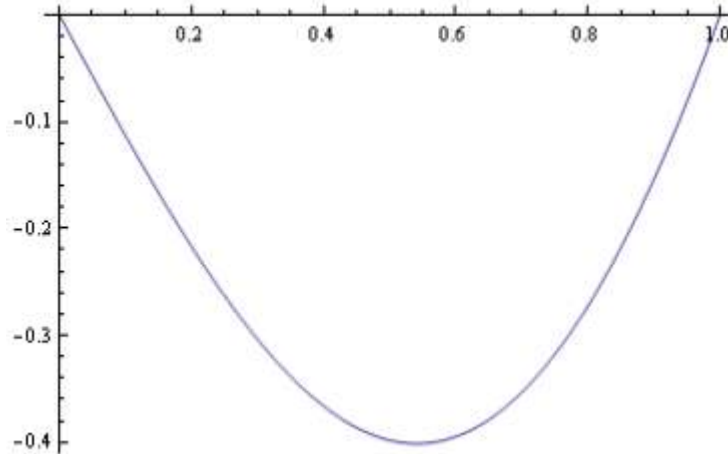


Рисунок 1. График точного решения

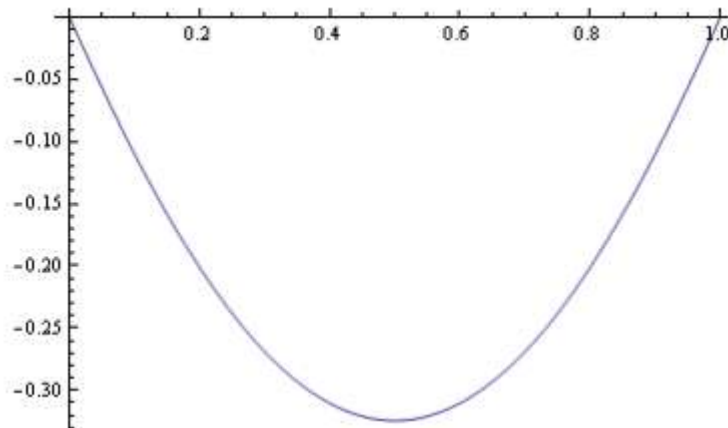


Рисунок 2. График приближённого решения $u_{10}(x)$

Нетрудно видеть, что графики приближённого и точного решений почти совпадают. Кроме того, можно сравнить точные и приближённые значения функции в точках промежутка интегрирования (таблица 1):

Таблица 1.

x_i	$u(x_i)$	$u_{10}(x_i)$
0	0	0
0.1	-0.112693	-0.109898
0.2	-0.216672	-0.201131
0.3	-0.303631	-0.269012
0.4	-0.366226	-0.310407
0.5	-0.398157	-0.324481
0.6	-0.394782	-0.310407
0.7	-0.353214	-0.269012
0.8	-0.272511	-0.201131
0.9	-0.153749	-0.109898
1.0	0	0

Сравнивая второй и третий столбцы таблицы 1, видно, что расхождения в значениях невелики. Для получения большей точности, найдем приближённое решение исходной задачи для $N=15$.

Точные и приближённые значения заданы таблицей 2:

Таблица 2.

x_i	$u(x_i)$	$u_{15}(x_i)$
0	0	0
0.1	-0.112693	-0.109811
0.2	-0.216672	-0.201220
0.3	-0.303631	-0.268961
0.4	-0.366226	-0.310456
0.5	-0.398157	-0.324419
0.6	-0.394782	-0.310456
0.7	-0.353214	-0.268961
0.8	-0.272511	-0.201220
0.9	-0.153749	-0.109811
1.0	0	0

Дальнейшее увеличение числа N не привело к повышению точности приближения, что свидетельствует из таблицы 3.

Таблица 3.

x_i	$u(x_i)$	$u_{20}(x_i)$
0	0	0
0.1	-0.112693	-0.109793
0.2	-0.216672	-0.201197
0.3	-0.303631	-0.268947
0.4	-0.366226	-0.310455
0.5	-0.398157	-0.324425
0.6	-0.394782	-0.310455
0.7	-0.353214	-0.268947
0.8	-0.272511	-0.201197
0.9	-0.153749	-0.109793
1.0	0	0

Сравнивая значения приближённых функций при $N=10$, $N=15$, получили точность $\varepsilon=10^3$. Однако, дальнейшее увеличение N приводит к медленному увеличению точности приближения.

Заключение. В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова-Галеркина и Рунге для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. Задана структура численного решения, и получена оценка погрешности приближённого решения по метрике энергетического пространства, порождённого оператором дробного дифференцирования. Для частного случая дробно-дифференциального уравнения построена вычислительная схема метода, получены приближённые решения, и дан анализ сходимости приближённого решения к точному решению исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Barton T.A., Purnaras I.K. *Lp-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl.*, 2012, № 386. – P. 830-841.
2. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. *Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // Applied Mathematics and Computation*, 2013. № 219. – P. 6750-6760.
3. Mamatov T. and S.Samko, *Mixed fractional integration operators in mixed weighted Hölder spaces. Fractional Calculus and Applied Analysis*. vol. 13(3), 2010, p. 245-260
4. Mamatov T, *Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces, Poincare Journal of Analysis and Applications*, vol. 7(2), 2020, p. 275-288
5. Mamatov T. and N.Mustafoev, *Operators of Volterra convolution type in weighted generalized Hölder space, Poincare Journal of Analysis and Applications*, vol. 10(1), 2023, p. 135-154
6. Mamatov T. *Mixed Fractional Integration In Mixed Weighted Generalized Hölder Spaces// Case Studies Journal*. Vol 7(6), (2018) , p.1-8.
7. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. *Fractional Integration toolbox// Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2013. V.16, №3. – P. 670 – 681.
8. Zhu L., Fan Q. *Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2013. № 18. –P. 1203-1213.

ELASTIK MUHITDA JOYLASHGAN SILINDRIK QOBIQDA NOSTATSIONAR TO‘LQIN DIFRAKSIYASI

Ergasheva Nazokat Shokirovna,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
nazokatergasheva713@gmail,*

Shomurodov Nazimjon Anvar o‘g‘li,

*Toshkent davlat transport universiteti, O‘zbekiston
Nozimshoh007@gmail.com,*

Gaffarov Ikrom Ibroximovich,

ibrohimovich1102@gmail.com,

Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston

Zaripov Bekzod Shodiyevich,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
begzodzaripov331@gmail.com,*

To‘yirov G‘ayrat Fozilovich,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
gtoyirov72@gmail.com*

Annotatsiya. Bu ishda elastik muhitda joylashgan silindrik qobiq (yoki qatlam) turg‘un bo‘lmagan (nostatsionar) to‘lqin yuklanishi natijasidagi dinamik kuchlanishlar- deformatsiya holati masalasini yechish algoritmi yaratilgan. Sonli natijalar olingan va tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: silindrik qobiq, to‘lqin, elastik muhit, kuchlanishlar- deformatsiya holati, diffraksiyasi.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Аннотация. В данной работе разработан алгоритм решения задачи динамического напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки (или слоя), находящейся в упругой среде, в результате нестационарного волнового воздействия. Получены и проанализированы численные результаты.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, волна, упругая среда, напряжённо-деформированное состояние, дифракция.

NON-STATIONARY WAVE DIFFRACTION BY A CYLINDRICAL SHELL IN AN ELASTIC MEDIUM

Abstract. In this work, an algorithm is created to solve the problem of dynamic stress-strain state of a cylindrical shell (or layer) located in an elastic medium as a result of unsteady (nonstationary) wave loading. Numerical results are obtained and analyzed.

Keywords: cylindrical shell, wave, elastic medium, stress-strain state, diffraction.

Kirish. Quyidagi ishlarda [1,2] nostatsionar to‘lqin diffraksiyasi masalalarini xususiy hosilali differensial tenglamalar, Laplas va Furiyning integral almashtirish usullari orqali yechilgan. Bu usullarni qo‘llaganda teskari almashtirish yoki orginalni topish qiyinchiliklarga olib keladi. Bu qiyinchiliklar integral osti funksiyaning kompleks bo‘lishi va integrallash chegarasini murakkabligi bilan xarakterlanadi [3]. Ishda potensial funksiyalar yordamida to‘lqin tenglamasi olingan, bu tenglamani yechishda Laplasning integral almashtirish uchuli qo‘llanilgan [4]. Ishda tutash muhitda joylashgan qattiq silindrik diskdagi tekis to‘lqin diffraksiyasi masalasi kombinatsion yondashuv asosida yechilgan. Qattiq diskning vertikal va aylanma ko‘chishi Fredgolmning integral tenglamalari orqali [5,6], yon tomonga ko‘chishi esa Furiy qatori orqali ifodalangan [7,8]. Ideal suyuqlik silindrik jismga elastik to‘lqin diffraksiyasi masalasi [9,10] ishlarda ko‘rilgan, bunda silindrik quvur suyuqlik bilan to‘la bo‘lib oqayapti deb olingan [11]. Ishda suyuqlikda joylashgan quvurdagi R bo‘ylama to‘lqin diffraksiyasi masalasi yechilgan. Suyuqlik ideal bo‘lganligi sababli faqat bo‘ylama to‘lqin potentsiali mavjud bo‘ladi [12]. Ishda qovushqoq bo‘lmagan suyuqlikda joylashgan

silindrik diskda tekis to‘lqin difraksiyasi natijasida hosil bo‘ladigan gidrodinamik bosim ham o‘rganilgan. Bu yerda oldingi ishdan farqli ravishda gidrodinamik tenglamadan foydalanilgan.

Masalani qo‘yilishi va yechish algoritmi. Faraz qilaylik, elastik muhitga joylashgan silindrik bo‘shliqqa ($r=r_0$) tekis noturg‘un to‘lqin tushsin. Silindrik bo‘shliq kuchlanishlardan ozod qilingan bo‘lsin ($\sigma_{rr}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0$). Yagona nolga teng bo‘lmagan kuchlanish $r=r_0$ da kontur (yoki halqa) $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ kuchlanishi hisoblanadi (σ_0 -tushadigan to‘lqin amplitudasi). Harakat tenglamasi [5]

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \bar{U}_j - \mu \text{rot rot } \bar{U}_j + b_j = r_j \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial t^2} \quad j=1,2 \quad (1)$$

Qatlamlar orasida qattiq mahkamlanganlik sharti qo‘yiladi [12]

$$\begin{aligned} r = r_1: \quad & s_{rr1} = s_{rr2}; \quad s_{r\theta 1} = s_{r\theta 2}; \quad s_{rz1} = s_{rz2}; \\ & u_1 = u_2; \quad J_1 = J_2; \quad W_1 = W_2. \end{aligned} \quad (2)$$

$$r = r_0: \quad s_{rr0} = Q \quad s_{r\theta 0} = Q \quad s_{rz0} = 0$$

Faraz qilamizki t vaqtda to‘lqin silindirik qobiqqa ta’siri nuqtadan $r = r_1, q = 0$ boshlanadi. U holatgacha silindrik jism joylashgan maydon o‘zini tinch holatini saqlagan. Difraksiya maydonini tekshirish tushadigan impuls kuchlanishi yuklanishidan boshlanadi.

$$\begin{aligned} \sigma_{xxn}^{(p)} &= \sigma_0 H(t), \\ \sigma_{xyn}^{(p)} &= \sigma_0 \frac{v_n}{1-v_n} H(t), \quad t = t - (x+r_N)/C_{Pn}, \end{aligned} \quad (3)$$

bunda σ_0 - tushadigan to‘lqin amplitudasi; $H(t)$ - Xevisaydning birlik funksiyasi

(2) va chegaraviy shartlar uchun Furyening integral almashtirishlarini qo‘llaymiz, u holda kontur kuchlanishi $\sigma_{rr} = \sigma_0 H(t) \cos \theta$, $\sigma_{r\theta} = \tau_0 H(t) \sin \theta$ bo‘lganda qo‘yidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta n}^* &= \frac{\sigma_{\theta\theta n}(r_0, \theta, t)}{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(r_0, \Omega) e^{i\Omega t}}{\Omega [\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_4 \Delta_5]} d\Omega, \quad (4) \\ \Delta_1(r_0, \Omega) &= (\Delta_3 + \tau_0 E) [2\Omega H_{n-1}^{(1)}(\Omega) - ((2n^2 + 2n) + \Omega^2) H_n^{(1)}(\Omega)] + \\ &+ [\tau_0 \Delta_2 - \Delta_4] \left[2n(n+1) H_n^{(1)}\left(\frac{C_{P1}}{C_{S1}} \Omega\right) + \frac{2C_{P1} \Omega}{C_{S1}} H_{n-1}^{(1)}\left(\frac{C_P}{C_S} \Omega\right) \right]. \end{aligned}$$

Bunda Δ_k ($k=1,2,3,4,5$) ning ifodalari [10] ishda keltirilgan. Xosmas integral (4.1) birinchi bobda keltirilgan metodika yordamida amalga oshiriladi. Amalda xosmas integral (1) -ni EHM hisoblash quyidagi tartibda amalga oshiriladi. Integralni cheksiz oraliqda hisoblashni tassavur qilish qiyin. Shuning uchun uni chekli oraliqda integrallaymiz

$$\sigma_{\theta\theta n}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\Delta_1(r_0, \Omega)}{\Omega [\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_4 \Delta_5]} e^{-i\Omega t} d\Omega \quad (5)$$

Integral (4)-ni chegarasi ω_a, ω_b tushadigan to‘lqinni ta’sir etish davriga bog‘liq bo‘ladi. $\sigma_{rr}^{(i)F}(\Omega)$ spektral zichligi tushadigan to‘lqin xossalari ham bog‘liq bo‘ladi. ω_a, ω_b bu chegaralarning qiymatlari hisoblash jarayonida integral osti funksiyaga bog‘liq o‘zgaradi. Integrallash oralig‘ini tanlash talab etiladigan hisoblash aniqligiga ham bog‘liq bo‘ladi. Boshqa tomondan taqribiy integral, ya’ni chegarasini $-\infty$ dan ω_a va ω_b dan ∞ olinishi qanday xatoliklarga olib kelish muammosi ochiqligicha qolgan. Integral (4.1) ni cheksiz hadli qator bilan almashtirib sonli hisoblash ham mumkin bo‘lmagan ish. Boshqa tomondan [108] ko‘rsatilganki n-ning katta qiymatlarida hadlar (Bessel va Xankel funksiyalari n- tartibli bir va ikkinchi jinsli funksiyalar) uchun asimptotik formulalar mavjud ekan. Cheksiz qatorni chekli orqali yig‘indisiga baho berish imkoni mavjud. Hisoblashlar ikkita algoritmi hisoblashga, ya’ni (4) va (5) integrallarni hisoblashga olib keladi.

Hisoblash algoritmi. (5) formuladagi $\sigma_{\theta\theta n}^F/\sigma_0$ kattaliklar qo‘yidagicha hisoblanadi. (5) formulani

hisoblashning barcha kattaliklari berilgan bo‘ladi. Qo‘yidagicha belgilashlarni kiritamiz $x_1 = \Omega$, $x_2 = n_1 \Omega$, bunda $n_1 = C_{p1} / C_{s1}$; $\Omega = \omega \alpha C_{p1}$. x_k ($k=1,2$)-ning ikkita qiymatida Bessel funksiyasi $I_n(\xi)$ va $N_n(\xi)$ ($n=1,2..10$). Ko‘rsatilgan massiv quyidagicha hisoblanadi:

$$u_n(\xi) = \frac{2(n-1)}{\xi} u_{n-1}(\xi) - u_{n-2}(\xi), u_n(\xi) = I_n(\xi), N_n(\xi) \quad (6)$$

[11] ishga ko‘rsatilganidek N indeksning (argumentdan katta bo‘lgan qiymatlarida) qiymati oshib borishi bilan Bessel funksiyasining absolyut qiymati tez kamayib borar ekan. Bu holatda (6) formuladan foydalanish maqsadga tez va samarali olib bormaydi. Lekin (6) foydalanish mumkin, agarda qo‘yidagi rekurent yordamchi funksiya $\bar{I}_n(\xi)$ munosabatdan ($n=N$ dan $n=0$ gacha) foydalansak

$$I_n(\xi) = \frac{2(n-1)}{\xi} I_{n+1}(\xi) - I_{n+2}(\xi) \quad (7)$$

(4.4) munosabatdan foydalanish uchun boshlang‘ich qiymat beriladi

$$\bar{I}_{N_*+1}(\xi) = 0, \quad \bar{I}_{N_*} = \varepsilon_*, \quad (8)$$

va boshlang‘ich indeks $n = N_*$, qo‘yidagi tenglamadan aniqlanadi

$$\frac{(2\xi)^{N_*} N_*!}{(2N_*+1)} = \varepsilon_*. \quad (9)$$

Bu yerda ε - hisoblash xatoligi bo‘lib oldindan beriladi. Keyinchalik Bessel funksiyasining qiymati aniqlanadi:

$$I_n(\xi) = I_n(\xi) I_0(\xi) / I_0(\xi), \quad (10)$$

bunda $I_0(\xi)$ qo‘yidagicha aniqlanadi

$$I_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\xi \cos x) dx \quad (11)$$

Bessel i Neyman funksiyalar yordamida berilgan tenglamani yechimi ifodalanadi, ya’ni uni quyidagi funksiyani integrallashga keltiriladi

$$\chi_i(r_0, \Omega_1) = (\Delta_1(r_0, \Omega_1) / \Omega_1 (\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_4 \Delta_5)) e^{i\Omega} \quad (12)$$

Buning uchun (4.9) ni qo‘yidagi ko‘rinishda yozib olamiz

$$\chi_i(r_0, \Omega_1) = x_1(r_0, \Omega_1) - i x_2(r_0, \Omega_1) \quad (13)$$

Tushadigan to‘lqin amplitudasi $\sigma_{xx}^{(i)F}(\Omega)$ [12] qo‘yidagicha ifodalanadi

$$\sigma_{xx}^{(i)F}(\Omega) = f_1(\Omega) - i f_2(\Omega),$$

bunda $f_1(\Omega)$, $f_2(\Omega)$ - haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya. Eyler formulasidan $\exp(i\Omega)$ foydalanib (12) ni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz, ba’zi almashtirishlardan so‘ng quyidagi ifodani olamiz:

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\Omega) - i x_2(\Omega)] d\Omega \quad (14)$$

(14) integralni ikki qo‘shiluvchiga ajratamiz:

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\Omega) - i x_2(\Omega)] d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [x_1(\Omega) - i x_2(\Omega)] d\Omega \quad (15)$$

Hamda argument Ω ni $-\Omega$ ga almashtiramiz, u holda

$$\sigma_{\theta\theta n}^F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [x_1(\Omega_1) - x_1(-\Omega_1)] - i [x_2(\Omega_1) - x_2(-\Omega_1)] d\Omega \quad (16)$$

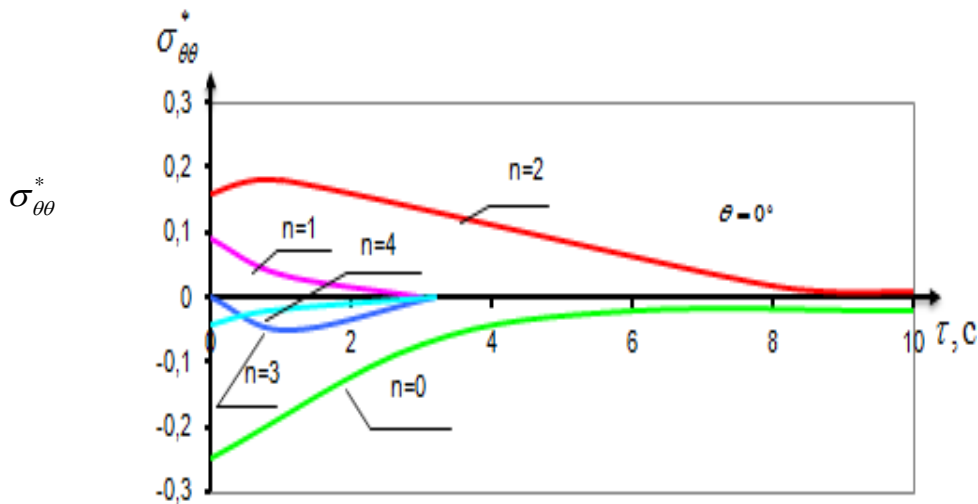
Bu yerda (16) Furyening teskari almashtirishlarini ifodalaydi, uning chap tomoni haqiqiy qiymatni ifodalaydi [9]. Qo‘yidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi

$$x_1(\Omega_1) = -x_1(-\Omega_1); x_2(\Omega_1) = -x_2(-\Omega_1). \quad (17)$$

Agar (17) ni hisobga olsak, u holda (16) integral quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\sigma_{\theta\theta}^F = \frac{1}{\pi_0} \int_{\Omega} x_1(\Omega) d\Omega \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^F = \frac{1}{\pi_{\omega_a}} \int_{\omega_a} x_1(\Omega) d\Omega \quad (19)$$

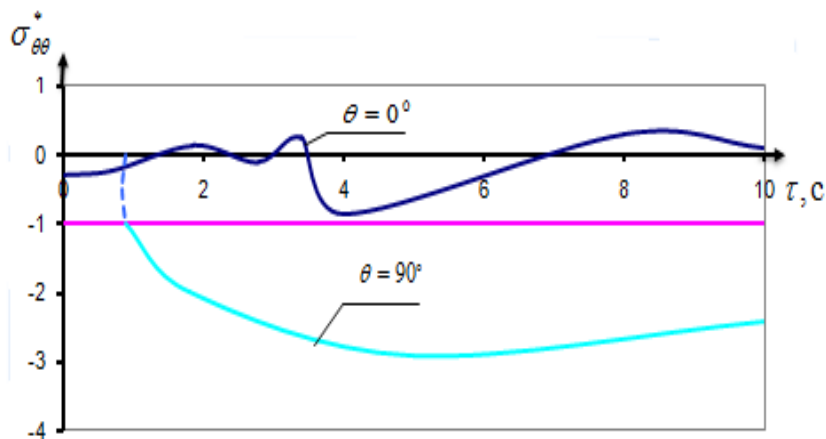


1- rasm. Kontur kuchlanishni vaqt bo'yicha o'zgarishi n-turli qiymatlarida o'zgarishi

Bu (19) integralni qiymati Romberg [13] usuli yordamida topiladi. Asosiy algoritm birinchi bobda keltirilgan integralni Romberg usuli yordamida integralashda integral osti funksiyasiga ko'p marotaba murojaat qilinadi.

Agar originali ma'lum bo'lgan funksiya uchun bu usul qo'llansa integralash qadami 0.01 bo'lganda xatolik 0,3-0,5% dan oshib ketmaydi. Silindrik qobiqda kuchlanishining taqsimlanishi vaqt bo'yicha pog'onali bo'lgan zarba to'liqini ta'sirida silindrik qobiqdagi kontur kuchlanishini o'zgarishini ko'ramiz. Natijalar $v_0 = 0,25$, $C_{S1}/C_{P1} = 0,5$, $\theta = 0^\circ$ va 90° parametrlar uchun olindi. (19) aniq integralni chegarasi ω_a va ω_b $[10^4 - N]$, $N = 1, 2, 5$, oraliqdan $h = 0, 10, 010, 00$ qadam bilan olindi.

Kontur kuchlanishini $N = 5$ va $N = 6$ qiymatida oldingi qiymatdan verguldan keyingi uchinchi son bilan farqlanadi. Kontur kuchlanishi $\sigma_{\theta\theta}^*$ vaqt τ o'zgarishiga bog'liq $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ qiymatlarida 1 va 2 rasmlarda keltirilgan.



2- rasm. Kontur kuchlanishni vaqt bo'yicha o'zgarishi n-turli qiymatlarida o'zgarishi

Olingan natijalar mavjud natijalar bilan solishtirilgan [14]. Natijalar $n = 0, 1$ bo'lganda 30% gacha farq qilar ekan. Maksimal kontur kuchlanishi $h = 0,01$ va $\theta = 90^\circ$ bo'lganda $2,962/3,0$ teng bo'lar ekan.

ADABIYOTLAR:

1. Кульмурастов Н.Р., Базаров М.Б. Программное обеспечение для идентификации динамических объектов. *Материалы республиканской научно-технической конференции “Горно-металлургический комплекс: проблемы и их решения”*. Алмалык. 8 Апреля, -2015. -С. 256-257.
2. Кульмурастов Н.Р., Базаров М. Б. Интервальные методы решения математических моделей технологических процессов. *Материалы VIII- международной научно-технической конференции «Горно-металлургический комплекс: достижения, проблемы и современные тенденции развития»*. Навои 19-21 ноября 2015.-С. 457.
3. Кульмурастов Н.Р., Хамроев Н.Н Исследование механизмов потерь энергии в упругих механических системах. *Международная научно-техническая конференция, посвящённая 60-летию НГМК.” Перспективы инновационного развития горно-металлургического комплекса», Навои, 23-24 ноябрь, 2018. - С.279*
4. Мирсаидов М.М., Трояновский И.Е. Динамика неоднородных систем с учётом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. -Ташкент: Фан,1990. -207 с.
5. Мубораков Я. Н., Сафаров И. И., Собиров М. И., Атоев А.Б. Об основных методах изучения напряжённо деформируемого состояния подземных цилиндрических сооружений при взаимодействии с упругими волнами.// Сб. науч. тр. «Прочность инженерных сооружений при сейсмических и импульсивных воздействиях» -Ташкент: Фан, 1990. -с. 67-83.
6. Мау, Менге. Динамические напряжения и смещения вблизи цилиндрической поверхности разрыва от плоской гармонической волны сдвига. // *Прикладная механика, перевод с англ.*1963. т.30,сер.У,№3.-с.117-126.
7. Мубаринов Я.Н., Сафаров И.И. О действии упругой волны на цилиндрическую оболочку. *Изв.Ан РУз, серия технических наук, 1987. №4. с. 34-40*
8. Нчуен Хоа Тхинь. Расчёт цилиндрической оболочки в линейной среде на действие импульсных сил // *Изв. Сев.-Кавказ Науч. Центра.*1985.№3.с. 54-57.
9. Каюмов С.С., Сафаров И.И. Распространение и дифракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических систем. Ташкент: ФАН, 2002г, 214с
10. Островерх Б. Н. Задачи расчёта тоннелей при сейсмическом воздействии.// -В кн.: *Динамика оснований, фундаментов и подземных сооружений. Т.2, -Ташкент:1977. -с.98-103.*
11. Отпущенников Е.Н, Локков С.Я., Костин И.Х. Экспериментальное исследование концентрации напряжений около кругового отверстия при воздействии плоской волны сжатия.// В кн. *Концентрация напряжений.*-Киев: 1971, вып.3.- с.106-112.
12. Перцев А. К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (Нестационарные задачи). -Л.: Судостроение, 1987. -316с.
13. Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений.// - Ташкент: Фан, 1973.-182с .
14. Рашидов Т.Р., Сагдиев Х., Мубораков Я.Н., Сафаров И.И. О двух основных методах изучения сейсмонапряжённого состояния подземных сооружений при действии сейсмических волн. // *ДАН УзССР, №6, 1989. -с.13-15.*

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Норматов Эркин Панжиевич,

*кандидат физико-математических наук,
Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
erkinormatov@yandex.ru*

Аннотация. В данной статье описаны периодические гармонические функции на дереве Кэли. При этом использованы свойства группового представления дерева Кэли. Рассмотрены периодические гармонические функции относительно произвольной нормальной подгруппы индекса 4.
Ключевые слова: дерево Кэли, гармоническая функция, нормальная подгруппа.

PERIODIC HARMONIC FUNCTIONS ON THE CAYLEY TREE

Abstract. In this paper periodic harmonic functions on the Cayley tree are classified. The properties of the group representation of the Cayley tree are used for this purpose. Periodic harmonic functions with respect to an arbitrary normal subgroup of index 4 are considered.

Keywords: Cayley tree, harmonic function, normal subgroup.

KELI DARAXTIDA DAVRIY GARMONIK FUNKSIYALAR

Annotatsiya. Ushbu maqolada Keli daraxtida davriy garmonik funksiyalar tasniflangan. Bunda Keli daraxti gruppaviy tasviri xossalariidan foydalanilgan. Buning uchun indeksi 4 ga teng ixtiyoriy normal qism gruppaga nisbatan davriy garmonik funksiyalar qaralgan.

Kalit so'zlar: Keli daraxti, garmonik funksiya, normal qism grupp

Введение и постановка задачи. Одним из частных случаев дерева является дерево Кэли, которое является бесконечным деревом, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ рёбер (дерево Кэли порядка $k \geq 1$). В работах [1-7] на дереве Кэли изучены модели статистической механики и для них описаны множества периодических гиббсовских мер, а также изучены траектории случайного блуждания в случайной среде.

Для изучения и решения этих задач используется групповое представление дерева Кэли [2]; в этом случае, эти задачи формулируются достаточно просто на языке группы, которая представляет дерево Кэли.

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими a_1, a_2, \dots, a_{k+1} [1].

В [3] доказано, что только дерево Кэли представляется как группа свободного произведения конечного числа циклических групп второго порядка.

Пусть G_k – групповое представление дерева Кэли $T^k, k \geq 1$. Любой элемент $x \in G_k$, который называется словом имеет следующий вид:

$$x = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}, \text{ где } 1 \leq i_m \leq k+1, m = \overline{1, n}.$$

Число n называется длиной слова x и обозначается через $\ell(x)$.

Число букв $a_i, i = \overline{1, k+1}$, участвующих в несократимой записи слова x , обозначим через $w_x(a_i)$. Например, если $x = a_1 a_3 a_2 a_4 a_1$, то $w_x(a_1) = 2, w_x(a_3) = 1$.

Пусть дана пара (G, S) , где G – граф и S – некоторое подмножество множества $V(G)$ всех вершин графа G .

В теории графов известно следующее определение гармонической функции.

Определение 1 ([6]). Функция $h: V(G) \rightarrow R$ называется гармонической с границей S на G ,

если

$$h_x = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in S_1(x)} h_y, \quad (1)$$

где $x \in V(G) \setminus S$, $d(x) \geq 1$, $S_1(x)$ — множество ближайших соседей точки x .

Гармонические функции играют важную роль в теории вероятностей, статистической механике и теории электрических сетей.

Мы дадим более общее определение гармонических функций на дереве Кэли.

Определение 2 ([7]). Пусть $A(x) \subseteq S_1(x)$ и $f: R^{r+1} \times T^k \rightarrow R^n$ ($n \geq 1$) —

некоторая известная функция. Функцию $h_x \in R^n$ назовём гармонической, если h_x удовлетворяет функциональному уравнению следующего вида:

$$h_x = \sum_{y \in A(x)} f(h_y, x, \theta), \quad (2)$$

где θ — параметр.

Заметим, что функциональное уравнение (1) является частным случаем уравнения (2). Кроме того, во многих задачах современной математики возникают функциональные уравнения типа (2) (аргумент функции пробегает G_k). Например:

- уравнение (2) для изучения модели Изинга на дереве Кэли имеет вид (см., например, [2])

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} \text{arc th}(\theta th h_y), \quad (3)$$

где $h_x \in R$, $x \in G_k$, $S(x)$ — множества прямых потомков x , θ — параметр;

- уравнение (2) для изучения модели Поттса имеет вид (см. [4])

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y; \theta, q), \quad (4)$$

где $F: R^{r+1} \rightarrow R^{r+1}$ ($q \geq 1$) — известная функция, $h_x \in R^{r+1}$, θ — параметр;

- уравнение (2) для изучения случайных блужданий на дереве Кэли имеет вид (см. [5])

$$h_x = \sum_{y \in S_1(x)} P_y(x) h_y, \quad (5)$$

где $P(x) \in [0, 1]$, $x \in G_k$, $y \in S_1(x)$.

Таким образом, естественно сначала нужно найти периодические (простые) решения уравнения (2).

Определение 3 ([7]). Пусть $H \subset G_k$ — подгруппа группы G_k . Совокупность величин $\{h_x, x \in G_k\}$ называется H -периодической, если $h_x = h_{yx}$ для любых $x \in G_k$ и $y \in H$.

Если H — нормальный делитель конечного индекса, то описание H -периодических решений уравнения (2) сводится к решению систем уравнений с конечным числом неизвестных. Следовательно, возникает следующая задача: найти условия на f и H , при которых уравнение (2) имеет H -периодическое решение.

Пусть $A(x) = S_1(x)$, $f(h, x, \theta) = \theta h + c$. В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$h_x = \sum_{y \in S_1(x)} (\theta h_y + c), \quad (6)$$

где $\theta, c \in R$.

Для простоты опишем все H -периодические решения уравнения (6) для любого нормального делителя H индекса 4. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 4 группы G_k имеет вид

$$H = H_A \cap H_B = \left\{ x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ — чётна}, \sum_{i \in B} \omega_x(a_i) \text{ — чётна} \right\}$$

где, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ и $A, B \in N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$.

Тогда H – периодические функции имеют вид:

$$h_x = \begin{cases} h_0, & \text{если } x \in H_0 \\ h_1, & \text{если } x \in H_1 \\ h_2, & \text{если } x \in H_2 \\ h_3, & \text{если } x \in H_3. \end{cases} \quad (7)$$

где h_0, h_1, h_2, h_3 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} h_0 = (k+1-|A \cup B|)(\theta_0+c) + |B \setminus A|(\theta_1+c) + |A \setminus B|(\theta_2+c) + |A \cap B|(\theta_3+c) \\ h_1 = (k+1-|A \cup B|)(\theta_1+c) + |B \setminus A|(\theta_0+c) + |A \setminus B|(\theta_3+c) + |A \cap B|(\theta_2+c) \\ h_2 = (k+1-|A \cup B|)(\theta_2+c) + |B \setminus A|(\theta_3+c) + |A \setminus B|(\theta_0+c) + |A \cap B|(\theta_1+c) \\ h_3 = (k+1-|A \cup B|)(\theta_3+c) + |B \setminus A|(\theta_2+c) + |A \setminus B|(\theta_1+c) + |A \cap B|(\theta_0+c). \end{cases} \quad (8)$$

Нетрудный анализ этой системы показывает, что верна следующая

Теорема. 1) Если

$$\left(\theta - \frac{1}{k+1}\right) \left(\theta - \frac{1}{k+1-2|A|}\right) \left(\theta - \frac{1}{k+1-2|B|}\right) \left(\theta - \frac{1}{k+1-2|A \cup B| - 2|A \cap B|}\right) \neq 0,$$

то уравнение (6) имеет единственное решение $h_x = \frac{c(k+1)}{\theta(k+1)-1}$, $x \in G_k$.

2) Если $\theta = \frac{1}{k+1}$, то при $c=0$ существует постоянное решение $h_x = h$, ($h \in \mathbb{R}$) уравнения (6), а при $c \neq 0$ уравнение (6) не имеет решения.

3) Если $|A| \neq \frac{k+1}{2}$ и $\theta = \frac{1}{k+1-2|A|}$, то уравнение (6) имеет бесконечно много H -периодических решений вида (7), где h_0, h_1, h_2, h_3 – удовлетворяют равенству

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2(2|A| - k - 1)(k+1)c}{|A|}.$$

При $|A| = \frac{k+1}{2}$ все H – периодические решения совпадают с постоянными функциями, описанными в 1) и 2).

4) Если $|B| \neq \frac{k+1}{2}$ и $\theta = \frac{1}{k+1-2|B|}$, то уравнение (6) имеет бесконечно много H -периодических решений вида (7), где h_0, h_1, h_2, h_3 – удовлетворяют равенству

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2(2|B| - k - 1)(k+1)c}{|B|}.$$

При $|B| = \frac{k+1}{2}$ все H – периодические решения совпадают с постоянными функциями, описанными в 1) и 2).

5) Если $|A \cup B| - |A \cap B| \neq \frac{k+1}{2}$ и $\theta = \frac{1}{k+1-2|A \cup B| - 2|A \cap B|}$, то уравнение (6) имеет бесконечно много H -периодических решений вида (7), где h_0, h_1, h_2, h_3 – удовлетворяют равенству $h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \frac{2(2|A \cup B| - 2|A \cap B| - k - 1)(k+1)c}{|A \cup B| - |A \cap B|}$.

При $|A \cup B| - |A \cap B| = \frac{k+1}{2}$ все H – периодические решения совпадают с постоянными функциями, описанными в 1) и 2).

Доказательство. Доказательство следует из детального исследования системы уравнений (8), которая является системой линейных уравнений с параметрами θ, k и A .

Заключение. В статье [7] описаны периодические гармонические функции для нормальной подгруппы индекса 2 группового представления дерева Кэли. Кроме того, доказано, что нормальная подгруппа индекса 3 не существует.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. // Доклады АН РУз. – Ташкент, 1994. – № 4. – С.3-5.
2. Розиков У.А. Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т.112. – № 1. – С.170-176.
3. Розиков У.А. Представимость деревьев и их некоторые приложения. // Матем. заметки. – Москва, 2002. – Т. 72. – Вып.4. – С.516-527.
4. Ganikhodjaev N.N. Rozikov U.A. On disordered phase in the ferromagnetic Potts model on the Sierpinski lattice. // Osaka Journal of Mathematics, 2000. – V.37. - № 2. – P.373-383.
5. Розиков У.А. Случайные блуждания в случайной среде на метрических группах. // Матем. заметки. – Москва, 2000. – Т.67. – № 1. – С. 129-135.
6. Bollobas B. Modern Graph Theory (Graduate texts in mathematics;184). – Springer-Verlag. - № 4. – 1998.
7. Норматов Э.П., Розиков У.А. Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли. // Матем. заметки. – Москва, 2006. – Т.79. – № 3. – С.434-444.

CONVERGENCE PROPERTIES OF NON-STANDARD MONGE-AMPÈRE MEASURE

Akramov Ibrohimbek Isroil ugli,
Silk Road International University
of Tourism and Cultural Heritage
i.akramov1@gmail.com

Abstract. In this paper, we consider a non-standard Monge-Ampère equation which arises in optimal transport and control theory which can be expressed as a sum of two Monge-Ampère operators acting on different variables. We define an analogue of Monge-Ampère measure and show some convergence properties of its measure.

Key words: fully nonlinear partial differential equation, Monge-Ampère operator, convergence properties.

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ НЕСТАНДАРТНОЙ МЕРЫ МОНЖА-АМПЕРА

Аннотация. В данной статье рассматривается нестандартное уравнение Монжа-Ампера, возникающее в теории оптимального переноса и управления, которое можно представить в виде суммы двух операторов Монжа-Ампера, действующих на разные переменные. Мы определяем аналог меры Монжа-Ампера и показываем некоторые свойства сходимости этой меры.

Ключевые слова: полностью нелинейное уравнение в частных производных, оператор Монжа-Ампера, свойства сходимости.

NOSTANDART MONJ-AMPER O'LCHOVINING YAQINLASHISH XOSSALARI

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz optimal transport va boshqaruv nazariyasida yuzaga keladigan nostandart Monj-Amper tenglamasini ko'ib chiqamiz, uni turli o'zgaruvchilarga ta'sir qiluvchi ikkita Monj-Amper operatorlarining yig'indisi sifatida ifodalash mumkin. Biz Monj-Amper o'lchovining analogini aniqlaymiz va uning o'lchovidagi ba'zi yaqinlashuv xususiyatlarini ko'rsatamiz.

Kalit so'zlar: to'liq chiziqli bo'lmagan differensial tenglama, Monj-Amper operatori, yaqinlashish xossalari.

Introduction. The non-standard Monge-Ampère equation

$$\partial_z^2 \phi \partial_{x_1}^2 \phi - (\partial_{x_1 z}^2 \phi)^2 + \partial_z^2 \phi \partial_{x_2}^2 \phi - (\partial_{x_2 z}^2 \phi)^2 = q \tag{1}$$

is a fully nonlinear second order partial differential equation which appeared in the recent paper by Oliver and Vasylykevych [7] in connections with Fluid Dynamics. The equation expresses relation between potential temperature and potential vorticity. It is nonlinear elliptic in a class of convex continuous functions. The associated operator, called non-standard Monge-Ampère operator, is a sum of two Monge-Ampère operators in separate variables. The operator possesses many properties of the usual Monge-Ampère operator. One can also define an analogue of the usual Monge-Ampère measure. The measure satisfies some properties of the usual Monge-Ampère measure Our study aims to address an open question: *whether the convergence properties of the classical Monge-Ampère measure remain valid for the non-standard Monge-Ampère equation.*

Let us consider the explicit balance model potential vorticity expression

$$F(D^2\theta, \omega) := \partial_z^2 \theta (1 + \epsilon \omega + \epsilon \nu \Delta \theta) - \epsilon \nu (\theta_{zx_1}^2 + \theta_{zx_2}^2) = q,$$

where θ is the potential temperature, q is the potential vorticity,

$$\omega = \partial_x \bar{u}_2 - \partial_{x_2} \bar{u}_1,$$

\bar{u} is the vertical mean velocity of velocity field u , ϵ is the Rossby number (see [7]). The equation (1) expresses relation between potential temperature and potential vorticity (see [7]).

The characteristic matrix for the potential vorticity equation is

$$\Lambda(\epsilon, \nu) := \begin{pmatrix} \epsilon\nu\partial_z^2\theta & 0 & -\epsilon\nu\theta_{zx_1} \\ 0 & \epsilon\nu\partial_z^2\theta & -\epsilon\nu\theta_{zx_2} \\ -\epsilon\nu\theta_{zx_1} & -\epsilon\nu\theta_{zx_2} & 1 + \epsilon\omega + \epsilon\nu\Delta\theta \end{pmatrix}.$$

Equation (1.1) is elliptic partial differential equation (in the sense of linearization) if the matrix $\Lambda(\epsilon, \nu)$ is positive definite, i.e.,

$$\epsilon\nu\partial_z^2\theta > 0 \text{ and } F(D^2\theta, \omega) = q > 0.$$

We use the following notation

$$\phi := \frac{1}{\sqrt{\epsilon\nu}}\Delta^{-1}(1 + \epsilon\omega) + \sqrt{\epsilon\nu}\theta,$$

where Δ means the Laplace operator in the x_1, x_2 variables and Δ^{-1} is the inverse operator. It is well known that the inverse operator is an integral operator. Let's recall from [7] that, for $u = (u_1, u_2)^T$,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{-H}^0 u(x_1, x_2, z) dz \\ &= \left(\int_{-H}^0 u_1(x_1, x_2, z) dz, \int_{-H}^0 u_2(x_1, x_2, z) dz \right)^T \end{aligned}$$

Notice that $\Delta^{-1}(1 + \epsilon\omega)$ is constant in z , therefore,

$$\partial_z\phi = \sqrt{\epsilon\nu}\partial_z\theta \text{ and } \partial_{x_{1z}}^2\phi = \sqrt{\epsilon\nu}\partial_{x_{1z}}^2\theta$$

Thus, the equation (1.1) can be written as

$$\begin{aligned} \partial_z^2\phi(\partial_{x_1}^2\phi + \partial_{x_2}^2\phi) - ((\partial_{x_{1z}}^2\phi)^2 + (\partial_{x_{2z}}^2\phi)^2) &= \\ \sqrt{\epsilon\nu}\partial_z^2\theta \left(\frac{1}{\epsilon\nu}(1 + \epsilon\nu) + \sqrt{\epsilon\nu}\Delta\theta \right) \epsilon\nu ((\partial_{x_{1z}}^2\theta)^2 + (\partial_{x_{2z}}^2\theta)^2) &= q \end{aligned}$$

Consequently, we obtain the so-called non-standard Monge-Ampère equation

$$\partial_z^2\phi\partial_{x_1}^2\phi - (\partial_{x_{1z}}^2\phi)^2 + \partial_z^2\phi\partial_{x_2}^2\phi - (\partial_{x_{2z}}^2\phi)^2 = q$$

As we will see, the equation is elliptic [5,10] but the solutions of the non-standard equation are unnecessarily strictly convex functions in contrary to the property of the classical Monge-Ampère equation. Furthermore, it is notable to mention that the non-standard Monge-Ampère equation does not have a convex continuous solution to the Dirichlet problem with continuous boundary data which is another difference from the classical one [1].

The composition of the paper is as follows: In section 2, we define the non-standard Monge-Ampère measure and show its some properties. In the next section, we show its convergence properties of its measure. In the concluding section, we discuss our main results.

Analogue of the Monge-Ampère measure. Monge-Ampère measure is defined on the Borel σ -algebra to be the Lebesgue measure of the normal mapping, i.e.,

$$M\phi(E) := |\partial\phi(E)|,$$

where E is a Borel set. We define an analogue of this measure.

Definition 2.1. For a convex continuous function ϕ defined on Ω and a compact subset E of Ω , the set function

$$\mu_\phi(E) := |\pi_1(\Gamma_\phi(E))| + |\pi_2(\Gamma_\phi(E))|$$

is called non-standard Monge-Ampère measure with respect to ϕ , where $|\cdot|$ is the Lebesgue measure.

Notice that if E is a Borel subset of Ω , then the sets $\pi_1(\Gamma_\phi(E))$ and $\pi_2(\Gamma_\phi(E))$ are not necessarily Lebesgue measurable sets. However, we can extend μ_ϕ to a larger class as long as $\pi_1(\Gamma_\phi(E))$ and $\pi_2(\Gamma_\phi(E))$ are Lebesgue measurable by applying the standard methods in Measure Theory.

Lemma 2.2. If $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ then μ_ϕ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure and

$$\mu_\phi(E) = \int_E (\det D_{x_{1z}}^2\phi + \det D_{x_{2z}}^2\phi) dx_1 dx_2 dz$$

for all compact sets $E \subset \Omega$, where

$$D_{x_{jz}}^2\phi := \begin{pmatrix} \partial_{x_j}^2\phi & \partial_{zx_j}^2\phi \\ \partial_{x_{jz}}^2\phi & \partial_z^2\phi \end{pmatrix} \text{ for } j = 1, 2.$$

Proof. Since ϕ is differentiable, we have

$$\pi_1(\Gamma_\phi(x)) = (x_1, \partial_{x_2}\phi, \partial_z\phi) \text{ and } \pi_2(\Gamma_\phi(x)) = (\partial_{x_1}\phi, x_2, \partial_z\phi)$$

for all $x \in E$. First, we consider the following integral

$$|\pi_2(\Gamma_\phi(E))| = \int_{\pi_2(\Gamma_\phi(E))} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

It is well defined integral because $\Gamma_\phi(E)$ is a compact set and hence Lebesgue measurable. We can use Fubini Theorem and write the last integral as an iterated integral

$$\int_{\pi_2(\Gamma_\phi(E))} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int d\xi_2 \int_{\pi_2(\Gamma_\phi(E))_{\xi_2}} d\xi_1 d\xi_3$$

where

$$\pi_2(\Gamma_\phi(E))^{\xi_2} := \pi_2(\Gamma_\phi(E)) \cap \{\xi_2 = \text{constant}\}$$

is section of the set $\pi_2(\Gamma_\phi(E))$ with plane $\{\xi_2 = \text{constant}\}$. Actually, $\pi_2(\Gamma_\phi(E))^{\xi_2}$ is image of the set $E \cap \{x_2 = \text{constant}\}$ under the convex function $\phi(\cdot, x_2, \cdot)$ of two variables (x_1, z) for any fixed $x_2 = \text{constant}$. Thus we can use results of the usual Monge-Ampère measure and the following change of variables.

$$\xi_1 = \partial_{x_1} \phi, \xi_2 = x_2 \text{ and } \xi_3 = \partial_z \phi$$

The above arguments show that the last change of variables is injective outside of the set with zero Lebesgue measure because $\phi(\cdot, x_2, \cdot)$ is a convex function (see [3,4]). Then, the Jacobian of the change of variables is given by

$$\begin{aligned} J &= \det \begin{vmatrix} \partial_{x_1}^2 \phi & \partial_{x_1 x_2}^2 \phi & \partial_{x_1 z}^2 \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_{z x_1}^2 \phi & \partial_{z x_2}^2 \phi & \partial_z^2 \phi \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 \phi & \partial_{x_1 z}^2 \phi \\ \partial_{z x_1}^2 \phi & \partial_z^2 \phi \end{pmatrix} \\ &= \det D_{x_1 z}^2 \phi. \end{aligned}$$

Consequently, we have

$$\begin{aligned} |\pi_2(\Gamma_\phi(E))| &= \int_{\pi_2(\Gamma_\phi(E))} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \int_E |J| dx_1 dx_2 dz \\ &= \int_E |\det D_{x_1 z}^2 \phi| dx_1 dx_2 dz \end{aligned}$$

Since ϕ is a convex C^2 function, $\det D_{x_1 z}^2 \phi \geq 0$. So, in this case, we have

$$|\pi_2(\Gamma_\phi(E))| = \int_E \det D_{x_1 z}^2 \phi dx_1 dx_2 dz$$

Similar arguments show that

$$|\pi_1(\Gamma_\phi(E))| = \int_E D_{x_2 z}^2 \phi dx_1 dx_2 dz$$

It finalizes a proof of the lemma.

Lemma 2.3. Let Ω be a bounded domain in \mathbb{R}^3 and ϕ, ψ be convex continuous functions on $\bar{\Omega}$. If $\phi \leq \psi$ in Ω and $\phi = \psi$ on $\partial\Omega$, then

$$\mu_\phi(\Omega) \geq \mu_\psi(\Omega).$$

Proof. First, we show $\partial\psi(\Omega) \subset \partial\phi(\Omega)$ by following [5]. Indeed, take $p = (p_1, p_2, p_3) \in \partial\psi(\Omega)$ then, there exists a point $x^0 = (x_1^0, x_2^0, z^0) \in \Omega$ such that $p \in \partial\phi(x^0)$, namely, for any $x = (x_1, x_2, z) \in \Omega$,

$$\psi(x) \geq \psi(x^0) + p \cdot (x - x^0).$$

Set

$$a := \sup\{\psi(x^0) + p \cdot (x - x^0) - \phi(x) : x \in \Omega\}.$$

Then, $a \geq 0$ since $\psi(x^0) \geq \phi(x^0)$. Since ψ, ϕ are continuous functions in $\bar{\Omega}$, we can assume that a is attained at some point $x^1 \in \bar{\Omega}$. Then,

$$a = \psi(x^0) + p \cdot (x^1 - x^0) - \phi(x^1),$$

and, for any $x \in \Omega$,

$$\phi(x) \geq \psi(x^0) + p \cdot (x - x^0) - a$$

A substitution yields,

$$\phi(x) \geq \phi(x^1) + p \cdot (x - x^1) \text{ for any } x \in \Omega$$

and

$$\begin{aligned}\psi(x^1) &\geq \psi(x^0) + p \cdot (x^1 - x^0) \\ &= \phi(x^1) + a\end{aligned}$$

If $a > 0$, then $x^1 \notin \partial\Omega$ (because if $a > 0$ then $\psi(x^1) > \phi(x^1)$ and on the boundary $\partial\Omega$ we have condition $\psi = \phi$), and hence $p \in \partial\phi(x^1)$. If $a = 0$, then for any $x \in \Omega$, we have

$$\begin{aligned}\phi(x) &\geq \psi(x^0) + p \cdot (x - x^0) \\ &\geq \phi(x^0) + p \cdot (x - x^0)\end{aligned}$$

and consequently $p \in \partial\phi(x^0)$. Hence $\partial\psi(\Omega) \subset \partial\phi(\Omega)$. This implies $\pi_1(\Gamma_\psi(\Omega)) \subset \pi_1(\Gamma_\phi(\Omega))$ and $\pi_2(\Gamma_\psi(\Omega)) \subset \pi_2(\Gamma_\phi(\Omega))$. Therefore,

$$\begin{aligned}\mu_\psi(\Omega) &= |\pi_1(\Gamma_\psi(\Omega))| + |\pi_2(\Gamma_\psi(\Omega))| \\ &\leq |\pi_1(\Gamma_\phi(\Omega))| + |\pi_2(\Gamma_\phi(\Omega))| \\ &= \mu_\phi(\Omega)\end{aligned}$$

that is,

$$\mu_\psi(\Omega) \leq \mu_\phi(\Omega)$$

The lemma is proved.

Convergence properties. Now, we show some convergence properties of the non-standard Monge Ampère measures.

Definition 3.0. Let μ, μ_j be Borel measures defined on a σ -algebra of Borel subsets of an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. We say that μ_j converge weakly to μ if

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu_j(x) \rightarrow \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$$

for all $f \in C_0(\Omega)$, where $C_0(\Omega)$ is a space of continuous functions with compact support $\text{supp}(f) \subset \Omega$.

Lemma 3.1. Let $\phi_k \in C(\Omega)$ be convex functions such that ϕ_k converge uniformly to ϕ on compact subsets of Ω . Then if $K \subset \Omega$ is compact, then for a fixed $x^0 = (x_1^0, x_2^0, z^0)$ and $K^{x_1^0} := K \cap \{x_1 = x_1^0\}$, the inclusion

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \pi_1(\Gamma_{\phi_k}(K^{x_1^0})) \subset \pi_1(\Gamma_{\phi}(K^{x_1^0}))$$

holds, similarly for $K^{x_2^0} := K \cap \{x_2 = x_2^0\}$ the inclusion

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \pi_2(\Gamma_{\phi_k}(K^{x_2^0})) \subset \pi_2(\Gamma_{\phi}(K^{x_2^0}))$$

holds.

Proof. If $(x_1^0, p_2, p_3) \in \limsup_{k \rightarrow \infty} \pi_1(\Gamma_{\phi_k}(K^{x_1^0}))$ then for each $n \in \mathbb{N}$, there exist k_n and $x_{k_n} \in K^{x_1^0}$ such that $(p_1^{k_n}, p_2, p_3) \in \partial\phi(x_1^0, x_2^{k_n}, z^{k_n})$. By selecting subsequences (x_1^0, x_2^j, z^j) and p_1^j of $(x_1^0, x_2^{k_n}, z^{k_n})$ and $p_1^{k_n}$ respectively, we may assume that p_1^j converges to p_1 and (x_1^0, x_2^j, z^j) converges to $(x_1^0, x_2^0, z^0) \in K$. On the other hand,

$$\phi_j(x_1, x_2, z) \geq \phi_j(x_1^0, x_2^j, z^j) + p_1^j(x_1 - x_1^0) + p_2(x_2 - x_2^j) + p_3(z - z^j)$$

for any $(x_1, x_2, z) \in \Omega$ and, by letting $j \rightarrow \infty$, we obtain by uniform convergence of ϕ_j on compact subsets of Ω ,

$$\phi(x_1, x_2, z) \geq \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_1(x_1 - x_1^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0),$$

that is,

$$(p_1, p_2, p_3) \in \partial\phi(x_1^0, x_2^0, z^0) \subset \partial\phi(K)$$

and

$$(x_1^0, p_2, p_3) \in \pi_1(\Gamma_{\phi}(x_1^0, x_2^0, z^0)).$$

Thus,

$$(x_1^0, p_2, p_3) \in \pi_1(\Gamma_{\phi}(K)).$$

By similar procedure, we can prove the latter inclusion of the lemma.

In order to show the non-standard measure is bounded on compact subsets of Ω , we apply the formulation of Fatou lemma 5 which is different from its usual occurrence.

Lemma 3.2. For any compact set $K \Subset \Omega$, $\mu_{\phi_k}(K)$ is bounded.

Proof. Using Lemma 3.1 and Fatou lemma, we obtain

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} M^1 \phi_k(K^{x_1}) \leq M^1 \phi(K^{x_1}) \text{ for any } x_1 \in \mathbb{R}$$

Similarly,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} M^2 \phi_k(K^{x_2}) \leq M^2 \phi(K^{x_2}) \text{ for any } x_2 \in \mathbb{R}$$

where

$$M^1 \phi(K^{x_1}) := \int_{K^{x_1}} \det D_{x_2 z}^2 \phi(x_1, x_2, z) dx_2 dz$$

and

$$M^2 \phi(K^{x_2}) := \int_{K^{x_2}} \det D_{x_1 z}^2 \phi(x_1, x_2, z) dx_1 dz$$

By Fubini theorem,

$$\begin{aligned} \int_K \det D_{x_2 z}^2 \phi_k dx_1 dx_2 dz &\leq \int dx_1 \int_{K^{x_1}} \det D_{x_2 z}^2 \phi dx_2 dz \\ &= \int_K \det D_{x_2 z}^2 \phi dx_1 dx_2 dz \\ &< +\infty \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int_K \det D_{x_1 z}^2 \phi_k dx_1 dx_2 dz &\leq \int dx_2 \int_{K^{x_2}} \det D_{x_1 z}^2 \phi dx_1 dz \\ &= \int_K \det D_{x_1 z}^2 \phi dx_1 dx_2 dz \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Therefore,

$$\mu_{\phi_k}(K) = \int_K (\det D_{x_1 z}^2 \phi_k + \det D_{x_2 z}^2 \phi_k) dx_1 dx_2 dz < +\infty.$$

Thus we get the statement of the lemma for the case when ϕ_k and ϕ are C^2 functions. Now, we consider the case when sequence $\{\phi_k\}$ of convex continuous functions is uniformly converging on K . Then ϕ is also a convex function. Then due to Lemma 13, we have the inequality

$$\mu_{\phi_k}(K^{x_1}) \leq \mu_{\phi}(K^{x_1})$$

for any fixed x_1 , where $\mu_{\phi_k}(K^{x_1})$ is the induced Monge-Ampère measure on the plane $x_1 = \text{constant}$. By Fubini theorem 6, we have the relation

$$\mu_{\phi}(K) = \int \mu_{\phi}(K^{x_1}) dx_1$$

Thus integrating the last inequality we come to the conclusion

$$\begin{aligned} \mu_{\phi_k}(K) &= \int \mu_{\phi_k}(K^{x_1}) dx_1 \\ &\leq \int \mu_{\phi}(K^{x_1}) dx_1 = \mu_{\phi}(K) < +\infty \end{aligned}$$

This finishes a proof of this lemma.

Theorem 3.3. Let $\phi_k \in C(\Omega)$ be convex such that $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformly on compact subsets of Ω . Then if $U \subset \Omega$ is open and $\{V_k\}_{k \geq 1}$ is a family of open sets such that $V_{k+1} \subset V_k$ and $\bar{U} \subset V_k \subset \Omega$ for each k , then for any $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\pi_1(\Gamma_{\phi}(U^{x_1})) \subset \liminf_{k \rightarrow \infty} \pi_1(\Gamma_{\phi_k}(U^{x_1})),$$

where the inequality holds for almost every point of the set on the lefthand side. Moreover,

$$|\pi_1(\Gamma_{\phi}(U^{x_1}))| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |\pi_1(\Gamma_{\phi_k}(U^{x_1}))|.$$

Proof. For the sake of being definite, we will assume that $x_1 = x_1^0$ and $U^{x_1^0} \neq \emptyset$. If $U^{x_1^0} = \emptyset$ then, there is nothing to prove. Let

$$S_{x_1^0} := \{(p_1, p_2, p_3) : (p_1, p_2, p_3) \in \partial \phi(x_1^0, x_2^1, z^1) \cap \partial \phi(x_1^0, x_2^2, z^2)$$

$$\text{for some } (x_1^0, x_2^1, z^1), (x_1^0, x_2^2, z^2) \in \Omega, (x_1^0, x_2^1, z^1) \neq (x_1^0, x_2^2, z^2)\}.$$

If we denote projection $\pi^1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ by

$$\pi^1(p_1, p_2, p_3) = (p_2, p_3).$$

Then, due to Lemma 2.11 in Ozanski [8], we have $|\pi^1(S_{x_1^0})| = 0$ because for any fixed $x_1 =$

$x_1^0, \phi(x_1^0, x_2, z)$ is a convex function defined on the convex set $\Omega^{x_1^0} = \{x_1 = x_1^0\} \cap \Omega$. Now, we use arguments of Ozanski [8]. If

$$(p_2, p_3) \in \pi^1(\partial\phi(U^{x_1^0})) \setminus \pi_1(S_{x_1^0}),$$

then there exists a unique $(x_1^0, x_2^0, z^0) \in U^{x_1^0}$ such that

$$(p_2, p_3) \in \pi^1(\partial\phi(x_1^0, x_2^0, z^0)).$$

Hence, for any $(x_1^0, x_2, z) \in \Omega^{x_1^0}$,

$$\phi(x_1^0, x_2, z) > \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0)$$

Otherwise, if

$$\phi(x_1^0, x_2^1, z^1) = \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2^1 - x_2^0) + p_3(z^1 - z^0)$$

for some $(x_1^0, x_2^1, z^1) \in \Omega, (x_2^0, z^0) \neq (x_2^1, z^1)$, then

$$\begin{aligned} \phi(x_1^0, x_2, z) &\geq \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0) \\ &= \phi(x_1^0, x_2^1, z^1) - p_2(x_2^1 - x_2^0) - p_3(z^1 - z^0) \\ &\quad + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0) \\ &= \phi(x_1^0, x_2^1, z^1) + p_2(x_2 - x_2^1) + p_3(z - z^1). \end{aligned}$$

Or equivalently,

$$\phi(x_1^0, x_2, z) \geq \phi(x_1^0, x_2^1, z^1) + p_2(x_2 - x_2^1) + p_3(z - z^1)$$

for all $(x_1^0, x_2, z) \in \Omega^{x_1^0}$. Let $\lambda \in (0, 1)$ be such that

$$(x_1^0, x_2^\lambda, z^\lambda) := (x_1^0, \lambda x_2^0 + (1 - \lambda)x_2^1, \lambda z^0 + (1 - \lambda)z^1) \in U^{x_1^0}$$

(such λ exists because $U^{x_1^0}$ is open in $\{x_1^0\} \times \mathbb{R}^2 := \{(x_1^0, x_2, z) : (x_2, z) \in \mathbb{R}^2\}$). Since $(p_2, p_3) \in \partial\phi(x_1^0, x_2^0, z^0)$ and ϕ is continuous, we have for all $(x_1^0, x_2, z) \in \Omega^{x_1^0}$,

$$\begin{aligned} \phi(x_1^0, x_2, z) &= \lambda\phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + (1 - \lambda)\phi(x_1^0, x_2^1, z^1) \\ &\geq \lambda(\phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0)) \\ &\quad + (1 - \lambda)(\phi(x_1^0, x_2^1, z^1) + p_2(x_2 - x_2^1) + p_3(z - z^1)) \\ &\geq \lambda\phi(x_1^0, x_2^0, z^0) + (1 - \lambda)\phi(x_1^0, x_2^1, z^1) \\ &\quad + p_2(x_2 - x_2^\lambda) + p_3(z - z^\lambda) \\ &\geq \phi(x_1^0, x_2^\lambda, z^\lambda) + p_2(x_2 - x_2^\lambda) + p_3(z - z^\lambda), \end{aligned}$$

that is, $(p_2, p_3) \in \partial\phi(x_1^0, x_2^\lambda, z^\lambda)$, which contradicts the uniqueness of (x_1^0, x_2^0, z^0) . Now since $\overline{V_1} \subset \Omega$ is compact and $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformly on $\overline{V_1}$, we have from (3.1) that for any $\delta > 0$, there exists k_δ such that

$$\phi_k(x_1^0, x_2, z) \geq \phi_k(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0) - \delta$$

for all $(x_1^0, x_2, z) \in \overline{V_1}^{x_1^0}$ and $k \geq k_\delta$. Fix any $\delta > 0$ and hence also k_δ . Let

$$\delta_k := \min_{x \in \overline{V_k}^{x_1^0}} \{\phi_k(x_1^0, x_2, z) - \phi_k(x_1^0, x_2^0, z^0) - p_2(x_2 - x_2^0) - p_3(z - z^0) + \delta\}.$$

This minimum is attained at some $(x_1^0, x_2^k, z^k) \in \overline{V_k}^{x_1^0}$, i.e.

$$\delta_k := \phi_k(x_1^0, x_2^k, z^k) - \phi_k(x_1^0, x_2^0, z^0) - p_2(x_2^k - x_2^0) - p_3(z^k - z^0) + \delta.$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} \phi_k(x_1^0, x_2, z) &\geq \phi_k(x_1^0, x_2^0, z^0) + p_2(x_2 - x_2^0) + p_3(z - z^0) - \delta + \delta_k \\ &= \phi_k(x_1^0, x_2^k, z^k) + p_2(x_2 - x_2^k) + p_3(z - z^k) \end{aligned}$$

for any $(x_1^0, x_2, z) \in \overline{V_k}^{x_1^0}$ and, in particular $(U^{x_1^0} \subset \overline{U}^{x_1^0} \subset \overline{V_k}^{x_1^0})$,

$$\phi_k(x_1^0, x_2, z) \geq \phi_k(x_1^0, x_2^k, z^k) + p_2(x_2 - x_2^k) + p_3(z - z^k), \forall x \in U.$$

We will show that p is the slope of a supporting hyperplane to ϕ_k at the point (x_1^0, x_2^k, z^k) for all but finitely many k . Note that (for an affine function to support a convex function at a given point over Ω it is sufficient to support it over an open neighborhood of this point), we need to show that $x_k \in V_k$ (i.e. x_k is an interior point of V_k) for all but finitely many k . Suppose otherwise that $(x_1^0, x_2^k, z^k) \in \partial V_k^{x_1^0}$ for infinitely many k i.e. suppose that there exists a subsequence $\{(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m})\} \subset \overline{V_1}^{x_1^0} (m \geq 1)$ such that

$$(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) \in \partial V_{k_m}^{x_1^0} \text{ for all } m \geq 1.$$

As $\overline{V_1}$ is compact, there exists a subsequence, which we will also denote with $\{(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m})\}_{m \geq 1}$

such that

$$(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) \rightarrow (x_1^0, y_2, y_3) \text{ as } m \rightarrow \infty$$

for some $(x_1^0, y_2, y_3) \in \bar{V}_1^{x_1^0}$. Moreover, $(x_2^0, z^0) \neq (y_2, y_3)$ as

$$\begin{aligned} \sqrt{|x_2^{k_m} - x_2^0|^2 + |z^{k_m} - z^0|^2} &\geq \text{dist}\left((x_1^0, x_2^0, z^0), \partial V_{k_m}^{x_1^0}\right) \\ &\geq \text{dist}\left((x_1^0, x_2^0, z^0), \partial U\right) > 0, \text{ for all } m \geq 1 \end{aligned}$$

By the uniform convergence of ϕ_k to a continuous function ϕ , we get

$$\phi_{k_m}(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) \rightarrow \phi(x_1^0, y_2, y_3).$$

Indeed, we can write

$$\begin{aligned} |\phi_{k_m}(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) - \phi(x_1^0, y_2, y_3)| &\leq |\phi_{k_m}(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) - \phi(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m})| \\ &\quad + |\phi(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) - \phi(x_1^0, x_2^0, z^0)| \\ &\leq \|\phi_{k_m} - \phi\|_{L^\infty(\bar{V}_1^{x_1^0})} \\ &\quad + |\phi(x_1^0, x_2^{k_m}, z^{k_m}) - \phi(x_1^0, y_2, y_3)|. \end{aligned}$$

It converges to 0 as $m \rightarrow \infty$. Hence, taking limit as $m \rightarrow \infty$ in (3.5) and letting $(x_1^0, x_2, z) := (x_1^0, x_2^0, z^0)$, we get

$$\begin{aligned} \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) &\geq \phi(x_1^0, y_2, y_3) + p_2(x_2^0 - y_2) + p_3(z^0 - y_3) \\ &> \phi(x_1^0, x_2^0, z^0) \end{aligned}$$

which is a contradiction. Therefore, indeed $(x_1^0, x_2^k, z^k) \in V_k^{x_1^0}$ for all but finitely many k and consequently,

$$p \in \partial\phi_k(x_1^0, x_2^k, z^k) \subset \partial\phi_k(V_k^{x_1^0}).$$

This means that $p \in \liminf \partial\phi_k(V_k)$. By Fatou lemma, the last statement of the lemma follows.

Theorem 3.4. If ϕ_k are convex functions in Ω such that $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformly on compact subsets of Ω , then the associated measures μ_{ϕ_k} tend to μ_ϕ weakly, that is,

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu_{\phi_k} \rightarrow \int_{\Omega} f(x) d\mu_{\phi}$$

for every f continuous function with compact support in Ω . Proof. We will assume that $f \geq 0$ (as noted in the [8] the general case follows by considering the positive and negative parts f^+, f^- and writing $f = f^+ - f^-$). If Ω is an open convex set and $K \Subset \Omega$ is a compact set. Then, $K_1 = \text{convex hull}(K)$ is a compact convex set $K_1 \Subset \Omega$ (K_1 is the minimal convex set containing K) since $\partial\phi(K_1)$ is a compact convex set then $\mu_\phi(K_1) < +\infty$. By Lemma 3.2, we have that

$$\mu_\phi(K_1), \mu_{\phi_k}(K_1) \leq L$$

for some positive real number L . Following Ozanski [8], fix $\varepsilon > 0$ and let $F := \max_{K_1} f(x)$ and $\Omega' = \{x \in K_1 : f(x) > 0\} = \text{int}(\text{supp} f)$. Since f is integrable with respect to μ_ϕ , there exist $N > 0, a_i \in (0, F), U_i \subset \Omega'$ Borel sets, $i = 1, \dots, N$ such that $U_i \cap U_j = \emptyset$ for $i \neq j, \sum_{i=1}^N a_i \chi_{U_i} \leq f$ (where χ_E denotes the characteristic function of a Borel set E)

$$\sum_{i=1}^N a_i \mu_\phi(U_i) \leq \int_{\Omega'} f d\mu_\phi \leq \sum_{i=1}^N a_i \mu_{\phi_k}(U_i) + \varepsilon$$

Moreover, we will show that, by continuity of f , we can take U_i to be open. For this reason, let

$$\mathcal{T} := \{\tau \in \mathbb{R} : \mu_\phi(\{x \in \Omega' : f = \tau\}) = 0\}.$$

Note that for $\tau \in (-\infty, 0] \cup (F, +\infty) \subset \mathcal{T}$. We have $(0, F] \setminus \mathcal{T} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$, where

$$\mathcal{T}_n := \left\{ \tau \in (0, F] : \mu_\phi(\{x \in \Omega' : f = \tau\}) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

It is clear that the number elements of $\mathcal{T}_n \leq nL$. Otherwise, we have

$$\begin{aligned}
 L &< \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \frac{1}{n} \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \mu_\phi(\{f = \tau\}) \\
 &= \mu_\phi\left(\bigcup_{\tau \in \mathcal{T}_n} \{f = \tau\}\right) \leq \mu_\phi(\Omega') \\
 &\leq \mu_\phi(K_1) \leq L
 \end{aligned}$$

a contradiction. Notice that if $\tau_1 \neq \tau_2$ then surely $\{f = \tau_1\} \cap \{f = \tau_2\} = \emptyset$. Consequently, $[0, F] \setminus \mathcal{T}$ is at most countable. We will use this fact to see that \mathcal{T} is dense in $(0, F]$. In fact, if \mathcal{T} is not dense in $(0, F]$, then there exists an open interval $(a, b) \subset (0, F]$ such that $(a, b) \cap \mathcal{T} = \emptyset$, i.e. $(a, b) \subset (0, F] \setminus \mathcal{T}$ which is a contradiction since (a, b) is uncountable. Hence, \mathcal{T} is indeed dense in $(0, F]$. Therefore, we can find $N \geq 1$ and a sequence $\{\tau_i\}_{i=0,1,\dots,N} \subset \mathcal{T}$ such that $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < F < \tau_N$ and $\tau_i - \tau_{i-1} \leq \frac{\varepsilon}{L}$ for all $i = 1, \dots, N$ (for instance take any $N \geq \frac{4FL}{\varepsilon}$ and $\{\tau_i\}_{i=0,\dots,N} \subset \mathcal{T}$ such that $\tau_0 = 0, \tau_N := F\left(1 + \frac{1}{4N}\right)$ and $\left|\tau_i - i\frac{F}{N}\right| \leq \frac{F}{4N}$ for $i = 1, \dots, N-1$). We now define

$$U_i := \{x \in \Omega' : \tau_{i-1} < f(x) < \tau_i\} \text{ for } i = 1, \dots, N.$$

We note that the sets $U_i, i = 1, \dots, N$ are open (as preimage of an open set with continuous function) and mutually disjoint and that

$$\sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \chi_{U_i} \leq f$$

We also have

$$\mu_\phi\left(\Omega' \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i\right) = \sum_{i=1}^N \mu_\phi(\{f = \tau_i\}) = 0$$

and therefore

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{\Omega} f d\mu_\phi - \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \chi_{U_i} d\mu_\phi \\
 &= \int_{\Omega'} f d\mu_\phi - \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \mu_\phi(U_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f - \tau_{i-1}) d\mu_\phi \leq \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{i-1}) \mu_\phi(U_i) \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{L} \sum_{i=1}^N \mu_\phi(U_i) \leq \frac{\varepsilon}{L} \mu_\phi(\Omega') \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon
 \end{aligned}$$

which means that the expression holds (with $a_i = \tau_{i-1}$ for all $i = 1, \dots, N$) as claimed.

For each i , let $\{V_i^k\}_{k \geq 1}$ be a family of open sets such that $V_i^k \subset \Omega$ be a family of open sets such that

$$V_i^k \subset \Omega, \bar{U}_i \subset V_i^k, V_i^{k+1} \subset V_i^k \text{ and } \mu_{\phi_k}(V_i^k) \leq \mu_{\phi_k}(U_i) + \frac{\varepsilon}{2^i \tau_N}$$

for all $k \geq 1$, such a family exists by compactness of $\text{supp}(f)$ and by the regularity of measures $\mu_{\phi_k}, k \geq 1$. Note that we have $\mu_\phi(U_i) \leq \liminf \mu_{\phi_k}(V_i^k)$ for each $i = 1, \dots, N$ and hence

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f d\mu_{\phi} &= \int_{\Omega'} f d\mu_{\phi} \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \mu_{\phi}(U_i) + \varepsilon \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_{\phi_k}(V_i^k) + \varepsilon \\
 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \left(\mu_{\phi_k}(U_i) + \frac{\varepsilon}{2^i \tau_N} \right) + \varepsilon \\
 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \mu_{\phi_k}(U_i) + 2\varepsilon \\
 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N \tau_{i-1} \mu_{\phi_k}(U_i) + 0 \cdot \mu_{\phi_k} \left(\Omega' \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i \right) \right) + 2\varepsilon \\
 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f d\mu_{\phi_k} + 2\varepsilon \\
 &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} + 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

We will now show that

$$\int_{\Omega} f d\mu_{\phi} \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} - \varepsilon \text{ for each } i = 1, \dots, N.$$

Let

$$W_i := \{x \in \overline{\Omega'} : \tau_{i-1} \leq f(x) \leq \tau_i\}.$$

Note that $\overline{\Omega'} = K = \text{supp}(f) \supset W_i$ is a compact subset of $K, i = 1, \dots, N$.

$$K = \bigcup_{i=1}^N (W_i \setminus W_{i-1}) \cup W_1.$$

We have

$$f \leq \sum_{i=1}^N \tau_i \chi_{W_i}$$

and since $\mu_{\phi}(\{x \in \Omega' : f = \tau_i\}) = 0$ for all $i = 1, \dots, N$, we have

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \tau_i \mu_{\phi}(W_i) - \int_{\Omega} f d\mu_{\phi} &= \sum_{i=1}^N \int_{W_i} (\tau_i - f) d\mu_{\phi} \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \int_{W_i} (\tau_i - \tau_{i-1}) d\mu_{\phi} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{L} \sum_{i=1}^N \mu_{\phi}(W_i) \\
 &= \frac{\varepsilon}{L} \mu_{\phi}(K) \leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Now, using the previous Lemma, we can write

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f d\mu_{\phi} &\geq \sum_{i=1}^N \tau_i \mu_{\phi}(W_i) - \varepsilon \\
 &\geq \sum_{i=1}^N \tau_i \limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_{\phi_k}(W_i) - \varepsilon \\
 &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\tau_1 \mu_{\phi_k}(W_1) + \sum_{i=2}^N \tau_i \mu_{\phi_k}(W_i \setminus W_{i-1}) \right) - \varepsilon \\
 &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} f d\mu_{\phi_k} - \varepsilon \\
 &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} - \varepsilon
 \end{aligned}$$

From the above expression, taking the limit when $\varepsilon \rightarrow +0$, we get

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} \\
 &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_{\phi_k} \\
 &= \int_{\Omega} f d\mu_{\phi}
 \end{aligned}$$

The theorem is proved.

Discussion. The theoretical convergence of the Monge–Ampère measure plays a central role in the analysis of nonlinear partial differential equations and optimal transport theory [3,4,5]. It ensures the stability and consistency of weak or viscosity solutions to the non-standard Monge–Ampère equation, particularly when approximating convex potentials by regularized or discrete schemes. Convergence results guarantee that sequences of approximating functions yield corresponding convergence of their non-standard Monge–Ampère measures in the weak sense, thereby linking analytic and measure-theoretic notions of solution. This property forms the theoretical foundation for the validity of numerical methods, variational approximations, and geometric applications such as mass transport, reflector design, and Kähler geometry. In essence, convergence of non-standard Monge–Ampère measures provides a rigorous framework that ensures the measures derived from approximations faithfully represent the true geometric and physical structures modeled by the equation

REFERENCES:

1. I. Akramov, M. Oliver: *On the Existence of Solutions to a Bi-Planar Monge–Ampère Equation*. *Acta Math. Sci.* 40 (2020), 379–388.
2. Allen J. S., Holm D. D., Newberger P. A. *Toward an extended-geostrophic Euler–Poincaré model for mesoscale oceanographic flow*. In: Norbury J., Roulstone I. *Large-Scale Atmosphere–Ocean Dynamics 1: Analytical Methods and Numerical Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 101–125.
3. Caffarelli L., Cabré X. *Fully nonlinear elliptic equations*. Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, 1995, 43.
4. Gutiérrez C. E. *The Monge–Ampère equation*. Boston: Birkhäuser, 2001.
5. Han Q. *Nonlinear elliptic equations of the second order*. Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics 171, 2016.
6. Lions P.-L. *Sur les équations de Monge–Ampère*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1985, 89: 93–122.
7. Oliver M., Vasylykevych S. *Generalized large-scale semigeostrophic approximations for the f-plane primitive equations*. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2016, 49: 184001.
8. Ożański W. *A generalised comparison principle for the Monge–Ampère equation and the pressure in 2D fluid flows*. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2018, 356(2): 198–206.
9. Salmon R. *Large-scale semi-geostrophic equations for use in ocean circulation models*. *J. Fluid Mech.*, 1996, 318: 85–105.
10. Trudinger N. S., Wang X.-J. *The Monge–Ampère equation and its geometric applications*. In: *Handbook of Geometric Analysis, Vol. 1*. Adv. Lect. Math. (ALM), Vol. 7. Somerville, MA: International Press, 2008: 467–524.

**KICHIK MASSA OSILGAN TO‘RTBURCHAKLI DEFORMATSIYALANUVCHAN
PLASTINKANING ERKIN TEBRANISHLARI****Boltayev Zafar Ixtiyorovich,***Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
boltaev-z@mail.ru,***Namozov Jasur Shokulovich,***Toshkent kimyo-texnologiya instituti, O‘zbekiston
rano_sobirova85@mail.ru***Abloqulov Sherzod Zokir o‘g‘li,***Toshkent kimyo-texnologiya instituti, O‘zbekiston***Sabirova Ra‘no Azamatovna,***Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston***Ruziyev To‘lqin Razzoqovich,***Buxoro davlat pedagogika instituti, O‘zbekiston
ruzievtulkin@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada barcha qirralari qattiq mahkamlangan alyuminiy kvadrat shakldagi plastinkaning markaziga turli qiymatdagi massalar (1 kg, 10 kg, 50 kg va 100 kg) qo‘yilgan holatdagi erkin tebranish xarakteristikalari sonli usulda o‘rganilgan. Tahlil Abaqus dasturiy ta‘minoti yordamida amalga oshirilgan bo‘lib, plastinkaning geometriyasi (uzunligi 1 m, eni 1 m, qalinligi 0.003 m), material xususiyatlari (elastiklik moduli $E=7 \cdot 10^9$ Pa, Puasson koeffitsiyenti $m=0.33$, zichligi $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$) va markazga qo‘yilgan massa hisobga olingan. Birinchi uchta tabiiy tebranish chastotalari aniqlangan va massa qiymatining ularga ta‘siri o‘rganilgan. Tebranish shakllarining vizual tahlili ham keltirilgan. Olingan natijalar muhandislik amaliyotida konstruksiyalarning dinamik xatti-harakatini tushunish uchun muhim ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: plastinka, erkin tebranish, Abaqus, sonli tahlil, qo‘yilgan massa, tabiiy chastota, tebranish shakli.

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДВЕСНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ
ПЛАСТИНЫ МАЛОЙ МАССЫ**

Аннотация. В данной работе численно исследуются характеристики свободных колебаний квадратной алюминиевой пластины, жёстко закреплённой по всем краям и с различными массами (1 кг, 10 кг, 50 кг и 100 кг), размещёнными в её центре. Анализ проводился с использованием программного обеспечения Abaqus с учётом геометрии пластины (длина 1 м, ширина 1 м, толщина 0,003 м), свойств материала (модуль упругости $E = 7 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $m = 0,33$, плотность кг/м^3) и массы, размещённой в центре. Определены первые три собственные частоты колебаний, и изучено влияние на них величины массы. Также представлен визуальный анализ картин колебаний. Полученные результаты важны для понимания динамического поведения конструкций в инженерной практике.

Ключевые слова: пластина, свободные колебания, Abaqus, численный анализ, размещённая масса, собственная частота, картина колебаний.

**FREE VIBRATIONS OF A SUSPENDED RECTANGULAR DEFORMABLE PLATE OF
SMALL MASS**

Abstract. In this paper, the free vibration characteristics of a square aluminum plate with all edges rigidly fixed and with different masses (1 kg, 10 kg, 50 kg and 100 kg) placed at its center are numerically studied. The analysis was performed using the Abaqus software, taking into account the geometry of the plate (length 1 m, width 1 m, thickness 0.003 m), material properties (modulus of elasticity $E=7 \cdot 10^9$ Pa, Poisson's ratio $m=0.33$, density kg/m^3) and the mass placed at the center. The first three natural vibration frequencies were determined and the effect of the mass value on them was studied. A visual analysis of the

vibration patterns is also presented. The results obtained are important for understanding the dynamic behavior of structures in engineering practice.

Keywords: plate, free vibration, Abaqus, numerical analysis, placed mass, natural frequency, vibration pattern.

Kirish. Biriktirilgan massalarga ega yupqa deformatsiyalanuvchi qobiqlar samolyotsozlik va qurilish sohalarida keng qo'llaniladi. Bunday tuzilmalarning turli garmonik va vaqtinchalik yuklamalar ostidagi dinamik harakatini o'rganish murakkab va qisman differensial tenglamani yechishni talab qiladi. Ushbu masalaning yechimlarini topish jarayoni mustaqil o'zgaruvchi — vaqtga bog'liq oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga asoslanadi. Mazkur tadqiqot biriktirilgan massalarga ega qobiq tuzilmalarining tabiiy tebranishlarini o'rganishga bag'ishlangan. Shu asosda tuzilgan, umumlashtirilgan koordinatalarga nisbatan yozilgan oddiy integrodifferensial tenglamalar tizimi soddaligi bilan ajralib turadi va mavjud usullar yordamida tahlil qilinishi mumkin. Qattqlik va inertsiya bo'yicha bir jinsli bo'lmagan, ya'ni konsentrlangan massalardan tashkil topgan tuzilmalarning tabiiy chastotalar spektrini aniqlash katta amaliy ahamiyatga ega. Shu sababli ishonchli sonli va analitik usullarni ishlab chiqish dolzarb masala hisoblanadi.

[1, 2, 3]-manbalarda biriktirilgan massalarga ega silindrsimon qobiqlarning chiziqli tebranishlari o'rganilgan. [4]-ishda stringerlar va ramkalar bilan muntazam mustahkamlangan yopiq silindrsimon qobiq tahlil qilingan. [5, 6]-ishlar silindrsimon qobiq bilan uning uchlaridan biriga qattiq biriktirilgan jismning o'zaro ta'sirini matematik modellashirishga bag'ishlangan. [7]-tadqiqotda biriktirilgan konsentrlangan massaga ega, oddiy tayanchli to'rtburchak elastik plastinkaning tebranishlari o'rganilgan. [8]-ishda qovurg'alar va biriktirilgan massalar bilan mustahkamlangan qobiqlarning tabiiy tebranishlari tahlil qilingan. [9]-tadqiqotda esa inqilobning yupqa elastik qobiqlarining erkin tebranish chastotalari va shakllariga qovurg'alar hamda biriktirilgan qattiq jismlarning ta'siri o'rganilgan. Masala qovurg'alarining diskret joylashishini hisobga olgan holda Rits usuli yordamida chiziqli shaklda yechiladi.

Plastinkalar muhandislikning turli sohalarida keng qo'llaniladigan muhim konstruktiv elementlardan biridir. Ushbu elementlarning dinamik xatti-harakatini o'rganish, xususan tebranish xususiyatlarini aniqlash, rezonans kabi xavfli hodisalarning oldini olish va konstruksiyalarning ishonchli ishlashini ta'minlash uchun muhim ahamiyat kasb etadi. Qattiq mahkamlangan kvadrat plastinkalarning erkin tebranishi analitik usullar bilan yechish murakkab bo'lgan muammo hisoblanadi [10,11]. Konstruksiyaga qo'shimcha massalar o'rnatilishi esa vaziyatni yanada murakkablashtiradi, chunki bu sistema massasining taqsimlanishini o'zgartiradi va demak, uning dinamik xususiyatlariga ta'sir qiladi. Chekli Elementlar Usuli (FEM) murakkab geometriya, material xususiyatlari va chegaraviy shartlarga ega bo'lgan elastik sistemalarning dinamik tahlilini o'tkazish uchun samarali va keng qo'llaniladigan sonli usuldir. Abaqus dasturiy ta'minoti muhandislik tahlilining turli sohalarini qamrab oluvchi kuchli FEM paketlaridan biri hisoblanadi. Ushbu maqolaning maqsadi barcha qirralari qattiq mahkamlangan alyuminiy kvadrat plastinkaning markaziga turli qiymatdagi massalar (1 kg, 10 kg, 50 kg va 100 kg) qo'yilgan holatdagi birinchi uchta tabiiy tebranish chastotasini Abaqus dasturida sonli tahlil qilish orqali aniqlash va qo'yilgan massaning tebranish xususiyatlariga ta'sirini o'rganishdan iborat. Tebranish shakllarining vizual tahlili ham taqdim etilgan.

Masalalarni qo'yilishi va yechish metodikasi. Mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipiga asoslanib, biz barcha faol kuchlar ishining yig'indisini, shu jumladan, mumkin bo'lgan ko'chishlar bo'yicha inersiya kuchlarini nolga tenglashtiramiz. $\delta U_{nj}(x, t)$:

$$\delta A_{\sigma} + \delta A_u + \delta A_m = 0 \tag{1}$$

Qayerda $\delta A_{\sigma} + \delta A_u + \delta A_m = 0$ - konsentrlangan massalarni hisobga olgan holda jismlarining ichki kuchlari, shuningdek, inertial kuchlarning virtual ishi ushbu quyidagi munosabatlar bilan ifodalanishi mumkin:

$$\begin{aligned} \delta A_{\sigma} &= - \sum_{n=1}^N \sigma_{mk}^n \delta \epsilon_{mk}^n dV, \\ \delta A_u &= - \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{l_n} \sigma_l^n \delta \epsilon_l^n - \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{l_n} \sigma_l^n \delta \epsilon_l^n \\ \delta A_m &= - \sum_{n=1}^N \rho_n \int_{V_n} (U_{nj}(x, t) \delta U_{nj}) dV - \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^{Q_n} M_{qn} \sum_{j=1}^J U_{nj}(x_n^q, t) \delta U_{nj} \end{aligned} \tag{2}$$

bu yerda n - jismning zichligi va hajmi, koordinatali n - jismning q - biriktirilgan massasi, $\rho_n, V_n M_{qn}$
 $x_n^q = (x_{n1}^q, x_{n2}^q, x_{n3}^q), L_n$ - n - va $(n+1)$ - jismlar orasidagi prujinalar (amortizatorlar) soni, n - tanadagi
 konsentrlangan massalar soni, n - tanadagi elastik (viskoelastik) tayanchlar soni, $Q_n L_n \sigma_{mk}^n, \epsilon_{mk}^n \delta_l^n, \epsilon_l^n,$
 σ_l^n, ϵ_l^n - mos ravishda n - korpusning kuchlanish va deformatsiya tensorlari, 1-prujinka (amortizator) va
 elastik (viskoelastik) tayanchning komponentlari. Umumlashtirilgan Guk qonuni va Koshi¹⁶ formulasidan
 foydalanib, tizimning elastik elementi yoki elastik bog'lanishi uchun fizik va geometrik munosabatlarni
 yozamiz:¹

$$\sigma_{mk}^n = \lambda_n \theta^n \delta_{mk} + 2\mu_n \epsilon_{mk}^n \quad (3)$$

$$\epsilon_{mk}^n = \frac{1}{2} [(U_n)_{mk} + (U_m)_{nk}] \quad (4)$$

λ_n, μ_n -Lame parametrlari. Chiziqli Boltsman-Volterra nazariyasini qabul qilib, tizimning n -
 viskoelastik tanasi uchun fizik munosabatlarni tenglik bilan aniqlaymiz. $\lambda_n, \mu_n \theta^n \delta_{mk} (U_n)_{mk} = \frac{\partial (U_n)_m}{\partial x_k}$
 $\sigma_{mk}^n(t) = \tilde{\lambda}_n \theta^n(t) \delta_{mk} + 2\tilde{\mu}_n \epsilon_{mk}^n(t)$ (5)

Quyida bitta operator bilan almashtirilgan $\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n$ -Volterra integral operatorlari Masalaning taklif
 etilayotgan formulasida ν_n -Puasson nisbati doimiy deb qabul qilinadi. Demak, strukturaviy bir hil
 viskoelastik tizim uchun tabiiy tebranish rejimlari mos keladigan elastik muammoning tabiiy vektorlariga
 teng bo'ladi [12,13].Type equation here.

Ma'lum formulalar yordamida ifodalash va shuni hisobga olgan holda (5) o'rniga, $\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n \tilde{E}_n,$
 $\tilde{\nu}_n \tilde{\nu}_n = \nu_n = const$ olamiz

$$\sigma_{mk}^n(t) = \frac{\tilde{E}_n}{1+\nu_n} \left[\frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \theta^n(t) \delta_{mk} + \epsilon_{mk}^n(t) \right] \quad (6)$$

Quyidagi Volterra operatorlari shaklga ega

$$\tilde{E}_n \varphi(t) = E_n \left[\varphi(t) - \int_0^t R_n(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (7)$$

bu erda $E_n R^n$ -elastiklikning oniy moduli va relaksatsiya yadrosi.

Formular (7) yordamida (6) munosabatlardagi kuchlanishlarni yo'q qilamiz. Keyin (4) formuladan
 foydalanib, deformatsiyalarni siljish vektor komponentlari bilan ifodalaymiz. o'zgartirilgan (2) ifodani
 almashtirib, biz (7) turdagi integral hadlarni o'z ichiga olgan variatsion tenglamani
 olamiz.Type equation here.

Muzlatish usuli yordamida (7) munosabatni taxminiy bilan almashtiramiz: $E_n = E_n [1 - G_\xi - iG_\zeta]$

Qayerda

$$\left\{ \begin{matrix} \Gamma_c \\ \Gamma_s \end{matrix} \right\} = \int_0^t R_n(\tau) \left\{ \begin{matrix} \cos \omega_R \tau \\ \sin \omega_R \tau \end{matrix} \right\} d\tau$$

Bu bizga variatsion tenglamadan integral hadlarni chiqarib tashlash imkonini beradi. Uni quyidagicha
 ifodalash mumkin

$$\delta G(U_n^0(x), \omega^2) = 0 \quad (8)$$

G funksionalning o'ziga xos ko'rinishini yozamiz, masalan, nuqta ulanishlari bo'lgan to'rtburchaklar
 plitalar to'plami uchun:

$$G[W_n^0(x, y, \omega^2)] = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N D_n \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial W_n^0}{\partial x^2} + \frac{\partial W_n^0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 W_n^0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W_n^0}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 W_n^0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{I_n} D_n [W_n^0(x_n^l, y_n^l) - W_{n+1}^0(x_n^l, y_n^l)]^2 - \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{I_n} C_{ln} [W_n^0(x_n^l, y_n^l)]^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_{n=1}^N \rho_n h_n \int_0^{a_n} \int_0^{b_n} (W_n^0)^2 dx dy + \\
 & + \frac{\omega^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^{Q_n} M_{qn} [W_n^0(x_n^q, y_n^q)]^2
 \end{aligned}$$

bu erda n- plitaning qalinligi va chiziqli o'lchamlari, l-konsentrlangan massaning koordinatalari, l- elastik (viskoelastik) tayanchning koordinatalari. $h_n, a_n, b_n, x_n^l, y_n^l, x_n^q, y_n^q$

Agar n- plastinka, l- prujina va l'- tayanch viskoelastik bo'lsa, ular quyidagi formulalar bilan ifodalanadi: $\bar{D}_n, \bar{C}_{ln}, \bar{C}_{l'n}$

$$D_n = D_n f_n(\omega_R), \quad \bar{C}_{ln} = C_{ln} f_{ln}(\omega_R), \quad \bar{C}_{l'n} = C_{l'n} f_{l'n}(\omega_R)$$

Qayerda $f(\omega_R) = 1 - \Gamma_c(\omega_R) - i\Gamma_s(\omega_R)$ raqamli koeffitsiyentlari mos keladigan viskoelastik elementlarning relaksatsiya yadrosi parametrlariga bog'liq bo'lgan murakkab funksiyadir; mos ravishda n- plastinka, l- amortizator Elastik holatda, mos ravishda n-plastinka, l- amortizator va l'- tayanchning umumlashtirilgan qattiqliklari

$$D_n = \frac{E v h_n^3}{12(1-\nu_n^2)}, \quad C_{ln}, C_{l'n} \quad \bar{D}_n = D_n, \quad \bar{C}_{ln} = C_{ln}, \quad \bar{C}_{l'n} = C_{l'n}, \quad D_n, C_{ln}, C_{l'n}$$

Xuddi shunday funksiyani inqilob qobiqlari tizimi uchun yozish mumkin.

Ko'chirish vektorining komponentlari (3.46) variatsion tenglamaning izlangan funksiyalari bo'lib, sirtlarda chegara shartlarini qondirishi kerak, ya'ni $U_{nj}^0(\bar{x}) \in \Omega_n^{\Gamma P}$

$$L_n U_{nj}^0(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Omega_n^{\Gamma P} \quad (9)$$

Tizimda tebranishlar paytida ishni bajarmaydigan qattiq nuqta cheklovlarini qo'yish qoladi. n- korpusning tayanchlar nuqtasida qattiq, sharnirli tayanchi uchun shartlarni shunday yozamiz S_n

$$U_{nj}^0(\bar{x}_n^s) = 0, \quad (s=1, \dots, S_n; j=1, \dots, J) \quad (10)$$

n-tananing s- tayanchining koordinatalari qayerda \bar{x}_n^s

Agar ba'zi tayanchlar qattiq mahkamlab qo'yilgan bo'lsa, unda quyidagi shartlar qo'shiladi:

$$\frac{\partial U_{nj}^0(\bar{x}_n^s)}{\partial \alpha_n^s} = 0, \quad (s=1, \dots, S_n^\alpha; j=1, \dots, J) \quad (11)$$

Algoritmi amalga oshiruvchi dasturda (11) shart faqat qobiqlari uchun hisobga olinadi.

n- va (n+1)- jismlar orasidagi qattiq mahkamganlik mavjudligi munosabatlarda hisobga olinadi. $N \geq 2$

$$U_{nj}^0(\bar{x}_n^r) - U_{n+1,j}^0(\bar{x}_n^r) = 0, \quad (r=1, \dots, R_n; j=1, \dots, J) \quad (12)$$

Shunday qilib, siljish vektoriga (10)-(12) turdagi qo'shimcha cheklovlar qo'yiladi. Tizimga nuqta cheklovlarini qo'yish Lagrange multiplikator usuli yordamida hisobga olinadi. Keyin variatsion tenglamani quyidagicha qayta yozish mumkin.

$$\begin{aligned}
 & \delta \{ G(U_{nj}^0(\bar{x}), \omega^2) + \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^{S_n} \sum_{j=1}^J \lambda_{nj}^s U_{nj}^0(\bar{x}_n^s) + \sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^{S_n^\alpha} \sum_{j=1}^J k_{nj}^s \frac{\partial U_{nj}^0(\bar{x}_n^s)}{\partial \alpha_n^s} + \\
 & + \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^{R_n} \sum_{j=1}^J \mu_{nj}^r [U_{nj}^0(\bar{x}_n^r) - U_{n+1,j}^0(\bar{x}_n^r)] \} = 0
 \end{aligned} \quad (13)$$

Murakkab tabiiy chastotalar spektrini topish kerak, bu erda $\lambda_{nj}^s, \kappa_{nj}^s, \mu_{nj}^r, \omega^k = \omega_R^k + i\omega_I^k, \omega_R^k, \omega_I^k$ - chastotalar va tabiiy tebranishlarning susaytiruvchi koeffitsiyentlar.

Tabiiy tebranishlarning viskoelastik masalasini echishda variatsion usulni amalga oshirish algoritmi. Elastik masalada bo'lgani kabi, biz (13) variatsion tenglamaning yechimini har bir jismlarning sirtlaridagi tenglamani ham, berilgan geometrik chegara shartlarini ham qanoatlantiradigan fundamental funksiyalardan tashkil topgan yaqinlashuvchi shakl ko'rinishida izlaymiz. $\Omega_n^{\Gamma P}$ Bunday jismlar uchun funksiyalar ma'lum deb taxmin qilinadi (to'rtburchaklar plitalar va dumaloq silindrsimon qobiqlar uchun bu

nur funksiyalarining asosiy ketma-ketligi). Keyin, taxminiy shakllar ushbu ma’lum funksiyalarda chekli kengaytmalar sifatida tuzilishi mumkin: $\Phi_{nj}^k(\bar{x})$

$$U_{nj}^0(x) = \sum_{k=1}^K \gamma_{nj}^k \Phi_{nj}^k(x) \quad (14)$$

γ_{nj}^k kerakli kompleks koeffitsiyentlar qayerda, buni oldindan normallashtirish mumkin. Yig’indi (14) shartlarni tanlash tufayli avtomatik ravishda chegara shartlarini qondiradi. (13) tenglamani umumlashtirilgan koordinatalarga nisbatan o’zgartirib, chiziqli tenglamalarning bir jinsli tizimini olamiz. Ushbu tizimning o’lchami $\Phi_{nj}^k \Omega_n^{\Gamma P} \lambda_{nj}^s, \kappa_{nj}^s, \mu_{nj}^r, \gamma_{nj}^r \cdot J \cdot N \times J \cdot N$, $N = \sum_{n=1}^N (S_n + S_n^\alpha + R_n) + N \cdot K, J$ - siljish vektorining komponentlari soni.

$$(A + \sum_{n=1}^N f_n(\omega_R) A_n^n + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{l_n} f_{ln}(\omega_R) A_n^n + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{l_n} f_{ln}(\omega_R) A_n^n - \omega^2 B) \xi = 0 \quad (15)$$

bu yerda umumlashtirilgan koordinatalarning ustun vektori - tizimning viskoelastik jismlari soni; B - sistemaning umumlashtirilgan massalarining simmetrik, yagona matritsasi; $\xi \lambda_{nj}^s, \kappa_{nj}^s, \mu_{nj}^s, \gamma_{nj}^s, N_n A_n^n, A_{ln}^n, A_{ln}^n$ n o’lchamli kvadrat matritsalaridir. $J \cdot N \times J \cdot N$, nollardan tashkil topgan, navbati bilan n- viskoelastik tananing, A - nosimmetrik matritsa (uning o’lchamli A0 submatritsasi $J \cdot K \times J \cdot K$ tizimning elastik elementlarining umumlashtirilgan umumiy qattiqligini ifodalaydi viskoelastik elementning viskozitesini tavsiflovchi murakkab funksiyadir (uning koeffitsiyentlari relaksatsiya parametrlariga bog’liq). B matritsasining degeneratsiyasi, elastik muammoda bo’lgani kabi, tizimga qo’shimcha nuqta cheklovlari (qattiq tayanchlar va tirgaklar) kiritilishi bilan bog’liq. $A_H = A_b^T f(\omega_R) = 1 - \Gamma_c(\omega_R) - \Gamma_s(\omega_R)$ o’zgartirilgan

matritsalar ega bo’ladi $N^n \times N^n$ $N^n = J \cdot N - 2J \sum_{n=1}^N (S_n + S_n^\alpha + R_n)$. Integro-differential tenglamadan integralni

yo’qotish uchun Filatov va Sunchaliev ishlab chiqargan usulini qo’llaymiz (2) tenglama quyidagi ko’rinishni egalaydi

$$Df(t) = D_0 [1 - \Gamma_D^c(\omega_R) - i \Gamma_D^s(\omega_R)] f(t) = D_0 \Gamma_D \text{ elastik masaladan farqli o'laroq, murakkab}$$

bo’lgan chastota tenglamasini olamiz. Bunday tenglamalarni yechishning eng samarali usuli bu yerda qo’llanilgan Myuller usuli [10] bo’lsa kerak. Chastota ta’rifini oshkor qilmasdan, lekin har bir qadamda faqat uning qiymatini belgilangan miqdor uchun hisoblab, ko’rsatilgan usul murakkab tabiiy chastotalarni topadi. $\omega N'' \omega = \omega_R + i \omega_I$ Damping koeffitsiyentlari ko’rib chiqilayotgan tizimning damping xususiyatlarini baholashga imkon beradi. Texnikada tebranish jarayonlarining susayish tezligini baholash uchun yana bir xarakteristika qo’llaniladi: tebranishlarni yumshatishning logarifmik kamayishi. Bu damping koeffitsiyenti bilan quyidagi formula bo’yicha bog’lanadi:

$$\delta = \frac{2\pi\omega}{\omega_R}$$

Raqamli va nazariy hisob-kitoblar natijalarini taqqoslash, $h/R = 60$ 1-jadvalda umumlashtirilgan.

1-jadval.

Qobiqning egilish tebranishlarining chastotalari

Nisbiy qobiq uzunligi	Sonli yechim, Hz.	Analitik yechim, Hz.	Nazariy xato, %
0.2	1175.00	1179.00	0.34
0.5	468.90	473.80	1.04
1	230.40	235.80	2.34
3	73.76	78.90	6.97
6	35.35	40.1	13.55

Yuqorida keltirilgan (15) tenglama kuyidagi ko’rinishdagi transendent tenglamaga olib kelinadi.

$$|C_{jk}(\omega_R) - \omega^2 c_{jk}| = 0. \quad (16)$$

Yuqorida keltirilgan (16) transcendent tenglamani sonli Myuller usuli yordamida yechiladi. Boshlang'ich qiymat sifatida birinchi yaqinlashishda konservativ masalani yechimi olinadi. Bu transcendent tenglama (16)- ni Myuller usuli bilan yechishda har bir iteratsiyada Gauss usuli bilan yechiladi.

Tahlil uchun kvadrat shaklidagi yupqa elastik plastinka modeli yaratildi. Plastinkaning geometrik o'lchamlari quyidagicha: qirralari $a=1\text{m}$ va qalinligi $h=0.003\text{m}$. Plastinka alyuminiy materialidan tayyorlangan bo'lib, uning elastiklik moduli $E=70 \cdot 10^9\text{ Pa}$, Puasson koeffitsiyenti $\nu=0.33$ va zichligi $\rho=2700\text{kg/m}^3$ ga teng. Plastinkaning barcha to'rtta qirralari qattiq mahkamlangan chegaraviy shartlari bilan modellandi. Bu shartlar Abaqus dasturida barcha siljishlar ($U_1=U_2=U_3=0$) va buralishlari ($UR_1=UR_2=UR_3=0$) harakat erkinliklarini cheklash orqali qo'llanildi. Markazga massa ta'sirini hisobga olish uchun plastinkaning markazida joylashgan muqtaga yoki uzelga "nutqaviy massa" elementi kiritildi. Tahlil to'rtta har xil massa qiymati uchun o'tkazildi: 1 kg, 10 kg, 50 kg va 100 kg. Plastinkaning markaziy nuqtasi koordinatalari boshida joylashgan. Plastinka modeli elementlar bilan tahlil qilish uchun to'rt tugunli qobiq elementlari (S4R) ishlatildi. Mesh (to'rt) plastinkaning yuzasi bo'ylab taqsimlangan bo'lib, hisoblash aniqligini ta'minlash uchun yetarli darajada zichlikka ega. Erkin tebranish tahlili "Frequency" qadamida amalga oshirildi.

3. Natijalar va muhokama:

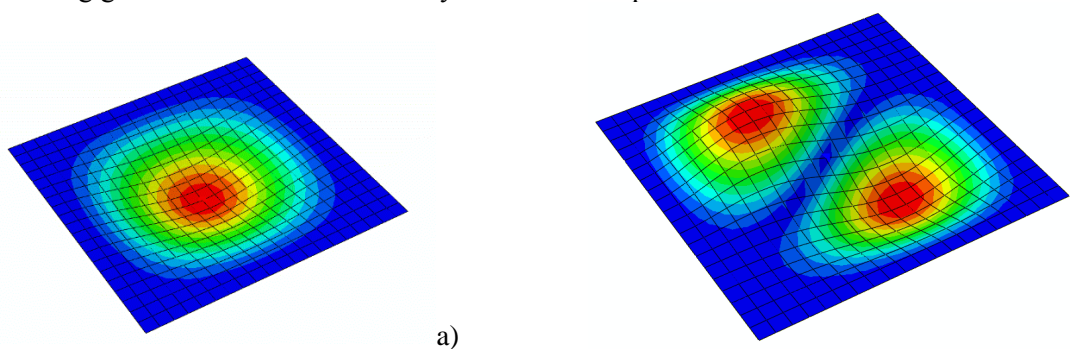
Abaqus dasturida turli qiymatdagi massalar qo'yilgan alyuminiy plastinkaning erkin tebranish tahlili natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Jadval 2.

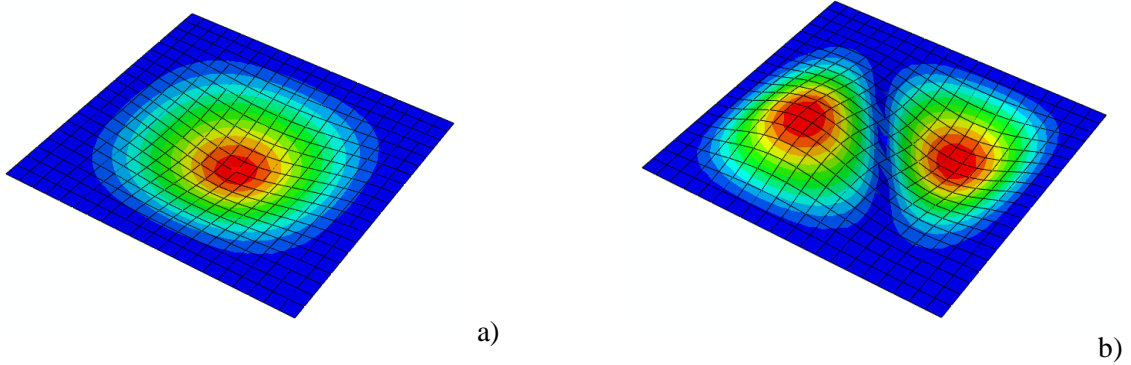
Turli massa qiymatlarida birinchi uchta erkin tebranish chastotalari (Hz)

Massa (kg)	1-chastota (Hz)	2-chastota (Hz)	3-chastota (Hz)
1	19.897	55.399	55.399
10	8.5437	55.399	55.399
50	3.9611	55.399	55.399
100	2.8139	55.399	55.399

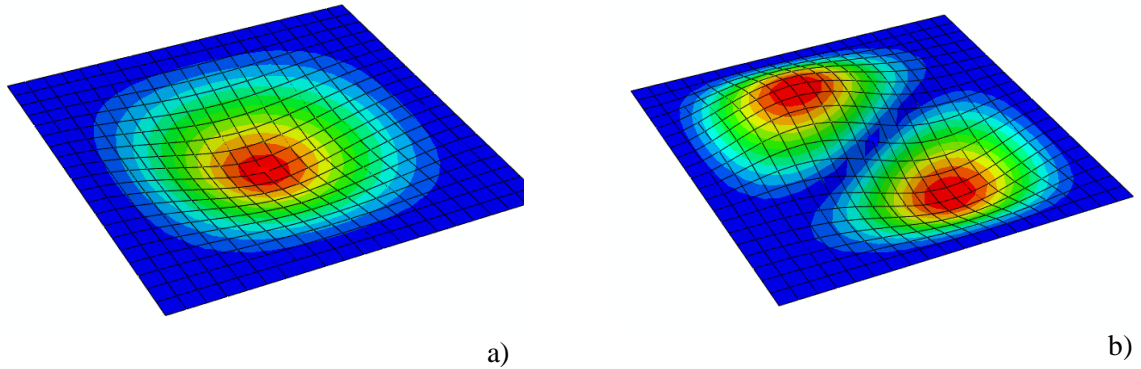
Jadvaldan ko'rinib turibdiki, markazga qo'yilgan massa qiymati ortishi bilan birinchi tabiiy tebranish chastotasi sezilarli darajada kamaymoqda. Xususan, massa 1 kg dan 100 kg gacha oshirilganda, birinchi chastota taxminan 7 marta pasaygan. Bu holat fizikaviy jihatdan kutilgan natijadir, chunki qo'yilgan massa sistema inersiyasini oshiradi va elastik elementlarning tebranishini sekinlashtiradi. Ikkinchi va uchinchi tabiiy tebranish chastotalari esa massa qiymatining o'zgarishiga deyarli sezgir emas. Bu shuni ko'rsatadiki, bu yuqori tartibli tebranish shakllari qo'yilgan massaning lokal ta'siriga unchalik bog'liq emas va ko'proq plastinkaning o'zining geometrik va material xususiyatlari bilan aniqlanadi.



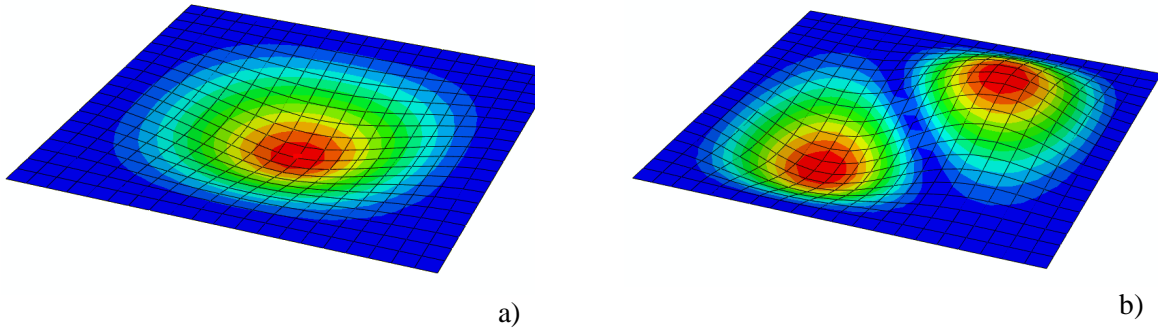
1-rasm. 1 kg massa uchun plastinkaning 1- va 2- tebranish formalari



2-rasm. 10 kg massa uchun plastinkaning 1- va 2- tebranish formalari



3-rasm. 50 kg massa uchun plastinkaning 1- va 2- tebranish formalari



4-rasm. 100 kg massa uchun plastinkaning 1- va 2- tebranish formalari

Tebranish shakllarining vizual tahlili shuni ko'rsatadiki, birinchi tebranish shakli barcha massa qiymatlari uchun plastinkaning markazida maksimal egilish bilan sodir bo'ladi, qirralar esa mahkamlangan holatda qoladi (1, (a) 2, (a) 3, (a) va 4-(a) rasmlarga qarang). Ikkinchi va uchinchi tebranish shakllari va chastotalari bir xil bo'ladi. Markaziy siljish kamayadi, balki markaz va mahkamlangan qirralar o'rtasidagi oraliq qismlarda maksimal siljishlar kuzatiladi (1, (b) 2, (b) 3, (b) va 4-(b) rasmlarga qarang). Bu yuqori tartibli tebranishlarda plastinka yuzasida tugun chiziqlarining paydo bo'lishini ko'rsatadi. Massa qiymatining o'zgarishi birinchi tebranish chastotasiga sezilarli ta'sir ko'rsatsa-da, tebranish shakllarining umumiy ko'rinishiga unchalik ta'sir etmaydi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, konstruksiyalarga qo'shimcha massalar o'rnatilganda ularning dinamik xarakteristikalarini, ayniqsa asosiy erkin tebranish chastotasi sezilarli darajada o'zgarishi mumkin. Bu rezonans hodisalarini oldini olish, tebranish darajasini nazorat qilish va konstruksiyalarning ishlash muddatini ta'minlash uchun muhim ahamiyatga ega.

Xulosa. Ushbu maqolada barcha qirralari qattiq mahkamlangan alyuminiy plastinkaning markaziga turli qiymatdagi massalar (1 kg, 10 kg, 50 kg va 100 kg) qo'yilgan holatdagi erkin tebranish xarakteristikalarini Abaqus dasturida sonli tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, qo'yilgan massa qiymatining ortishi birinchi tabiiy tebranish chastotasining sezilarli darajada kamayishiga olib keladi, ikkinchi va uchinchi chastotalar esa deyarli o'zgarmaydi. Tebranish shakllari asosan massa o'zgarishi bilan barqarorligini saqlaydi. Bu konstruksiyalarning dinamik loyihalashida massa ta'sirini hisobga olish zarurligini va tebranish xususiyatlarini nazorat qilish uchun massa parametrini ishlatish mumkinligini ko'rsatadi.

ADABIYOTLAR:

1. Бреславский В.Е. Продольные колебания цилиндрической оболочки, скреплённой с упруго-вязким заполнителем и сосредоточенными массами // *Проблемы машиностроения*. – 1981.– N 14.–С. 27–32.
2. Паламарчук В.Г. Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого тела // *Прикл. Мех.* – 1978.–14, N 4.– С.56–62.
3. Safarov I.I., Teshayev M.H., Juraev S.I. et al. Vibrations of Viscoelastic Plates with Attached Concentrated Masses. *Lobachevskii J Math* 45, 1729–1737 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224601474>
4. Usmonov B. Sh., Safarov I. I., Teshayev M. Kh., “Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2024, no. 88, 124–137. <https://doi.org/10.17223/19988621/88/10>
5. Safarov, I., Nuriddinov, B. & Nuriddinov, Z. Propagation of Own Waves in a Viscoelastic Cylindrical Panel of Variable Thickness. *Lobachevskii J Math* 45, 1246–1253 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224600663>
6. Safarov I.I., Teshayev M.Kh., “Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2023, no. 83, 166–179. <https://doi.org/10.17223/19988621/83/14>
7. Safarov I.I., Teshayev M.K. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 31, iss. 1, pp. 63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021
8. Беспалова Е.И. Колебания пластин с присоединёнными массами, распределёнными по участку поверхности // *Прикл. мех.* – 1978.–23, N 6.– С. 78–83.
9. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек- Киев: Наук. Думка, 1964.- 228с.
10. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами.-М. Машиностроение, 1988.-200с.
11. Safarov I. (2018) Numerical Modeled Static Stress-Deformed State of Parallel Pipes in the Deformable Environment. *Open Access Library Journal*, 5, 1-21. doi: 10.4236/oalib.1104671.
12. Safarov I.I. (1992) *Oscillations and Waves in Dissipatively Underbred Environments and Structures*. Science, Tashkent, 250 p.
13. Teshayev M.K, Safarov I.I., Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2019;13(2):104–115. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.

DETERMINING A SOURCE FUNCTION IN THE MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH CHARACTERISTIC TYPE CHANGE LINE

Durdiev Durdimurod Kalandarovich,

*Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan,*

Bukhara State University

d.d.durdiev@gmail.com

Rajabova Madina Oybek kizi,

Bukhara State University,

Teacher, department of differential equations

rajabovamadina31@gmail.com

Abstract. *In this paper, we study the direct problem for a model equation of a mixed parabolic-hyperbolic type. In the direct problem, analog of the Tricomi problem for this equation with a characteristic line of type change is considered. The unknown of the inverse problem is the t -dependent source function of the parabolic equation. To determine it with respect to the solution defined in the parabolic part of the domain, an overdetermination at the point $x = x_0$ for $t > 0$ condition is specified. Local theorems on the unique solvability of the problem posed in the sense of the classical solution are proved.*

Key words: *mixed type equations, parabolic equation, hyperbolic equation, characteristic, Green function, direct problem, Dirac delta function.*

TURI O'ZGARUVCHAN XARAKTERISTIK CHIZIQLI ARALASH PARABOLIK-GIPERBOLIK TENGLAMADA MANBA FUNKSIYASINI ANIQLASH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada aralash parabolik-giperbolik tipdagi model tenglama uchun to'g'ridan-to'g'ri masalani o'rganamiz. To'g'ridan-to'g'ri masalada ushbu tenglama uchun Trikom muammosining tipik o'zgarishlar chizig'i bilan analogi ko'rib chiqiladi. Teskari muammoning noma'lumligi parabolik tenglamaning t ga bog'liq manba funksiyasidir. Uni sohaning parabolik qismida aniqlangan yechimga nisbatan aniqlash uchun $t > 0$ sharti uchun $x = x_0$ nuqtada ortiqcha aniqlash belgilanadi. Klassik yechim ma'nosida qo'yilgan muammoning yagona yechilishi haqidagi mahalliy teoremlar isbotlangan.*

Kalit so'zlar: *aralash tipdagi tenglamalar, parabolik tenglama, giperbolik tenglama, xarakteristika, Grin funksiyasi, to'g'ri masala, Dirakning delta funksiyasi.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В СМЕШАННОМ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА ХАРАКТЕРИСТИКИ

Аннотация. *В данной работе изучается прямая задача для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. В прямой задаче рассматривается аналог задачи Трикоми для этого уравнения с характеристической линией изменения типа. Неизвестной в обратной задаче является функция источника параболического уравнения, зависящая от t . Для её определения относительно решения, заданного в параболической части области, задаётся условие переопределения в точке $x = x_0$ при $t > 0$. Доказаны локальные теоремы об однозначной разрешимости поставленной задачи в смысле классического решения.*

Ключевые слова: *уравнения смешанного, параболическое уравнения, гиперболическое уравнения, характеристика, функция Грина, прямая задача дельта функция Дирака.*

Introduction. *In this paper, we study the direct problem for a model equation of a mixed parabolic-hyperbolic type. An analog of the Tricomi problem for a hyperbolic-parabolic equation was studied. Further, such problems with different boundary and non-local conditions for parabolic-hyperbolic equations with both characteristic and non-characteristic type change lines are formulated and studied in the works of [6]-[7]. Research methods of direct and inverse problems related to the search for a solution to initial-boundary value problem for mixed equations of parabolic-hyperbolic type and unknown right hand side of this equation in a rectangular domain have been proposed in a monograph Eleev V.A. . Note also that direct*

initial-boundary and inverse problems of determining the solution of degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type and the right side of these equations were studied in the works of [8]-[9].

In the paper, studied the first boundary value problem for mixed-type equations with fractional derivatives in rectangular domains. A uniqueness criterion for the solution of the problem is established. The solution is constructed as a sum of an orthogonal series and its convergence is shown in the class of regular solutions of these equations.

Statement of the problem. Let Ω_{lT} be the finite open domain on the plane of variables x, y consisting of the union of two subdomains, $\Omega_{lT} = \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l}$, here

$$\begin{aligned} \Omega_{1lT} &= \{(x, y): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \\ \Omega_{2l} &= \left\{ (x, y): -t < x \leq t + l, -\frac{l}{2} < t < 0 \right\} \end{aligned}$$

l, T –fixed positive numbers. In this domain, we consider the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \text{sign } t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1 + \text{sign } t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1 + \text{sign } t}{2} q(x)u(x, t) = f(x)g(t) \tag{1}$$

Equation (1) of mixed parabolic-hyperbolic type. For it, the line of change of type $t = 0$ is a characteristic (parabolic degeneration of the second kind).

Direct problem. Find a solution of equation (1) in the domain Ω_{1lT} that satisfies the following boundary conditions:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=l} = \varphi_2(t), \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$u|_{t=-x} = \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{l}{2}\right]. \tag{3}$$

where $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi(x)$ are given functions.

Definition. By the solution (classical) to the direct problem (1)-(3) we mean a function $u(x, t)$ in the class $C(\overline{\Omega_{lT}}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT}) \cap C^2(\Omega_{2l})$ that satisfies equation (1) and conditions (2), (3), where

$$\overline{\Omega_{lT}} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\} \cup \left\{ (x, t): -t \leq x \leq t + l, -\frac{l}{2} \leq t \leq 0 \right\}.$$

Throughout this paper, with respect to the given functions, we will assume that the following conditions are satisfied:

$$(B1) \quad (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in C^1[0, T], \psi(x) \in C^2\left[0, \frac{l}{2}\right];$$

$$(B2) \quad \varphi_1(0) = \psi(0) = 0, \varphi_2(0) = 0;$$

$$(B3) \quad f(x), q(t) \in C[0, T], f(x_0) \neq 0$$

Study of the direct problem. In this section, we study the direct problem (1)-(3). We assume that the function $g(t)$ is also known and prove the following assertion:

Theorem. Let conditions (B1)-(B3) be satisfied and

$$l\|q\|_{C[0,l]} < 1.$$

Then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) in the domain Ω_{lT}

Let us introduce the notations $\tau(x) := u(x, 0), v(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$. Then, due to the unique solvability of the Cauchy problem for the wave equation, the solution to equation (1) in the domain Ω_{2l} can be written using the formula

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2} [\tau(x + y) + \tau(x - y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_y^0 \int_{x+y-\eta}^{x-y+\eta} f(\xi)g(\eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Taking into account equality (3) and conditions (B3), this relation implies

$$\begin{aligned} \tau(x) &= 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \tau(0) \\ &+ \int_0^x v(s) ds - \int_0^{\frac{x}{2}} \int_{-x+\eta}^{x+\eta} f(\xi)g(\eta) d\xi d\eta, \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{5}$$

Differentiating this equality, we have

$$\tau'(x) = \psi' \left(\frac{x}{2} \right) + v(x) + \int_0^{-\frac{x}{2}} f(x + \eta)g(\eta)d\eta, \quad x \in [0, l]. \quad (6)$$

Equalities (5) and (6) can be conditionally called the main relations for functions $\tau(x)$ and $v(x)$ obtained from the hyperbolic part of the domain.

It is known that the Green's function of the first initial boundary value problem for the equation $u_{xx} - u_t = 0, x \in (0, l), t > 0$ has the form

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp \left(-\frac{(x - \xi + 2n)^2}{4t} \right) - \exp \left(-\frac{(x + \xi + 2n)^2}{4t} \right) \right]$$

Using this, we represent solution of the equation (1) in the domain Ω_{1IT} with conditions (2) in the form of an integral equation

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^l G(x, \xi, t)\tau(\xi)d\xi - \int_0^t G_\xi(x, 0, t - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \\ & - \int_0^t G_\xi(x, l, t - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta - \\ & - \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \eta)[f(\xi)g(\eta) + q(\xi)u(\xi, \eta)]d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7)$$

Taking into account the formula $\lim_{\eta \rightarrow y} G(x, \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)$, $\delta(\cdot)$ is Dirac delta function, we differentiate (7) with respect to t . Setting in the resulting equation $t = 0$, view of $u_t(x, 0) = v(x)$, and also using the relation

$$\int_0^l G_t(x, \xi, t)\tau(\xi)d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t)\tau''(\xi)d\xi$$

which can be obtained on the basis of the equalities

$$G_t(x, \xi, t) = G_{\xi\xi}(x, \xi, t), \tau(0) = \tau(l)$$

(last equalities are a consequence of the conditions (B3) by integration by parts and the properties of the function $G(x, \xi, t)$ we obtain

$$v(x) = \tau''(x) - q(0)\tau(x) - f(x)g(0). \quad (8)$$

Comparing (7) and (8), we find an ordinary differential equation for determining the unknown function $\tau(x)$:

$$\tau''(x) - \tau'(x) - q(0)\tau(x) = f(x)g(0) - \psi' \left(\frac{x}{2} \right) - \int_0^{-\frac{x}{2}} f(x + \eta)g(\eta)d\eta, \quad x \in (0, l). \quad (9)$$

with boundary conditions

$$\tau(0) = 0, \tau(l) = 0. \quad (10)$$

Under the assumptions of Theorem the boundary value problem (9), (10) has a unique solution and it can be represented in the form

$$\tau(x) = \tau_0(x) + q(0) \int_0^l K(x, t)\tau(t)dt, \quad (11)$$

where $K(x, t)$ is the Green's function of the problem (10), (11)

$$K(x, t) = \frac{1}{e^l - 1} \begin{cases} (e^x - 1)(1 - e^{l-t}), & 0 \leq x \leq t, \\ (e^x - e^l)(1 - e^{-t}), & t \leq x \leq l. \end{cases}$$

and

$$\tau_0(x) = \int_0^l K(x, t) \left[f(x)g(0) - \psi' \left(\frac{t}{2} \right) - \int_0^{-\frac{t}{2}} f(x + \mu)g(\mu)d\mu \right] dt$$

After we find the function $\tau(x)$, we rewrite (5), taking into account (7), in the form

$$u(x, y) = \tau(x + t) + \psi\left(\frac{x - t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x + t}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \int_0^{\frac{s}{2}} f(s + \eta)g(\eta)d\eta ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x+t-\eta}^{x-t+\eta} f(\xi)g(\eta)d\xi d\eta. \quad (12)$$

From this it is clear that under the conditions (B1) (with respect to ψ), we have $u(x, y) = C^2(\Omega_{2l})$.

The solution to the problem (1)- (3) in Ω_{1lT} at the known $\tau(x)$ is defined as the solution of the integral equation of Volterra type (8). Note also that equation (9) based on the conditions imposed on φ_1, φ_2 the (B1) defines a function $u(x, t) \in C_{x,t}^{1,2}(\Omega_{1lT})$. Thus, the constructed functions in Ω_{1lT} and Ω_{2l} together are the classical solution of the direct problem (1)-(3) in the domain Ω_{1lT} .

Theorem is proved.

LITERATURE:

1. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. *Линейные уравнения математической физики. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1964.*
2. Гельфанд И. М. *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений, // УМН, 1959, Т. 14:3(87), С.3-19.*
3. Азиз Х., Сеттари З. *Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.*
4. Уфлянд Я.С. *Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: Наука. 1968.*
5. Шашков А.Г. *Системно-структурный анализ процессов теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат. 1983.*
6. Джурраев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. Изд-во Фан, Ташкент, 1986.*
7. Капустин Н. Ю. *Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью, // Дифференц. уравнения, 1987, 23:1, С.72-78.*
8. Durdiev D. K. *Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022, 26:2, С. 355Ц367.*
9. Durdiev D. K., Durdiev D. D. *The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation, //Turkish Journal of Mathematics, 2022, 46:8, pp. 3223-3233.*
10. Durdiev D. K., Zhumaev Z. Z. *Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022, 45:14, pp. 8374-8388.*
11. Durdiev D. K., Zhumaev Z. Z. *One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain, //Ukrainian Mathematical Journal, 2022, 73:11, pp. 1723-1740.*
12. Дурдиев Д. К., Жумаев Ж. Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды, //Дифференциальные уравнения, 2020, 56:6, С.796-807.*
13. Дурдиев Д. К. *Обратные задачи для сред с последствием. Taron-Iqbol, Ташкент, 2014.*
14. Дурдиев Д. К. *Об определении коэффициента уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения, // Дифференциальные уравнения, 2022, 58:12, С.1633- 1644.*
15. Cannon J. R. *The one-dimensional heat equation. Menlo Park, California 94025, USA, 1984.*
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики. М: Наука. 1977.*

**INVESTIGATION OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL PSEUDOPARABOLIC EQUATION
WITH NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS**

Jumaev Jonibek Jamolovich,

*DSc student, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan,
Bukhara State University
jonibekjj@mai.ru*

Abdullaev Bekhzod Rajabovich,

*PhD student, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan
behzodbek0202@gmail.com*

Abstract. This paper investigates an integro-differential pseudoparabolic equation with initial and nonclassical boundary conditions. First, we introduce the definition of a classical solution to the problem, and then, by using the method of separation of variables, we seek the solution in the form of a functional series. The corresponding spectral problem associated with the original equation is considered, and a biorthogonal system is constructed for it. It is shown that the spectral problem is self-adjoint and that its eigenfunctions form a Riesz basis. Then, the problem is reduced to an equivalent Volterra integral equation. Using an inequality of the Gronwall type, we obtain prior estimates, and based on these estimates, we prove the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Keywords: pseudoparabolic integro-differential equation, nonclassical boundary conditions, Fourier method, spectral problem, Gronwall inequality, Bessel inequality.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Аннотация. В данной статье исследуется интегро-дифференциальное псевдопараболическое уравнение с начальными и неклассическими граничными условиями. Сначала вводится определение классического решения задачи, затем, используя метод разделения переменных, решение ищется в виде функционального ряда. Рассматривается соответствующая спектральная задача, построена биортогональная система. Показано, что спектральная задача является самосопряжённой, а её собственные функции образуют базис Рисса. Далее задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра. Используя неравенство типа Гронуолла, получены априорные оценки, и на их основе доказаны существование и единственность решения задачи.

Ключевые слова: псевдопараболическое интегро-дифференциальное уравнение, неклассические граничные условия, метод Фурье, спектральная задача, неравенство Гронуолла, неравенство Бесселя.

**NOKLASSIK CHEGARAVIY SHARTLAR BILAN INTEGRO-DIFFERENSIAL
PSEVDOPARABOLIK TENGLAMANI TADQIQ QILISH**

Annotatsiya. Ushbu maqola boshlang'ich va noklassik chegaraviy shartlari bilan integro – differensial pсевдопараболик differensial tenglamani o'rganadi. Birinchidan, biz masalaning klassik yechimining ta'rifini kiritamiz, so'ngra o'zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalanib masala yechimini funksional qator ko'rinishida izlaymiz. Dastlab qo'yilgan masalaga mos spektral masalani qaraymiz va unga biortogonal sistema quramiz, spektral masala o'z-o'ziga qo'shma, xos funksiyalari Riesz bazis tashkil etishini ko'rsatamiz. So'ngra masala ekvivalent Volterra integral tenglamasiga keltiriladi. Gronwall tipdagi tengsizlikdan foydalanib, biz pirior baholar olamiz va bu baholardan foydalanib masala yechimining mavjudligi va yagonaliligini isbotlaymiz.

Kalit so'zlar: pсевдопараболик integro – differensial tenglama, noklassik chegaraviy shartlar, Furiye metod, spektral masala, Gronwall tengsizligi, Bessel tengsizligi.

Introduction and statement of the problem. In many applied problems, there arises the necessity to determine unknown quantities from limited information about the solutions of differential equations. A considerable number of studies have been devoted to inverse problems for different types of partial differential equations. For their general description and classification, we refer the reader to works [1]–[5]. In particular, papers [6]–[10] are concerned with the identification of kernels in integro-differential equations, where local or global existence and uniqueness results for the solution have been established. A series of inverse problems related to third-order pseudoparabolic equations have been investigated in [11]–[14]. In [15], an inverse problem for determining an unknown coefficient in a third-order pseudoparabolic equation with non-classical boundary conditions was considered. In works [16]–[17], the focus is mainly on the spectral problem. Studies [18]–[20] present the fundamental results concerning the theory of biorthogonal systems, Riesz bases, and the completeness in spectral theory. In this paper, the original problem for a third-order pseudoparabolic integro-differential equation in a rectangular domain is investigated. The study is carried out under initial and non-classical boundary conditions.

Consider the following an integro-differential pseudo parabolic equation:

$$u_t(x, t) - \alpha(t)u_{txx}(x, t) - \beta(t)u_{xx}(x, t) = \int_0^t K(\tau)u(x, t - \tau)d\tau + f(x, t), \quad (x, t) \in D_T \quad (1)$$

where $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, $T > 0$. Here, $K(t)$ is the convolution kernel, $f(x, t)$ is a source function. In the domain D_T , we study the following problem for Eq. (1): find a function $u(x, t)$ satisfying (1) with initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

non-classical boundary conditions

$$u(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) - bu_{xx}(0, t) + au_x(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

where $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$, $\beta(t) > 0$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ are the given functions. This problem is commonly referred to as the direct problem.

Definition 1. A function $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D_T) \cap C_{x,t}^{3,0}(\bar{D}_T)$ is called a classical solution to problem (1)-(3), if it satisfies the following conditions:

1) $u(x, t)$ is continuous in D_T along with all derivatives appearing in Eq. (1);

2) all given conditions (2)-(3) are satisfied in the classical sense.

We make the following assumptions:

$$(A1) \quad \varphi(x) \in C^3[0, 1], \quad \varphi^{(4)}(x) \in L_2(0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0, \quad \varphi'''(0) = 0, \quad \int_0^1 \varphi'(x) \cos(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx = 0;$$

$$(A2) \quad f(x, t) \in C_{x,t}^{1,1}(\bar{D}_T), \quad f_{xx}^{(2)}(\cdot, t) \in L_2(0, 1), \quad f(0, t) = f(1, t) = 0, \quad f'_x(0, t) = 0, \int_0^1 f'_x(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_0}(1-x)) dx = 0.$$

$$(A3) \quad \{\alpha(t), \beta(t)\} \in C^1[0, T], \quad \alpha(t) \geq \alpha_0 > 0, \quad \beta(t) > 0.$$

Investigation of the spectral problem. In this section, we study the solvability of the direct problem using the Fourier method. By applying the method of separation of variables to the solution of problem (1)-(3), we arrive at the following spectral problem:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(1) = 0, \\ X'''(0) - bX''(0) + aX'(0) = 0. \end{cases}$$

By performing the following substitutions with $X''(0) = -\lambda X(0)$, $X'''(0) = -\lambda X'(0)$, we derive the corresponding spectral problem

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

$$X(1) = 0, \quad (a - \lambda)X'(0) + \lambda bX(0) = 0, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (6)$$

Spectral problem (5)-(6) have eigenvalues which is solution of equation $\tan\sqrt{\lambda} = \frac{a-\lambda}{b\sqrt{\lambda}}$ and eigenfunctions $X_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))$, $k = 0, 1, \dots$ ([17]). In paper [17], the authors provide the following definition and lemma concerning the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem (5)-(6), which we use in the proof of the main result.

Lemma 2.1. (see [17]) *Starting from some number N , for $k \geq N$, there is an estimate*

$$0 < \sqrt{\lambda_k} - \frac{\pi}{2} - \pi(k-1) < \frac{b}{\pi/4 + \pi(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Lemma 2.2. (see [17]) *Let us compare the system $\{X_k(x)\}$ without the function $X_0(x)$ with the known system $\{V_k(x)\}$, $V_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\mu_k}(1-x))$, where $\sqrt{\mu_k} = \pi/2 + \pi(k-1)$, $k = 0, 1, \dots$, is an orthonormal basis in $L_2(0,1)$.*

For $n \geq N$ the following relations are valid:

$$\max_{x \in [0,1]} |X_k(x) - V_k(x)| < \frac{\sqrt{2}b}{\pi/4 + \pi(k-1)},$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \|X_k(x) - V_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < b^2 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{2}{3(\pi/4 + \pi(k-1))^2},$$

hence, the convergence of the series on the left-hand side of this inequality follows.

Lemma 2.3. (see [17]) *The biorthogonally conjugated system $\{Z_k(x)\}$ to the system $\{X_k(x)\}$, $k = 0, 1, \dots$, is determined by the formula:*

$$Z_k(x) = \sqrt{2} \left(\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) - \frac{\sqrt{\lambda_0} \cos(\sqrt{\lambda_k}) \sin(\sqrt{\lambda_0}(1-x))}{\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_0})} \right) / \left(1 + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b} + \frac{a \cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b \lambda_k} \right)$$

Lemma 2.4. *The spectral problem (5)-(6) is self-joint, which means that the conditions are met:*

$$(LX, Y)_{L_2(0,1)} = (X, L^*Y)_{L_2(0,1)}, \quad L = L^*,$$

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$Y(1) = 0, \quad (a - \lambda)Y'(0) + \lambda b Y(0) = 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Lemma 2.5. (see [20]) *The eigenfunctions of a self - adjoint differential operator form a complete system in $L_2(0,1)$. Consequently, the system $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is complete in $L_2(0,1)$.*

Lemma 2.6. (see [19]) *Let $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ and $\{Z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ be Bessel sequences in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, which are biorthogonal. If one of them is complete in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, then the other one is also complete in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.*

Proof. It is known that the functions

$$X_k(x) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x))$$

are sinusoidal functions whose norms are uniformly bounded in the space $L_2(0,1)$, and their eigenvalues satisfy the asymptotic relation $\sqrt{\lambda_k} \sim \pi k$, $k \rightarrow \infty$. Therefore, for every $f \in L_2(0,1)$, the Fourier coefficients (f, X_k) satisfy the Bessel inequality:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, X_k)|^2 \leq C \|f\|^2.$$

That is, the system $\{X_k(x)\}$ is a Bessel sequence.

Similarly, the biorthogonal system $\{Z_k(x)\}$ consists of linear combinations of sine functions, and its denominator is bounded away from zero. Hence, the norms $\|Z_k\|$ are also uniformly bounded. As a result, the system $\{Z_k(x)\}$ satisfies the Bessel inequality:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, Z_k)|^2 \leq C' \|f\|^2,$$

and thus $\{Z_k(x)\}$ is also a Bessel sequence. According to Lemma 3.5, the system $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is complete in $L_2(0,1)$. Therefore, the conditions of Lemma 3.6 are satisfied and it follows that the system $\{Z_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is also complete in $L_2(0,1)$.

Theorem 2.1 *System $\{X_k(x)\}$ $k = 1, 2, 3, \dots$ - Riesz bases in space $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.*

Proof. To prove the theorem, we use the following Bari theorem.

Theorem 2.2 (Bari's Theorem)(see [18]) *Let $\{V_n(x)\}$ be a Riesz basis in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ and let a system $\{X_k(x)\} \subset L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ be linearly independent and quadratically convergent to $\{V_n(x)\}$ in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Then, the system $\{X_k(x)\}$ is a Riesz basis in $L_2(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.*

$\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is a linearly independent system when

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x) = 0, \quad \text{in } \forall x \in (0,1) \quad C_k = 0, \quad \text{for each } k.$$

In fact, each λ_k is a unique value, $\sqrt{\lambda_k} \neq \sqrt{\lambda_m}$ if $k \neq m$. This means that $X_k(x)$ are sinusoidal oscillations at different frequencies, the linear combination of which is zero only if all coefficients are zero. Therefore, $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is linearly independent in $L_2(0,1)$.

According to Lemma 2.2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|X_k(x) - V_k(x)\|^2 < \infty.$$

Therefore, since the system $\{X_k(x)\} \quad k = 1, 2, 3, \dots$ forms a Riesz basis in $L_2(0,1)$. Theorem 2.1 is proved.

The solution of the problem and the obtained estimates. We will seek the classical solution of the problem (1)-(3) in the form:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_k(t), \tag{7}$$

where

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) Z_k(x) dx.$$

Then applying the formal scheme of the Fourier method, for determining the unknown coefficient $u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots)$ of the function $u(x, t)$ from (1)-(2), we have

$$(1 + \lambda_k \alpha(t)) u'_k(t) + \beta(t) \lambda_k u_k(t) = F_k(t, K, f, u), \quad (k = 1, 2, \dots); \quad 0 \leq t \leq T, \tag{8}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{9}$$

where

$$F_k(t, K, f, u) = \int_0^t K(\tau) u_k(t - \tau) d\tau + f_k(t),$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Z_k(x) dx, \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) Z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Solving problem (8)-(9), it is easy to conclude that we take to the following integral equations:

$$u_k(t) = \varphi_k \mu_k(0, t) + \int_0^t \frac{f_k(\tau) \mu_k(\tau, t)}{1 + \alpha(\tau) \lambda_k} d\tau + \int_0^t \frac{\mu_k(\tau, t)}{1 + \alpha(\tau) \lambda_k} \int_0^{\tau} K(\eta) u_k(\tau - \eta) d\eta d\tau, \tag{10}$$

where $\mu_k(\tau, t) = \exp\{-\int_{\tau}^t \frac{\beta(s) \lambda_k ds}{1 + \alpha(s) \lambda_k}\}$.

This equation yields that

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| \mu_k(0, t) + \int_0^t \frac{|f_k(\tau)| \mu_k(\tau, t)}{1 + \alpha(\tau) \lambda_k} d\tau + \int_0^t |u_k(\eta)| \int_{\eta}^t \frac{\mu_k(\tau, t)}{1 + \alpha(\tau) \lambda_k} |K(\tau - \eta)| d\tau d\eta, \tag{11}$$

where

$$\|K\| := \max_{t \in [0, T]} |K(t)|.$$

First of all, we will estimate $\mu_k(\tau, t)$ in the $t \in [0, T]$. So, the following inequality is reasonably valid: $1 + \lambda_k \alpha(t) > \lambda_k \alpha(t)$, $\frac{\lambda_k \beta(t)}{1 + \lambda_k \alpha(t)} < \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} < A$. A is a positive constant. From the above inequality, we can conclude that

$$e^{-CT} \leq \mu_k(\tau, t) \leq 1.$$

From (11), we have the following

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k| + \frac{\|f_k\| T}{\lambda_k \alpha_0} + \frac{\|K\| T}{\alpha_0} \int_0^t |u_k(\eta)| d\eta. \tag{12}$$

Applying Gronwall's inequality, the last relation leads to the following estimate

$$|u_k(t)| \leq \left(|\varphi_k| + \frac{\|f_k\| T}{\lambda_k \alpha_0} \right) e^{\frac{\|K\| T^2}{\alpha_0}}. \tag{13}$$

Formally, we will differentiate the integral equation (10)

$$\begin{aligned} u'_k(t) &= -\varphi_k \mu_k(0, t) \frac{\beta(t) \lambda_k}{1 + \alpha(t) \lambda_k} - \frac{\beta(t) \lambda_k}{1 + \alpha(t) \lambda_k} \int_0^t \frac{f_k(\tau)}{1 + \lambda_k \alpha(\tau)} \mu_k(\tau, t) d\tau + \frac{f_k(t)}{1 + \lambda_k \alpha(t)} \\ &\quad - \frac{\beta(t) \lambda_k}{1 + \alpha(t) \lambda_k} \int_0^t \frac{\mu_k(\tau, t)}{1 + \alpha(\tau) \lambda_k} \int_0^{\tau} K(\eta) u_k(\tau - \eta) d\eta d\tau + \int_0^t \frac{K(\eta) u_k(t - \eta)}{1 + \alpha(t) \lambda_k} d\eta. \end{aligned} \tag{14}$$

Similarly, we estimate the last integral equation using the (14) and we have

$$|\mathbf{u}'_k(t)| \leq A \left(|\varphi_k| + \frac{\|f_k\| T}{\lambda_k \alpha_0} \right) e^{\frac{\|K\| T^2}{\alpha_0}}. \quad (15)$$

Thus, we have proved the following lemma:

Lemma 3.1 For any $t \in [0, T]$, the following estimates are valid:

$$|\mathbf{u}_k(t)| \leq \left(|\varphi_k| + \frac{\|f_k\| T}{\lambda_k \alpha_0} \right) e^{\frac{\|K\| T^2}{\alpha_0}}, \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

$$|\mathbf{u}'_k(t)| \leq A \left(|\varphi_k| + \frac{\|f_k\| T}{\lambda_k \alpha_0} \right) e^{\frac{\|K\| T^2}{\alpha_0}}, \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Uniqueness of the classical solution. The following uniqueness result is valid for (1)-(3).

Theorem 4.1 If problem (1)-(3) has a solution, then this solution is unique.

Proof. $Z_k(x)$ is a function biorthogonal to $X_k(x)$. If we assume that the problem (1)-(3) has two solutions, then the following results from their difference: from $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$ it follows that $\varphi_k \equiv 0$, $f_k(t) \equiv 0$, and the estimate (13) derived from equation (10) implies that $|\mathbf{u}_k(t)| \leq 0$, which holds only if $\mathbf{u}_k(t) \equiv 0$. The latest equality is equivalent to that

$$(\mathbf{u}(\cdot, t), Z_k)_{L_2(0,1)} = 0.$$

Since the system $\{Z_k(x)\}_{k=1}^\infty$ is complete in the space $L_2(0,1)$, the function $u(x, t) = 0$ in $x \in [0,1]$, for each $t \in [0, T]$. Therefore, the difference between the two assumed solutions is identically zero, and thus the solution to the problem (1)-(3) is unique.

Existence of the classical solution.

Theorem 5.1. Let $K(t) \in C[0, T]$ and suppose that conditions (A1)-(A3) are satisfied. Then there exists a classical solution of the direct problem (1)-(3), such that $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D_T) \cap C_{x,t}^{3,0}(\bar{D}_T)$.

Proof. Formally differentiating the series in (7) term by term, we obtain the following:

$$\mathbf{u}_t = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{u}'_k(t) X_k(x), \quad (18)$$

$$u_{xx} = - \sum_{k=1}^\infty \lambda_k u_k(t) X_k(x), \quad (19)$$

$$u_{xxt} = - \sum_{k=1}^\infty \lambda_k u'_k(t) X_k(x). \quad (20)$$

In view of Lemma 3.1, if the following series converge, then the series (7), (8), (9) and (20) converge for any

$(x, t) \in D_T$

$$A \sum_{k=1}^\infty (\lambda_k |\varphi_k| + \|f_k\|),$$

where the constant A depends only on $T, \|K\|$.

We hold the following auxiliary lemma:

Lemma 5.1. If the conditions (A1)-(A2) are valid then, there are equalities

$$\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k^{(4)}, \quad f_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} f_k^{(2)}(t) \quad (21)$$

where

$$\varphi_k^{(4)} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b} + \frac{a \cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b \lambda_k}} \int_0^1 \varphi^{(4)}(x) \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx,$$

$$f_k^{(2)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b} + \frac{a \cos^2(\sqrt{\lambda_k})}{b \lambda_k}} \int_0^1 f_{xx}^{(2)}(x, t) \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-x)) dx.$$

with the following estimate:

$$\sum_{k=1}^\infty |\varphi_k^{(4)}|^2 \leq \|\varphi^{(4)}\|_{L^2(0,1)}^2, \quad \sum_{k=1}^\infty |f_k^{(2)}(t)|^2 \leq \|f_{xx}^{(2)}\|_{L^2(0,1) \times C[0,T]}^2. \quad (22)$$

If the functions $\varphi(x), f(x, t)$ satisfy the conditions of Theorem 5.1, then due to representations (21) and (22) series (7), (18), (19) and (20) converge uniformly in the rectangle D_T ; therefore, the function $u(x, t)$ satisfies relations (1)-(3).

Conclusion. In this work, we considered the problem for an integro-differential pseudoparabolic equation with non-classical boundary conditions. For the problem, the Fourier method was applied to establish well-posedness. The existence and uniqueness of the solution to the problem were proved.

REFERENCES:

1. Tikhonov A.N., *On stability of inverse problems*, Proc USSR Acad Sci, 39 (1943), pp. 195-198.
2. Lavrentev M.M., *On an inverse problem for the wave equation*, Dokl AN USSR, 157 (1964), pp. 520-521.
3. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatski S.P., *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Vol. 64, American Mathematical Soc. (1986).
4. Vanov VK, Vasin VV, Tanana VP, *Theory of linear Ill-posed problems and its applications*, De Gruyter (2013).
5. Bukhgeim A.L., *Introduction to the theory of inverse problems*, AL Bukhgeim VSP, Utrecht (2000).
6. Durdiev D.K., Jumaev J.J., *Memory kernel reconstruction problems in the integro- differential equation of rigid heat conductor*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(2022), 8374–8388. DOI: 10.1002/mma.7133
7. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh., *One-dimensional inverse problems of finding the kernel of the integro-differential heat equation in a bounded domain*, Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 73, (2021).
8. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *On determination of the coefficient and kernel in an integro-differential equation of parabolic type*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, 11 2023, no 1, pp. 49–65
9. Durdiev D.K., Nuriddinov Z.Z., *Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 14(2021).
10. Durdiev D.K., Nuriddinov Z.Z., *Global Solvability of a Kernel Determination Problem in 2D Heat Equation with Memory*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics - Physics 2025, 18(1), 14–24
11. Mehraliyev Ya.T., Shafiyeva G.K., *On an inverse boundary value problem for a pseudoparabolic third-order equation with integral condition of the first kind* J Math Sci, 204 (2015), pp. 343-350.
12. Khompysh K., *Inverse problem for 1D pseudo-parabolic equation* Funct Anal Interdiscip Appl, 216 (2017).
13. Durdiev D. K., Elmuradova H. B., Rakhmonov A. A., “*Inverse kernel determination problem for a class of pseudoparabolic integro-differential equations*”, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 29:1 (2025), 7–20.
14. Durdiev D.K., Elmuradova H.B. *Kernel determination problem in the fractional pseudo-integro-differential equation*. Rend. Circ. Mat. Palermo,II. Ser 73, 3313–3326 (2024). <https://doi.org/10.1007/s12215-024-01091-7>
15. Mehraliev Ya. T., Ismailov A. I. *Inverse boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation with nonclassical boundary conditions*. Journal of Contemporary Applied Mathematics, 8 (2), 2018, 83-97.
16. Kapustin N. Yu., Moiseev E. I. *On spectral problems with a spectral parameter in the boundary condition*, Differential equations. 1997. T.33, No. 1. pp. 16 – 21.
17. Kapustin N. Yu., Moiseev E. I. *On the convergence of spectral expansions of functions from the Holder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition*, Differential Equations. 2000. -V.36, No. 8.
18. Bari, N.K., “*Biorthogonal systems and bases in Hilbert space*”, Moskov. Gos. Univ. Uenye Zapiski Matematika, 148(4):69–107, 1951.
19. Stoeva, D.T. *On a characterization of Riesz bases via biorthogonal sequences*. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2020. 26(4), 1-25. <https://doi.org/10.1007/s00041-020-09771-5>
20. Naimark M.A., *Linear Differential Operators*, Ungar Publishing Co., New York, 1967.

CONDITIONS ON EXISTENCE OF RESONANCES IN HAMILTONIAN SYSTEM

Khaydarov Zafar,

Samarkand State University named after Sh. Rashidov,

blv. Universitetskii 15, Samarkand, Uzbekistan

zafarxx@gmail.com

Abstract. To investigate formal stability of an equilibrium of a multiparameter Hamiltonian system with three degrees of freedom in the case of common position conditions for the existence of resonances of the third and fourth orders of multiplicity are found. These conditions are formulated as zeroes of polynomials from the coefficients of the characteristic polynomial of the linearized Hamilton system. We describe the partition of the set of stability in the space of coefficients of the characteristic polynomial into such parts where strong resonances are absent and where Bruno's Theorem can be applied to determine the formal stability. We also consider some values of the coefficients of the characteristic polynomial at which the multiplicity of resonances is equal to two.

Keywords: Hamiltonian system, formal stability, resonance, normal form, characteristic polynomial, stability set, resonant variety, strong resonances, three degrees of freedom, Gröbner basis, power transformation.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЗОНАНСОВ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ

Аннотация. Исследуется формальная устойчивость положения равновесия многопараметрической гамильтоновой системы с тремя степенями свободы в общем случае. Найдены условия существования резонансов третьего и четвертого порядков кратности. Эти условия формулируются как нули полиномов от коэффициентов характеристического полинома линеаризованной гамильтоновой системы. Описано разбиение множества устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического полинома на такие части, где отсутствуют сильные резонансы и где для определения формальной устойчивости может быть применена теорема Брюно. Также рассмотрены некоторые значения коэффициентов характеристического полинома, при которых кратность резонансов равна двум.

Ключевые слова: Гамильтонова система, формальная устойчивость, резонанс, нормальная форма, характеристический полином, множество устойчивости, резонансное многообразие, сильные резонансы, три степени свободы, базис Грёбнера, степенное преобразование.

GAMILTON TIZIMIDA REZONANSLAR MAVJUD SHARTLARI

Abstract. Umumiy holatda uch erkinlik darajasiga ega bo'lgan ko'p parametrli Gamilton tizimi muvozanat holatining formal barqarorligi tadqiq etiladi. Uchinchi va to'rtinchi tartibli ko'paytmalarning rezonanslari mavjudligining shartlari topildi. Ushbu shartlar chiziqdashirilgan Gamilton tizimining xarakteristik ko'phad koeffitsiyentlaridan tuzilgan polinomlarning nollari sifatida ifodalanadi. Xarakteristik ko'phad koeffitsiyentlari fazosidagi barqarorlik to'plami, unda kuchli rezonanslar mavjud bo'lmagan va formal barqarorlikni aniqlash uchun Bruno teoremasini qo'llash mumkin bo'lgan qismlarga bo'linishi tavsiflangan. Shuningdek, rezonanslarning ko'paytmasi ikkiga teng bo'ladigan xarakteristik ko'phad koeffitsiyentlarining ba'zi qiymatlari ko'rib chiqilgan.

Kalit so'zlar: Gamilton tizimi, formal barqarorlik, rezonans, normal shakl, xarakteristik ko'phad, barqarorlik to'plami, rezonans xilma-xilligi, kuchli rezonanslar, uch erkinlik darajasi, Gröbner bazisi, darajali aylantirish.

Introduction. Resonances play an essential role in vibrational systems. Their presence, on the one hand, leads to complex dynamics, when the energy of vibrations is “pumped” between several degrees of freedom, whose corresponding frequencies are in resonance. On the other hand, the presence of nontrivial solutions of the resonance equation allows writing additional formal first integrals and, as a consequence, allows analyzing the stability of the equilibrium or to integrate asymptotically the system of equations of motion reduced to the normal form.

Conventionally, we can specify three basic types of stability for theoretical-mechanical problems (see [1]):

- rigorous stability (Lyapunov stability);
- formal stability (Moser stability);
- practical stability.

Lyapunov stability is the most rigorous and guarantees uniform boundedness of solutions over an infinite time interval with respect to a set of perturbations by initial conditions and parameters. Moser stability is weaker, but it guarantees a speed of trajectory scattering slower than any power function with an arbitrary positive exponent. Practical stability means only bounded solutions over a finite time interval with respect to a set of perturbative factors.

Next, we consider an autonomous Hamiltonian system with an analytic function $H(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ which equilibrium coincides with the origin of coordinates. Then the Hamiltonian $H(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ expands into a convergent series of homogeneous polynomials H_k of degree k from its phase variables $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$H(\mathbf{z}; \mathbf{P}) = \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\mathbf{z}; \mathbf{P}), \quad (1)$$

where P is a vector of parameters.

It is known that the stability of the equilibrium in the first approximation can be determined only for the case when the quadratic form $H_2(\mathbf{z})$ is sign-defined (Lagrange-Dirichlet Theorem [2]).

If the number of degrees of freedom is not greater than two, then

- stability is determined by the Arnold-Moser theorem [3] in the absence of resonances of order four or less, which requires computing the normal form of the Hamiltonian (1) to order four;
- for resonances of order four or less, stability conditions were obtained in the works of A.P. Markeev and A.G. Sokolsky [3].

When the number of degrees of freedom is greater than two, stability for most initial conditions is determined by Arnold's theorem (see, e.g., [3]).

From a practical point of view, a weaker than Lyapunov stability, *formal stability* proposed by Moser [4], is quite sufficient.

The aim of the paper is to describe a scheme for investigating the formal stability of the equilibrium of a Hamiltonian system with three degrees of freedom, and to describe regions in the coefficient space of the characteristic polynomial of a linearized Hamiltonian system where such stability may be present.

Notation.

- Bold symbols like x, y, u, v denote column vectors in n -dimensional real \mathbb{R}^n or complex \mathbb{C}^n spaces.
- Bold symbols like p, q denote vectors in n -dimensional integer lattice \mathbb{Z}^n .
- $|p| = \sum_{j=1}^n |p_j|$ denotes the norm of the vector.
- For $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ and $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ denote by $x^p \equiv \prod_{j=1}^n x_j^{p_j}$ the multi-index and by $\langle p, x \rangle \equiv \sum_{j=1}^n p_j x_j$ the scalar product of a pair of vectors.

Stability set of a linear Hamiltonian system. In the case of general position, the series (1) begins with the quadratic Hamiltonian $H_2(\mathbf{z}; \mathbf{P})$ defining the local dynamics near the equilibrium. The behavior of the phase flow in the first approximation is described by the linear Hamiltonian system

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{P})\mathbf{z}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{J} \frac{\partial^2 H_2(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}}. \quad (2)$$

Let us recall here the basic properties of a linear Hamiltonian system.

1. If λ_j is an eigenvalue of the matrix B , then $-\lambda_j$ is also its eigenvalue. All eigenvalues $\lambda_j, j = 1, \dots, 2n$, of the matrix B can be ordered in such a way that $\lambda_{j+n} = -\lambda_j, j = 1, \dots, n$. Denote by vector $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ as the *vector of basic eigenvalues*.

2. The characteristic polynomial $\check{f}(\lambda)$ of matrix B contains only even degrees of λ , so it is a polynomial of $\mu = \lambda^2$. Such a polynomial is called in [5] *semi-characteristic*

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^n f_{n-k}(\mathbf{P})\mu^k, \quad f_0 \equiv 1. \quad (3)$$

3. If $\Re \lambda_j \neq 0$ for some j , then the equilibrium is unstable.
4. If all $\Re \lambda_j = 0$, then the behavior of the phase flow in its vicinity can only be obtained by taking into account the nonlinear terms.

There are two types of problems about the stability of the equilibrium of multiparameter systems.

- For certain values of the parameter vector P , find the stability of the equilibrium (a particular problem).
- Find in the parameter space Π all values of P for which the equilibrium $z = 0$ of the system (1) is stable, i.e. calculate the so-called *set of stability* Σ of the system (1) (general problem).

Here we consider a scheme for solving the general problem.

Definition 1. *The set of stability Σ of a linear system (2) is the set of all parameter values $P \in \Pi$ for which the equilibrium $z = 0$ is Lyapunov stable.*

In terms of roots of the polynomial (3), the stability condition of the equilibrium is given by the following theorem.

Theorem 1 ([5]). *The equilibrium $z = 0$ of a linear Hamiltonian system (2) is stable according to Lyapunov if and only if*

- all roots μ_k of the semi-characteristic polynomial (3) are real and non-positive;
- all elementary divisors of matrix B are prime.

The condition on reality and non-positivity of the roots of the polynomial $f(\mu)$ is determined by the following theorem.

Theorem 2. *All roots of the polynomial $f(\mu)$ of degree n real and non-positive iff*

$$f_j(P) \geq 0, j = 1, \dots, n, \quad D^{(k)}(f) \geq 0, k = 0, \dots, n - 2,$$

where $D^{(k)}(f)$ is the k -th sub-discriminant of the polynomial $f(\mu)$.

Normal form and studying of formal stability of a Hamiltonian system. Below we consider that the stability conditions of Theorem 1 are satisfied, i.e., all basis eigenvalues are purely imaginary: $\lambda_j = i\omega_j, j = 1, \dots, n$ and there are no multiple eigenvalues, or multiple eigenvalues are semi-simple. According to Theorem 12 in there exists a canonical formal transformation in the form of a power series which reduces the original Hamiltonian system to its *normal form*

$$\dot{u} = \frac{\partial h}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial h}{\partial u},$$

given by the normalized Hamiltonian $h(u, v)$

$$h(u, v) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \lambda_j u_j v_j + \sum h_{pq} u^p v^q, \quad \sigma_j = \pm 1, \quad (4)$$

which contains only resonant terms $h_{pq} u^p v^q$ that satisfy the condition

$$\langle p - q, \lambda \rangle = 0. \quad (5)$$

Here $0 \leq p, q \in \mathbb{Z}^n, |p| + |q| \geq 2$ and h_{pq} are constant coefficients.

The resonant equation (5) has two kinds of solutions, which correspond to two kinds of resonant terms in the normal form (4):

1. *secular terms* of the form $h_{pp} u^p v^p$, which are always present in the Hamiltonian normal form because of the special structure of the matrix B of the linearized system (2); the secular terms are monomials only of even degrees of the phase variables and enter into the corresponding homogeneous forms;
2. *strictly resonant terms*, which correspond to nontrivial integer solutions of the equation

$$\langle p, \lambda \rangle = 0. \quad (6)$$

The normalization procedure is usually performed in complex variables. To switch to complex variables, the formal transformation $\Phi: (x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$ should be applied, which changes the original Hamiltonian into the form

$$h(z, \bar{z}) = \sum h_{pq} z^p \bar{z}^q \quad (7)$$

where $p, q \in \mathbb{Z}^n$ and $|p| + |q| \geq 2$. The value of $|p| + |q|$ is called the *order* of the corresponding expansion term.

Definition 2. *The Hamiltonian function $h(z, \bar{z})$ is called a *complex normal form* of a real Hamiltonian for the case of semi-simple eigenvalues if*

1. its quadratic part h_2 has the form $h_2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j \lambda_j \bar{z}_j, \sigma_j = \pm 1$;
2. expansion (7) contains only terms $h_{pq} z^p \bar{z}^q$ which satisfy the resonance equation (5). The constants σ_j are invariants of the normal form.

If there are no resonances, then there is a Birkhoff normal form [8]

$$h(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k}(z, \bar{z}), \quad (8)$$

consisting of homogeneous forms of even degrees $2k$, depending only on variables of the form $z_j \bar{z}_j$, $j = 1, \dots, n$. Each of the values $z_j \bar{z}_j$, $j = 1, \dots, n$, is a formal first integral. In the action-angle variables (ρ, φ) the Birkhoff normal form (8) can be written as

$$h(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\rho),$$

where $\rho_j = z_j \bar{z}_j$, $j = 1, \dots, n$.

In this case the system is integrable, but the Birkhoff transform is usually divergent, and in the case of smooth dependence on parameters \mathbf{P} the resonant values of the parameters are dense everywhere in the parameter space Π . Thus, arbitrarily small changes in the parameters lead to resonance terms in the normal form.

Further results are related to the existence of resonances in the Hamiltonian system, so let us recall their definition and indicate the condition by which the following results are more easily formulated.

Definition 3 [9]. *Resonance multiplicity \mathfrak{k} is the number of linearly independent solutions $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ of the resonance equation $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. Resonance order is $\mathbf{q} = \min|\mathbf{p}|$ by $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. If the solution of the resonance equation contains only two eigenvalues, then such resonance is called two-frequency resonance, if more than two, then it is called multifrequency resonance. Resonances with orders **2**, **3** or **4** are called strong resonances.*

Condition A_k^n [10].

The resonance equation (6) has no integer solutions \mathbf{p} with $|\mathbf{p}| \leq k$.

Scheme for investigation of formal stability

Definition 4. *The equilibrium $z = 0$ of a system with Hamilton function $H(z)$ is formally stable if there exists a possibly divergent power series $G(z)$ which is a formal positively determined first integral $\{G, H\} = 0$, where $\{\cdot, \cdot\}$ is a Poisson bracket.*

In [10], a schematic description of a method for studying the formal stability of the equilibrium was given. This method is based on the following key results:

- computation normal form of a Hamiltonian system in the vicinity of the equilibrium;
- application Bruno's Theorem[11] on formal stability;
- using q -analogues of objects of classical exclusion theory (q -discriminants).

The following assumptions have been made:

- the number of degrees of freedom of the system is greater than two;
- the quadratic form $H_2(z)$ in the expansion (1) is nondegenerate and is not sign-defined;
- Hamiltonian function $H(z; P)$ smoothly depends on the parameter vector P .

Let the condition A_4^n take place, i.e. $\langle L, \boldsymbol{\lambda} \rangle \neq 0$ for $L \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |L| \leq 4$, then there exists an analytic canonical transformation $(x, y) \rightarrow (\rho, \varphi)$ such that the new Hamiltonian g has the form

$$g(\rho, \varphi) = g_1(\rho) + g_2(\rho) + r(\rho, \varphi),$$

where $g_1(\rho) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \rho \rangle$, $g_2(\rho) = \langle C\rho, \rho \rangle$, $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n$, and $r(\rho, \varphi)$ is a convergent power series of variables (ρ, φ) of degree three or higher in ρ .

In the absence of strong resonances between eigenvalues of a linearized Hamiltonian system in the neighborhood of the equilibrium, the condition of its formal stability is defined by the following theorem.

Theorem 3 (Bruno [11]). *If the condition A_k^n also holds for any nonzero integer vectors \mathbf{L} of the ortant $l_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, which are solutions of the equation*

$$\langle \mathbf{L}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0,$$

and the quadratic form $\langle CL, L \rangle \neq 0$ at $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, then the equilibrium $z = 0$ of the Hamiltonian system is formally stable.

Thus, to apply Theorem 3 on formal stability it is necessary to find the boundaries of regions in the parameter space Π defined by the resonance sets.

Setting of the problem. To investigate the formal stability of the equilibrium of a Hamiltonian system, it is necessary in the parameter space Π to find the stability set Σ of the linear system, identify regions in which the quadratic form $\mathbf{H}_2(\mathbf{z})$ is not sign-defined. In these regions, select the parts in which there are no strong resonances. In each of the parts found, perform the normalization procedure of the Hamiltonian up to and including the fourth order and then apply Theorem 3.

Definition 5. A variety \mathcal{R}_n^p in the space \mathbf{K} of the coefficients $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ of the semi-characteristic polynomial $\mathbf{f}_n(\boldsymbol{\mu})$ of degree \mathbf{n} is called resonant variety, where the vector of basic eigenvalues $\boldsymbol{\lambda}$ of the corresponding characteristic polynomial $\mathfrak{f}(\boldsymbol{\lambda})$ is a nontrivial solution of the resonance equation (6) for a fixed

integer vector \mathbf{p} . The analytic representation of the variety $\mathcal{R}_n^{\mathbf{p}}$ in implicit or parametric forms is denoted below by $\mathbf{R}_n^{\mathbf{p}}$.

In this paper we consider the description of resonant varieties corresponding to strong resonances in the coefficient space \mathbf{K} of the semi-characteristic polynomial $\mathbf{f}_3(\boldsymbol{\mu})$ for a Hamiltonian system with three degrees of freedom.

Main problem.

For a multiparameter Hamiltonian system with 3 degrees of freedom, give a description of regions in the system parameter space in which there are no strong resonances, i. e. resonances of orders **2**, **3**, and **4**.

Let us consider in more detail under which conditions strong resonances of the above orders are realized. For the resonance

- of order $q = 2$: $p = (1,1,0)$ is the case of multiple roots, which is described by the discriminant set $R_3^{(1,1,0)} \equiv D(f) = 0$;
- of order $q = 3$: for the two-frequency case $p = (2,1,0)$, described by the q -discriminant $R_3^{(2,1,0)} \equiv D_4(f) = 0$;
- of order $q = 4$: for the two-frequency case $p = (3,1,0)$, described by the q -discriminant $R_3^{(3,1,0)} \equiv D_9(f) = 0$;
- in the three-frequency case: of order $q = 3$ is described by the condition $R_3^{(1,1,1)} = 0$, and of order $q = 4$ by the conditions, $R_3^{(2,1,1)} = 0$ and $R_3^{(1,1,1,1)} = 0$.

To solve this problem, we should obtain a description of the boundaries of regions which are free of strong resonances. These boundaries consist of parts of algebraic varieties on which the resonance equation (6) has a nontrivial solution.

Let us decompose the main problem into several auxiliary problems.

1. Obtain an analytic representation in the coefficient space $K = (a_1, a_2, a_3)$ of the cubic polynomial of resonant varieties $\mathcal{R}_3^{\mathbf{p}}$ for all vectors p orders 2, 3 and 4.
2. Find the mutual location of all resonant varieties found above.

Conditions on the existence of resonances in a system with three degrees of freedom.

A general description of the procedure for obtaining condition on the existence of two and multi-frequency resonances is as follows.

1. For some vector $p^* \in \mathbb{Z}_n$ satisfying the resonance equation $\langle p, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$, a polynomial ideal is composed

$$J = \{ \langle p^*, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \dots, n \}.$$

2. The Gröbner basis \mathcal{G} of this ideal with a suitable monomial order of variables $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, n$ (for details, see [12]) such that the first polynomial of this basis contains only the variables μ_j is computed. This polynomial is a quasi-homogeneous polynomial in the variables $\mu_j, j = 1, \dots, n$. It determines the condition of existence of resonance for a given vector p^* .

3. To obtain the corresponding resonance condition for the coefficients $a_j, j = 1, \dots, n$ of the polynomial $f(\boldsymbol{\mu})$, a new Gröbner basis \mathcal{F} of the ideal is constructed. This ideal contains the obtained condition for μ_j and expressions of the coefficients of the original semi-characteristic polynomial through its roots, in the form of elementary symmetric polynomials. In this case, we specify the order of elimination of variables: in the beginning μ_j , and then $a_j, j = 1, \dots, n$. In the same way, the first polynomial of the computed basis, depending only on a_j , be a condition on the existence of resonance in the coefficients of the polynomial.

CAS Maple is used to compute and study the above ideals \mathcal{G}, \mathcal{F} . It has a package Groebner with procedures for constructing Gröebner bases for various lexicographic orders, as well as some additional procedures to check the zero-dimensionality of the ideal, compute its dimension, etc. The commands genus and parametrization from the package algcurves were used to calculate the curve genus and its parametrization.

Calculation two-frequency resonance condition. Consider the case of two-frequency resonance: $p^* = (q, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, where $q \in \mathbb{N}$. Here there is a pair of commensurable eigenvalues, and the third eigenvalue is non-commensurable with no others. In the parameter space, such resonance is described in terms of the resonance set $\mathcal{R}_{q^2}(f)$ of the semi-characteristic polynomial $f(\boldsymbol{\mu})$ (see, [13]).

Let us calculate, following the above sequence of steps, the two-frequency resonance condition for $p^* = (q, \mathbf{1}, \mathbf{0})$. To first compose an ideal containing dependence relations between the roots of the

characteristic and semi-characteristic polynomials of the form $\lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \dots, 3$, as well as the resonance relation $q\lambda_1 + \lambda_2$. The first polynomial of the Gröbner elimination basis of this ideal, with the following order of elimination of variables $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, 3$, is a polynomial

$$q^2\mu_1 - \mu_2. \tag{9}$$

Equality to zero of this polynomial gives the condition on the roots of the semi-characteristic polynomial. According to the step 3, in order to obtain a condition on the coefficients, we compose a new ideal which includes the obtained condition (9) and their relation to the coefficients of the original polynomial through elementary symmetric polynomials

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + a_1, \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - a_2, \mu_1\mu_2\mu_3 + a_3. \tag{10}$$

For the composed ideal, we compute the Gröbner elimination basis with the corresponding order of elimination variables $\mu_j, a_j, j = 1, \dots, 3$. The equality to zero of its first polynomial

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3^{(q,1,0)} \equiv \{ & -(q^2 + q + 1)^3(q^2 - q + 1)^3 a_3^2 - q^4(q^2 + 1)^2 a_2^3 - q^4(q^2 + 1)^2 a_1^3 a_3 + \\ & + q^2(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q^4 + 4q^2 + 1)a_1 a_2 a_3 + q^6 a_1^2 a_2^2 = 0 \} \end{aligned} \tag{11}$$

depending only on a_j , is a condition for the existence of two-frequency resonance in general form for some natural value q .

Let us check this result by comparing the conditions obtained earlier for the case when $q = 1, 2, 3$. If we put $\omega = 0$ and $q = q^2$ in the generalized subscript formulas for f_3 obtained in [14], we obtain identical expressions for the corresponding resonance varieties up to the sign:

- At $q = 1$, the condition takes the form

$$\mathcal{R}_3^{(1,1,0)} = 4a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2 - 18a_1 a_2 a_3 + 4a_2^3 + 27a_3^2 = 0,$$

- at $q = 2$ it looks like

$$\mathcal{R}_3^{(2,1,0)} = 400a_1^3 a_3 - 64a_1^2 a_2^2 - 2772a_1 a_2 a_3 + 400a_2^3 + 9261a_3^2 = 0,$$

- and when $q = 3$ looks like

$$\mathcal{R}_3^{(3,1,0)} = 8100a_1^3 a_3 - 729a_1^2 a_2^2 - 96642a_1 a_2 a_3 + 8100a_2^3 + 753571a_3^2 = 0.$$

Calculation three-frequency resonance condition. Let us first consider the case of three-frequency resonance for which the algebraic sum of the three eigenvalues is zero, i.e. $\sum_{j=1}^3 p_j \lambda_j = 0$. Such a resonance can have a multiplicity of 1 or 2. If the multiplicity $\mathbf{k} = 2$, this means that there is pairwise commensurability between the basis frequencies λ_j of the characteristic polynomial. Such situation can be investigated by means of the conditions on the existence of two-frequency resonances. Further we consider only the case of multiplicity 1.

For example, in the case of basis frequencies $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}, \lambda_3 = -2$ eigenvalues are pairwise non-commensurable, but their sum is zero. Consequently, the resonance vector in this case is the vector $(1, 1, 1)$, which means that there is a three-frequency resonance of multiplicity 1 of order 3.

For the case of three-frequency resonance, $p^* = (1, 1, 1)$ similarly, using the above sequence of steps, we calculate the condition for the existence of resonance. Compose an ideal containing relations between the roots of the characteristic and semi-characteristic polynomials of the form $\lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \dots, 3$, as well as the resonance relation $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. The first polynomial of the Gröbner basis of this ideal, with a following order of elimination of variables $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, 3$, is the polynomial $\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 - 2\mu_3\mu_1 + \mu_2^2 - 2\mu_3\mu_2 + \mu_3^2$. Equality to zero of this polynomial gives the condition on the roots of the semi-characteristic polynomial. In order to obtain the coefficient condition, we construct a new ideal, which includes the obtained condition on the roots and their relations to the coefficients of the original polynomial of the form (10). By computing the Gröbner elimination basis for this ideal, we obtain the required condition, i.e., the resonance variety $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ which is given by the first polynomial of this basis of the form:

$$\mathcal{R}_3^{(1,1,1)} \equiv a_1^2 - 4a_2 = 0. \tag{12}$$

Consider a three-frequency resonance of order 4, given by the vector $p^* = (2, 1, 1)$. Similarly, as for the previous case, we compose an ideal from the relations of the resonance $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ and the relations between λ_j and μ_j . We calculate its Gröbner basis and, equating its first polynomial to zero, obtain conditions on the roots of the polynomial f_3 .

$$16\mu_1^2 - 8\mu_1\mu_2 - 8\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 - 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2 = 0$$

Then we compose another ideal with this polynomial and polynomials (10). In the same way, the first polynomial of the elimination basis of the Gröbner of this ideal gives a condition on the coefficients of the form

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_3^{(2,1,1)} &\equiv 16a_1^6 - 264a_1^4a_2 + 36a_1^3a_3 + 1425a_1^2a_2^2 - 630a_1a_2a_3 - 2500a_2^3 + 9261a_3^2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

From the above computations, we can conclude that the process of calculating conditions on coefficients is more general. Consequently, it is possible to obtain a resonance condition for the general case of a three-frequency resonance of multiplicity 1 where $p^* = (p, q, 1)$.

In this case, the resonance relation looks like $p\lambda_1 + q\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, where $p, q \in \mathbb{N}$. Compose an ideal from this polynomial and the relations between λ_j and μ_j , and compute its Gröbner elimination basis. Its first polynomial is the condition on the roots of f_3 as a quadratic form with respect to $\mu_j, j = 1, 2, 3$:

$$p^4\mu_2^2 - 2p^2q^2\mu_2\mu_3 + q^4\mu_3^2 - 2p^2\mu_1\mu_2 - 2q^2\mu_1\mu_3 + \mu_1^2$$

Including it and the relations of roots and coefficients (10), we make a new ideal, and compute its Gröbner elimination basis. So also its first polynomial from the coefficients $a_j, j = 1, 2, 3$ and the integers p, q gives a condition on the coefficients. It is a polynomial of degree 12 of a_1, a_2, a_3 with nineteen monomials whose coefficients are also polynomials of p and q . The polynomial itself is quasi-homogeneous. Its expression is very cumbersome, but it is more universal in the sense of substitution, because by changing the values of p and q one can obtain the condition of existence of resonance for arbitrary resonance. For example, by introducing $p = 0$ one can obtain a two-frequency resonance condition of the form $\mathcal{R}_3^{(q,1,0)}$ in the general case calculated above. If we put $q = 1$ and $p = 1$ or $p = 2$, we can obtain resonance conditions of $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ or $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ correspondingly.

The right-hand sides of the obtained formulas (11), (12), (13) for the conditions of existence of two and three-frequency resonances in the coefficients $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ of polynomial $f(\boldsymbol{\mu})$ are quasi-homogeneous polynomials R_3^p . This means that the support of each polynomial (i.e. the set of vector exponents of its monomials in the space \mathbb{R}^3) lies in the plane whose normal is the vector $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$. The vector \mathbf{N} belongs to the space \mathbb{R}_*^3 , which is conjugate to the space of power exponents \mathbb{R}^3 . If we perform a linear transformation given by the unimodular matrix $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{i,j=1}^3, m_{ij} \in \mathbb{Z}, \det \mathbf{M} = \pm 1$, which changes the vector \mathbf{N} to a one-dimensional coordinate subset, then the corresponding transformation in \mathbb{R}^3 with matrix \mathbf{M}^{-1} will transform each of the supports of the polynomial into a plane parallel to the coordinate plane. Therefore, the power transformation $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$ corresponding to this matrix \mathbf{M} :

$$\ln \mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \ln \mathbf{v}, \quad (14)$$

changes each of the quasi-homogeneous polynomials R_3^p from the three variables a_1, a_2, a_3 to polynomials of the form $v_3^k \tilde{R}_3^p(v_1, v_2)$. Thus, each of the conditions on the existence of resonance can be represented as a planar algebraic curve.

The unimodular matrix can be calculated using the well-known Euler algorithm, one implementation of which is given in [15].

For a vector $\mathbf{N} = (1, 2, 3)$ the corresponding unimodular matrix \mathbf{M} can be chosen as follows

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ then } \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore, the power transform (14) is defined by the matrix

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

and has the form

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1 v_3, \quad \mathbf{a}_2 = \alpha_2 v_1 v_3^2, \quad \mathbf{a}_3 = \alpha_3 v_2 v_3^3, \quad (15)$$

where the nonzero multipliers $\alpha_j, j = 1, 2, 3$, can be picked up to further simplify the coefficients of polynomials R_3^p . Here α_j are chosen as follows:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1.$$

Since by the condition of Theorem 2 the coefficients of $a_k, k = 1, 2, 3$, of the polynomial $f(\boldsymbol{\mu})$ should be non-negative, it follows from the power transformation (15) that the parameters $v_k, k = 1, 2, 3$, should also be non-negative. Therefore, we are interested in the mutual arrangement of the curves corresponding to the resonant manifolds in the first quadrant of the coordinate plane (v_1, v_2) .

Parameterization and simplification of resonance conditions. Using the above power transformations, we simplify the calculated resonance conditions (11), (12) and (13). In these expressions for the resonances, we substitute expressions in variables $v_k, k = 1, 2, 3$, namely $\mathbf{a}_1 = 3v_3, \mathbf{a}_2 = 3v_1v_3^2, \mathbf{a}_3 = v_2v_3^3$.

For resonance conditions (11) with two frequencies given by the general expression $R_3^{(q,1,0)}$, we have

$$v_3^6(27q^4(q^2 + 1)^2v_1^3 - 81q^6v_1^2 - 9q^2(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q^4 + 4q^2 + 1)v_1v_2 + (q^2 + q + 1)^3(q^2 - q + 1)^3v_2^2 + 27q^4(q^2 + 1)^2v_2)$$

and get the following expression

$$\tilde{R}_3^{(q,1,0)} = 27q^4(q^2 + 1)^2v_1^3 - 81q^6v_1^2 - 9q^2(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q^4 + 4q^2 + 1)v_1v_2 + (q^2 + q + 1)^3(q^2 - q + 1)^3v_2^2 + 27q^4(q^2 + 1)^2v_2.$$

From this expression we can obtain the conditions $\tilde{R}_3^{(1,1,0)}$, $\tilde{R}_3^{(2,1,0)}$ and $\tilde{R}_3^{(3,1,0)}$ respectively for $q = 1, 2, 3$. Similarly, we obtain that the same conditions for the varieties $\mathcal{R}_3^{(1,1,1)}$ and $\mathcal{R}_3^{(2,1,1)}$ will be

$$R_3^{(1,1,1)} = -4v_{\{1\}} + 3,$$

$$R_3^{(2,1,1)} = -2500v_1^3 + 4275v_1^2 - 210v_2v_1 + 343v_2^2 - 2376v_1 + 36v_2 + 432.$$

We also obtained a general expression for the three-frequency resonance of the form $\tilde{R}_3^{(p,q,1)}$, which is a sixth degree polynomial, which we will not give because of its large size.

For each of the obtained five algebraic curves their algebraic genus was calculated, which turned out to be **0** in all cases. This indicates that they are all rational curves admitting rational parametrization. Let us calculate these parametrizations.

- For $\tilde{R}_3^{(1,1,0)}$ it looks like

$$\left\{ v_1 = -\frac{(9t_1 - 5)(t_1 - 1)}{4(-1 + 2t_1)^2}, v_2 = \frac{(t_1 - 1)^2(7t_1 - 4)}{4(-1 + 2t_1)^3} \right\};$$

- for $\tilde{R}_3^{(2,1,0)}$: $\left\{ v_1 = -\frac{(49t_1 - 16)(743t_1 - 812)}{400(4t_1 - 7)^2}, v_2 = \frac{(49t_1 - 16)^2(97t_1 - 100)}{400(4t_1 - 7)^3} \right\};$

- for $\tilde{R}_3^{(3,1,0)}$:

$$\left\{ v_1 = -\frac{(8281t_1 - 729)(972271t_1 - 803439)}{218700(27t_1 - 91)^2}, v_2 = \frac{(8281t_1 - 729)^2(2617t_1 - 2025)}{54675(27t_1 - 91)^3} \right\};$$

- for $\tilde{R}_3^{(1,1,1)}$: $\left\{ v_1 = \frac{3}{4}, v_2 = t_1 \right\};$

- for $\tilde{R}_3^{(2,1,1)}$: $\left\{ v_1 = \frac{39739t_1^2 - 77430t_1 + 54075}{4(111t_1 - 175)^2}, v_2 = -\frac{(t_1 + 15)(-225 + 353t_1)^2}{(111t_1 - 175)^3} \right\}.$

Using the above parametric representation, we can plot planar algebraic curves on the coordinate plane (v_1, v_2) .

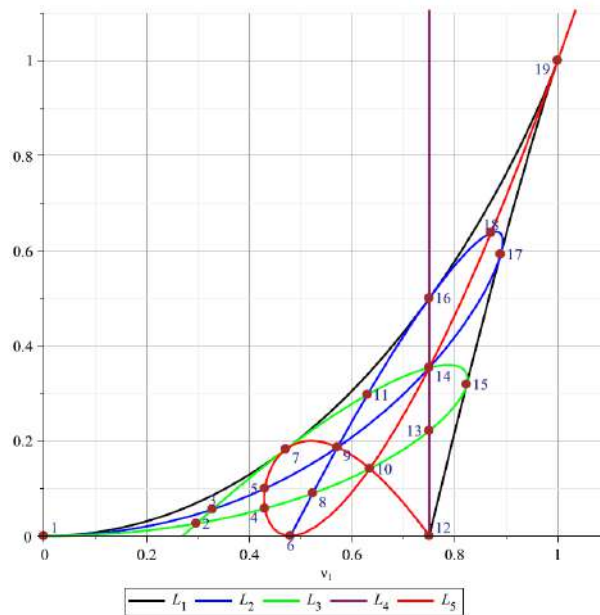


Figure 1. Resonant varieties in variables v_1, v_2

Here we describe Fig. 1 for a complete picture of the mutual arrangement of the varieties corresponding to strong resonances. Let us denote the curves by the symbols $L_k, k = 1, \dots, 5$. Their singular

points, as well as the points of their mutual intersection, are denoted by the symbols P_j , where the numbering of the indices of j points is chosen in accordance with the increasing distance from the origin of coordinates.

The curve L_1 plays a special role, it defines the boundary of the set of stability Σ of the equilibrium. This curve is an image of the discriminant set $\mathcal{D}(f_3)$ which divides the coefficient space K of the cubic polynomial into two parts. In one part all roots of the cubic polynomial are real, and in the other part there is a pair of complex conjugate roots and one real root. According to Theorem 2, the curvilinear triangle $P_1P_{19}P_{12}$ is the boundary of the set of stability Σ .

The rest of the resonant curves are fully or partially located inside this region. The resonance curves L_2 and L_3 , corresponding to the two-frequency resonance, are completely located in it, touching the curve L_1 . This is due to the fact that if there are two frequencies involved in resonance, they as roots of the same nature: either simultaneously real or simultaneously complex. But a pair of complex-conjugate roots cannot be in resonance and the third root must always be real. Note that previously the curves L_1 , L_2 , and L_3 were depicted in [13], but their parameterizations were obtained in a different way.

Two more resonance varieties correspond to three-frequency resonances, presented by the curves L_4 and L_5 in Fig. 1. In contrast to the two frequency resonances, they may involve roots of different nature. This indicates that the three-frequency resonance varieties will be in the set of real roots as well as in the set where complex roots exist [17]. At all depicted points on the curves, the multiplicity of resonance \mathbf{k} becomes equal to 2. Let's give more detailed descriptions of the curves L_j , $j = 1, \dots, 5$, and corresponding points P_k [16].

1. The curve L_1 is defined by the equation $\tilde{R}_3^{(1,1,0)} = 0$. It is shown in black. It has one special point $P_{19} = (1,1)$, which is a cusp. This point corresponds to resonance $(1,1,1)$ of multiplicity 2, because there are two sets of independent solutions. As an example, there are resonances of the form $(1,1,0)$ and $(1,0,1)$ for which the algebraic sum of the three eigenvalues is zero.

2. The curve L_2 shown in blue is defined by the equation $\tilde{R}_3^{(2,1,0)} = 0$ and is a self-intersecting curve, with the singular point

$$P_9 = \left(\frac{4}{7}, \frac{64}{343}\right).$$

The structure of the resonance corresponding to this point will be described below in 5, since it simultaneously belongs to the curve L_5 . The curve L_2 also touches the discriminant curve L_1 at the points

$$P_{16} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad P_{17} = \left(\frac{8}{9}, \frac{16}{27}\right).$$

3. The curve L_3 is shown in green. It is defined by the equation $\tilde{R}_3^{(3,1,0)} = 0$ and is a self-intersection curve, with a singular point

$$P_2 = \left(\frac{27}{91}, \frac{19683}{753571}\right).$$

It also touches the L_1 discriminant curve at the points

$$P_7 = \left(\frac{57}{121}, \frac{243}{1331}\right), \quad P_{15} = \left(\frac{297}{361}, \frac{2187}{6859}\right).$$

The curve L_3 intersects the curve L_2 at four points with coordinates:

$$P_3 = \left(\frac{552}{1681}, \frac{3888}{68921}\right), \quad P_8 = \left(\frac{1107}{2116}, \frac{2187}{24334}\right), \quad P_{11} = \left(\frac{216}{343}, \frac{34992}{117649}\right), \quad P_{14} = \left(\frac{3}{4}, \frac{243}{686}\right).$$

4. The purple straight line labeled L_4 is defined by the equation $\tilde{R}_3^{(1,1,1)} = 0$. It has no singularities and intersects with the above curves at points P_{12} , P_{13} , P_{14} , and P_{16} , where

$$P_{12} = \left(\frac{3}{4}, 0\right), \quad P_{13} = \left(\frac{3}{4}, \frac{86}{2197}\right).$$

5. The last curve L_5 shown in red is defined by the equation $\tilde{R}_3^{(2,1,1)} = 0$. It is a self-intersecting curve with a singular point

$$P_{10} = \left(\frac{111}{175}, \frac{243}{1715}\right),$$

which is also an intersection point with the curve L_3 . It touches the curve L_1 at the point P_7 and intersects at the points P_{12} and P_{19} . It intersects with the curve L_2 at points P_5 , P_6 , P_9 , P_{14} and P_{18} , where

$$P_5 = \left(\frac{43}{100}, \frac{1}{10}\right), \quad P_6 = \left(\frac{12}{25}, 0\right), \quad P_{18} = \left(\frac{732}{841}, \frac{15552}{24389}\right).$$

It also touches the curve L_3 at the point P_7 , and intersects with it at the points

$$P_4 = \left(\frac{1497}{3481}, \frac{11907}{205379} \right)$$

and P_{14} described above in 3.

In order to check that the resonance conditions at the above calculated points take place, let us consider some of them more detailed. We check the resonance conditions for the point P_9 , which is singular for the two-frequency resonance curve L_2 and the point of intersection with the three-frequency resonance curve L_5 . By substituting in the expressions of the power transformation (15) the variables v_1, v_2 , which are coordinates of the point P_9 , and replacing $v_3 = -t$ at $t > 0$, we obtain one-parameter expressions of the coefficients of the polynomial f_3 . The polynomial itself will take the form:

$$f_3 = \frac{(7\mu + t)(7\mu + 16t)(7\mu + 4t)}{343}.$$

The one-parameter family of roots of this semi-characteristic polynomial is

$$\mu_1 = -\frac{t}{7}, \quad \mu_2 = -\frac{4t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{16t}{7}.$$

All these roots have a common multiplier of the form $t/7$, then the whole family of roots will be proportional to the numbers $(-1, -4, -16)$. Using the equality of dependence of the roots of the characteristic and semi-characteristic polynomials, we calculate all the values of $\lambda_j, j = 1, \dots, 6$, they will be proportional to the values:

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \lambda_{2,5} = \mp 2i, \lambda_{3,6} = \pm 4i.$$

Using the values of the roots, we can make sure that the resonance relations are satisfied. Since the point P_9 belongs to two resonant varieties, let us check these conditions for each of them:

1. Since this point for L_2 is a self-intersection point, there are 2 pairs of commensurable roots with the ratio 2: 1, i.e. the resonance relation $p^* = (2,1,0)$ is satisfied for the roots in the form of equality: $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. Also as far as the point belonging to the curve L_5 , the three-frequency resonance $p^* = (2,1,1)$ should be satisfied. So the relation 2: 1: 1 is satisfied in the form: $2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$.

We perform the same check for the point P_{10} . It is the singular point for the resonance curve L_5 and the point of intersection with the curve L_3 . By making similar substitutions to the above we obtain an expression for f_3 :

$$f_3 = \frac{(35\mu + 27t)(35\mu + 3t)(7\mu + 15t)}{8575}.$$

And its corresponding one-parameter family of roots has the form:

$$\mu_1 = -\frac{3t}{35}, \quad \mu_2 = -\frac{15t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{27t}{35}.$$

Considering that each has a common multiplier of the form $3t/35$, the whole family of roots will be proportional to the numbers $(-1, -25, -9)$. And λ_j in this case will be proportional to the following:

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \mp 5i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3i.$$

Knowing the values of the roots, we can similarly verify that the resonance relations are satisfied. Since the point P_{10} belongs to two resonant varieties, let us check these conditions for each of them:

1. Since this point for L_5 is a self-intersection point, there are 2 pairs of commensurable roots with ratio 2: 1: 1, i.e., the resonance relations $p^* = (2,1,1)$ are satisfied for the roots as equalities $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

2. Also in the point belonging to the curve L_3 the two-frequency resonance $p^* = (3,1,0)$ must be satisfied. So the ratio 3: 1 is satisfied for the roots in the form of equalities $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

Similarly, consider the resonance condition at the point P_{14} . This, in turn, is not singular for any curve, but is the intersection point of four algebraic curves: L_2, L_3, L_4 and L_5 . Consequently, four resonance conditions must be satisfied in it at once. To check this, we also find the roots of the polynomial f_3 . Writing the coefficients of this polynomial in the parameter t and decomposing it into multipliers:

$$f_3 = \frac{(14\mu + 3t)(7\mu + 6t)(14\mu + 27t)}{1372},$$

we get the corresponding one-parameter family of roots in the following form

$$\mu_1 = -\frac{3t}{14}, \quad \mu_2 = -\frac{6t}{7}, \quad \mu_3 = -\frac{27t}{14}.$$

If we also consider that they have a common multiplier of the form $3t/14$, then the whole family of roots will be proportional to the numbers $(-1, -4, -9)$. And λ_j in this case will be proportional to the values of

$$\lambda_{1,4} = \pm i, \quad \lambda_{2,5} = \mp 2i, \quad \lambda_{3,6} = \pm 3i.$$

Taking the values of the roots we can similarly be convinced that the resonance relations are satisfied. Since the point P_{14} belongs to four resonant varieties, let us check these conditions for each of them.

1. It belongs to L_2 , then the resonance relation $p^* = (2,1,0)$ must be satisfied, and for the roots it will take the form: $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_4 + \lambda_5 = 0$.

2. Also in the point belonging to the curve L_3 , the two-frequency resonance $p^* = (3,1,0)$ must be satisfied. So the relation 3: 1 is satisfied for the roots in the form $3\lambda_1 + \lambda_6 = \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0$.

3. For a point belonging to the curve L_4 must satisfy the three-frequency resonance $p^* = (1,1,1)$. So the ratio 1: 1: 1 is as follows: $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

4. For a point belonging to the curve L_5 must satisfy the three-frequency resonance $p^* = (2,1,1)$. So the ratio 2: 1: 1 is satisfied for the roots in the form of equality $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 = 0$.

Conclusion. For a Hamiltonian system with three degrees of freedom we obtain a description of the partition of the set of stability Σ in the coefficient space \mathbf{K} of the semi-characteristic cubic polynomial $f_3(\mu)$ into such parts in which the absence of strong resonances between the eigenvalues of the linear system (2) is guaranteed. This makes it possible, on the one hand, to investigate the formal stability of the equilibrium for each of such parts using the fourth-order normal form and Theorem 3, and, on the other hand, in the presence of resonances of multiplicity **1** to obtain additional formal integrals and perform asymptotic integration of equations of the normalized Hamiltonian system[18].

The author expresses his gratitude to Professors A. D. Bryuno and A. B. Batkhin for their helpful discussion of this work.

REFERENCES:

1. Bruno A. D. *Preprints of KIAM 21 (2020)*, <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-21>.
2. Siegel C. L. and Moser J. K. *Lectures on Celestial Mechanics (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971)*.
3. Markeev A. P. *Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics (Nauka, Moscow, 1978) (in Russian)*.
4. Moser J. *Comm. Pure Appl. Math.* 11, 81 (1958).
5. Batkhin A. B., Bruno A. D., and Varin V. P. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 76, 56 (2012).
6. Basu S., Pollack R., and Roy M.-F. *Algorithms in Real Algebraic Geometry, Algorithms and Computations in Mathematics 10 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006)*.
7. Bruno A. D. *Trans. Moscow Math. Soc.* 26, 199 (1972), = *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* 25 (1971) 119-262 (in Russian).
8. Birkhoff G. D. *Dynamical Systems, Colloquim Publications, Vol. 9 (American Mathematical Society, 1966)*.
9. Bruno A. D. *The Restricted 3-body Problem: Plane Periodic Orbits (Walter de Gruyter, Berlin, 1994) = Nauka, Moscow, 1990. 296 p. (in Russian)*.
10. Bruno A. D. and Batkhin A. B. *Axioms* 10, 1 (2021).
11. Bruno A. D. *Math. Notes* 1, 216 (1967).
12. Cox D. A., Little J., and O'Shea D. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, 4th ed., Undergraduate Texts in Mathematics (Springer International Publishing, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015)*.
13. Batkhin A. B. *Science Journal of VoISU. Mathematics. Physics* 4 (35), 5 (2016).
14. Batkhin A. B. *Programming and Computer Software* 44, 75 (2018).
15. Bruno A. D., Azimov A. A. *Computing unimodular matrices of power transformations. Programming and Computer Software.* 2023. Vol. 49, no. 1. P. 32–41. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0361768823010036>.
16. Batkhin, A., Khaydarov, Z. *Resonances and Formal Stability Investigation in Hamiltonian Systems. Math.Comput.Sci.* 18, 22 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11786-024-00596-9>

17. Batkhin, A.B., Khaidarov, Z.K. *Symbolic Computation of an Arbitrary-Order Resonance Condition in a Hamiltonian System. Program Comput Soft* 49, 842–853 (2023). <https://doi.org/10.1134/S0361768823080030>

18. Batkhin, A.B., Khaidarov, Z.K. *Calculation of a Strong Resonance Condition in a Hamiltonian System. Comput. Math. and Math. Phys.* 63, 687–703 (2023). <https://doi.org/10.1134/S0965542523050068>

THE VIBRATION EQUATION OF A BEAM WITH INITIAL CONDITIONS INVOLVING HIGHER-ORDER TIME DERIVATIVES

Odinaev Rashid Rakhimovich,

Bukhara State University, Bukhara, 200100, Uzbekistan

odinayevrashid@mail.ru

Abstract. *This article investigates the inverse problem of determining a multiplier on the right-hand side that depends on the variable t . In the direct problem, an initial-boundary value problem for a fourth-order differential equation is considered. Using the Fourier method, the solution to the initial-boundary value problem is constructed, and its properties are investigated. Sufficient conditions for the existence of a solution to the direct problem are obtained, which will be used in the study of the inverse problem. Theorems on local existence and global uniqueness are proven, and an estimate of the conditional stability of the solution to both the direct and inverse problems is provided.*

Keywords: *direct problem, inverse problem, existence, uniqueness, Cauchy problem, Fourier method, spectral problem.*

YUQORI TARTIBLI VAQT BO‘YICHA HOSILALARNI O‘Z ICHIGA OLGAN BOSHLANG‘ICH SHARTLI TO‘SINNING TEBRANISH TENGLAMASI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada o‘zgaruvchi tga bog‘liq bo‘lgan o‘ng tomon ko‘paytuvchisini aniqlashga oid teskari masala tadqiq etilgan. To‘g‘ri masalada to‘rtinchi tartibli differensial tenglama uchun boshlang‘ich–chegaraviy masala qaralgan. Fure usuli yordamida boshlang‘ich–chegaraviy masalaning yechimi quriladi va uning xossalari o‘rganiladi. To‘g‘ri masala yechimining mavjudligi uchun yetarli shartlar keltirilgan bo‘lib, ular teskari masalani o‘rganishda qo‘llaniladi. Mahalliy mavjudlik va global yagonalik teoremlari isbotlangan, shuningdek, to‘g‘ri va teskari masalalarning yechimlari uchun shartli barqarorlik bahosi berilgan.*

Kalit so‘zlar: *to‘g‘ri masala, teskari masala, mavjudlik, yagonalik, Koshi masalasi, Fure usuli, spektral masala.*

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ВКЛЮЧАЮЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПО ВРЕМЕНИ

Аннотация. *В данной статье исследуется обратная задача определения множителя в правой части, зависящего от переменной t . В прямой задаче рассматривается начально–краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка. С помощью метода Фурье строится решение начально–краевой задачи, и исследуются его свойства. Получены достаточные условия существования решения прямой задачи, которые используются при изучении обратной задачи. Доказаны теоремы о локальном существовании и глобальной единственности, а также приведена оценка условной устойчивости решения как прямой, так и обратной задач.*

Ключевые слова: *прямая задача, обратная задача, существование, единственность, задача Коши, метод Фурье, спектральная задача.*

Introduction. The study of vibrations in rods, beams, and plates plays a significant role in structural design, the analysis of rotating shaft stability, and in understanding the vibrational behavior of ships and pipelines. These problems often involve higher-order differential equations, reflecting the complexity of analyzing such dynamic systems. In recent years, there has been growing interest in the investigation of both linear and nonlinear initial and boundary value problems, as well as inverse problems related to the beam vibration equation.

Inverse problems in mathematical physics have been extensively studied for various classes of differential equations. Works such as [1] and other sources discuss methods for establishing existence and uniqueness theorems, as well as uniqueness and conditional stability theorems for solutions to inverse dynamic problems. In addition, numerical methods for finding solutions have also been explored.

A problem with a high derivative on a part of the domain boundary was studied, for the first time, by A.N. Tikhonov. In , he studied the problem of a homogeneous heat equation with the following conditions

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(\mathbf{0}, t) = f(t), \quad u(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

in the domain $(0 < x < \infty, t > 0)$.

In , in n -dimensional bounded domain D , A.V. Bitsadze studied the problem

$$\Delta u(x) = \mathbf{0}, \quad \frac{d^m u}{dv^m} = f(x), \quad x \in D,$$

and proved its Fredholm property.

Boundary value problems for the Laplace, Poisson, and Helmholtz equations with boundary conditions involving higher-order derivatives have been investigated in the works of Bavrin, Karachik, and Sokolovskii. Additionally, authors of studied boundary value problems for many types of high-order partial differential equations. The difference of this problem from other problems is that it is an inverse problem for the beam vibration equation, where the initial conditions involve higher-order derivatives.

Statement of the problem. Now we reconsider the following equation,

$$u_{tt} + u_{xxxx} = p(x)q(t), \quad (x, t) \in D, \tag{1}$$

in the domain $D := \{(x, t); 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ with initial conditions

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, \mathbf{0}) = \varphi(x), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x, \mathbf{0}) = \psi(x), \quad \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}, \tag{2}$$

and boundary conditions

$$u(\mathbf{0}, t) = u(\mathbf{1}, t) = u_{xx}(\mathbf{0}, t) = u_{xx}(\mathbf{1}, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \leq t \leq T, \tag{3}$$

where $k \geq 2$ is a fixed bounded natural number.

Typically, initial conditions $u(x, \mathbf{0}) = \psi(x)$ and $u_t(x, \mathbf{0}) = \varphi(x)$ are used in beam equations, representing the initial displacement and initial velocity at $t = \mathbf{0}$. However, higher-order initial conditions have a more complex interpretation, such as specifying the initial acceleration or the initial rate of change of acceleration at $t = \mathbf{0}$.

Finding a function $u(x, t)$ that satisfies the relations ([rformula1])–([rformula3]) and the condition $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{4,k+1}(\overline{D})$, for a given number T and sufficiently smooth functions $p(x), q(t), \varphi(x)$ and $\psi(x)$ is called a direct problem.

Study of the Direct Problem.

Theorem 1. If there exists a function $u(x, t)$ satisfying the problem (1)–(3) and $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{4,k+1}(\overline{D})$ then it is unique.

Proof. To prove the uniqueness of the solution to the given problem, we use the following statement from work [12] Suppose, there exist two solutions $u_1(x, t)$ and $u_2(x, t)$ to the direct problem(1)–(3). Then their difference

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = u(x, t),$$

belongs to the class $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_{x,t}^{4,k+1}(\overline{D})$ and satisfies the homogeneous equation

$$u_{tt} + u_{xxxx} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

in D , and with the following boundary conditions:

$$u(\mathbf{0}, t) = u(\mathbf{1}, t) = u_{xx}(\mathbf{0}, t) = u_{xx}(\mathbf{1}, t) = \mathbf{0}$$

and zero initial conditions

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}, \tag{5}$$

We multiply both sides of the (4) by u_t and integrate over the interval $[0,1]$:

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx + \int_0^1 u_{xxxx} u_t dx = \mathbf{0},$$

First we calculate:

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx,$$

then we integrate by parts the following integral:

$$\int_0^1 u_{xxxx} u_t dx = [u_{xxx} u_t]_0^1 - \int_0^1 u_{xxx} u_{tx} dx,$$

using boundary conditions, the boundary term vanishes:

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 \Rightarrow u_{xxx}u_t|_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Second integration by parts:

$$-\int_0^1 u_{xxx} u_{tx} dx = -[u_{xx}u_{tx}]_0^1 + \int_0^1 u_{xx} u_{txx} dx.$$

Again, boundary terms vanish, so:

$$-\int_0^1 u_{xxx} u_{tx} dx = \int_0^1 u_{xx} u_{xxt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_{xx}^2 dx.$$

Thus,

$$\int_0^1 u_{xxxx} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_{xx}^2 dx.$$

Combine both terms we get

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2 + u_{xx}^2) dx \right) = 0. \tag{6}$$

It is important to note the following integral:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2 + u_{xx}^2) dx.$$

expresses the law of conservation of energy for free vibrations of a beam with homogeneous (zero) boundary conditions, corresponding to the absence of external action and energy dissipation during oscillations. Integrating both sides of (6) with respect to t , we get

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \Rightarrow E(t) = \text{constant}.$$

It follows that if $E(0) = 0$, then $E(t) = 0$. Next, we prove that $E(t) = 0$. Taking derivatives with respect to t from both sides of (7) $k - 1$ times, at $t = 0$ we get

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^{k+1}}(x, 0) = \frac{\partial^{k+3} u}{\partial t^{k+1} \partial x^4}(x, 0) = 0,$$

Since the following conditions are satisfied

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0, t) = \frac{\partial^{i+2} u}{\partial t^i \partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^{i+2} u}{\partial t^i \partial x^2}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

where $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Integrating the following

$$\frac{\partial^{k+3} u}{\partial t^{k+1} \partial x^4}(x, 0) = 0,$$

four times with respect to x and using boundary conditions (2), we obtain the following results:

$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(x, 0) = 0.$$

Repeating this process $k - 1$ times, we have the zero initial conditions

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad u_t(x, 0) \equiv 0. \tag{7}$$

Using (13) we can prove that

$$E(0) = E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2 + u_{xx}^2) dx \equiv 0.$$

This identity is possible if and only if $u_t(x, t) \equiv 0$ and $u_{xx}(x, t) \equiv 0$ in the domain D . Hence it follows that $(x, t) = c_1 + c_2 x$, where c_1 and c_2 are arbitrary constants. Since the function $u(x, t)$ satisfies the boundary conditions (3), it follows that $c_1 = c_2 = 0$. Therefore, $u(x, t) \equiv 0$ in D . It means the problem (1)–(3) has unique solution. \square

We now solve the problem by the method of separation of variables and seek the solution of the problem (1)–(3) in the form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{7a}$$

where

$$u_n(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, t) \sin \mu_n x dx, \quad X_n(x) = \sqrt{2} \sin \mu_n x, \quad \mu_n = n\pi.$$

The coefficients $u_n(t)$ for $n \geq 1$ are found using the orthogonality of eigenfunctions [5]. The scalar product in $L_2(0,1)$ is defined by the formula

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

We note that the coefficients of the expansions of functions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ in terms of the eigenfunctions $X_n(x)$ are

$$(\psi, X_n) = \psi_n, \quad (\varphi, X_n) = \varphi_n, \quad (f, X_n) = f_n.$$

Taking into account (1) and (3), we have

$$u_n''(t) + \mu_n^2 u_n(t) = f_n(t),$$

with initial conditions

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n'(0) = \psi_n.$$

Further solving this problem we obtain the following solution

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{\varphi_n}{\mu_n^{2k}} \cos\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right) + \frac{\psi_n}{\mu_n^{2k+2}} \sin\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 1} (-1)^i \mu_n^{4i-2k-2} p_n q^{(k-1-2i)}(0) \sin\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (-1)^i \mu_n^{4i-2k} p_n q^{(k-2-2i)}(0) \cos\left(\mu_n^2 t - \frac{\pi k}{2}\right) + \frac{p_n}{\mu_n^2} \int_0^t q(t-\tau) \sin \mu_n^2 \tau d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

Using (8), we find the following derivatives $u_n^{(k)}(t)$:

$$u_n^{(k)}(t) = \varphi_n \cos \mu_n^2 t + \frac{\psi_n}{\mu_n^2} \sin \mu_n^2 t + \frac{p_n}{\mu_n^2} \int_0^t q^{(k)}(t-\tau) \sin \mu_n^2 \tau d\tau, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u_n^{(k+1)}(t) &= -\mu_n^2 \varphi_n \sin \mu_n^2 t + \psi_n \cos \mu_n^2 t + \frac{p_n}{\mu_n^2} q^{(k)}(0) \sin \mu_n^2 t + \\ &\quad + \frac{p_n}{\mu_n^2} \int_0^t q^{(k+1)}(t-\tau) \sin \mu_n^2 \tau d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Now, we proceed to prove the existence and uniqueness of the solution to the problem (1)–(3). To do so, we first introduce the following auxiliary lemma.

Lemma 1. Let $q(t) \in C^{k+1}[0, T]$, then for all $t \in [0, T]$ and $n \in \mathbb{N}$ the following estimates hold:

$$|u_n(t)| \leq \frac{1}{\mu_n^{2k}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k+2}} |\psi_n| + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^4 - 1} \left(\mu_n^{4\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 2k - 2} + \mu_n^{4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2k} \right) + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} T, \tag{11}$$

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} T, \tag{12}$$

$$|u_n^{(k+1)}(t)| \leq \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} (1 + T). \tag{13}$$

Proof. Performing estimates for any $t \in [0, T]$ from (8) we find

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \frac{1}{\mu_n^{2k}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k+2}} |\psi_n| + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^{2k+2}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 1} \mu_n^{4i} + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^{2k}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} \mu_n^{4i} + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} T \\ &\leq \frac{1}{\mu_n^{2k}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k+2}} |\psi_n| + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^4 - 1} \left(\frac{\mu_n^{4\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} - 1}{\mu_n^{2k+2}} + \frac{\mu_n^{4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} - 1}{\mu_n^{2k}} \right) + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} T \\ &\leq \frac{1}{\mu_n^{2k}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k+2}} |\psi_n| + \frac{|q|||p_n|}{\mu_n^4 - 1} \left(\mu_n^{4\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 2k - 2} + \mu_n^{4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2k} \right) + \frac{|p_n|||q||}{\mu_n^2} T, \end{aligned}$$

where

$$\|q\| = \max_{0 \leq i \leq k+1} \left(\max_{t \in [0, T]} |q^{(i)}(t)| \right).$$

Estimating functions (9) and (10) for $t \in [0, T]$ we obtain inequalities (11) and (12). \square

Formally differentiating (15), we obtain the series

$$u_{xxxx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^4 u_n(t) X_n(x), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(t) X_n(x), \tag{14}$$

$$\frac{\partial^{k+1} u(x, t)}{\partial t^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k+1)}(t) X_n(x). \tag{15}$$

Next, we prove the absolute and uniform convergence of the series (13)–(15).

Lemma 2. Under the conditions

- $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1), \varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(1) = 0, j = 0,2,$
- $\psi(x) \in C[0,1], \psi'(x) \in L_2(0,1), \psi(0) = \psi(1) = 0,$
- $p(x) \in C^2[0,1], p^{(3)}(x) \in L_2(0,1), p^{(j)}(0) = p^{(j)}(1) = 0, j = 0,2,$

one has the relations

$$\varphi_n = -\frac{1}{\mu_n^3} \varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n} \psi_n', \quad p_n = -\frac{1}{\mu_n^3} p_n^{(3)}, \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(3)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi^{(3)}(x) \cos \mu_n x \, dx, \\ \psi_n' &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi'(x) \cos \mu_n x \, dx, \\ p_n^{(3)} &= \sqrt{2} \int_0^1 p^{(3)}(x) \cos \mu_n x \, dx, \end{aligned}$$

with the estimates

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(3)}|^2 &\leq \| \varphi^{(3)} \|_{L_2(0,1)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n'|^2 \leq \| \psi' \|_{L_2(0,1)}^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |p_n^{(3)}|^2 &\leq \| p^{(3)} \|_{L_2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Integrating φ_n and p_n three times, and ψ_n once, taking into account Lemma 1, we obtain the representations in (16). Inequalities in (17) are Bessel-type inequalities for the coefficients of the Fourier expansions of the functions $\varphi^{(3)}, \psi'$, and $p^{(3)}$ in the cosine system $\{\sqrt{2}\cos(\mu_n x)\}$ on the interval $[0,1]$.

Theorem 2. Let $q(t) \in C^{k+1}[0, T]$ and the functions $\varphi(x), \psi(x), p(x)$ satisfy the conditions of Lemma 2, then the initial-boundary value problem (1)–(3) has a unique solution which can be represented by formula (7a) with coefficients defined by relation (9).

Proof. The series (13)–(15) for any $(x, t) \in D$ are majorized by the following numerical series:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_n^{2k}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k+2}} |\psi_n| + \frac{\|q\| \|p_n\|}{\mu_n^4 - 1} \left(\mu_n^{4\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 2k - 2} + \mu_n^{4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2k} \right) + \frac{|p_n| \|q\|}{\mu_n^2} T \right), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_n^{2k-4}} |\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^{2k-2}} |\psi_n| + \frac{|p_n| \|q\|}{\mu_n^4 - 1} \left(\mu_n^{4\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 2k + 2} + \mu_n^{4\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2k + 4} \right) + \mu_n^2 |p_n| \|q\| T \right), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + \frac{1}{\mu_n^2} |\psi_n| + \frac{|p_n| \|q\|}{\mu_n^2} T \right), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + \frac{|p_n| \|q\|}{\mu_n^2} (1 + T) \right). \end{aligned}$$

If the functions $\varphi(x), \psi(x),$ and $p(x)$ satisfy the conditions of Lemma 2, then by virtue of the representations (16)–(17) and the series (9), (13)–(15), which converge uniformly in the rectangle \bar{D} , it follows that the function $u(x, t)$ satisfies the following estimates:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C_1 \left(\| \varphi \|_{L_2(0,1)} + \| \psi \|_{L_2(0,1)} + \| q \| \| p \|_{L_2(0,1)} \right), \\ |u_{xxxx}(x, t)| &\leq C_2 \left(\| \varphi' \|_{L_2(0,1)} + \| \psi \|_{L_2(0,1)} + \| q \| \| p^{(3)} \|_{L_2(0,1)} \right), \\ \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \right| &\leq C_3 \left(\| \varphi' \|_{L_2(0,1)} + \| \psi \|_{L_2(0,1)} + \| q \| \| p \|_{L_2(0,1)} \right), \\ \left| \frac{\partial^{k+1} u(x, t)}{\partial t^{k+1}} \right| &\leq C_4 \left(\| \varphi^{(3)} \|_{L_2(0,1)} + \| \psi' \|_{L_2(0,1)} + \| q \| \| p \|_{L_2(0,1)} \right), \end{aligned}$$

where C_i are positive constants.

REFERENCES:

1. Krylov A.N.: *Vibratsiya Sudov (Vibration of Ships)*. Nauka, Moscow (2012)
2. Strutt, J., Rayleigh, B.: *The Theory of Sound*. Macmillan, London (1877) 14.
3. Durdiev U.D.: Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation. *Differential Equations* 58, 37–44 (2022) <https://doi.org/10.1134/S0012266122010050>.
4. Durdiev U.D.: Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation in an infinite domain. *Differential Equations* 59(4), 462–472 (2023) <https://doi.org/10.1134/S0012266123040031>.
5. Sabitov K.B.: A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams. *Differential Equations* 53(1), 86–98 (2017) <https://doi.org/10.1134/S0012266117010086>.
6. Sabitov K.B.: Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation. *Differential equations.* 6, 771–774 (2020) <https://doi.org/10.1134/S0012266120060099>
7. Sabitov K.B., Fadeeva, O.V.: Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilevered beam. *Vestn. Samarsk.Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat.* 25, 51–66 (2021) <https://doi.org/10.1134/S0012266117010086>.
8. Durdiev D.K., Rakhmonov, A.A.: The problem of determining the 2d kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium. *J. Appl. Ind. Math.* 14(2), 427–444 (2020) <https://doi.org/10.1134/S1990478920020076>.
9. Durdiev D.K., Totieva, Z.D.: The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation. *Sib.mat.* 58(3), 427–444 (2017) <https://doi.org/10.1134/S0037446617030077>.
10. Durdiev D.K., Turdiev, H.H.: Inverse coefficient problem for a time-fractional wave equation with initial-boundary and integral type over-determination conditions. *Methods in the Applied Sciences.* 47(6), 5329–5340 (2024) <https://doi.org/10.1002/mma.9867>.

DINAMIK SO'NDIRGICHLAR O'RNATILGAN STERJENNING KO'NDALANG
TEBRANISHLARI

Qudratov Anvar Ergashevich,
Samarqand davlat pedagogika instituti
a_qudratov1985@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu ish kinematik qo'zg'alishlar ta'sirida gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjen va chiziqli bo'lmagan elastik xarakteristikali dinamik so'ndirgichlarning birgalikdagi ko'ndalang tebranishlarini o'rganishga bag'ishlangan. Garmonik chiziqlashtirish usuli bilan sterjenning matematik modeli olindi. Sterjenning chiziqli bo'lmagan tebranishlarining dinamikasini o'rganish uchun qurilish funksiyalarining analitik ifodasi aniqlanadi.

Kalit so'zlar: sterjen, dissipativ xarakteristikasi, elastik, gisterezis, kinematik qo'zg'alish, uzatish funksiyasi, tebranish.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С УСТАНОВЛЕННЫМИ
ДИНАМИЧЕСКИМИ ГАСИТЕЛЯМИ

Аннотация. Работа посвящена исследованию совместных поперечных колебаний стержня с упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа и динамических гасителей колебаний с нелинейными упругими характеристиками под действием кинематических возмущений. Получена математическая модель стержня методом гармонической линеаризации. Для исследования динамики нелинейных колебаний стержня определено аналитическое выражение конструктивных функций.

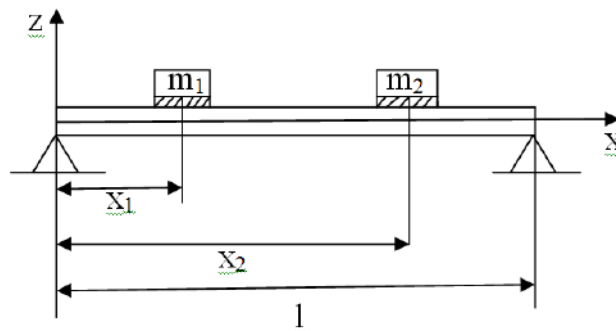
Ключевые слова: стержень, диссипативная характеристика, упругий, гистерезис, кинематическое возбуждение, передаточная функция, вибрация.

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A ROD WITH DYNAMIC DAMPERS INSTALLED

Abstract. This paper investigates the combined transverse vibrations of a beam with hysteresis-type elastic-dissipative characteristics and dynamic vibration dampers with nonlinear elastic characteristics under the influence of kinematic disturbances. A mathematical model of the beam is obtained using harmonic linearization. To study the dynamics of the beams nonlinear vibrations, an analytical expression for the structural functions is defined.

Key words: beam, dissipative characteristic, elastic, hysteresis, kinematic excitation, transfer function, vibration.

Materiallar va metodlar. Ushbu ishda garmonik qo'zg'alishlar ta'siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali mexanik sistemaning ko'ndalang tebranishlarini tekshirish masalasi qaralgan. Bunda sterjenning gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikalari G.S.Pisarenko gipotezasi asosida, dinamik so'ndirgichlarning dempfirlovchi elementlariniki esa Pisarenko-Boginich gipotezasi asosida olingan.



1-rasm.

Dastlab, gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjen va dinamik so'ndirgichlarning

birgalikdagi ko'ndalang tebranishlari harakat differensial tenglamalarini keltirib chiqaramiz [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_1 R_1 \delta_1(x-x_1) \zeta_1 - c_2 R_2 \delta_2(x-x_2) \zeta_2 &= -\rho F \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}; \\ m_1 \frac{\partial^2 w(x_1)}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + c_1 R_1 \zeta_1 &= -m_1 \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}; \\ m_2 \frac{\partial^2 w(x_2)}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + c_2 R_2 \zeta_2 &= -m_2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

bu yerda M -eguvchi moment, ρ, F -mos ravishda seterjen materialining zichligi va ko'ndalang kesimi yuzi; W -sterjenning ko'chishi; W_0 -asosning ko'chishi; $w(x_1), w(x_2)$ -sterjen dinamik so'ndirgichlar o'rnatilgan nuqtalarining ko'chishi; C_1, C_2 -dinamik so'ndirgichlar elastik elementlarining bikrlilik koeffitsiyentlari; m_1, m_2 -dinamik so'ndirgichlar massalari; ζ_1, ζ_2 -sterjenga nisbatan dinamik so'ndirgichlarning ko'chishlari; $\delta_1(x-x_1), \delta_2(x-x_2)$ -Dirakning delta funksiyalari; x_1, x_2 -dinamik so'ndirgichlar o'rnatilgan nuqtalar;

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + (-\nu_1 + j\nu_2) [D_0 + g_1(\zeta_{1ot})] \\ R_2 &= 1 + (-\theta_1 + j\theta_2) [E_0 + g_2(\zeta_{2ot})] \end{aligned}$$

$\nu_1, \nu_2, \theta_1, \theta_2$ -koeffitsiyentlar bo'lib, materiallarning dissipativ xususiyatlariga bog'liq holda aniqlanadi. $g_1(\zeta_{1ot}), g_2(\zeta_{2ot})$ - tebranishlarning dekrementi [2];

$$g_1(\zeta_{1ot}) = \sum_{K_1=1}^n D_{K_1} \zeta_{1ot}^{K_1};$$

$$g_2(\zeta_{2ot}) = \sum_{K_2=1}^n E_{K_2} \zeta_{2ot}^{K_2};$$

$D_0, D_1, \dots, D_n, E_0, E_1, \dots, E_n$ - dinamik so'ndirgichlar elastik elementlarining materiallariga bog'liq parametrlar bo'lib, tajriba yordamida topiladi [6].

Normal kuchlanish σ_N va nisbiy deformatsiya ξ_{ot} orasidagi bog'lanishni esa quyidagicha olamiz: [5]:

$$\sigma_N = E \{ 1 + (-\eta_1 + j\eta_2) [C_0 + f(\xi_{ot})] \} \xi_{ot}, \quad (2)$$

bu yerda E - sterjen materialining elastiklik moduli; η_1, η_2 -koeffitsiyentlar bo'lib, materiallarning dissipativ xususiyatlariga bog'liq holda aniqlanadi; $f(\xi_{ot})$ -sterjenning tebranish dekrementi bo'lib uni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(\xi_{ot}) = C_1 \xi_{ot} + \dots + C_n \xi_{ot}^n;$$

Nisbiy deformatsiya uchun quyidagi ifodani yozamiz:

$$\xi_{ot} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} z \quad (3)$$

bu yerda z - sterjen ko'ndalang kesimi bo'ylab yo'nalgan o'q.
Sterjen ko'ndalang kesimiga ta'sir etuvchi eguvchi momentni hisoblaymiz:

$$M = \int_F \alpha dz = EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} [1 + C_0(-\eta_1 + j\eta_2) + \frac{24}{h^3} (-\eta_1 + j\eta_2) \int_0^{h/2} f(\xi_{ot}) z^2 dz], \quad (4)$$

bu yerda $J = \frac{bh^3}{12}$ - inersiya momenti; b - sterjen eni, h - sterjen balandligi.

Topilgan eguvchi moment ifodasini (1) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasiga qo'yib, quyidagi differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$EI[1+C_0(-\eta_1 + j\eta_2)]\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{24}{h^3}EJ(-\eta_1 + j\eta_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_0^{h/2} f(\xi_{0i})z^2 dz\right] + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_1 R_1 \delta(x-x_1)\zeta_1 - c_2 R_2 \delta(x-x_2)\zeta_2 = -\rho F\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \quad (5)$$

$$m_1 \frac{\partial^2 w(x_1)}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + c_1 R_1 \zeta_1 = -m_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2};$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w(x_2)}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} + c_2 R_2 \zeta_2 = -m_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2},$$

(5) tenglamalar sistemasini yechishda sterjen ko‘chishini quyidagicha olamiz:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)q_k(t), \quad (6)$$

bu yerda $q_k(t)$ -vaqtning funksiyasi; $u_k(x)$ -sterjen xususiy tebranishlari formasi bo‘lib, quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$EJ\frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} - \rho F p_k^2 u_k = 0, \quad (7)$$

bu yerda p_k - sterjenning xususiy chastotasi.

(6) yechimni (5) tenglamalar sistemasiga qo‘yib, (7) munosabatni hisobga olgan holda, almashtirishlardan so‘ng, ega bo‘lamiz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ddot{q}_k + (1+C_0(-\eta_1 + j\eta_2))p_k^2 q_k \right\} u_k + \frac{3EI}{\rho F}(-\eta_1 + j\eta_2)q_k \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_{ka} \frac{h}{2(i+3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right|^i \right) - \frac{c_1}{\rho F} \zeta_1 R_1 \delta(x-x_1) - \frac{c_2}{\rho F} \zeta_2 R_2 \delta(x-x_2) = -W_0; \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k1} \ddot{q}_k + \ddot{\zeta}_1 + n_1^2 R_1 \zeta_1 = -W_0;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{k2} \ddot{q}_k + \ddot{\zeta}_2 + n_2^2 R_2 \zeta_2 = -W_0,$$

bu yerda $W_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$ -asosning tezlanishi, $u_{k1} = u_k(x_1); u_{k2} = u_k(x_2); q_k = q_k(t); n_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$;

$n_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$ -dinamik so‘ndirgichlarning xususiy chastotalari.

(8) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasi uchun Bubnov-Galerkin usulidan foydalanib, u_k funksiyalarning ortogonallik shartiga asoslanib, quyidagi differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\ddot{q}_k + N p_k^2 q_k - \mu_1 \mu_{0k} n_1^2 u_{k1} R_1 \zeta_1 - \mu_2 \mu_{0k} n_2^2 u_{k2} R_2 \zeta_2 = -d_k W_0;$$

$$u_{k1} \ddot{q}_k + \ddot{\zeta}_1 + n_1^2 R_1 \zeta_1 = -W_0; \quad (9)$$

$$u_{k2} \ddot{q}_k + \ddot{\zeta}_2 + n_2^2 R_2 \zeta_2 = -W_0,$$

bu yerda $m_s = \rho Fl$ -sterjenning massasi; l -sterjenning uzunligi;

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_s}; \mu_2 = \frac{m_2}{m_s}; \mu_{0k} = \frac{l}{d_{2k}}; d_k = \frac{d_{1k}}{d_{1k}}; d_{1k} = \int_0^l u_k dx; d_{2k} = \int_0^l u_k^2 dx$$

$$N=C_0+\frac{3EJ_k}{m_c p_k^2} \sum_{i=1}^{\infty} C_i q_{ka} \frac{h^i}{2^i(i+3)} G_{ki};$$

Olingan (9) tenglamalar sistemasi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali sterjen va dinamik so'ndirgichlarning birgalikdagi ko'ndalang tebranishlari harakat differensial tenglamalari hisoblanadi.

Natija va tahlillar. Garmonik qo'zg'alishlar uchun asosning tezlanishini quyidagicha olamiz:

$$W_0=w_{as} \cos \vartheta,$$

bu yerda w_{as} — asos tezlanishining amplitudaviy qiymati bo'lib, $w_{as} < 1$.

Olingan (9) harakat diffrensial tenglamar sistemasining yechimlarini quyidagicha izlaymiz:

$$\begin{aligned} q_i &= a_i \cos(\vartheta + \alpha_i); \\ \zeta_1 &= a_2 \cos(\vartheta + \beta_1); \\ \zeta_2 &= a_3 \cos(\vartheta + \beta_2), \end{aligned} \tag{10}$$

bu yerda $a_i, \alpha_i, a_2, \beta_1, a_3, \beta_2$ -amplituda va fazalar sekin o'zgaruvchan funksiyalar [7].

(10) yechimlardan tegishli hosilalarni hisoblab, (9) harakat differensiyal tenglamar sistemasiga qo'ysak hamda asosning tezlanishi ifodasini hisobga olsak, u holda (9) harakat differensiyal tenglamar sistemasiga mos keluvchi normal ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini olamiz.

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \omega^{-1} [d_k w_0 \sin \alpha - a_1 p_k^2 \eta_2 N + \mu_1 \mu_k u_{k1} n_1^2 a H_{11} + \mu_2 \mu_k u_{k2} n_2^2 a H_{12}]; \\ \dot{\alpha} &= (a_1 \omega)^{-1} [d_k w_0 \cos \alpha + a_1 p_k^2 (1 - \eta_1 N) - a_1 \omega^2 - \mu_1 \mu_k u_{k1} n_1^2 a H_{21} + \mu_2 \mu_k u_{k2} n_2^2 a H_{22}]; \\ \dot{a}_2 &= \omega^{-1} [(1 - u_{k1} d_k) w_0 \sin \beta_1 - a_2 n_1^2 \theta_2 N T_6 + u_{k1} p_k^2 a H_{31} - \mu_2 \mu_k u_{k1} u_{k2} n_2^2 a H_{32}]; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 &= (a_2 \omega)^{-1} [(1 - u_{k1} d_k) w_0 \cos \beta_1 + a_2 n_1^2 (1 - \theta_1 N) T_6 - a_2 \omega^2 - u_{k1} p_k^2 a H_{41} - \mu_2 \mu_k u_{k1} u_{k2} n_2^2 a H_{42}]; \\ \dot{a}_3 &= \omega^{-1} [(1 - u_{k2} d_k) w_0 \sin \beta_2 - a_3 n_2^2 v_2 N T_7 + u_{k2} p_k^2 a H_{51} - \mu_1 \mu_k u_{k1} u_{k2} n_1^2 a H_{52}]; \\ \dot{\beta}_2 &= (a_3 \omega)^{-1} [(1 - u_{k2} d_k) w_0 \cos \beta_2 + a_3 n_2^2 (1 - v_1 N) T_7 - a_3 \omega^2 - u_{k2} p_k^2 a H_{61} + \mu_1 \mu_k u_{k1} u_{k2} n_1^2 a H_{62}]; \end{aligned}$$

bu yerda

$$\begin{aligned} H_{11} &= \theta_2 N_1 \cos(\beta_1 - \alpha) + (1 - \theta_1 N_1) \sin(\beta_1 - \alpha); H_{12} = v_2 N_2 \cos(\beta_2 - \alpha) + (1 - v_1 N_2) \sin(\beta_2 - \alpha); \\ H_{21} &= \theta_2 N_1 \sin(\beta_1 - \alpha) - (1 - \theta_1 N_1) \cos(\beta_1 - \alpha); H_{22} = v_2 N_2 \sin(\beta_2 - \alpha) - (1 - v_1 N_2) \cos(\beta_2 - \alpha); \\ H_{31} &= \eta_2 N \cos(\beta_1 - \alpha) - (1 - \eta_1 N) \sin(\beta_1 - \alpha); \\ H_{32} &= v_2 N_2 \cos(\beta_2 - \beta_1) + (1 - v_1 N_2) \sin(\beta_2 - \beta_1); \\ H_{41} &= \eta_2 N \sin(\beta_1 - \alpha) + (1 - \eta_1 N) \cos(\beta_1 - \alpha); \\ H_{42} &= v_2 N_2 \sin(\beta_2 - \beta_1) - (1 - v_1 N_2) \cos(\beta_2 - \beta_1); \\ H_{51} &= \eta_2 N \cos(\beta_2 - \alpha) - (1 - \eta_1 N) \sin(\beta_2 - \alpha); \\ H_{52} &= \theta_2 N_1 \cos(\beta_2 - \beta_1) - (1 - \theta_1 N_1) \sin(\beta_2 - \beta_1); \\ H_{61} &= \eta_2 N \sin(\beta_2 - \alpha) + (1 - \eta_1 N) \cos(\beta_2 - \alpha); \\ H_{62} &= \theta_2 N_1 \sin(\beta_2 - \beta_1) + (1 - \theta_1 N_1) \cos(\beta_2 - \beta_1); \\ N_1 &= D_0 + g_1(\zeta_{1ot}); N_2 = E_0 + g_2(\zeta_{2ot}), \end{aligned}$$

Hosil bo'lgan (11) tenglamalar sistemasi qaralayotgan sistemaning izlanayotgan statsionar harakatini aniqlashni imkonini beradi. Buni $\dot{q}_{km} = 0, \dot{\alpha}_{km} = 0, \dot{a}_2 = 0, \dot{a}_3 = 0, \dot{\beta}_1 = 0, \dot{\beta}_2 = 0$ qiymatlar asosida (11) differensial tenglamalar sistemasidan quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\begin{aligned} q_k(j\omega) &= -\frac{B_1(\omega) + jB_2(\omega)}{B_3(\omega) + jB_4(\omega)} w_0; \\ \zeta_1(j\omega) &= -\frac{B_5(\omega) + jB_6(\omega)}{B_3(\omega) + jB_4(\omega)} w_0; \\ \zeta_2(j\omega) &= -\frac{B_7(\omega) + jB_8(\omega)}{B_3(\omega) + jB_4(\omega)} w_0; \end{aligned}$$

bu yerda

$$\begin{aligned}
 B_1(\omega) &= d_k \omega^4 - A_1 \omega^2 + A_2; B_2(\omega) = -A_3 \omega^2 + A_4; B_3(\omega) = -\omega^4 + A_5 \omega^2 - A_6 \omega^2 + A_7; \\
 B_4(\omega) &= A_8 \omega^4 - A_9 \omega^2 + A_{10}; B_5(\omega) = (1 - d_k u_{k1}) \omega^4 - A_{11} \omega^2 + A_{12}; B_6(\omega) = -A_{13} \omega^2 + A_{14}; \\
 B_7(\omega) &= (1 - d_k u_{k2}) \omega^4 - A_{15} \omega^2 + A_{16}; B_8(\omega) = -A_{17} \omega^2 + A_{18}; \\
 A_1 &= T_1 n_1^2 (1 - \theta N_1) + T_2 n_2^2 (1 - \nu_1 N_2); A_2 = n_1^2 n_2^2 T_3 [(1 - \theta N_1)(1 - \nu_1 N_2) - \nu_2 \theta_2 N_1 N_2]; \\
 A_3 &= T_1 n_1^2 \theta_2 N_1 + T_2 n_2^2 \nu_2 N_2; A_4 = n_1^2 n_2^2 T_3 [(1 - \theta N_1) \nu_2 N_2 - (1 - \nu_1 N_2) \theta_2 N_1]; \\
 A_5 &= p_k^2 (1 - \eta N) + n_1^2 T_6 (1 - \theta N_1) + n_2^2 T_7 (1 - \nu_1 N_2); \\
 A_6 &= n_1^2 p_k^2 [(1 - \theta N_1)(1 - \eta N) - \eta_2 \theta_2 N N_1] + n_2^2 p_k^2 [(1 - \nu_1 N_2)(1 - \eta N) - \eta_2 \nu_2 N N_2] + \\
 &+ n_1^2 n_2^2 T_8 [(1 - \theta N_1)(1 - \nu_1 N_2) - \nu_2 \theta_2 N_1 N_2]; \\
 A_7 &= n_1^2 n_2^2 p_k^2 [(1 - \eta N)(1 - \theta N_1)(1 - \nu_1 N_2) - \nu_2 \theta_2 N_1 N_2 (1 - \eta N) - \eta_2 \theta_2 N N_2 (1 - \theta N_1) - \\
 &- \eta_2 \theta_2 N N_1 (1 - \nu_1 N_2)]; \\
 A_8 &= \eta_2 p_k^2 N + n_1^2 T_6 \theta_2 N_1 + n_2^2 T_7 \nu_2 N_2; \\
 A_9 &= n_1^2 p_k^2 [\eta_2 N (1 - \theta N_1) + \theta_2 N_1 (1 - \eta N)] + n_2^2 p_k^2 [\eta_2 N (1 - \nu_1 N_2) - \nu_2 N_2 (1 - \eta N)] + \\
 &+ n_1^2 n_2^2 T_8 [\nu_2 N_2 (1 - \theta N_1) - \theta_2 N_1 (1 - \nu_1 N_2)]; \\
 A_{10} &= n_1^2 n_2^2 p_k^2 [\nu_2 N_2 (1 - \theta N_1)(1 - \eta N) + \theta_2 N_1 (1 - \nu_1 N_2)(1 - \eta N) + \eta_2 N (1 - \nu_1 N_2)(1 - \theta N_1) - \\
 &- \nu_2 \theta_2 \eta_2 N N N_2]; \\
 A_{11} &= p_k^2 (1 - \eta N) + T_4 n_2^2 (1 - \nu_1 N_2); \\
 A_{12} &= n_2^2 p_k^2 [(1 - \nu_1 N_2)(1 - \eta N) + \nu_2 \eta_2 N N_2]; \\
 A_{13} &= \eta_2 p_k^2 N + n_2^2 T_4 \nu_2 N_2; A_{14} = n_2^2 p_k^2 [\nu_2 N_2 (1 - \eta N) + \eta_2 N (1 - \nu_1 N_2)]; \\
 A_{15} &= p_k^2 (1 - \eta N) + n_1^2 T_5 (1 - \theta N_1); A_{16} = n_1^2 p_k^2 [(1 - \theta N_1)(1 - \eta N) - \eta_2 \theta_2 N N_1]; \\
 A_{17} &= \eta_2 p_k^2 N + n_1^2 T_5 \theta_2 N_1; A_{18} = n_1^2 p_k^2 [\theta_2 N_1 (1 - \eta N) + \eta_2 N (1 - \theta N_1)]; \\
 T_1 &= d_k + \mu_k \mu_1 u_{k1}; T_2 = d_k + \mu_k \mu_2 u_{k2}; T_3 = d_k + \mu_k (\mu_1 u_{k1} + \mu_2 u_{k2}); \\
 T_4 &= 1 + \mu_k \mu_2 u_{k2} (u_{k2} - u_{k1}) - u_{k1} d_k; T_5 = 1 + \mu_k \mu_1 u_{k1} (u_{k1} - u_{k2}) - u_{k2} d_k; \\
 T_6 &= 1 + \mu_k \mu_1 u_{k1}^2; T_7 = 1 + \mu_k \mu_2 u_{k2}^2; T_8 = 1 + \mu_k (\mu_1 u_{k1}^2 + \mu_2 u_{k2}^2);
 \end{aligned}$$

Xulosa. Garmonik chiziqililash tirish usulining qulayligi va samaradorligi shundan iboratki, dinamik soʻndirgichlar oʻrnatilgan elastik dissipativ xarakteristikali sterjen dinamikasi har xil turdagi materiallar uchun, ularning chegara shartlari har xil boʻlganda, chiziqli boʻlmagan dissipativ xususiyatlarni hisobga olgan holda bunday yondashuv bilan toʻliq tekshirilishi mumkin. Qayd etilgan metodologiya uning parametrlarining turli qiymatlarida taqsimlangan parametrlarga ega boʻlgan elastik dissipativ xarakteristikali sterjenning chiziqli boʻlmagan koʻndalang tebranishlarini oʻrganish va tahlil qilish, shuningdek, tanlangan usul va mezonlar yordamida sterjenning dinamik soʻndirgichlar bilan birgalikdagi harakatining ustuvorligini tekshirish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. P. Xu, P. Wellens, *Effects of static loads on the nonlinear vibration of circular plates. Journal of sound and vibration* 504, 111-116 (2021).
2. M.A. Pavlovskii, L.M. Ryzhkov, V.B. Yakovenko, O.M. Dusmatov, *Nonlinear problems of dynamics of vibration protection systems. – K.: Technology 204 (1997)*
3. G. S. Pisarenko, O. E. Boginich, *Vibrations of kinematically perturbed mechanical systems with energydissipation (Naukova dumka, Kiyev, 1982), 219.*
4. O.M.Dusmatov, *Modeling the dynamics of vibroprotection systems (Fan Publishing House, Tashkent, 1997), p.167.*
5. G.S. Pisarenko, A.P. Yakovlev, V.V. Matveev, *Vibration-absorbing properties of structural materials. Areference book (Naukova dumka, Kiyev, 1971), 327.*

6. G.S.Pisarenko, O.E.Boginich, *Oscillations of kinematically excited mechanical systems with allowance for energy dissipation*, Naukova dumka, Kyiv, 1981, p.219.
7. G.S.Pisarenko, A.P.Yakovlev, V.V.Matveev. *Vibration-absorbing properties of structural materials*. -K.: Nauk.dumka. 1971. –p.327.
8. M.Mirsaidov, K.Mamasoliev. “Contact Interactions of Multi-Layer Plates with a Combined Base”. *AIP Conference Proceedings*, 2022, 2637, 050001. <https://doi.org/10.1063/12.0013538>
9. M.U.Khodjabekov, Kh.M.Buranov, A.E.Qudratov. *AIP Conf. Proc.* 2637, (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0118292>.
- 10.M.Mirsaidov and etc. “Stability of nonlinear vibrations of vibroprotected plate”. In *Journal of Physics: Conference Series*, 1921, (2021), <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1921/1/012097>
- 11.M.Mirsaidov, O.Dusmatov, M.Khodjabekov. “Stability of Nonlinear Vibrations of Elastic Plate and Dynamic Absorber in Random Excitations”. *E3S Web of Conferences* 410, 03014 (2023). doi.org/10.1051/e3sconf/202341003014.
- 12.O.Dusmatov, Kh.Buranov, T.Absalomov. “On nonlinear vibrations of an elastic rod with a dynamic damper/ *Int. Conf. on modern problems math. physics and information technology*”. Tashkent, 2004, p. 156-158.
- 13.Olimjon Dusmatov, Khudoyar Buranov, Anvar Kudratov. “Stability of an elastic rod with dynamic absorbers under harmonic transverse vibrations” *AIP Conf. Proc.* 3177, 080002 (2025). <https://doi.org/10.1063/5.0294900>.
- 14.Khudoyar Buranov, Qiang Li, Valentin L. Popov. “Area and boundary contributions to friction in an adhesive contact of power-law indenters” *AIP Conf. Proc.* 3177, 040002 (2025). <https://doi.org/10.1063/5.0294715>.

UNIQUENESS-SOLVABILITY OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN

Turdiyev Khalim Khamroevich,

*DSc Doctoral student, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*

h.h.turdiyev@buxdu.uz

Abstract. *In this work, the initial-boundary value problem for the one-dimensional time-fractional diffusion equation is investigated. An equivalent auxiliary problem is obtained for the initial-boundary value problem. According to Fourier's method This auxiliary problem is reduced to equivalent integral equations. Then, using the estimates of the Mittag-Leffler function and the generalized singular Gronwall inequalities, the existence and global uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem are proven.*

Keywords: *time-fractional diffusion equation, fractional derivative, inverse problem, integral equation, Fourier series, Banach fixed point theorem.*

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. *В данной работе исследуется начально-краевая задача для одномерного уравнения временной дробной диффузии. Получена эквивалентная вспомогательная задача для начально-краевой задачи. Согласно методу Фурье Эта вспомогательная задача сводится к эквивалентным интегральным уравнениям. Затем, используя оценки функции Миттага-Леффлера и обобщённые сингулярные неравенства Гронвалля, доказано существование и глобальная единственность решения начально-краевой задачи.*

Ключевые слова: *уравнение временной дробной диффузии, дробная производная, обратная задача, интегральное уравнение, ряд Фурье, теорема о фиксированной точке Банаха.*

CHEGARALANGAN SOHADA VAQT BO'YICHA KASR TARTIBLI DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALANING BIR QIYMATLI YECHULUVCHANLIGI

Annotatsiya. *Ushbu ishda bir o'lovli vaqt-kasrli diffuziya tenglamasi uchun masalasi boshlang'ich-chegaraviy masala o'rganilgan. Boshlang'ich-chegaraviy masala uchun ekvivalent yordamchi masala olingan. Furiye usuli bo'yicha bu yordamchi masala ekvivalent integral tenglamalarga keltiriladi. U holda Mittag-Leffler funksiyasi va umumlashgan singulyar Gronuoll tengsizliklari baholaridan foydalanib, boshlang'ich-chegaraviy masala yechimining mavjudligi va global yagonaligi isbotlangan.*

Kalit so'zlar: *vaqt bo'yicha kasr tartibli diffuziya tenglamasi, kasr tartibli hosila, teskari masala, integral tenglama, Furiye qatori, Banax qo'zg'almas nuqta teoremasi.*

Introduction and Setting up the Problem. Nowadays, fractional differential equations have attracted attention of many researcher. Because, various models using fractional partial differential equations are successfully applying to describe a range of problems in mechanical engineering, viscoelasticity, electron transport, heat conduction and high-frequency financial data.

The time-fractional diffusion equation is deduced by replacing the standard time derivative with a time-fractional derivative. The direct problems, initial value problems and initial boundary value problems for the time-fractional diffusion equation have been studied extensively in recent years (see [2-6]). In the article [8] is studied using the Green function method to obtain a general representation of solutions of two dimensional diffusion equation and constructed Green functions of the first, second, and mixed boundary value problems. An evolution equations with the regularized fractional derivative of an order α with respect to the time variable, and elliptic operator with constant and variable coefficients acting in the spatial variables have been investigate. A fundamental solution of the Cauchy problem for this equations is constructed and investigated (see [7]).

In this paper, we investigate the local existence and uniqueness of an inverse problem of determining time-dependent reaction coefficient in the time-fractional diffusion equation with initial-boundary and overdetermination conditions.

Let $T > 0$, $l > 0$ be fixed numbers and $D_{Tl} := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Consider the time-fractional diffusion equation

$$D_{0+,t}^\alpha (u(x, t) - u(x, 0)) - u_{xx} + q(t)u(x, t) = p(t)f(x, t), \quad (x, t) \in D_{Tl}, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

the boundary conditions

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where ∂_t^α is the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha \leq 1$ in the time variable (see definition 1.1), $q(t), t > 0$ is the source control term, $f(x, t)$ is known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature.

Definition 1. A function $u(x, t)$ is called a classical solution to the initial-boundary problem (1)-(3) if:

1. $u(x, t)$ is twice continuously differentiable in x for each $t > 0$;

2. for each $x \in (0, l)u(x, t)$ is continuous in t on $[0, T]$, and its fractional integral

$$(I_{0+}^{1-\alpha} u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \quad (5)$$

is continuously differentiable in t for $t > 0$;

3. $u(x, t)$ satisfies (1) – (1)(3).

The functions φ, f and h satisfy the following assumptions:

(A1) $\varphi(x) \in C^3[0, l], \varphi^{(4)}(x) \in L_2[0, l], \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$,

(A2) $f(x, t) \in C(\overline{D_T}) \cap C_{x,t}^{3,1}(D_T), f_{xxxx}(x, t) \in L_2(D_T), f(0, t) = f(l, t) = f''(0, t) = f''(l, t) = 0$,

Preliminaries. In this section, we present some useful definitions and results on fractional calculus (see [1, pp. 96-99]), which will be use in the future.

Definition 2.1 The Caputo time fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ of the integrable function u is defined by

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u'(\tau) d\tau,$$

where Γ is the Euler's Gamma function.

Two parameter Mittag-Leffler (M-L) function. The two parameter M-L function $E_{\alpha,\beta}(z)$ is defined by the following series:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

where $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\alpha)$ –denote the real part of the complex number α . The Mittag-Leffler function has been studied by many authors who have proposed and studied various generalizations and applications. A very interesting work that meets many results about this function is due to Haubold et al. (see [36]).

Proposition 2.1. Let $0 < \alpha < 2$ and $\beta \in \mathbb{R}$ be arbitrary. We suppose that κ is such that $\pi\alpha/2 < \kappa < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Then there exists a constant $C = C(\alpha, \beta, \kappa) > 0$ such that

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \quad \kappa \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

For the proof, we refer to [1, pp. 40-45] for example.

The proof of these assertions come from the definition of Caputo fractional derivative and differentiation of the two-parameter M-L function.

Proposition 2.2.[26] For $0 < \alpha < 1, t > 0$, we have $0 < E_{\alpha,1}(-t) < 1$. Moreover, $E_{\alpha,1}(-t)$ is completely monotonic, that is

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,1}(-t) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.3. [26] For $0 < \alpha < 1, \eta > 0$, we have $0 \leq E_{\alpha,\alpha}(-\eta) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$. Moreover, $E_{\alpha,\alpha}(-\eta)$ is a monotonic decreasing function with $\eta > 0$.

Lemma 2.1.(see [21], [22]) $m \in \mathbb{C}(J)(J = [t_0, T], t_0 \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), T \leq +\infty)$ and suppose that

$$m(t) \leq m_0 + \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\gamma-1} m(s) ds, t \in J.$$

Then we have

$$m(t) \leq m_0 E_{\gamma,1}(L(t-t_0)^\gamma), t \in J,$$

where m_0 and L are nonnegative constants, $\gamma \in (0,1)$.

Investigation of direct problem (1)–(3). Before we proceed to studying the inverse problem, let us show that the direct problem has a unique solution.

We will seek the solution of problem (1)-(3) in the form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{6}$$

where

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Taking into account equality (6), we obtain from (1) following equation

$$(\partial_t^\alpha u_n)(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = F_n(t; u, p, q, f), \tag{7}$$

where

$$F_n(t; u, q, f) := p(t) f_n(t) - q(t) u_n(t),$$

$$f_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x, t) \sin(\lambda_n x) dx.$$

The initial condition (2) give:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x, 0) \sin(\lambda_n x) dx = \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x) dx = \varphi_n, \tag{8}$$

where

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

Based Theorem 2.1 we have that the initial-value problem (7), (8) is equivalent in the space $C[0, T]$ to the Volterra integral equation of the second kind

$$u_n(t) = \varphi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) p(\tau) f_n(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) q(\tau) u_n(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Estimating the function $u_n(t)$ for $t \in [0; T]$, we obtain the following integral inequality

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_n| + \frac{t^\alpha \|f_n\| |p(t)|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|q(t)|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |u_n(\tau)| d\tau, \tag{10}$$

where $\|f_n\| = \max_{t \in [0, T]} |f_n(t)|$. Applying Lemma 2.1 to the last relation, we obtain the following estimate

$$|u_n(t)| \leq (|\varphi_n| + \frac{t^\alpha \|f_n\| |p(t)|}{\Gamma(\alpha+1)}) E_{\alpha,1}(|q(t)| t^\alpha). \tag{11}$$

Using equality (7), we obtain an estimate for $\partial^\alpha u_n(t)$:

$$|\partial^\alpha u_n(t)| \leq (\lambda_n^2 + \tilde{q}) \left(|\varphi_n| + \frac{t^\alpha \|f_n\| |p(t)|}{\Gamma(\alpha+1)} \right) E_{\alpha,1}(|q(t)| t^\alpha) + |p(t)| \|f_n\|.$$

Thus we have proved the following lemma:

Lemma 3.1. For any $t \in [0, T]$ and for sufficiently large n , the estimates are valid

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq \bar{C}_1 (|\varphi_n| + \|f_n\|) \\ |\partial^\alpha u_n(t)| &\leq \bar{C}_2 (n^2 |\varphi_n| + n^2 \|f_n\|) \end{aligned}$$

here \bar{C}_i are positive constants.

Formally, from (6) by term-by-term differentiation we compose the series

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial^\alpha u_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{12}$$

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 u_n(t) \sin(\lambda_n x), \tag{13}$$

In view of Lemma 3.1, the series (6), (12), and (13) for any $(x, t) \in D_T$,

$$\bar{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 |\varphi_n| + n^2 \|f_n\|). \tag{14}$$

We hold the following auxiliary lemma.

Lemma 3.2. *If the conditions (A1)-(A2) then there are equalities*

$$\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n^3} \varphi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^3} f_n^{(3)}(t), \tag{15}$$

where

$$\varphi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(3)}(x) \cos(\lambda_n x) dx, \quad f_n^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxx}^{(3)}(x, t) \cos(\lambda_n x) dx,$$

with the following estimates:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(3)}|^2 \leq \| \varphi_n^{(3)} \|_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}(t)|^2 \leq \| f_n^{(3)}(t) \|_{L_2[0,l] \times C[0,T]}. \tag{16}$$

If the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy the conditions of Lemma 3.2, then due to representations (15) and (16) series (6), (12) and (13) converge uniformly in the rectangle D_{Tl} , therefore, function $u(x, t)$ satisfies relations (1)–(3).

Using the above results, we obtain the following assertion.

Lemma 3.3. *Let $q(t) \in C[0, T], (A1)-(A2)$ are satisfied, then there exists a unique solution of the direct problem (1)-(3) $u(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_T)$.*

Let us derive an estimate for the norm of the difference between the solution of the original integral equation (9) and the solution of this equation with perturbed functions $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{f}_n$. Let $\tilde{u}_n(t)$ be solution of the integral equation (9) corresponding to the functions $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{f}_n$; i.e.,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(t) = & \tilde{\varphi}_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \tilde{p}(\tau) \tilde{f}_n(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \tilde{q}(\tau) \tilde{u}_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Composing the difference $u - \tilde{u}$ with the help of the equations (9), (17) and introducing the notations $u - \tilde{u} = \bar{u}_n, p - \tilde{p} = \bar{p}, q - \tilde{q} = \bar{q}, f_n - \tilde{f}_n = \bar{f}_n$, we obtain the integral equation

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t) = & \bar{\varphi}_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{p}(\tau) f_n(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{p}(\tau) \bar{f}_n(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{q}(\tau) u_n(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t-\tau)^\alpha) \bar{q}(\tau) \bar{u}_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{18}$$

from which, is derived the following linear integral inequality for $|\bar{u}_n(t)|$:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t)| \leq & |\bar{\varphi}_n| + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\bar{p}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|f_n\| \|\bar{p}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ & + \frac{\|\bar{q}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (|\varphi_n| + \frac{t^\alpha \|f_n\| |p(t)|}{\Gamma(\alpha+1)}) E_\alpha(|q(t)| t^\alpha) + \frac{\|\bar{q}\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |\bar{u}_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Using the Lemma 2.1 from last inequality, we arrive at the estimate:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t)| \leq & \{|\bar{\varphi}_n| + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_n\| \|\bar{p}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha \|f_n\| \|\bar{p}\|}{\Gamma(\alpha+1)} + \\ & + \frac{\|\bar{q}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (|\varphi_n| + \frac{t^\alpha \|f_n\| |p(t)|}{\Gamma(\alpha+1)}) E_{\alpha,1}(|q(t)| t^\alpha)\} E_{\alpha,1}(\|\bar{q}\| t^\alpha). \end{aligned} \tag{19}$$

Indeed, the expression (19) is stability estimate for the solution to the problem (1)-(3). The uniqueness of this solution follows from (19).

REFERENCES:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
2. Eidelman S. D. and Kochubei A. N., "Cauchy problem for fractional diffusion equations," *Journal of Differential Equations*, vol. 199, no. 2, pp. 211–255, 2004.
3. Gorenflo R., Luchko Y. F., and Zabrejko P. P., On solvability of linear fractional differential equations in Banach spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 2, pp. 163–176, 1999.
4. Hanyga A., *Multidimensional solutions of time-fractional diffusion-wave equations*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 458, no. 2018, pp. 933–957, 2002.
5. Luchko Y., *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 351, no. 1, pp. 218–223, 2009.
6. Kochubei, A.N., *Diffusion of fractional order*, *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
7. Pskhu A. V., *Solution of Boundary Value Problems for the Fractional Diffusion Equation by the Green Function Method*, *Differential Equations*, Vol. 39, No. 10, 2003, pp. 1509–1513.

**YUKLANGAN BIR O‘LCHAMLI ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN
BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALA**

Turdiyev Halim Hamroyevich,

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi DSc doktoranti,

V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti

h.h.turdiyev@buxdu.uz

Rashidov Ravshanbek Rustamovich,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrasida o‘qituvchisi

rashidovravshanbek6@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada chegaralangan bir o'lchamli sohada yuklanganlik bilan berilgan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala ko'rib chiqiladi. To'g'ri masala bu tenglama uchun Kosh tipidagi boshlang'ich shartlar va Dirixle chegaraviy shartlar bilan berilgan boshlang'ich-chegaraviy masaladir. O'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan berilgan masala ikkinchi turdagi Volterra integral tenglamasiga keltiriladi. Yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qisqaruvchi akslantirishlar prinsipiga tayaniladi.

Kalit so‘zlar: issiqlik tarqalish tenglamasi, boshlang'ich-chegaraviy masala, Volterra integral tenglamasi, Granuolla tengsizligi, yuklanganlik.

**НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОДНОМЕРНОГО
УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Аннотация. В данной статье рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной одномерной области, заданного с нагрузкой (или с условием нагрузки). Прямая задача представляет собой начально-краевую задачу для данного уравнения с начальными условиями типа Коши и граничными условиями Дирихле. Задача, поставленная методом разделения переменных, сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Для доказательства существования и единственности решения используется принцип сжимающих отображений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, начально-краевая задача, интегральное уравнение Вольтерра, неравенство Грануолла, инволюция.

**INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED ONE-DIMENSIONAL
HEAT EQUATION**

Abstract. In this paper, we consider an initial-boundary value problem for a heat equation with involution in a bounded one-dimensional domain. The direct problem is an initial boundary value problem for this equation with Cauchy-type initial data and Dirichlet boundary conditions. The problem given by the method of separation of variables is reduced to the Volterra integral equation of the second kind. The principle of contraction mappings is used to prove the existence and uniqueness of the solution.

Key words: heat equation, an initial-boundary problem, Volterra integral equation, Gronwall's inequality, involution.

Introduction. Differential equations with modified arguments are equations in which the unknown function and its derivatives are evaluated with modifications of time or space variables; such equations are called in general functional differential equations. Among such equations, one can single out equations with involutions.

Consider the non-homogeneous heat equation

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \varepsilon u_{xx}(-x, t) + q(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (1)$$

initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (2)$$

boundary conditions

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, t \in [0, T] \tag{3}$$

Where $f(x, t), \varphi(x)$ are given and enough smooth functions, ε is a nonzero real number such that $|\varepsilon| < 1$ and Ω is a rectangular domain given by $\Omega = \{-\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$.

Suppose that the data of the problem (1)-(3) the functions $\varphi(x), f(x, t)$ satisfy following assumption:

A1) $\varphi(x) \in C^2[-\pi, \pi], \varphi^{(3)}(x) \in L[-\pi, \pi], \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0;$

A2) $f(x, t) \in C(\Omega), f(x, t) \in L^2(\Omega).$

Here we seek solution to problem in a form of series expansion using a set of functions that form orthogonal basis in $L^2(-\pi, \pi)$. To find the appropriate set of functions for each problem, we shall solve the homogeneous equation corresponding to equation (1) along with the associated boundary conditions using separation of variables.

Separation of variables leads to the following spectral problem for (1)-(3)

$$X''(x) - \varepsilon X''(-x) + \lambda X(x) = 0, X(\pi) = X(-\pi) = 0, \tag{4}$$

The eigenvalue problem is self-adjoint and hence they have real eigenvalues and their eigenfunctions form a complete orthogonal basis in $L^2(-\pi, \pi)$. Their eigenvalues are, respectively, given by

$$\lambda_{1k} = (1 - \varepsilon)(k + \frac{1}{2})^2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda_{2k} = (1 + \varepsilon)k^2, k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

and the corresponding eigenfunctions are given by

$$X_{1k}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(k + \frac{1}{2})x, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, X_{2k}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin kx, k \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Lemma 1. *The systems of functions (6) are complete and orthogonal in $L^2(-\pi, \pi)$.*

By applying the Fourier method, the solution $u(x, t)$ of the problem (1)-(3) can be expanded in a uniformly convergent series in term of eigenfunctions of the form

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t)X_{1k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x) \tag{7}$$

The coefficients $u_{1k}(t), u_{2k}(t)$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions. Namely, we multiply (1) by the eigenfunctions of (6) and integrate over $(-\pi, \pi)$. Recall that the scalar product in $L^2(-\pi, \pi)$ is defined by $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Let us note the

expansion coefficients of $f(x, t)$ and $\varphi(x)$ in the eigenfunctions of (6) for $k \geq 1$ respectively by

$$\begin{cases} (f(x, t), X_{1k}(x)) = f_{1k}(t), \\ (f(x, t), X_{2k}(x)) = f_{2k}(t), \\ (\varphi(x, t), X_{1k}(x)) = \varphi_{1k} \\ (\varphi(x, t), X_{2k}(x)) = \varphi_{2k} \end{cases}$$

In view of (1) for $(u(x, t), X_{1k}(x)) = u_{1k}(t), (u(x, t), X_{2k}(x)) = u_{2k}(t)$, we obtain the Cauchy type problems

$$\begin{cases} u'_{1k}(t) + (1 - \varepsilon)(k + \frac{1}{2})^2 u_{1k}(t) + q(t)u_{1k}(t) = f_{1k}(t), \\ u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} u'_{2k}(t) + (1 + \varepsilon)k^2 u_{2k}(t) + q(t)u_{2k}(t) = f_{2k}(t), \\ u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \end{cases} \tag{9}$$

We consider the Cauchy problems (8) and (9). During the investigation of Cauchy problems (8) and (9), we obtain an equivalent Volterra integral equations of the second kind:

$$\begin{aligned} u_{1k}(t) &= \varphi_{1k} e^{-(1 - \varepsilon)(k + \frac{1}{2})^2 t} + \int_0^t f_{1k}(\tau) e^{-(1 - \varepsilon)(k + \frac{1}{2})^2 (t - \tau)} d\tau \\ &\quad - \int_0^t q(\tau) u_{1k}(\tau) e^{-(1 - \varepsilon)(k + \frac{1}{2})^2 (t - \tau)} d\tau, \\ u_{2k}(t) &= \varphi_{2k} e^{-(1 + \varepsilon)k^2 t} + \int_0^t f_{2k}(\tau) e^{-(1 + \varepsilon)k^2 (t - \tau)} d\tau \end{aligned} \tag{10}$$

$$- \int_0^t q(\tau) u_{2k}(\tau) e^{-(1+\varepsilon)k^2(t-\tau)} d\tau. \quad (11)$$

For integral equations (10) and (1), the following holds:

Lemma 2. Let $q(t) \in C[0, T]$, $f_{ik} \in C[0, T]$, $i = 1, 2$. There holds the following estimate for all $k \in \mathbb{N}$ and $t \in [0, T]$:

$$|u_{1k}(t)| \leq \left(|\varphi_{1k}| + \frac{\|f_{1k}\|_{C[0,T]}}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2}} e^{-\frac{\|q\|}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2}} e^{-(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2 t}, \quad (12)$$

$$|u_{2k}(t)| \leq \left(|\varphi_{2k}| + \frac{\|f_{2k}\|_{C[0,T]}}{(1+\varepsilon)k^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{(1+\varepsilon)k^2}} e^{-\frac{\|q\|}{(1+\varepsilon)k^2}} e^{-(1+\varepsilon)k^2 t}, \quad (13)$$

$$|u'_{1k}(t)| \leq \|f_{1k}\|_{C[0,T]} + \left(\|q\|_{C[0,T]} + (1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2 \right) \times \left(|\varphi_{1k}| + \frac{\|f_{1k}\|_{C[0,T]}}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2}} e^{-\frac{\|q\|}{(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2}} e^{-(1-\varepsilon)(k+\frac{1}{2})^2 t}, \quad (14)$$

$$|u'_{2k}(t)| \leq \|f_{2k}\|_{C[0,T]} + \left(\|q\|_{C[0,T]} + (1+\varepsilon)k^2 \right) \times \left(|\varphi_{2k}| + \frac{\|f_{2k}\|_{C[0,T]}}{(1+\varepsilon)k^2} \right) e^{\frac{\|q\|}{(1+\varepsilon)k^2}} e^{-\frac{\|q\|}{(1+\varepsilon)k^2}} e^{-(1+\varepsilon)k^2 t}. \quad (15)$$

Theorem 1. If $q(t) \in C[0, T]$ (A1)-(A2) are satisfied, then there exists a unique solution to the direct problem (1)-(3) $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega)$.

REFERENCES:

1. Cabada A. and Tojo F.A.F. *General Results for Differential Equations with Involutions, In Differential Equations with Involutions, Atlantis Press, (2015), pp. 17-23.*
2. Friedman A. *Optimal control for parabolic equations, J. Math. Anal. Appl., 18 (1967), pp. 479–491.*
3. Chen N., Wang Y. and Yang D. *Time-varying bang-bang property of time optimal controls for heat equation and its applications, Syst. Control Lett., 112 (2018), pp. 18–23.*
4. Tikhonov A.N. and Samarsky A.A. *Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow. 1966.*
5. Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M. and Tapdigoglu R. *An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation, Quaest. Math, 40 (2017), pp. 151-160.*
6. Mussirepova E., Sarsenbi A. and Sarsenbi A. *The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient, Bound Value Probl, 99 (2022)*
7. Alimov Sh.A. and Dekhkonov F.N. *On a control problem associated with fast heating of a thin rod, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2 (2019), pp. 1–14.*

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR THE DIFFUSION EQUATION WITH PIECEWISE-CONTINUOUS TIME
DELAY

Turdiyev Khalim Khamroyevich,

Doctoral student, Bukhara Branch of Romanovskii
Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy
of Sciences, Bukhara, Uzbekistan
h.h.turdiyev@buxdu.uz

Kholikov Suyunjon Khamroqul ugli,

Navoi State University, Navoi, Uzbekistan,
xolikovsuyunjon1@gmail.com

Abstract. In this article, we will consider a partial differential equation with a piecewise constant argument. We obtain a Volterra-type integral equation of the second kind, equivalent to the initial boundary value problem for the piecewise constant argument diffusion equation. We will prove the existence and uniqueness of the solution of the integral equation of the second kind of Volterra type.

Keywords: partial differential equations, piecewise constant arguments, oscillations, and stability.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО
ВРЕМЕНИ

Аннотация. В данной статье мы рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с кусочно-постоянным аргументом. Мы получим интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра, эквивалентное начальной краевой задаче для кусочно-постоянного уравнения диффузии. Докажем существование и единственность решения интегрального уравнения второго рода вольтерровского типа.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, кусочно-постоянные аргументы, колебания и устойчивость.

VAQT BO‘YICHA BO‘LAKLI UZLUKSIZ KECHIKUVCHI ARGUMENTLI DIFFUZIYA
TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG‘ICH CHEGARAVIY MASALANING BIR QIYMATLI
YECHILUVCHANLIGI HAQIDA

Annotatsiya. Ushbu maqolada bo‘lakli o‘zgaras argumentga ega bo‘lgan xususiy hosilali differensial tenglamani ko‘rib chiqamiz. Biz bo‘lakli o‘zgaras argumentga diffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalaga ekvivalent bo‘lgan Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamani olamiz. Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlaymiz.

Kalit so‘zlar: xususiy hosilali differensial tenglama, bo‘lakli o‘zgaras argument, tebranishlar va turg‘unlik.

Introduction and problem statement. Functional differential equations with delay provide a mathematical model for a physical or biological system in which the rate of change of the system depends upon its past history. The theory of functional differential equations with continuous arguments is well developed and has numerous applications in natural and engineering sciences. This paper continues our earlier work in an attempt to extend this theory to differential equations with discontinuous argument deviations.

In articles [1-5], ordinary differential equations with arguments having intervals of constancy have been studied. Such equations represent a hybrid of continuous and discrete dynamical systems and combine properties of both differential and difference equations. They include as particular cases loaded and impulsive equations, hence their importance in control theory and in certain biomedical models. Continuity of a solution at a point joining any two consecutive intervals implies recursion relations for the values of the solution at such points. Therefore, differential equations with piecewise continuous argument are

intrinsically closer to difference rather than to differential equations.

In [6] boundary value problems for some linear equations with piecewise continuous argument in partial derivatives were considered and the behavior of their solutions studied. The results were also extended to equations with positive definite operators in Hilbert spaces.

In [7] initial value problems were studied for equations with piecewise continuous argument in partial derivatives. A class of loaded equations that arise in solving certain inverse problems was explored within the general framework of differential equations with piecewise continuous delay. The purpose of the present note is to investigate the asymptotic behavior of the solutions, especially their oscillatory properties, of a boundary value problem for some equations with piecewise continuous argument of parabolic type. For a rather comprehensive addition to the growing body of literature on equations with piecewise continuous argument the reader is referred to [8].

A comparison of two equations with piecewise continuous argument. The equation

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - bu(x, t) \tag{1}$$

describes heat flow in a rod with both diffusion $a^2 u_{xx}$ along the rod and heat loss (or gain) across the lateral sides of the rod. Measuring the lateral heat change at discrete moments of time leads to the equation with piecewise continuous delay

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - bu(x, [t]) + q(t)u(x, t) + f(x, [t]), \tag{2}$$

which was investigated in [6]. Here $[\cdot]$ designates the greatest integer function and $D := \{(x, t) \in (0,1) \times [0, \infty)\}$. The problem posed in [6] for equation (2) consists of the boundary conditions

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \tag{3}$$

and the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{4}$$

Definition. A function $u(x, t)$ is called a classical solution to initial boundary value problem (2) -(4), if:

- (i) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\cdot, t) \in C(D)$ for each $t > 0$;
- (ii) for each $x \in (0,1)$ the derivative $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ is continuous in $t > 0$;
- (iii) $u(x, t)$ satisfies initial boundary value problem (2) -(4).

We consider the weighted spaces of continuous functions

$$C^{2,1}(D) = \left\{ u(x, t) \in C(D) : \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\cdot, t) \in C(D); \text{ and } \frac{\partial}{\partial t} u(x, \cdot) \in C(D) \right\}.$$

By applying the Fourier method, the solution $u(x, t)$ of the direct problem (2)-(4) can be expanded in a uniformly convergent series in term of eigenfunctions of the form

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x), \tag{5}$$

where

$$X_j(x) = \sqrt{2} \sin(\lambda_j x), \quad \lambda_j = \pi j, \quad j = 1, 2, \dots \tag{6}$$

The coefficients $T_j(t)$ for $j \geq 1$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions $X_j(x)$. The scalar product in $L_2[0,1]$ is defined by $(\mu, \nu) = \int_0^1 \mu(x)\nu(x)dx$. Let us note the expansion coefficients of $\varphi(x)$, $f(x, [t])$ and in the eigenfunctions of (6) for $j \geq 1$ are defined respectively by

$$(\varphi(x), X_j(x)) = \varphi_j, \quad (f(x, [t]), X_j(x)) = f_j([t]), \quad j = 1, 2, \dots \tag{7}$$

We obtain in view of (2) and with $(u(x, t), X_j(x)) = \int_0^1 u(x, t) X_j(x) dx = v_j(t)$, and we may write

$$v_j'(t) = -a^2 \lambda_j^2 v_j(t) - b v_j(t) + F_j([t], t) \tag{8}$$

and the initial condition

$$v_j(t)|_{t=0} = \varphi_j, \tag{9}$$

where $F_j([t], t) = q(t)v_j(t) + f_j([t])$.

Let $v_{nj}(t)$ denote a solution (8) on the interval $n \leq t < n + 1$, where n is a nonnegative integer. Then

$$v_{nj}'(t) = -a^2 \lambda_j^2 v_{nj}(t) - b v_{nj}(t) + F_{nj}(n, t) \tag{10}$$

and the general solution of this equation is

$$v_{nj}(t) = \frac{-b}{a^2\lambda_j^2}(1 - e^{-a^2\lambda_j^2 t})v_{nj}(n) \tag{11}$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)} d\tau + C_{nj}(0)e^{-a^2\lambda_j^2 t}.$$

We put here $t = n$

$$v_{nj}(n) = \frac{-b}{a^2\lambda_j^2}(1 - e^{-a^2\lambda_j^2 n})v_{nj}(n)$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(n-\tau)} d\tau + C_{nj}(0)e^{-a^2\lambda_j^2 n}.$$

From this

$$C_{nj}(0) = (1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2}(1 - e^{-a^2\lambda_j^2 n}))v_{nj}(n)e^{a^2\lambda_j^2 n}$$

$$- \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(\tau)} d\tau.$$

Putting $C_{nj}(0)$ into the above equation with respect to $v_{nj}(n)$, we get the following

$$v_{nj}(t) = E_j(t - n)v_{nj}(n) - \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)} d\tau$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)} d\tau, \tag{12}$$

where

$$E_j(t) = e^{-a^2\lambda_j^2 t} - \frac{b}{a^2\lambda_j^2}(1 - e^{-a^2\lambda_j^2 t}). \tag{13}$$

At $t = n + 1$ we have

$$v_{nj}(n + 1) = E_j(1)v_{nj}(n) - \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(n+1-\tau)} d\tau$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^{n+1} [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(n+1-\tau)} d\tau.$$

From that, we obtain

$$v_{nj}(n) = E_j^n(1)v_{0j}(0)$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau)v_{k-1,j}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(k-\tau)} d\tau. \tag{14}$$

Therefore,

$$v_{nj}(t) = E_j(t - n)E_j^n(1)v_{0j}(0) + \frac{1}{a^2\lambda_j^2} E_j(t - n) \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1)$$

$$+ q(\tau)v_{k-1,j}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(k-\tau)} d\tau - \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)} d\tau$$

$$+ \frac{1}{a^2\lambda_j^2} \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)} d\tau. \tag{15}$$

First we prove the following assertions:

Lemma 1. For any $j \in N$ we have the estimates

$$|v_{nj}(t)| \leq ((1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})|\varphi_j| + \frac{n}{a^2\lambda_j^2}|f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n (\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2})$$

$$\times \exp\{\frac{\|q\|}{a^2\lambda_1^2}((1 + \frac{b}{a^2\lambda_1^2})n + 1)t\}, \tag{16}$$

$$|v_{nj}'(t)| \leq (a^2\lambda_j^2 + b)|\varphi_j| + (1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2}) \sum_{k=1}^n |f_{k-1,j}(k-1)| + (1 + n)|f_{nj}(n)|$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) n + n + t + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \right) \left[\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) |\varphi_j| \right. \\
 & \left. + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2} \right) \exp \left\{ \frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) n + 1 \right) t \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Proof.

Let

$$|E_j(t - n)| \leq \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right), |E_j(1)| < 1, v_{0j}(0) = \varphi_j$$

From this fact and (13) one can obtain estimates for $v_{nj}(t)$:

$$\begin{aligned}
 |v_{nj}(t)| &= |E_j(t - n) E_j^n(1) v_{0j}(0)| \\
 &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} E_j(t - n) \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) \\
 &+ q(\tau) v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau - \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\
 &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\
 &\leq \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) |\varphi_j| + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2} \right) \\
 &+ \frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) n + 1 \right) \int_0^t |v_{nj}(\tau)| d\tau
 \end{aligned}$$

Next, according to the Gronwall integral inequality, we have

$$\begin{aligned}
 |v_{nj}(t)| &\leq \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) |\varphi_j| + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2} \right) \right) \\
 &\times \exp \left\{ \frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} \right) n + 1 \right) t \right\}.
 \end{aligned}$$

This inequality is the inequality (16) in Lemma 1.

Differentiating the integral equation (15) with respect to t , we obtain

$$\begin{aligned}
 v_{nj}'(t) &= E_j'(t - n) E_j^n(1) v_{0j}(0) \\
 &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} E_j'(t - n) \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau) v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau \\
 &+ \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\
 &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} [f_{nj}(n) + q(t) v_{nj}(t)] - \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau, \quad (18)
 \end{aligned}$$

where

$$E_j'(t - n) = -a^2 \lambda_j^2 e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-n)} + b(1 - e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-n)}).$$

Next, we get the estimate of $v_{nj}'(t)$:

$$\begin{aligned}
 |v_{nj}'(t)| &= |E_j'(t - n) E_j^n(1) v_{0j}(0)| \\
 &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} E_j'(t - n) \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau) v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau \\
 &+ \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} [f_{nj}(n) + q(t)v_{nj}(t)] - \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\
 & \leq (a^2 \lambda_j^2 + b)|\varphi_j| + \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) \sum_{k=1}^n |f_{k-1,j}(k-1)| + (1+n)|f_{nj}(n)| \\
 & \quad + \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) \sum_{k=1}^n |v_{k-1,j}(t)| + (n+t)|v_{nj}(t)| + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |v_{nj}(t)|
 \end{aligned}$$

Using the estimate (16) in the above inequality, we get

$$\begin{aligned}
 |v_{nj}'(t)| & \leq (a^2 \lambda_j^2 + b)|\varphi_j| + \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) \sum_{k=1}^n |f_{k-1,j}(k-1)| + (1+n)|f_{nj}(n)| \\
 & \quad + \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)n + n + t + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2}\right) \left[\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)|\varphi_j| \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2}\right) \exp\left\{\frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)n + 1\right)t\right\}\right].
 \end{aligned}$$

Lemma 1 has been completely proven.

Putting (6) and (7) into (5), we get equality with respect to the function $u(x, t)$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) & = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} [E_j(t-n)E_j^n(1)v_{0j}(0) \\
 & \quad + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \sum_{k=1}^n E_j(t-n)E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau)v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau \\
 & \quad - \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\
 & \quad + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau)v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau] \sin(\lambda_j x). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Here $u(x, t)$ designates the solution of boundary value problem (2),(3),(4) in $[0,1] \times [n, n + 1]$.

Putting $t = 0, n = 0$ gives

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{0j}(0) \sin(\lambda_j x)$$

and

$$v_{0j}(0) = \int_0^1 \varphi(x) \sin(\lambda_j x) dx = \varphi_j. \tag{20}$$

Formally differentiating the series in formula (5), we get the following series:

$$u_t(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) X_j(x), \tag{21}$$

$$u_{xx}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 v_j(t) X_j(x), \tag{22}$$

The series (5), (21), (22) we obtain the estimates:

$$\begin{aligned}
 |u_n(x, t)| & \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) |\varphi_j| + \frac{n}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2}\right) \right. \\
 & \quad \left. \times \exp\left\{\frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)n + 1\right)t\right\}, \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |u_{nt}(x, t)| & \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(a^2 \lambda_j^2 + b)|\varphi_j| + \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) \sum_{k=1}^n |f_{k-1,j}(k-1)| + (1+n)|f_{nj}(n)| \right. \\
 & \quad \left. + \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)n + n + t + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2}\right) \left[\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)|\varphi_j| \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2}\right) \exp\left\{\frac{\|q\|}{a^2 \lambda_j^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right)n + 1\right)t\right\}\right] \right]. \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$|u_{nxx}(x, t)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) |\varphi_j| + \frac{n}{a^2 \lambda_j^2} |f_{nj}(n)| + \frac{b}{a^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2}\right) \right) \times \exp\left\{\frac{\|q\|}{a^2 \lambda_1^2} \left(\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_1^2}\right)n + 1\right)t\right\}, \quad (25)$$

Now we prove the lemma that will be used further.

Lemma 2. Let $\varphi(x) \in C^2(0,1)$, $\varphi^3(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ and $f(x, t) \in C(D)$, $f(x, t) \in L_2(D)$, $f(0, t) = f(1, t) = 0$ be satisfied, then the following representations are valid:

$$\varphi_j = -\frac{1}{\lambda_j^3} \int_0^1 \varphi_n^{(3)} \cos(\lambda_n x) dx =: -\frac{\varphi_j'''}{\lambda_j^3},$$

$$f_j(t) = -\frac{1}{\lambda_j} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \cos(\lambda_n x) dx =: -\frac{f_{xj}'''}{\lambda_j}, \quad (26)$$

where φ_n''' , f_{xn} are coefficients of the expansion of function $\varphi'''(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ in series with respect to the function system $\{\sqrt{2} \cos(\pi n x)\}_{n \geq 1}$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n'''|^2 \leq \|\varphi'''\|_{L_2[0,1]}^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{xn}|^2 \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_{L_2[0,1] \times C[0,T]}^2. \quad (27)$$

Proof. We get formula (26), when applying integration by parts to the integrals (20). Estimates (27) represent the Bessel inequalities with respect to the orthonormal system $\{\sqrt{2} \cos(\pi n x)\}_{n \geq 1}$.

In view of lemmas 1 and 2 series (6), (23)-(25) with any $(x, t) \in D$ is majorized by the convergent series

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^2 |\varphi_j| + \|f_j(t)\|) = c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j'''}{\lambda_j} + c_2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_{xj}|}{\lambda_j}.$$

Using Bessel's inequality, we get

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^2 |\varphi_j| + \|f_j(t)\|) \leq c_1 \|\varphi'''\|_{L_2[0,1]} + c_2 \|f_x\|_{L_2[0,1] \times C[0,T]}.$$

Then series (5), (20), (24) converge absolutely and uniformly on D , i. e., function (5) satisfies conditions (2)- (3).

For the initial boundary value problem the following theorem holds

Theorem 1. Let $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $f(x, [t]) \in C^1(D)$ and

$$-a^2 \pi^2 < b < a^2 \pi^2 \left(\frac{e^{a^2 \pi^2} + 1}{e^{a^2 \pi^2} - 1}\right) \quad (28)$$

be satisfied, then there exists a unique solution of the integral equation (19) such that $u(x, t) \in C^{2,1}(D)$.

Proof From (15) it follows that assertion is true if $|E_j(1)| < 1$. Solving the inequalities

$$-1 < e^{-a^2 \lambda_j^2} - \frac{b}{a^2 \lambda_j^2} (1 - e^{-a^2 \lambda_j^2}) < 1$$

for b prove the proposition. Furthermore, $u(x, t)$ approaches zero with an exponential rate

$$|u(x, t)| \leq |\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |v_{nj}(t) \sin(\lambda_j x)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_j^2}\right) \varphi_j + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_k^2}\right) (|f_{k-1,j}(k-1)| + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} (|f_{nj}(n)|(n+t))) \right] \exp\left\{\frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \left(\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{b}{a^2 \lambda_k^2}\right) + 2\right) \|q\| t\right\} + |\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} (1 - e^{-a^2 \lambda_j^2}) E_j(t-n) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} E_j^{n-k-1}(1) f_{kj}(k) \sin(\lambda_j x)| +$$

$$\leq \sqrt{2}C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi'_j}{\lambda_j} + \sqrt{2}C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f'_{j[\tau]}}{\lambda_j} \leq \sqrt{2}C \sum_{j=1}^{\infty} (|\frac{\varphi'_j}{\lambda_j}| + |\frac{f'_{j[\tau]}}{\lambda_j}|),$$

In order for the function $u(x, t)$ to be a classical solution of the problem under investigation, we check the existence of derivatives of the function $u(x, t)$

$$\begin{aligned} |u_t(x, t)| &\leq |\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |T'_{nj}(t) \sin(\lambda_j x)| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |E'_j(t-n) E_j^n(1) v_{0j}(0)| \\ &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \sum_{k=1}^n E'_j(t-n) E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau) v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau \\ &+ \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\ &- \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\ &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} (f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau) |(n+t)|) \end{aligned}$$

$$|\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-n)} f_{nj}(n) \sin(\lambda_j x)| \leq \sqrt{2} C_1 \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \sqrt{2} C_2 \|f\|_{L_2[0,1]},$$

$$\begin{aligned} |u_{xx}(x, t)| &\leq |\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |v_{nj}(t) \lambda_j^2 \sin(\lambda_j x)| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |E_j(t-n) E_j^n(1) v_{0j}(0)| \\ &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \sum_{k=1}^n E_j(t-n) E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [f_{k-1,j}(k-1) + q(\tau) v_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau \\ &+ \int_0^n [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\ &- \int_0^t [f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\ &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} (f_{nj}(n) + q(\tau) v_{nj}(\tau) |(n+t)|) \end{aligned}$$

$$|\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} (1 - e^{-a^2 \lambda_j^2}) E_j(t-n) \sum_{k=0}^{n-1} E_j^{n-k-1}(1) f_{kj}(k) \sin(\lambda_j x)|$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-n)} f_{nj}(n) \sin(\lambda_j x)| &\leq \sqrt{2} \tilde{C}_1 \sum_{j=1}^{\infty} |\frac{\varphi'_j}{\lambda_j}| + \sqrt{2} \tilde{C}_2 \sum_{j=1}^{\infty} |\frac{f'_{j[\tau]}}{\lambda_j}| \leq \\ &\leq \sqrt{2} \tilde{C}_1 \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + \sqrt{2} \tilde{C}_2 \|f\|_{L_2[0,1]} \end{aligned}$$

Let us derive an estimate for the norm of the difference between the solution of the original integral equation (10) and the solution of this equation with perturbed functions \tilde{q} , $\tilde{\varphi}_n$, and \tilde{f}_n . Let $\tilde{v}_{nj}(t)$ be solution of the integral equation (15) corresponding to the functions \tilde{q} , $\tilde{\varphi}_n$, \tilde{f}_n ; i.e.,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{nj}(t) &= E_j(t-n) E_j^n(1) \tilde{v}_{0j}(0) + \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} E_j(t-n) \sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1) \int_{k-1}^k [\tilde{f}_{k-1,j}(k-1) \\ &+ \tilde{q}(\tau) \tilde{T}_{k-1,j}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (k-\tau)} d\tau - \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^n [\tilde{f}_{nj}(n) + \tilde{q}(\tau) \tilde{v}_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau \\ &+ \frac{1}{a^2 \lambda_j^2} \int_0^t [\tilde{f}_{nj}(n) + \tilde{q}(\tau) \tilde{v}_{nj}(\tau)] e^{-a^2 \lambda_j^2 (t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \tag{29}$$

Composing the difference $v_{nj}(t) - \tilde{v}_{nj}(t)$ with the help of the equations (15), (29) and introducing

the notations $\hat{v}_{nj}(t) = v_{nj}(t) - \tilde{v}_{nj}(t)$, $\hat{q} = q(t) - \tilde{q}(t)$, $\hat{\varphi}_n(t) = \varphi_n(t) - \tilde{\varphi}_n(t)$, $\hat{f}_n(t) = f_n(t) - \tilde{f}_n(t)$ we obtain the integral equation

$$\begin{aligned} \hat{v}_{nj}(t) = & E_j(t-n)E_j^n(1)\hat{v}_{0j}(0) + \frac{1}{a^2\lambda_j^2}E_j(t-n)\sum_{k=1}^n E_j^{n-k}(1)\int_{k-1}^k [\hat{f}_{k-1,j}(k-1) \\ & + \hat{q}(\tau)v_{k-1,j}(\tau) + \tilde{q}(\tau)\hat{v}_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(k-\tau)}d\tau \\ & - \frac{1}{a^2\lambda_j^2}\int_0^n [\hat{f}_{nj}(n) + \hat{q}(\tau)v_{nj}(\tau) + \tilde{q}(\tau)\hat{v}_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)}d\tau \\ & + \frac{1}{a^2\lambda_j^2}\int_0^t [\hat{f}_{nj}(n) + \hat{q}(\tau)v_{nj}(\tau) + \tilde{q}(\tau)\hat{v}_{nj}(\tau)]e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)}d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

from which, is derived the following linear integral inequality for Using the Lemma 2 from last inequality, we arrive at the estimate:

$$\begin{aligned} |\hat{v}_{nj}(t)| \leq & (1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})|\hat{\varphi}_j| + \frac{b}{a^2\lambda_j^2}(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})\sum_{k=1}^n \frac{|\hat{f}_{k-1,j}(k-1)|}{a^2\lambda_j^2} + \frac{2}{a^2\lambda_j^2}|\hat{f}_{nj}(n)|t \\ & \| \hat{q} \| (\frac{1}{a^2\lambda_j^2}(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2}) + \frac{2}{a^2\lambda_j^2}t)|v_{nj}(n)| \\ & + \| \tilde{q} \| (\frac{1}{a^2\lambda_j^2}(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})\sum_{k=1}^n \frac{1}{a^2\lambda_j^2} + \frac{2}{a^2\lambda_j^2})\int_0^t |\hat{v}_{nj}|e^{-a^2\lambda_j^2(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

Using the Gronou inequality, we arrive at the estimate:

$$\begin{aligned} |\hat{v}_{nj}(t)| \leq & [(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})|\hat{\varphi}_j| + (\frac{1}{a^4\lambda_j^4}(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})t + \frac{2}{a^2\lambda_j^2})|\hat{f}_{nj}(n)|t \\ & + \| \hat{q} \| (\frac{1}{a^4\lambda_j^4}(1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})t^2 + \frac{2t}{a^2\lambda_j^2})((1 + \frac{b}{a^2\lambda_j^2})|\varphi_j| + \frac{1}{a^2\lambda_j^2}|f_{nj}(n)| \\ & + \frac{b}{a^2}\sum_{k=1}^n (\frac{|f_{k-1,j}(k-1)|}{\lambda_k^2})\exp\{\frac{\|q\|}{a^2\lambda_1^2}((1 + \frac{b}{a^2\lambda_1^2})n + 1)t\}] \\ & \times \exp\{\frac{\|\tilde{q}\|}{a^2\lambda_1^2}((1 + \frac{b}{a^2\lambda_1^2})t^2 + \frac{2}{a^2\lambda_1^2})\}. \end{aligned}$$

Indeed, the expression (22) is stability estimate for the solution to the problem (1)-(3). The uniqueness of this solution follows from (22).

REFERENCES:

1. Aftabizadeh, A.R. and Wiener, J., *Oscillatory properties of first order linear functional differential equations*, *Apphcable Anal.* 20 (1985), 165-187.
2. Aftabizadeh, A.R., Wiener, J. and XU, J.-M., *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987), 673-679.
3. Cooke, K.L. and Wiener, J., *Retarded differential equations with piecewise constant delays*, *J. Math. Anal. App.* 99 (1984), 265-297.
4. Cooke, K.L. and Wiener, J., *An equation alternately of retarded and advanced type*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987), 726-732.
5. Wiener, J. and Cooke, K.L., *Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument*, *J. Math. Anal. Appl.* 137 (1989), 221-239.
6. Wiener, J., *Boundary-value problems for partial differential equations with piecewise constant delay*, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 14 (1991), 301-321
7. Wiener, J. and Debnath, L., *Partial differential equations with piecewise constant delay*, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 14 (1991), 485-496.
8. Wiener, J., *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1993

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DIFFUSION-WAVE EQUATION WITH A TIME-FRACTIONAL DERIVATIVE

*Subkhonova Ziyoda Anvar kizi,
Romanovskiy Institute of Mathematics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Bukhara State University,
Bukhara, 200117, Republic of Uzbekistan
subhonorvaziyoda5@gmail.com*

Abstract. *In this paper, the Cauchy problem for a multidimensional diffusion-wave equation with a time-fractional derivative is studied, and its fundamental solution is obtained. First, by using the method of successive approximations, the existence and uniqueness of the solution to the direct problem are proved. It is also shown that the solution of the corresponding integral equation represents the classical solution of the problem.*

Keywords: *Gerasimov-Caputo fractional derivative, Fox H-function, Mittag-Leffler function, integral equation, uniqueness.*

VAQT KASR HOSILALI DIFFUZIYA-TO‘LQIN TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada vaqt kasr hosilasiga ega ko‘p o‘lchamli diffuziya-to‘lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi o‘rganilgan va uning fundamental yechimi topilgan. Avvalo, ketma-ket yaqinlashishlar usuli yordamida to‘g‘ri masalaning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Shuningdek, mos integral tenglama yechimi masalaning klassik ma‘nodagi yechimini ifodalashi ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *Gerasimov-Caputo kasr hosilasi, Foksning H-funksiyasi, Mittag-Leffler funksiyasi, integral tenglama, yagonalik.*

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Аннотация. *В данной работе исследуется задача Коши для многомерного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной по времени, и получено его фундаментальное решение. Сначала методом последовательных приближений доказаны существование и единственность решения прямой задачи. Также показано, что решение соответствующего интегрального уравнения представляет собой классическое решение рассматриваемой задачи.*

Ключевые слова: *дробная производная Герасимова-Капуто, H-функция Фокса, функция Миттага-Леффлера, интегральное уравнение, единственность.*

Introduction. Today, fractional differential equations are of significant interest in both mathematics itself and in its applications. These equations are used to model many physical and chemical processes, for instance, the mass transfer processes in media with fractal properties (see, e.g., [1–4]).

In the domain $D_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]\}$, $n \geq 3$, we consider a fractional-wave equation with a convolution-type integral term

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = \int_0^t k(x', \tau) u(x, t - \tau) d\tau + f(x, t), (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

with initial conditions

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

where $f(x, t)$, $\varphi(x)$, and $\psi(x)$ are given sufficiently smooth functions, $1 < \alpha < 2$ and ${}^C D_t^\alpha$ is the Caputo fractional derivative with respect to the time variable

Direct problem 1. The regular solution to the problem (1), (2) is understood as a function $u(x,t)$ defined in a closed domain D_T and satisfying the conditions listed below:

- 1) $u(x,t)$ is twice continuously differentiable with respect to x for each $t > 0$.
- 2) For each $x \in \mathbb{R}^n$ the Caputo derivative ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha$ is continuous with respect to $t > 0$
- 3) $u(x,t)$ satisfies (1), (2).

Before we present the main material, we define the function classes and provide the known results that will be used further.

Preliminary information. Define the functional spaces for given and unknown functions.

Let $\mathbf{C}^{m,\alpha}(D_T)$ be a class of functions continuous in D_T , m times continuously differentiable with respect to x , and bounded together with all their derivatives up to the order m inclusively in D_T for which there exists a continuous derivative D_t^α , and suppose that $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}^n) =: \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ is a common space of continuous and bounded functions.

We also introduce the class $\mathbf{H}^l(\mathbb{R}^n)$ of bounded and Hölder continuous functions on \mathbb{R}^n with $l \in (0, 1)$.

The space $\mathbf{H}^{m+l}(\mathbb{R}^n)$ (m is a nonnegative integer number) and the norms $|\cdot|^l$,

$|\cdot|^{m+l}$ in it are defined in ([7], pp. 16–27). By $\mathbf{C}^m \in [0, T]$, $\mathbf{H}^l(\mathbb{R}^n)$ we denote the class of functions with the values in $\mathbf{H}^l(\mathbb{R}^n)$ that are m times continuously differentiable with respect to t on the segment $[0, T]$. For a fixed t the norm of the function $f(x, t)$ in $\mathbf{H}^l(\mathbb{R}^n)$ is denoted by $f^l(t)$. The norm of the function $f(x, t)$ in $\mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}^l(\mathbb{R}^n))$ is defined as

$$\|f^l\| := \max_{t \in [0, T]} [|f^l(t)|].$$

The Fox $H(z)$ function, which is defined using a Mellin-Barnes type integral as follows [5]:

$$H_{p,q}^{m,n}(z) \equiv H_{p,q}^{m,n} [z]_{(a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p)}^{(b_1, B_1), \dots, (b_q, B_q)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds,$$

where

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{l=1}^n \Gamma(1 - a_l - A_l s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{l=n+1}^p \Gamma(a_l + A_l s)} \quad (3)$$

here L is some contour separating the poles of two factors in the numerator, $0 \leq n \leq p, 1 \leq m \leq q, A_l, B_j \in \mathbb{R}^+ := (0, +\infty), a_l, b_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), l = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$,

$$\zeta_{j\nu} = -\left(\frac{b_j + \nu}{B_j}\right), j = 1, 2, \dots, m; \nu = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_\lambda(b_j + \nu) \neq B_j(a_\lambda - k - 1), j = 1, 2, \dots, m; \lambda = 1, 2, \dots, n; \nu, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{j=1}^q A_j, \quad (5)$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^n A_j - \sum_{j=n+1}^p A_j + \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{j=m+1}^q B_j. \quad (6)$$

$$\delta = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=n+1}^p a_j + \frac{p-q}{2}. \quad (7)$$

Let $u(x, t)$ be the solution to the equation

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) - \Delta u = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \quad (8)$$

with the initial condition

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (9)$$

Pskhu [6] found a fundamental solution via the Wright functions for the operator ${}^C\mathcal{D}_t^\alpha - \Delta$. In paper [5], Kochubei investigated the Cauchy problem (5), (6) with a more general uniformly elliptic operator L instead of Δ , where

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (\partial^2) / (\partial x_i \partial x_j) + \sum_{i,j=1}^n b_j(x) (\partial) / (\partial x_j) + c(x)$$

It is clear that in the case $a_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} is the Kronecker symbol, $b_j = c = 0, i, j = 1, \dots, n, L = \Delta$. For this case it follows from [5] that the solution to Eqs. (5), (6) can be represented as

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(x - \xi, t)\varphi(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(x - \xi, t)\psi(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau)F(\xi, \tau)d\xi d\tau, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (10)$$

where the triple $Z_1(x, t), Z_2(x, t), Y(x, t)$ is the fundamental solution of the n -dimensional fractional diffusion equation with the Caputo derivative in term of the H -Fox function:

$$Z_j(x, t) = \frac{t^{j-1}}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|x|^n} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (j, \alpha) \\ (\frac{n}{2}, 1), (1, 1) \end{matrix} \right], \quad j = 1, 2, \\ Y(x, t) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|x|^n} t^{\alpha-1} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|x|^2}{4t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (\alpha, \alpha) \\ (\frac{n}{2}, 1), (1, 1) \end{matrix} \right]. \quad (11)$$

In the study of the problem formulated in this paper, we need the estimates for the functions $Z_1(x, t), Z_2(x, t)$, and $Y(x, t)$ and some their derivatives. They were obtained in the earlier mentioned paper [5].

Let us provide them for the case $n \geq 3$. Assume that $m = (m_1, \dots, m_n)$ is a multiindex, where

$$|m| = m_1 + \dots + m_n \text{ and}$$

$$D_x^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad D_x^0 v = v.$$

In what follows, the letters C and σ denote different positive constants. For $n \geq 3$ the required estimates have the form [5]

$$|D_x^m Z_1(x - \xi, t)| \leq Ct^{-\alpha} |x - \xi|^{-n+2-|m|} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad |m| \leq 3; \quad (12)$$

$$|D_x^m Z_2(x - \xi, t)| \leq Ct^{-\alpha+1} |x - \xi|^{-n+2-|m|} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad |m| \leq 3; \quad (13)$$

$$|Y(x - \xi, t)| \leq Ct^{-\alpha-\frac{\alpha n}{2}-1} \mu_n(t^{-\frac{\alpha}{2}} |x - \xi|) \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad (14)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} Y(x - \xi, t) \right| \leq Ct^{-\alpha-1} |x - \xi|^{-n+3} \rho_\sigma(x, \xi, t); \quad (15)$$

$$|D_x^m Y(x - \xi, t)| \leq Ct^{-1} |x - \xi|^{-n+2-|m|} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad |m| \leq 3; \quad (16)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} Z_1(x - \xi, t) \right| \leq Ct^{-\alpha-1} |x - \xi|^{-n+2} \rho_\sigma(x, \xi, t); \quad (17)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} Z_2(x - \xi, t) \right| \leq Ct^{-\alpha} |x - \xi|^{-n+2} \rho_\sigma(x, \xi, t); \quad (18)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} Y(x - \xi, t) \right| \leq Ct^{-\alpha-\frac{\alpha n}{2}-2} \mu_n(t^{-\frac{\alpha}{2}} |x - \xi|) \rho_\sigma(x, \xi, t); \quad (19)$$

$$|D_t^\alpha Z_1(x - \xi, t)| \leq Ct^{-2\alpha} |x - \xi|^{-n+2} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad (20)$$

$$|D_t^\alpha Z_2(x - \xi, t)| \leq Ct^{-2\alpha+1} |x - \xi|^{-n+2} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad (21)$$

$$|D_t^\alpha Y(x - \xi, t)| \leq Ct^{-\alpha-1} |x - \xi|^{-n+2} \rho_\sigma(x, \xi, t), \quad (22)$$

where

$$\mu_n(z) = \begin{cases} 1, & n = 3; \\ 1 + |\log z|, & n = 4; \\ z^{-n+4}, & n \geq 5, \end{cases} \quad (23)$$

$$\rho_\sigma(x, \xi, t) = \exp\{-\sigma(t^{-\frac{\alpha}{2}} |x - \xi|)^{\frac{2}{2-\alpha}}\}, \quad \sigma > 0. \quad (24)$$

We also note that it follows from the construction of the functions $Z_1(x, t), Z_2(x, t), Y(x, t)$ the following identities: [5]

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_1(x, t) dx = 1, \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_2(x, t) dx = t, \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Y(x, t) dx = C_0 t^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Study of the direct problem

Lemma 1. Let $k(x', t) \in C(H^l(\mathbb{R}^{n-1}), [0, T])$, $(x, t) \in C(H^l(\mathbb{R}^n), [0, T])$, $f\varphi(x) \in H^l(\mathbb{R}^n), \psi(x) \in H^l(\mathbb{R}^n), l \in (0, 1)$. Then there exists a unique solution to the direct problem such that $u(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_T)$.

By substituting the expression $\int_0^t k(\tau)u(x, t - \tau)d\tau + f(x, t)$ instead of $F(x, t)$ into (10), we obtain the integral equation

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \zeta) u(\xi, \tau - \zeta) d\zeta d\xi d\tau, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (28)$$

where

$$u_0(x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} Z_1(x - \xi, t)\varphi(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(x - \xi, t)\psi(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau. \tag{29}$$

We show that the solution to the integral Eq. (28) satisfies the initial conditions (2). For this purpose, we make a replacement $x_i - \xi_i = t^{\alpha/2}y_i$ in the fundamental solutions defined in (8):

$$Z_1(t^{\frac{\alpha}{2}}y, t) = \frac{t^{-\frac{\alpha n}{2}}}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|y|^n} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|y|^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1,\alpha) \\ (\frac{n}{2},1), (1,1) \end{matrix} \right] = t^{-\frac{\alpha n}{2}} Z(y, 1),$$

$$Z_2(t^{\frac{\alpha}{2}}y, t) = t^{1-\frac{\alpha n}{2}} Z(y, 1),$$

$$Y\left(\left(t - \tau\right)^{\frac{\alpha}{2}}y, t - \tau\right) = \frac{t^{\alpha-1-\frac{\alpha n}{2}}}{(\pi)^{\frac{n}{2}}|y|^n} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|y|^2}{4} \middle| \begin{matrix} (1,\alpha) \\ (\frac{n}{2},1), (1,1) \end{matrix} \right].$$

Consider the limit values of these expressions as $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{\alpha n}{2}} t^{\frac{\alpha n}{2}} Z_1(y, 1)\phi(x - t^{\frac{\alpha}{2}}) dy = \phi(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} t^{1-\frac{\alpha n}{2}} t^{\frac{\alpha n}{2}} Z_2(y, 1) \psi_{y_{ny_n}}(x - t^{\frac{\alpha}{2}}) dy = 0,$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1-\frac{\alpha n}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}} (t - \tau)^{\frac{\alpha n}{2}} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|y|^2}{4} \middle| \begin{matrix} (\alpha,\alpha) \\ (\frac{n}{2},1), (1,1) \end{matrix} \right] f(x - (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}}, \tau) dy$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^\alpha}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha-1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^n} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|y|^2}{4} \middle| \begin{matrix} (\alpha,\alpha) \\ (\frac{n}{2},1), (1,1) \end{matrix} \right] f(x - t^{\frac{\alpha}{2}}(1 - \theta)^{\frac{\alpha}{2}}, \theta t) dy = 0,$$

and, in the same way, we can show that

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \zeta)v(\xi, \tau - \zeta) d\zeta d\xi = 0.$$

By differentiating Eq. (28) once with respect to t and putting we can similarly show that the second condition (2) also takes place.

Proof of Lemma. We use the method of successive approximations and consider a sequence of functions

$$u_n(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Y(x - \xi, t - \tau) \int_0^\tau k(\xi', \zeta)u_{n-1}(\xi, \tau - \zeta) d\zeta d\xi \quad n = 1, 2, \dots, \tag{30}$$

where is determined by equality (29). We introduce the following denotations: $\varphi_0 := \|\varphi\|^l$, $\psi_0 := \|\psi\|^l$, $f_0 := \|f\|^l$, $k_0 := \|k\|^l$. and Using (30) and (25)–(27), we estimate the absolute value of in the domain . Then we obtain

$$|u_0(x, t)| \leq \varphi_0 + t\psi_0 + C_0 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f_0 d\tau \leq \varphi_0 + \psi_0 T + \frac{f_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} =: C^0,$$

$$|u_1(x, t)| \leq C_0 k_0 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = C_0 \frac{k_0 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} T^\alpha,$$

$$|u_2(x, t)| \leq C_0 \frac{k_0 \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \tau^\alpha d\tau = C_0^2 \frac{k_0^2 \Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} T^{2\alpha}.$$

For arbitrary $j = 1, 2, \dots$, we have

$$u_j(x, t) \leq C_1 \frac{(C_0 k_0 \Gamma(\alpha))^j}{\Gamma(j(\alpha+1))} T^{j\alpha}.$$

The above given estimates imply that the series $u(x, t) = \sum_{j=0}^\infty u_j(x, t)$

converges uniformly in \bar{D}_T , because it can majorized in by a convergent number series

$$|u(x, t)| \leq \sum_{j=0}^\infty \frac{(C_0 k_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha)^j}{\Gamma((n\alpha+1))} = E_\alpha(C_0 k_0 \Gamma(\alpha) T^\alpha),$$

where $E_\alpha(\cdot)$ is the one parameter Mittag-Leffler function of a nonnegative real argument.

Under the conditions of the lemma and on the basis of estimates (9)–(21) $u_j(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_T)$ According to the general theory of integral equations, this means that this property also holds for the function $u(x, t)$ in D_T , which is a solution to the integral Eq. (28).

REFERENCES:

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and application of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. R. Gorenflo and F. Mainardi, "Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order," in *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Ed. by A. Carpinteri and F. Mainardi, International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 378 (Springer, Vienna, 1997), pp. 233–276. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2664-6_5
3. Schneider W. R. and Wyss W., "Fractional diffusion and wave equations," *J. Math. Phys.* 30, 134–144 (1989). <https://doi.org/10.1063/1.528578>
4. E. Orsingher and L. Beghin, "Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time," *Probab. Theory Relat. Fields* 128, 141–160 (2004). <https://doi.org/10.1007/s00440-003-0309-8>
5. Kochubei A. N., "Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients," *Appl. Anal.* 93, 2211–2242 (2014). <https://doi.org/10.1080/00036811.2013.875162>
6. Pskhu A. V., "The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order," *Izv. Math.* 73, 351–392 (2009). <https://doi.org/10.1070/im2009v073n02abeh002450>
7. Ladyžhenskaja O. A., Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N., *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23 (American Mathematical Society, 1968). <https://doi.org/10.1090/mmono/023>
8. Дурдиев Д.К., Субхонова З.А., Х.Х. Турдиев. Задача определения многомерного ядра в диффузионно-волновом уравнении с дробной производной по времени. *Изв. Вузов. Матем.*, 2025, 7, 20–35.
9. Subhonova Z. A., Rahmonov A. A. "Problem of Determining the Time Dependent Coefficient in the Fractional Diffusion-Wave Equation", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 687–700.
10. Durdiev D. K., Subhonova Z. A. Kernel identification problem in a time-fractional wave equation. *Uzbek Mathematical Journal*, 2025, 69(3), 50–63.
11. Subhonova Z.A. A Cauchyproblem for a fractional integro-differential diffusion-wave equation. *Scientific reports of Bukhara State University*, 2025, 8, 27–35. (01.00.00; №3)

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГИХ ДВУХСЛОЙНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Болтаев Зафар Ихтиёрвич,
Бухарский государственный
технический университет, Узбекистан
boltayev-z@mail.ru,

Хожиев Азизжон Холмуродович,
Бухарский государственный
технический университет, Узбекистан
azizhojiyev1979y@mail.ru,

Махмудова Дилрабо Махсудовна,
Самаркандский государственный
архитектурно-строительный университет, Узбекистан.
dilrabotahmudova521@gmail.com,

Бутунов Жахонгир Рузикулович,
Чирчикский государственный
педагогический институт, Узбекистан.
butunov.j@cspi.uz,

Гаффарова Райхон Иброхимовна,
1-й ИДУМ, Бухарская область, Бухарский район, Узбекистан
gafforovaraixon1@gmail.com.

Аннотация. Конструкции из многослойных вязкоупругих пластин и оболочек, взаимодействующих с деформируемой средой, широко применяются в технике и строительстве. В работе рассматривается распространение осесимметричных волн в вязкоупругой бесконечно длинной двухслойной цилиндрической оболочке, между слоями оболочка заполнена вязкоупругим материалом. Целью работы является исследование зависимости комплексной фазовой скорости от волнового числа, а также построение соответствующих форм колебаний двухслойных вязкоупругих цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: свободная волна, вязкоупругая цилиндрическая оболочка, наполнитель, продольно-поперечная волна, волна кручения.

TO‘LDIRGICHLI QOVUSHOQELASTIK IKKI QATLAMLI SILINDRIK QOBIQLARDAGI
O‘QGA SIMMETRIK TO‘LQINLAR

Annotatsiya. Deformatsiyalanuvchi muhit bilan o‘zaro ta’sirdagi ko‘p qatlamli qovushoq elastik plastina va qobiqlardan yasalgan konstruksiyalar texnika va qurilishda keng qo‘llaniladi. Mazkur ishda qatlamlari orasiga qovushoq elastik material to‘ldirilgan cheksiz uzun ikki qatlamli silindrik qobiqda o‘qqa simmetrik to‘lqinlarning tarqalishi ko‘rib chiqilgan. Tadqiqotning maqsadi kompleks faza tezligining to‘lqin soniga bog‘liqligini o‘rganish hamda ikki qatlamli qovushoq elastik silindrik qobiqlarning mos tebranish shakllarini qurishdan iborat.

Kalit so‘zlar: erkin to‘lqin, qovushoq elastik silindrik qobiq, to‘ldirgich, bo‘ylama-ko‘ndalang to‘lqin, buralma to‘lqin.

AXISYMMETRIC WAVES IN VISCOELASTIC TWO-LAYER CYLINDRICAL SHELLS
WITH A FILLER

Abstract. Structures made of multilayered viscoelastic plates and shells interacting with a deformable medium are widely used in engineering and construction. This paper examines the propagation of axisymmetric waves in an infinitely long, two-layer viscoelastic cylindrical shell, with the space between the layers filled with a viscoelastic material. The aim of this work is to investigate the dependence of the complex phase velocity on the wave number, as well as to construct the corresponding oscillation modes of two-layer viscoelastic cylindrical shells.

Keywords: free wave, viscoelastic cylindrical shell, filler, longitudinal-transverse wave, torsional wave.

Введение. Конструкции в виде многослойных вязкоупругих (полимерных) пластин и оболочек, взаимодействующих с деформируемой средой, нашли широкое применение в технике и строительстве. В частности, к такой расчётной схеме приводятся задачи, возникающие при проектировании подземных и подводных ёмкостей и трубопроводов [1-4]. При получении уравнений движения трёхслойных тел использованы трёхмерные уравнения теории упругости и теории оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява, а также Тимошенко [5,6]. Однако, до сих пор не были разработаны общие методики и алгоритмы для расчёта двухслойных вязкоупругих конструкций при воздействии динамических нагрузок.

При рассмотрении нормальных волн на границе контакта «упругое тело - жидкость» обычно различают два типа пар материалов [7,8]. Пара «жёсткое упругое тело - жидкость» характеризуется тем, что скорость волны сдвига материала упругого тела превышает скорость звука в жидкости. Для пары «мягкое упругое тело – жидкость» наоборот, скорость волны сдвига меньше скорости звука в жидкости.

Задачи о распространении свободных волн в элементах конструкций трёхслойных пластин рассмотрены в работах [9,10] с учётом вязкоупругих свойств материала пластины и заполнителя. Уравнения движения заполнителя описываются уравнениями Ламе с непрерывными членами, а для обшивок используется гипотеза Кирхгофа. Получены дисперсионные уравнения, и определены фазовые скорости для симметричных и антисимметричных волн.

Осесимметричные свободные волны в бесконечно длинной цилиндрической оболочке с упругим заполнителем исследованы в работах [11,12]. Задача о распространении свободных волн в системе «пластина – упругое основание» или «оболочка – заполнитель», в упрощённой постановке решена в работах [13,14]. Для построения дисперсионных кривых свободных волн использовано уравнение пластин типа Тимошенко.

Проблемы взаимодействия слоистых вязкоупругих конструкций со сплошными средами требует дальнейших исследований [15,16].

Настоящая работа посвящена исследованию распространения осесимметричные волны в вязкоупругих двухслойных цилиндрических оболочках с заполнителем. Вязкоупругие свойства материалов учитываются применением наследственного интеграла Больцмана-Вольтера.

Методы.

Постановка задачи и методы решения

Пусть дана бесконечно длинная двухслойная цилиндрическая оболочка, между слоями оболочка заполнена вязкоупругим материалом. Исследуется распространение собственных волн в данной конструкции (рисунок 1).

Осесимметричное движение оболочки описывается уравнениями, полученными на основе гипотез Кирхгофа-Лява

$$\|L_{ijk}\| \Gamma_{Gk} \vec{U}_k = \vec{P}_k (k=1,2) \tag{1}$$

здесь индекс $k=1$ относится к внутренней цилиндрической оболочке, а $k=2$ - внешней оболочке; $\vec{U}_{0k}(U_k, V_k, W_k)$ - вектор перемещений точек срединной поверхности несущего слоя,

$$\|L_{ijk}\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu_{0k}}{2R_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1+\nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} & \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1+\nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} & \frac{1+\nu_{0k}}{2} (1+4a_k) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+a_k) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a_k (2-\nu_{0k}) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a_k}{R_k^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a_k (2-\nu_{0k}) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a_k}{R_k^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} & \frac{1}{R_k^2} + a_k \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{P}_k = \frac{(1-n_{0k}^2)}{G_{0k} h_{0k}} \vec{P}_k^m + \frac{(1-n_{0k}^2)}{G_{0k} h_{0k}} \frac{\partial^2 \vec{U}_{0k}}{\partial t^2};$$

ν_{0k} -коэффициент Пуассона оболочки; R_k -радиус срединной поверхности оболочки; ρ_{0k} -плотность материала оболочки; h_{0k} - толщина оболочки; G_{0k} -модуль мгновенного сдвига оболочки;

\vec{P}_k^m - внешняя нагрузка, которая воздействует на оболочку; $\Gamma_{Gk}=1-\Gamma_{Gk}^c(\omega_R)-i\Gamma_{Gk}^s(\omega_R)$; $\alpha_k^2 = \frac{h_k^2}{12R_k^3}$; $\Gamma_{Gk}^c(\omega_R), \Gamma_{Gk}^s(\omega_R)$ - соответственно, косинус и синус образа Фурье ядра релаксации материала.

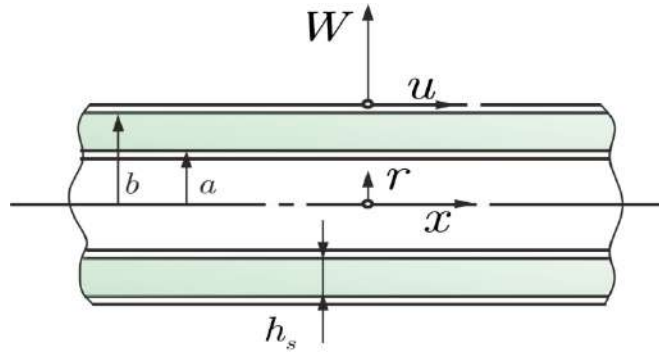


Рисунок 1. Расчётная схема двухслойной оболочки с наполнителем

Линейное уравнение движения наполнителя, в векторной форме, при отсутствии объёмных сил, принимает вид [17]:

$$(\tilde{\lambda}_c + 2\tilde{\mu}_c) \text{grad div} \vec{u}_c - \tilde{\mu}_c \text{rot rot} \vec{u}_c = \rho_c \frac{\partial^2 \vec{u}_c}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $R_{\lambda k}(t-\tau), R_{\mu k}(t-\tau)$ - ядра релаксации; λ_{k0}, μ_{k0} - мгновенные модули упругости; \vec{u} - вектор перемещений; ρ_c - плотность среды; $\vec{u}_j(u_{xj}, u_{\theta j}, u_{rj})$ - вектор перемещений точек j -го слоя наполнителя, ν_k - коэффициент Пуассона, который считаем не релаксирующей величиной [18].

Между слоями ставятся условия жёсткого или скользящего контакта. В случае жёсткого контакта на границе раздела ставится условие непрерывности соответствующих составляющих вектора перемещения и на поверхности наполнителя принимаем в форме (при $r=a, b$):

$$\sigma_{rr} = \pm q_{rk}; \sigma_{r\theta} = \pm q_{\theta k}; \sigma_{rx} = \pm q_{xk}; \quad u_r = W_k; u_\theta = V_k; u_x = U_k. \quad (3)$$

Если на границе раздела отсутствует трение, то

$$\sigma_{rr} = \pm q_{r1}(r=a); \sigma_{rr} = \pm q_{r2}(r=b); \quad \sigma_{rx} = \sigma_{r\theta} = 0; u_r = W_k. \quad (4)$$

Здесь принято, что контакт оболочек с наполнителем происходит по срединным поверхностям несущих слоёв; a и b - внутренний и наружный радиусы наполнителя; q_{rk} - нормальная реакция со стороны наполнителя на колебания оболочки.

Рассматривается распространение осесимметричных свободных волн с учетом вязкоупругих свойств материала. Для осесимметричного случая дисперсионные уравнения разделяются на два независимых уравнения и можно отдельно изучать распространение продольно-поперечных волн, а также волн кручения.

$$\begin{Bmatrix} U_k \\ W_k \\ u_x \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{k,n} \\ W_{k,n} \\ U_{x,n} \\ W_{r,n} \end{Bmatrix} \cos(n\theta) e^{i(\gamma x - \omega t)}, \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} V_k \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{k,n} \\ V_{\theta,n} \end{Bmatrix} \sin(n\theta) e^{i(\gamma x - \omega t)}, \quad (6)$$

здесь $U_{k,n}, W_{k,n}, U_{x,n}, W_{r,n}, V_{k,n}, V_{r,n}$ - амплитуды перемещений оболочки и наполнителя;

$c_{0p} = \left[\frac{2G_{0s}(1-\nu_s)}{\rho_s(1-2\nu_s)} \right]^{1/2}$ $\gamma = 2\pi/\lambda_\omega$; λ_ω, c_ω - волновое число, длина волн, фазовая скорость.

Подставляя (5) и (6) в (1), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & - \left[\gamma^2 \Gamma_k \rho_{0,k} \frac{1-\nu_{0,k}}{2G_k} \omega^2 + \frac{1-\nu_{0,k}}{2a_k^2} \Gamma_k n^2 \right] U_{k,n} + i\gamma \frac{(1+\nu_{0,k})n}{2a_k} \Gamma_k V_{k,n} + i\gamma \frac{\nu_{0,k}}{a_k} \Gamma_k W_{k,n} = 0; \left[\gamma^2 \Gamma_k - \right. \\ & \left. \frac{\rho_{0,k}}{G_k} \omega^2 \right] \frac{1-\nu_{0,k}}{2} + \frac{n^2}{a_k^2} \Gamma_k \left[V_{k,n} + i\gamma \frac{(1+\nu_{0,k})n}{2a_k} \Gamma_k U_{k,n} + \frac{n^2}{a_k^2} \Gamma_k W_{k,n} \right] = 0; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{h^2}{12}\left[\gamma^2 + \frac{n^2}{a_k^2}\right]^2 \Gamma_k \rho_{0,k} \frac{(1-\nu_{0,k})}{2G_k} \omega^2 + \Gamma_k \frac{1}{a_k^2}\right) W_{k,n} + i\gamma \Gamma_k \frac{\nu_{0,k}}{a_k} U_{k,n} + \frac{\Gamma_k n}{a_k^2} V_{k,n} = -\frac{(1-\nu_{0,k})}{2G_k h_k} q_{rk,n} \quad (7)$$

где $\Gamma_k = [1 - i\Gamma_0^g(\omega_R)]$

Внешняя нагрузка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q_{rk,n} &= -\frac{2G_0 k \chi^2}{1-\nu_{0,k}} [1 - i\Gamma_0^g(\omega_R)] \frac{W_{k,n}}{h_k}; \\ f(k) &= e_3 - \nu_{0,k} \eta^2 \frac{e_6}{\epsilon_k^2} + n^2 \frac{e_5}{\epsilon_k^4 e_4}; \\ e_1 &= \left[1 - \frac{1-\nu_{0,1}}{3} c_0^2\right] \eta^2 + \frac{1-\nu_{0,1}}{3} \frac{n^2}{\epsilon_k^2}; \\ e_2 &= \frac{1-\nu_{0,1}}{2} \left[1 - \frac{2}{3} c_0^2\right] \eta^2 + \frac{n^2}{\epsilon_k^2}; \\ e_3 &= \frac{\chi^2}{12} \left[\eta^2 + \frac{n^2}{\epsilon_k^2}\right] + \frac{1}{\epsilon_k^2} - \frac{1-\nu_{0,1}}{3} c_0^2 \eta^2; \\ e_4 &= \frac{(1+\nu_{0,1})^2}{4e_1} \eta^2 - \frac{n^2}{\epsilon_k^2} - e_2; \\ e_5 &= 1 - \frac{\nu_{0,1}(1+\nu_{0,1})}{2e_1} \eta^2; \\ e_6 &= \frac{e_5(1+\nu_{0,1})}{2e_1 e_4} \frac{n^2}{\epsilon_k^2} + \frac{\nu_{0,1}}{e_1}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{h}{R}, k_s = \frac{h_s}{h_2}, c_0^2 = \frac{3(2\xi + k_s)}{2\xi(1-\nu)}, \xi = \frac{G_0}{G_{0s}}, \\ h_1 &= h_2 = h, G_{01} = G_{02} = G_0, \rho_1 = \rho_2 = \rho. \end{aligned}$$

Уравнение (2) решается с помощью преобразования Грин-Лемба. Тогда перемещения точек определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} U_{x,n}(r) &= i\gamma \varphi_n + \frac{d^2 \psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n, \\ V_{\theta,n} &= -\frac{n}{r} \varphi_n + i\gamma \frac{n}{r} \psi_n - \frac{d\chi_n}{dr}, \\ W_{r,n}(r) &= \frac{d\psi_n}{dr} - i\gamma \frac{d\psi_n}{dr} + \frac{n}{r} \chi_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Потенциалы перемещений, входящие в уравнения (8), удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} - \frac{\varphi_n}{r^2} - [1 - M_p^2] \eta^2 \varphi_n &= 0, \\ \frac{d^2 \psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \frac{\psi_n}{r^2} - [1 - M_s^2] \eta^2 \psi_n &= 0, \\ \frac{d^2 \chi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi_n}{dr} - \frac{\chi_n}{r^2} - [1 - M_s^2] \eta^2 \chi_n &= 0, \\ M_s &= \frac{c_f}{c_{0p} [1 - i\Gamma_{0p}^g(\omega_R)]}, \\ M_s &= \frac{c_f}{c_{0c} [1 - i\Gamma_{0c}^g(\omega_R)]}, \\ c_{0p} &= \left[\frac{2G_{0c}(1-\nu_c)}{\rho_c(1-2\nu_c)}\right]^{1/2}, c_{0s} = \left[\frac{G_{0c}}{\rho_c}\right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Общие решение уравнение (9) имеют вид:

при $c_f < c_{0s} < c_{0p}$

$$\begin{aligned} \varphi_n(r, \gamma) &= A_n(\gamma) K_n(m\eta r) + B_n(\gamma) I_n(m\eta r); \\ \psi_n(r, \gamma) &= C_n(\gamma) K_n(m_s \eta r) + D_n(\gamma) I_n(m_s \eta r); \\ \chi_n(r, \gamma) &= E_n(\gamma) K_n(m_s \eta r) + L_n(\gamma) I_n(m_s \eta r); \end{aligned} \quad (10)$$

если $c_f > c_{0p}$

$$\begin{aligned} \varphi_n(r, \gamma) &= A_n(\gamma) K_n(\bar{m}\eta r) + B_n(\gamma) I_n(\bar{m}\eta r), \\ \psi_n(r, \gamma) &= C_n(\gamma) Y_n(\bar{m}_s \eta r) + D_n(\gamma) I_n(\bar{m}_s \eta r), \\ \chi_n(r, \gamma) &= E_n(\gamma) Y_n(\bar{m}_s \eta r) + L_n(\gamma) I_n(\bar{m}_s \eta r). \end{aligned} \quad (11)$$

Если известны потенциалы перемещений, тогда можно будет определить деформации и напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,n} &= \lambda_{0c} [1 - i\Gamma_c^\lambda(\omega_R)] \left[-\gamma^2 \varphi_n + \frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \varphi_n \right] + 2\mu_{0c} [1 - i\Gamma_c^\mu(\omega_R)] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} - i\gamma \frac{d^2 \psi_n}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \chi_n \right]; \\ \sigma_{r\theta,n} &= \mu_{0c} [1 - i\Gamma_c^\mu(\omega_R)] \cdot \left[\frac{2n}{r} \left[\frac{\varphi_n}{r} - \frac{d\varphi_n}{dr} \right] + 2in\gamma \frac{1}{r} \frac{d\psi_n}{dr} - \right. \\ &\left. - 2in\gamma \frac{1}{r^2} \psi_n + \frac{1}{r} \frac{d\chi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \chi_n - \frac{d^2 \chi_n}{dr^2} \right]; \\ \sigma_{rx,n} &= \mu_{0c} [1 - i\Gamma_c^\mu(\omega_R)] \left[\frac{2i\gamma}{dr} \frac{d\varphi_n}{dr} + \frac{d^3 \psi_n}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi_n}{dr^2} - \right. \\ &\left. - \frac{n^2 + 1}{2} \frac{d\psi_n}{dr} + \frac{2n^2}{r^3} \psi_n + \gamma^2 \frac{d\psi_n}{dr} + i \frac{n\gamma}{r} \chi_n \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Произвольные постоянные $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, L_n$ определяются из граничных условий. Тогда получаем систему однородных алгебраических уравнений. Для того чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно равенство нулю основного определителя системы:

$$\det \|a_{lj}\| = 0 \quad (l, j = 1, \dots, 6) \quad (13)$$

Элементы определителя имеют следующий вид:

($c_f < c_s$)

$$\begin{aligned} a_{11} &= m\eta s_1 - \frac{n}{\epsilon_1} s_2, a_{12} = -m\eta s_4 - \frac{n}{\epsilon_1} s_5, \\ a_{13} &= \left[m_s \eta s_7 - \frac{n}{\epsilon_1} s_8 \right] t_1, a_{14} = a_{13} = \\ &= \left[m_s \eta s_{10} + \frac{n}{\epsilon_1} s_{11} \right] t_1, \\ a_{15} &= \frac{n}{2\epsilon_1} s_8, a_{16} = \frac{n}{2\epsilon_1} s_{11}, a_{21} = m\eta - n s_3, \\ a_{22} &= -m\eta - n s_6, a_{23} = \left[m_s \eta - n s_9 \right] t_1, \\ a_{24} &= \left[m_s \eta + n s_{12} \right] t_1, a_{25} = \frac{n}{2} s_9, a_{26} = -\frac{n}{2} s_{12}, \\ a_{31} &= n \left[m_s \eta \epsilon_1 s_1 - (n-1) s_2 \right], \\ a_{32} &= -n \left[m\eta \epsilon_1 s_4 + (n-1) s_5 \right], \\ a_{33} &= n \left[m_s \eta \epsilon_1 s_7 + (n-1) s_8 \right], \\ a_{34} &= n \left[m_s \eta \epsilon_1 s_{10} + (n-1) s_{11} \right], \\ a_{35} &= m_s \eta \epsilon_1 s_7 + \left[\frac{m_s^2 \gamma^2 \epsilon_1^2}{2} + (n-1)n \right] s_8, \\ a_{36} &= m_s \eta \epsilon_1 s_{10} - \left[\frac{m_s^2 \gamma^2 \epsilon_1^2}{2} + (n-1)n \right] s_{11}, \\ a_{41} &= n \left[m\eta - (n-1) s_3 \right], \\ a_{42} &= -n \left[m\eta - (n-1) s_6 \right], \\ a_{43} &= n \left[m_s \eta - (n-1) s_9 \right], \\ a_{44} &= n \left[m_s \eta + (n-1) s_{12} \right], \\ a_{45} &= m_s \eta + \left[\frac{m_s^2 \eta^2}{2} + (n-1)n \right] s_9, \\ a_{46} &= m_s \eta - \left[\frac{m_s^2 \eta^2}{2} + (n-1)n \right] s_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{51} &= m\eta t_5 s_1 + [t_1 \eta^2 + t_6] s_2, \\
 a_{52} &= m\eta t_5 s_4 + [t_1 \eta^2 + t_6] s_5, \\
 a_{53} &= m_s \eta t_5 s_7 + [m_s^2 \eta^2 + t_6] s_8, \\
 a_{54} &= m_s \eta t_5 s_{10} - [m_s^2 \eta^2 + t_6] s_{11}, \\
 a_{55} &= \frac{1}{\epsilon_1} n \left[m_s \eta s_7 - \left[\frac{n-1}{\epsilon_1} - t_2 t_3 \right] s_8 \right], \\
 \eta &= \frac{\gamma h_2}{k_2}, k_k = \frac{h_k}{a_2}, \\
 a_{56} &= \frac{1}{\epsilon_1} n \left[m_s \eta s_{10} + \left[\frac{n-1}{\epsilon_1} - t_2 t_3 \right] s_{11} \right] \\
 t_1 &= \frac{1+m_s^2}{2}, t_2 = \frac{k\zeta}{1-\nu}, t_3 = f(1), t_4 = f(2), \\
 t_7 &= 1 - t_2 t_4, t_5 = \frac{1}{\epsilon_1} + t_2 t_3, t_6 = \frac{n(n-1)}{\epsilon_1^2} - \frac{n}{\epsilon_1} t_2 t_3, \\
 t_8 &= n(n-1) + n t_2 t_4, \\
 s_1 &= \frac{K_{n+1}(m\eta \epsilon_1)}{K_{n+1}(m\eta)}, \\
 s_2 &= \frac{K_n(m\eta \epsilon_1)}{K_{n+1}(m\eta)}, s_3 = \frac{K_n(m\eta)}{K_{n+1}(m\eta)}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В этой работе ограничиваемся рассмотрением распространения крутильных волн в вязкоупругих двухслойных конструкциях. Среди компонентов нагрузок на оболочку отсутствуют проекции заданной нагрузки, а также осевая и нормальная реакции заполнителя.

Движение заполнителя, в котором возбуждаются только волны кручения, описывается одним уравнением:

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = \frac{\rho_c}{G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g(\omega_R)]} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Отличные от нуля компоненты напряжения выражаются через тангенциальные смещения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} &= G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g(\omega_R)] \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \\
 \sigma_{\theta x} &= G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g(\omega_R)] \frac{\partial u_\theta}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Граничные условия запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= V_1 + \frac{h_1}{2} \psi_{y1}, \sigma_{r\theta} = -q_{\theta 1} [r = a_1], \\
 u_\theta &= V_2 + \frac{h_2}{2} \psi_{y2}, \sigma_{r\theta} = -q_{\theta 2} [r = a_2].
 \end{aligned} \tag{17}$$

В зависимости от величины фазовой скорости c_f решение уравнения (17) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= A(\gamma) K_1(m_s \eta r) + B(\gamma) I_1(m_s \eta r) \quad (M_s < 1), \\
 u_\theta &= A(\gamma) \frac{1}{r} + B(\gamma) r \quad (M_s = 1), \\
 u_\theta &= A(\gamma) Y_1(\bar{m}_s \eta r) + B(\gamma) I_1(\bar{m}_s \eta r) \quad (M_s > 1).
 \end{aligned}$$

Определяя с помощью формул (6) амплитуды напряжений в заполнителе и удовлетворяя затем условиям (7), получаем дисперсионное уравнение в виде:

$$\begin{aligned}
 \det \| a_{ij} \| &= 0 (i, j = 1, 2) \\
 a_{11} &= -m_s \eta s_4 - n_1 d_4 s_6, a_{12} = m_s \eta s_1 - n_1 d_4, \\
 a_{21} &= -m_s \eta s_5 + n_2 b_4, a_{22} = m_s \eta s_2 + n_2 b_4 s_3, \\
 s_1 &= \frac{I_2(m_s \eta)}{I_1(m_s \eta)}, s_2 = \frac{I_2(m_s \eta \epsilon_1)}{I_1(m_s \eta)}, s_3 = \frac{I_1(m_s \eta \epsilon_1)}{I_1(m_s \eta)}, \\
 s_4 &= \frac{K_2(m_s \eta)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}, s_5 = \frac{K_2(m_s \eta \epsilon_1)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}, s_6 = \frac{K_1(m_s \eta)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 n_1 &= k_1 \gamma_1, n_2 = k_2 \gamma_2, \\
 \gamma_1 &= \frac{G_{01} [1 - i\Gamma_{01}^g]}{G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g]}, \gamma_2 = \frac{G_{02} [1 - i\Gamma_{02}^g]}{G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g]}.
 \end{aligned}$$

При $M_s > 1$ элементы определителя вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \bar{m}_s \eta Y_2(\bar{m}_s \eta) - n_1 d_4 Y_1(\bar{m}_s \eta), \\
 a_{12} &= -\bar{m}_s \eta I_2(\bar{m}_s \eta) - n_1 d_4 I_1(\bar{m}_s \eta), \\
 a_{21} &= -\bar{m}_s \eta Y_2(\bar{m}_s \eta \in_1) + n_2 b_4 Y_1(\bar{m}_s \eta \in_1), \\
 a_{22} &= -\bar{m}_s \eta I_2(\bar{m}_s \eta \in_1) + n_2 b_4 I_1(\bar{m}_s \eta \in_1).
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Если один из несущих слоёв (оболочки) отсутствует, тогда в формуле (18) и (11) $n_j=0$. Для случая абсолютно жёсткого несущего слоя $n_j=\infty$.

Результаты и анализ. Составлена программа на языке C++, на основе метода Мюллера (численное решение трансцендентного уравнения), Гаусса, Лапласа для численного решения дисперсионного уравнения (13). Для вычисления специальных функций комплексного аргумента Бесселя и Ханкеля разработан алгоритм, и составлена программа. В расчётах использовалось трёхпараметрное ядро релаксации Колтунова-Ржаницина $R_k(t) = A_k e^{-\beta k^t} / t^{1-\alpha_k}$, при следующих значениях безразмерных параметров:

$$A=0,048; \quad \beta=0,05; \quad \alpha=0,1; k_1=k_2=0.005; \gamma_1=\gamma_2=120.0;$$

$$\rho_1=\rho_2=12.0; k_s=50; k_0^2=2/3; \nu_1=\nu_2=\nu_s=0.3.$$

Численные результаты приведены на рисунках 2-4.

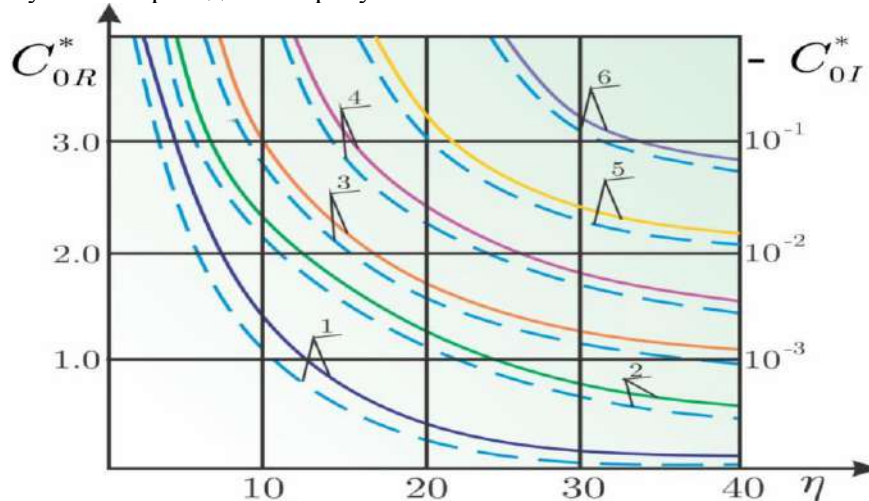


Рисунок 2. Изменение реальной и мнимой части фазовой скорости от волнового числа

На рисунке 2 показаны комплексные дисперсионные кривые волн кручения в трёхслойной цилиндрической оболочке для первых шести комплексных (реальные и мнимые части) мод движения. Как видно из рисунка, с ростом порядка моды густота расположения кривых на плоскости $C_{R,I}, \eta$ увеличивается.

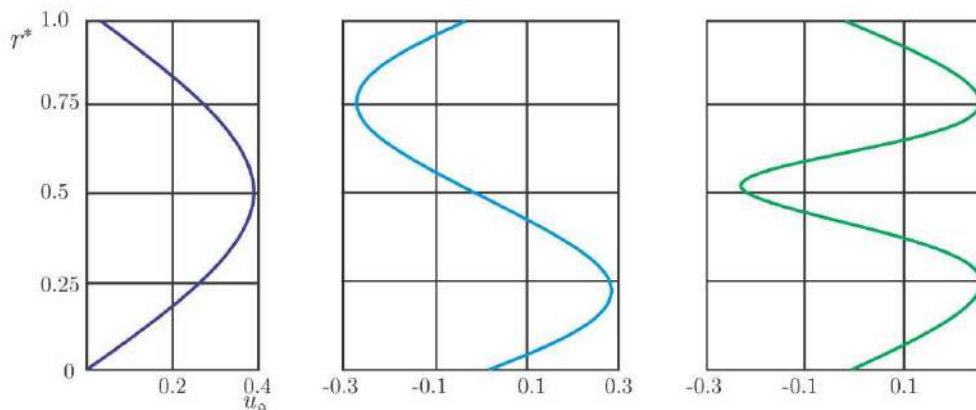


Рисунок 3. Тангенциальные смещения точек заполнителя по толщине для трёх мод

В случае $\eta \rightarrow \infty$ предельным переходом из уравнения (9) получается асимптотическая формула для определения реальной и мнимой части фазовой скорости

$$c_{0n} = [1 - i\Gamma_\mu^0] \sqrt{1 + \frac{n^2 k^2 \epsilon_1}{4[1 - \epsilon_1^2]^2 \eta^2}},$$

$$c_0 = \frac{c_f}{c_{0s} [1 - i\Gamma_\mu^0]}$$

где n- номер моды колебаний.

На рисунке 3 иллюстрируется распределение тангенциальных смещений точек заполнителя по толщине для первых трёх мод движения при фиксированной фазовой скорости $c_0 = 1.3152$.

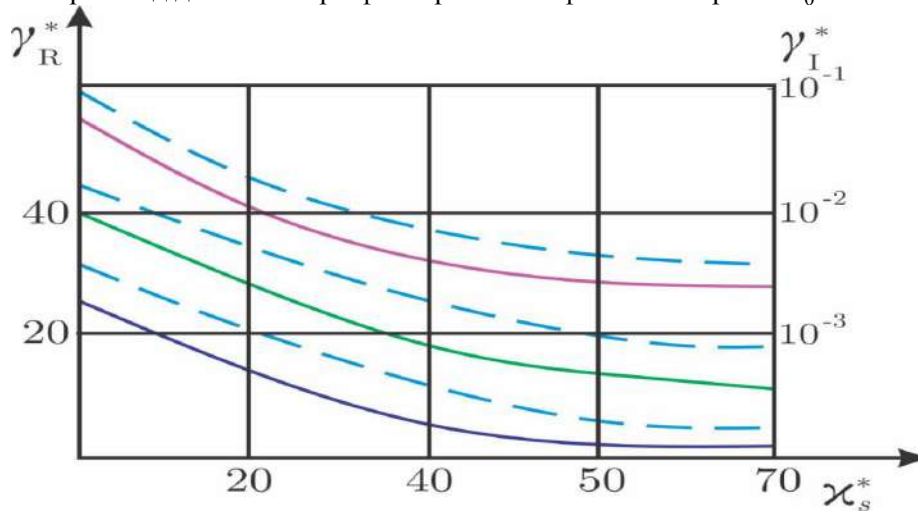


Рисунок 4. Изменение реальной и мнимой частей волнового числа от параметров заполнителя

На рисунке 4 изображено распределение тангенциальных смещений точек заполнителя по толщине для первых трёх модах движения при фиксированной фазовой скорости $c_0 = 1.4201$. Установлено, что с увеличением толщины заполнителя реальные и мнимые части первой моды стремятся к нулю.

Заклучения.

1. Разработана математическая постановка, методика решения и алгоритм для исследования задач распространения крутильных волн в двухслойных цилиндрических конструкциях с учётом вязкоупругих свойств материалов.
2. Установлено, что при увеличении толщины оболочки частоты колебаний увеличиваются незначительно. Это можно объяснить тем, что при увеличении толщины оболочки перемещения внутренних слоёв цилиндра по сравнению с перемещением внешнего слоя, скреплённого с оболочкой, возрастают. Следовательно, возрастают инерционные силы цилиндра, препятствующие увеличению частоты.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kim S.M. *Stability and dynamic response of Rayleigh beam–columns on an elastic foundation under moving loads of constant amplitude and harmonic variation// Engineering structures.* 2005. P. 124.
2. Бондаренко В.С., Дубовицкий В.Р. *Акустические кромочные волны в изотропных твёрдых телах.* – Акуст. ж. 1976, т. 22, 284 с.
3. Durdıyev D.Q., Safarov I.I., Teshayev M.Kh.. *Propagation of Waves in a Fluid in a Thin Elastic Cylindrical Shell. Wseas transactions on fluid mechanics DOI: 10.37394/232013.2024.19.11 , pp.113-119*
4. Safarov I.I., Teshayev M.Kh. *Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2023, № 83. С. 166-179,
5. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах.* – М.: Наука, 1973, 531 с.
6. Каюмов С.С., Сафаров И.И. *Распространение и дифракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических системах.* Ташкент: ФАН, 2002г, 214с.
7. Кольский Г. *Волны напряжения в твёрдых телах.* Москва: Изд-во иностр. Литер., 1955, - 192с.

8. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. Москва: Высшая школа, 1976, 351 с.
9. Safarov I.I., Teshayev M.Kh. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems *Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 51(1), pp. 1–12.
10. Safarov, I.I., Teshayev, M.H., Juraev, S.I. et al. Vibrations of Viscoelastic Plates with Attached Concentrated Masses. *Lobachevskii J Math* 45, 1729–1737 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224601474>
11. B. Sh. Usmonov, I. I. Safarov, M. Kh. Teshayev, “Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2024, no. 88, 124–137. <https://doi.org/10.17223/19988621/88/10>
12. Safarov, I., Nuriddinov, B. & Nuriddinov, Z. Propagation of Own Waves in a Viscoelastic Cylindrical Panel of Variable Thickness. *Lobachevskii J Math* 45, 1246–1253 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224600663>
13. I.I.Safarov, M.Kh.Teshayev, “Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium”, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2023, no. 83, 166-179. <https://doi.org/10.17223/19988621/83/14>
14. Safarov I.I., Teshayev M.K. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 31, iss. 1, pp. 63-74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021
15. Nuriddinov B.Z., Mirzakabilov B.N., Kurbonov U.S. Method for calculating underground special structures under dynamic impacts and natural vibration. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*. 2025;(3):45-53. (In Russ.) <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-3-45-53>
16. Safarov, I. (2018) Numerical Modeled Static Stress-Deformed State of Parallel Pipes in the Deformable Environment. *Open Access Library Journal*, 5, 1-21. doi: 10.4236/oalib.1104671.
17. Safarov, I.I. (1992) *Oscillations and Waves in Dissipatively Underbred Environments and Structures*. Science, Tashkent, 250 p.
18. Teshayev MK, Safarov II, Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 2019;13(2):104–115. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.

ПОРОГОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ И АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ДИСКРЕТНОГО БИЛАПЛАСИАНА НА ТРЁХМЕРНОЙ РЕШЁТКЕ

Пардабаев Мардон

Самаркандский государственный педагогический институт

p_mardon75@mail.ru

Мухаммадиева Мафтуна

Самаркандский государственный педагогический институт

maftunachik0996@gmail.com

Аннотация. В этой статье показано, что для дискретного бигармонического оператора с компактным возмущением на трёхмерной решётке существуют нижние и верхние пороговые константы. Кроме того, получены сходящиеся асимптотические разложения собственного значения этого

$$\hat{H}_\mu = \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{V}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

оператора в окрестностях левого и правого краёв существенного спектра, а также исследованы пороговые резонансы и пороговые собственные значения для трёхмерной решётки.

Ключевые слова: дискретный бигармонический оператор, дискретный оператор Шрёдингера, существенный спектр, собственное значение, разложение, асимптотика.

UCH O'LCHAMLI PANJARADA DISKRET BILAPLASIANNING BO'SAG'A
REZONANSLARI VA XOS QIYMATLARI ASIMPTOTIKASI

Аннотация. Ушбу мақолада uch o'lchamli panjarada kompakt qo'zg'alishli diskret bigarmonik operator uchun quyi va yuqori bo'sag'a konstantalari hamda muhim spektrdan tashqarida xos qiymati mavjudligi ko'rsatilgan. Bundan tashqari uch o'lchamli panjarada ushbu

$$\hat{H}_\mu = \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{V}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

operator xos qiymati uchun muhim spektrning o'ng va chap chekkasi atrofida yaqinlashuvchi asimptotik yoyilmalar olingan hamda uch o'lchamli panjarada bo'sag'a rezonanslar va bo'sag'a xos qiymatlar tadqiq qilingan.

Калит so'zlar: diskret bigarmonik operator, diskret Shredinger operatori, muhim spektr, xos qiymat, yoyilma, asimptotika.

THRESHOLD RESONANCES AND EIGENVALUE ASYMPTOTICS OF THE DISCRETE
BILAPLACIAN ON THE THREE-DIMENSIONAL LATTICE

Abstract. This article considers that for a discrete biharmonic operator with a compact perturbation on a three-dimensional lattice, there are lower and upper threshold constants. In addition, convergent asymptotic expansions of the eigenvalue of this

$$\hat{H}_\mu = \hat{\Delta}\hat{\Delta} - \mu\hat{V}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

operator in the vicinity of the left and right edges of the essential spectrum, and threshold resonances and threshold eigenvalues for a three-dimensional lattice are also studied.

Keywords: Discrete biharmonic operator, discrete Schrodinger operator, essential spectrum, eigenvalue, expansion, asymptotics.

Введение. В многочисленных научно-практических исследованиях, проводимых по всему миру, часто рассматривают научные модели процессов, происходящих в микромире. Развитие теории квантовых полей, описывающих явления микромира, являлось основой возникновения квантовой механики. Одной из важнейших физических величин в любой системе квантовой механики является энергия. Анализ спектральных свойств оператора, описывающего энергию, т. е. оператора типа Шрёдингера, является одной из основных задач квантовой механики. Кроме того, эллиптические операторы четвёртого порядка, в частности бигармонические операторы, играют центральную роль в

широком классе физических моделей, таких как линейная теория упругости, проблемы жёсткости (например, строительство подвесных мостов) и при формулировке потоков Стокса (см., например, [6]). Поэтому развитие исследований дискретных и существенных спектров бигармонических операторов, встречающихся в физике твёрдого тела, квантовой механике и теории упругости, остаётся важной задачей.

Недавние исследования показали, что операторы Лапласа и бигармонические операторы обладают высоким потенциалом при сжатии изображений с оптимизированными и достаточно разреженными сохранёнными данными и проблемах стойкости теории упругости. Необходимость соответствующего численного моделирования привела к появлению работ (см., например, [4]) посвящённых разнообразным дискретным приближениям к решениям уравнений четвёртого порядка. Вопрос об устойчивости таких моделей в основном связан с их спектральными свойствами, и поэтому численной оценке собственных значений посвящены многочисленные исследования (см., например, [3,14])

Решётчатые операторы Шрёдингера, в частности, решётчатые модели Бозе-Хаббарда, стали более популярными в последние годы, поскольку они представляют собой естественный гамильтониан в теории ультрахолодных атомов на оптических решётках (см., например, [7]). В отличие от традиционных систем физики твёрдого тела, где стабильные составные объекты обычно образуются силами притяжения и где силы отталкивания разделяют частицы в свободном пространстве, управляемость столкновительных свойств ультрахолодных атомов позволила экспериментально наблюдать стабильную отталкивающую связанную пару ультрахолодных атомов на оптической решётке \mathbb{Z}^3 (см., например, [8,12,13]). Во всех этих наблюдениях решётчатые операторы Шрёдингера стали связующим звеном между теоретической базой и экспериментальными результатами.

В непрерывном случае М.Клаус и Б.Саймон (см., например, [9]) получили асимптотические разложения в нижней части существенного спектра для собственного значения оператора Шрёдингера $-d^2/dx^2 + \lambda V$ в \mathbb{R} для $\lambda > 0$ и V , удовлетворяющих этому неравенству

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|) |V(x)| dx < \infty.$$

В отличие от непрерывного случая управляемость параметров в решётчатых операторах Шрёдингера позволяет явно вычислять пороги констант связи, тем самым устанавливая существование этого явления. Получены сходящиеся разложения единственного собственного значения двухчастичного оператора Шрёдингера на решётке \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, в левом краю существенного спектра, когда константа связи стремится к пороговому значению (см., например, [10,11]).

Постановка задачи и спектр дискретного билапласиана

Пусть \mathbb{Z}^3 - трёхмерная решётка, а $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$ - гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на \mathbb{Z}^3 . Рассмотрим семейство самосопряжённых ограниченных дискретных операторов

$$\hat{H}_\mu = \hat{H}_0 - \mu \hat{V}, \quad \mu \geq 0,$$

в $\ell^2(\mathbb{Z}^3)$. Здесь $\hat{H}_0 = \hat{\Delta} \hat{\Delta}$ - дискретный билапласиан, где

$$\hat{\Delta} \hat{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [\hat{f}(x) - \hat{f}(x+s)], \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3),$$

- дискретный лапласиан, а \hat{V} - оператор ранга один, который задаётся как

$$\hat{V} \hat{f}(x) = \hat{v}(x) \sum_{y \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}(y) \hat{f}(y),$$

где $\hat{v} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3) \setminus \{0\}$ - заданная вещественнозначная функция.

Пусть \mathbb{T}^3 - трёхмерный тор, а $L^2(\mathbb{T}^3)$ - гильбертово пространство функций, квадратично-интегрируемых на \mathbb{T}^3 .

Далее мы всегда предполагаем, преобразование Фурье

$$v(p) := \mathcal{F} \hat{v}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}^3} \hat{v}(x) e^{ix \cdot p}$$

функция \hat{v} удовлетворяют следующим предположениям:

- a) функция $v(p)$ -вещественно-аналитическая на \mathbb{T}^3 ;
- b) существуют неотрицательные целые числа n^0 , $n_0 \geq 0$ такие, что

$$D^{2n_0} |v(\mathbf{0})|^2 \neq 0, \quad D^{2j} |v(\mathbf{0})|^2 = 0 \quad \text{для } j = 0, \dots, n_0 - 1 \quad (1)$$

$$D^{2n^0} |v(\vec{\pi})|^2 \neq 0, \quad D^{2j} |v(\vec{\pi})|^2 = 0 \quad \text{для } j = 0, \dots, n^0 - 1 \quad (2)$$

здесь $D^j f(p)$ - дифференциал j -го порядка для f в точке p ,

$$D^j f(p) \left[\underbrace{w, w, w}_{j\text{-раз}} \right] = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=j, i_k \geq 0}} \frac{\partial^j f(p)}{\partial^{i_1} p_1 \partial^{i_2} p_2 \partial^{i_3} p_3} w_1^{i_1} w_2^{i_2} w_3^{i_3},$$

$w = (w_1, \dots, w_{d_3}) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ и $\vec{\pi} = (\pi, \pi, \pi) \in \mathbb{T}^3$.

Напомним, что

$$\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0,6]$$

(см., например, [1]). Следовательно,

$$\sigma(\widehat{\mathbf{H}}_0) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_0) = [0,36]$$

а в силу компактности оператора $\widehat{\mathbf{V}}$ и теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях

$$\sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_\mu) = \sigma_{ess}(\widehat{\mathbf{H}}_0) = [0,36]$$

для любого $\mu \in \mathbb{R}$.

Прежде чем изложить основные результаты, введём следующие обозначения

$$\mu_o := \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 dq}{\varepsilon(q)} \right)^{-1}, \quad \mu^o := - \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 dq}{36 - \varepsilon(q)} \right)^{-1} \quad (3)$$

$$\widehat{k}_v := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 dq}{\varepsilon(q)^2}, \quad \widehat{K}_v := \int_{\mathbb{T}^3} \frac{|v(q)|^2 dq}{(36 - \varepsilon(q))^2} \quad (4)$$

и

$$k_v := \frac{2^{2n_o+3}}{(2n_o)!} \int_{\mathbb{S}^2} D^{2n_o} |v(\mathbf{0})|^2 [w, w] d\mathcal{H}^2(w), \quad (5)$$

$$K_v := \frac{2^{2n_o+2}}{(24)^{n_o+3/2} (2n_o)!} \int_{\mathbb{S}^2} D^{2n_o} |v(\vec{\pi})|^2 [w, w] d\mathcal{H}^2(w), \quad (6)$$

где \mathbb{S}^2 - единичная сфера в \mathbb{R}^3 и

$$\varepsilon(q) := ((1 - \cos q_1) + (1 - \cos q_2) + (1 - \cos q_3))^2.$$

Следующая теорема устанавливает существование и единственность собственного значения оператора $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$

Теорема 1. Пусть $\mu_o \geq 0, \mu^o \leq 0$ задано как (3). Тогда $\sigma_{disc}(\widehat{\mathbf{H}}_\mu) = \emptyset$ для любых $\mu \in [\mu^o, \mu_o]$ и $\sigma_{disc}(\widehat{\mathbf{H}}_\mu)$ является одноэлементным $\{e(\mu)\}$ для любого $\mu \in \mathbb{R} \setminus [\mu^o, \mu_o]$. Более того, собственная функция \widehat{f}_μ соответствующая собственному значению $e(\mu)$, задаётся как

$$\widehat{f}_\mu := \mathcal{F}^{-1} f_\mu, \quad \text{где}$$

$$f_\mu(p) = \frac{v(p)}{\varepsilon(p) - e(\mu)}.$$

Кроме того,

- если $\mu < \mu^o$ (соотв. $\mu > \mu_o$), то $e(\mu) > 36$ (соотв. $e(\mu) < 0$);
- функция $\mu \in \mathbb{R} \setminus [\mu^o, \mu_o] \mapsto e(\mu)$ вещественно-аналитическая, строго убывающая, выпуклая в $(-\infty, \mu^o)$ и вогнутая в $(\mu_o, +\infty)$, и удовлетворяет

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_o^+} e(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \mu^o^-} e(\mu) = 36 \quad \text{и} \quad \lim_{\mu \rightarrow \pm\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = - \int_{\mathbb{T}^3} |v(q)|^2 dq.$$

Далее мы исследуем пороговые резонансы оператора $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$.

Теорема 2. Пусть $n_o, n^o \geq 0$ задаётся как (1)-(2).

(a) Пусть $n_o \geq 1$. Уравнение $\widehat{\mathbf{H}}_{\mu_o} \widehat{f} = 0$ имеет ненулевое решение

$$\widehat{f} := \mathcal{F}^{-1} f \in c_0(\mathbb{Z}^3), \quad \text{где } f(p) = \frac{v(p)}{\varepsilon(p)} \in L^1(\mathbb{T}^3).$$

Кроме того,

$\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z}^3) \setminus \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ для $n_o \in \{1,2\}$; $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ для $n_o \geq 3$.

(b) Пусть $n^o \geq 0$. Уравнение $\widehat{\mathbf{H}}_{\mu^o} \widehat{g} = 36 \widehat{g}$ имеет ненулевое решение

$\hat{g} := \mathcal{F}^{-1}g \in c_0(\mathbb{Z}^3)$, где

$$g(p) = \frac{v(p)}{36 - \varepsilon(p)} \in L^1(\mathbb{T}^3).$$

Кроме того, $\hat{g} \in c^0(\mathbb{Z}^3) \setminus \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ для $n^0 = 1$ и $\hat{g} \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ для $n^0 > 1$.

Напомним, что в литературах [1,2] ненулевые решения уравнений $\hat{\mathbf{H}}_\mu \hat{f} = 0$ и $\hat{\mathbf{H}}_\mu \hat{g} = 4d^2 \hat{g}$, не принадлежащие в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, называются резонансными состояниями.

Теперь мы исследуем скорость сходимости собственного значения $e(\mu)$ к краю существенного спектра.

Теорема 3. Если $\mu > \mu_0$, тогда оператор $\hat{\mathbf{H}}_\mu$ имеет единственное собственное значение $e(\mu) < 0$.

Предположим:

(1) если $n_0 = 0$, то $\mu_0 = 0$ и для достаточно малых и положительных μ , имеет место равенство:

$$(-e(\mu))^{1/4} = \left\{ \frac{\pi k_v}{8} \mu + \sum_{n \geq 1} c_{1,n} \mu^{n+1}, \right.$$

где $\{c_{1,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(2) если $n_0 = 1$, то $\mu_0 > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_0$, верно

$$(-e(\mu))^{1/4} = \frac{8}{\pi k_v \mu_0^2} (\mu - \mu_0) + \sum_{n \geq 1} c_{2,n} (\mu - \mu_0)^{n+1},$$

где $\{c_{2,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(3) если $n_0 = 2$, то $\mu_0 > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_0$, верно

$$(-e(\mu))^{1/4} = \left(\frac{8}{\pi k_v \mu_0^2} \right)^{1/3} (\mu - \mu_0)^{1/3} + \sum_{n \geq 1} c_{3,n} (\mu - \mu_0)^{\frac{n+1}{3}},$$

где $\{c_{3,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(4) если $n_0 \geq 3$, то $\mu_0 > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_0$, имеет место разложение

$$(-e(\mu))^{1/4} = (\hat{k}_v \mu_0^2)^{-1/4} (\mu - \mu_0)^{1/4} + \sum_{n \geq 2} c_{4,n} (\mu - \mu_0)^{\frac{n}{4}},$$

где $\{c_{4,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты.

Здесь $k_v > 0$ и $\hat{k}_v > 0$ определяются по формулам (4) и (5) соответственно.

Теорема 4. Если $\mu > \mu_0$, то для собственного значения $e(\mu)$ оператора $\hat{\mathbf{H}}_\mu$ верны следующие асимптотики

• если $n_0 = 0$, то $\mu_0 = 0$

$$e(\mu) = -\left(\frac{\pi k_v}{8}\right)^4 \mu^4 + o(\mu^4), \quad \mu \rightarrow 0;$$

• если $n_0 = 1$, то $\mu_0 > 0$

$$e(\mu) = -\left(\frac{8}{\pi k_v \mu_0^2}\right)^4 (\mu - \mu_0)^4 + o((\mu - \mu_0)^4), \quad \mu \rightarrow \mu_0;$$

• если $n_0 = 2$, то $\mu_0 > 0$

$$e(\mu) = -\left(\frac{8}{\pi k_v \mu_0^2}\right)^{4/3} (\mu - \mu_0)^{4/3} + o((\mu - \mu_0)^{4/3}), \quad \mu \rightarrow \mu_0;$$

• если $n_0 \geq 3$, то $\mu_0 > 0$

$$e(\mu) = -(\mu_0^2 \hat{k}_v)^{-1} (\mu - \mu_0) + o(\mu - \mu_0), \quad \mu \rightarrow \mu_0;$$

Здесь $k_v > 0$ и $\hat{k}_v > 0$ определяются по формулам (4) и (5) соответственно.

Теорема 5. Если $\mu < \mu^0$, тогда оператор $\hat{\mathbf{H}}_\mu$ имеет единственное собственное значение $e(\mu) > 36$.

Предположим:

(1) если $n^0 = 0$, то $\mu^0 < 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu^0 - \mu$, верно

$$(e(\mu) - 36)^{1/2} = (\pi K_v \mu^{0^2})^{-1} (\mu^0 - \mu) + \sum_{n \geq 1} a_n (\mu^0 - \mu)^{n+1},$$

где $\{a_n\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(2) если $n^0 \geq 1$, то $\mu^0 < 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu^0 - \mu$, верно

$$(e(\mu) - 36)^{1/2} = (\widehat{K}_v \mu^{o2})^{-1/2} (\mu^o - \mu)^{1/2} + \sum_{n \geq 1} b_n (\mu^o - \mu)^{(n+1)/2},$$

где $\{b_n\}$ - некоторые действительные коэффициенты.
Здесь K_v и \widehat{K}_v задаются как (4) и (6), соответственно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. S. Albeverio, S. Lakaev, Z. Muminov: *Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.* 5 (2004), 743-772.
2. S. Albeverio, S. Lakaev, K. Makarov, Z. Muminov: *The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Commun. Math. Phys.* 262 (2006), 91-115.
3. A. Andrew, J. Paine: *Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues. Numer. Math.* 50 (1986), 205-215.
4. M. Ben-Artzi, G. Katriel: *Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues. Numer. Math.* 141 (2019), 839-879.
5. A. Boumenir: *Sampling for the fourth-order Sturm-Liouville differential operator. J. Math. Anal. Appl.* 278 (2003), 542-550.
6. S. Dipierro, A. Karakhanyan, E. Valdinoci: *A free boundary problem driven by the biharmonic operator. arXiv:1808.07696v2 [math.AP].*
7. D. Jaksch, C. Bruder, J. Cirac, C.W. Gardiner, P. Zoller: *Cold bosonic atoms in optical lattices. Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), 3108-3111.
8. M.-S. Heo, T.T. Wang, C.A. Christensen, T.M. Rvachov, D.A. Cotta, J.-H. Choi, Y.-R. Lee, W. Ketterle: *Formation of ultracold fermionic NaLi Feshbach molecules. Phys. Rev. A* 86 (2012), 021602.
9. M. Klaus, B. Simon: *Coupling constant thresholds in nonrelativistic Quantum Mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys.* 130 (1980), 251-281.
10. S.N. Lakaev, A.M. Khalkhuzhaev, Sh.S. Lakaev: *Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theoret. and Math. Phys.* 171 (2012), 800-811.
11. S.N. Lakaev, Sh.Yu. Kholmatov: *Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with zero-range potential. Izvestiya Math.* 76 (2012), 946-966.
12. C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, K. Bongs: *Ultracold heteronuclear molecules in a 3d optical lattice. Phys. Rev. Lett.* 97(2006).
13. K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hecker Denschlag, A.J. Daley, A. Kantian, H.P. Büchler, P. Zoller: *Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. Nature* 441 (2006), 853-856.
14. A. Khalkhuzhaev, Sh.Kholmatov, M.Pardabaev: *Expansion of eigenvalues of the perturbed discrete bilaplacian. Journals Monatshefte für Mathematik,* (2022)
15. A. Khalkhuzhaev, M.Pardabaev: *Asymptotics of eigenvalues of perturbed bilaplacian in the 1D lattice. Uzbek Mathematical Journal.* – Tashkent, 2021, -№4. -P.62-78.

РАСЧЁТ ДЕЙСТВИЯ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ НА ТРУБОПРОВОД (ДЛИННЫЙ УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ), ВЛОЖЕННЫЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

*Рахматов Раббим Рахматович,
Ташкентский университет информационных
технологий имени Мухаммада аль-Хорезми,
Ташкент, Узбекистан
r.rahmatov55@mail.ru*

Аннотация. В статье предлагается теоретическая модель описания совместных сейсмических колебаний подземного трубопровода (длинного упругого стержня) и упругого грунта на воздействие поверхностных волн. Принимается, что на поверхности контакта выполняется условие равенства продольных перемещений сечения трубы и частиц упругой среды. С помощью этой модели объясняется механизм возникновения касательных усилий на поверхности контакта. Удлинение сечений трубопровода при этом происходит в результате его взаимодействия с грунтовой (упругой) средой.

Ключевые слова: теоретическая модель, сейсмические колебания, длинный упругий стержень, упругий грунт, воздействие поверхностных волн, продольные перемещения сечения трубы, возникновение касательных усилий, поверхность контакта.

CALCULATION OF THE EFFECT OF A RAYLEIGH WAVE ON A PIPELINE (LONG ELASTIC ROD) EMBEDDED IN AN ELASTIC MEDIUM

Abstract. The article proposes a theoretical model for describing the joint seismic vibrations of an underground pipeline (long elastic rod) and elastic soil under the influence of surface waves. It is assumed that the condition of equality of the longitudinal displacements of the pipe section and the particles of the elastic medium is fulfilled on the contact surface. This model explains the mechanism of tangential forces on the contact surface. The elongation of the pipeline sections occurs as a result of the interaction of the ground with its ground (elastic) medium.

Keywords: theoretical model, seismic vibrations, long elastic rod, elastic soil, impact of surface waves, longitudinal displacements of pipe section, occurrence of tangential forces, contact surface.

ELASTIK MUHITGA JOYLASHTIRILGAN UZUN QUVUR TIZIMIGA (UZUN ELASTIK STERJEN) RELEY TO'LIQLINING TA'SIRINI HISOBLASH

Annotatsiya. Maqolada sirt to'liqlinlari ta'sirida yer osti quvurining (uzun elastik sterjenda) va elastik tuproqli muhitning birgalikdagi seysmik tebranishlarini tavsiflashning nazariy modeli taklif etiladi. O'zaro ta'sir(kontakt) yuzasida quvur kesimining bo'ylama harakatlari va elastik muhit zarralari tengligi sharti bajariladi deb qabul qilinadi. Ushbu model yordamida o'zaro ta'sir (kontakt) yuzasida teginish harakatlarining paydo bo'lishi mexanizmi tushuntiriladi. Bunday holda, quvur liniyasi qismlarining uzayishi uning tuproqli(elastik) muhitining o'zaro ta'siri natijasida yuzaga keladi.

Kalit so'zlar: nazariy model, seysmik tebranishlar, uzun elastik sterjen, elastik tuproq, sirt to'liqlarining ta'siri, quvur qismining boylama harakatlari, teginish harakatlarining paydo bo'lishi, aloqa yuzasi.bu uning tuproq (elastik) muhitining o'zaro ta'siri natijasida yuzaga keladi.

Введение. Влияние на поведение подземного трубопровода и сети трубопроводов при сейсмических воздействиях имеет тип распространяющейся сейсмической волны. Для понимания механизма воздействия волн Релея на подземный трубопровод в работах [1,2] предложена аналитическая модель описания движения удлиненных подземных трубопроводов при воздействии поверхностной волны. Рассмотрены механизмы взаимодействия одиночного и системы непрерывно соединённых цилиндрических трубопроводов с поверхностными сейсмическими волнами на примере землетрясений Michoacan (1985г.) Показано, что из-за наличия низкой скорости фазы (волнового числа) поверхностных волн характер распределения напряжения в трубопроводе в значительной степени отличается от напряжения в грунтовой среде за фронтом волны. При этом установлена

возможность разрушения в местах стыка отдельных частей трубопроводов при достижении напряжения максимального значения. Это обстоятельство требует отдельно рассмотреть вопросы контактного взаимодействия трубопроводов с грунтом при обтекании их поверхностными волнами.

Постановка задачи. Установим начало координат на сводной поверхности в точке O (рисунок 1). Направим ось Oz_1 вдоль оси трубопровода, которая образует с фронтом распространяющейся волны угол α , ось Ox перпендикулярная к ней сверху вниз, ось Oy перпендикулярная к этим осям.

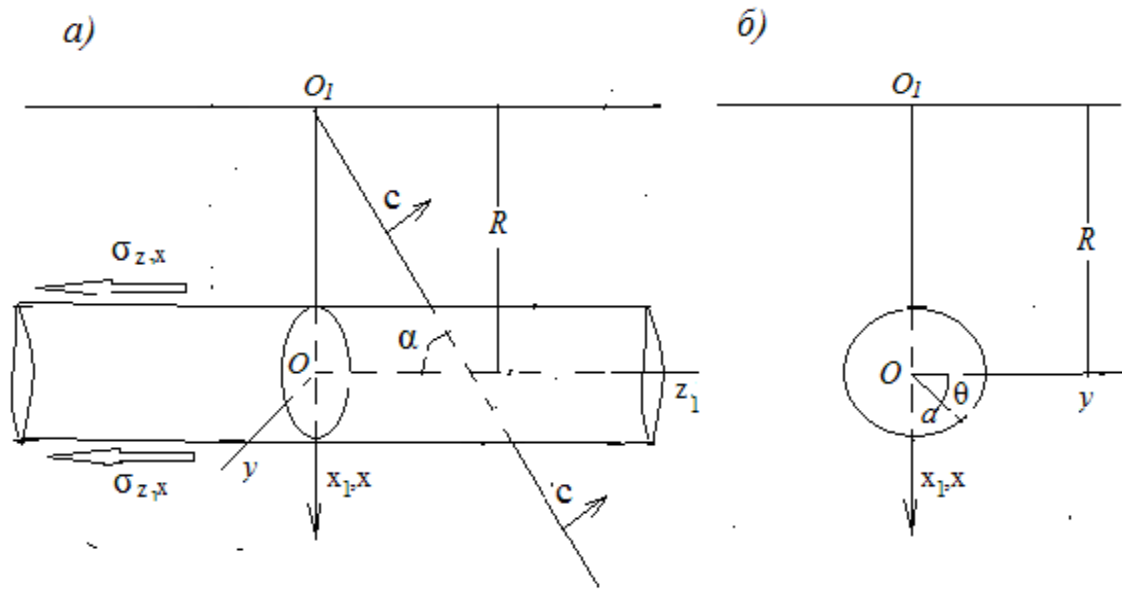


Рисунок 1. Схема расположения подземного трубопровода в упругом полупространстве, обтекаемого стационарной плоской волной

Уравнение продольного движения частиц грунта $w(r, \alpha - z_1)$ (C - «видимая скорость» распространения волны), моделируемого упругой средой, в цилиндрическом слое по направлению оси трубопровода Oz_1 в приближении, принятом в работах [3-5], имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - m^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (a < r < R, -\infty < z < \infty) \quad (1)$$

где $z = \alpha - z_1$, $m = \sqrt{\frac{c^2 - c_1^2}{c_2^2}}$ $c_1 = \sqrt{(2\mu + \lambda) / \rho}$ и $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ - скорости продольной

и поперечной волн в среде, μ, λ и ρ - коэффициенты Ламе и плотность упругой среды, R - глубина заложения трубы (стержня). В дальнейшем считаем $C \geq c_1$. Уравнение (1) интегрируется при условиях

$$w = U(z) \quad \text{при } r = a \quad (2)$$

$$w = w_0(z) \quad \text{при } r = R \quad (3)$$

$w_0(z)$ - перемещение частиц среды за падающую волну.

III. Метод решения.

Введём новую функцию по формуле:

$$u = w(r, z) - \frac{\ln\left(\frac{r}{a}\right)}{\ln\left(\frac{R}{a}\right)} [w_0(z) - U(z)] + U(z) \quad (4)$$

удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{m^2 \ln \frac{r}{a}}{\ln(R/a)} [w_0^* - U^*] + m^2 U^* \quad (5)$$

$$\text{и граничным условиям } u(R)=0, u(a)=0 \quad (6)$$

Рассмотрим случай $c=c_1$ ($m=0$). В этом случае имеем, $u=0$ и функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению [4]:

$$U''(z) \pm p^2 U(z) = \pm p^2 w_0(z)$$

$$p = \left(\frac{2\mu}{E|1-M^2|(\alpha^2 - b^2)\ln(R/a)} \right)^{1/2},$$

где $M=c_1/c_0$ - число Маха, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольных волн в стержне. E и ρ - соответственно модуль Юнга и плотность материала стержня, b, a - внутренний и внешний радиусы трубы. В случае $w_0 = A_0 \sin(\omega z)$ для напряжения $S = -E \frac{dU}{dz}$ получены выражения [4]

$$S = -\frac{EA_0 \omega p^2}{p^2 - \omega^2} [\cos \omega z - \cos p z] H(z) \text{ для } M > 1 \text{ (сверхзвуковой случай),}$$

$$S = -\frac{EA_0 \omega p^2}{p^2 + \omega^2} [\cos \omega z - \frac{1}{2} e^{-p z}] \text{ при } z > 0, \quad S = \frac{EA_0 \omega p^2}{2(p^2 + \omega^2)} e^{p z} \text{ при } z < 0, \text{ для}$$

$M < 1$ (дозвуковой случай).

При этом установлено, что при $M > 1$ и $p = \omega$ в трубопроводе возникает резонансное явление.

Полагаем $c = c_1 / \sin \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$), где α - угол наклона между фронтом волны и осью трубопровода. Решение краевой задачи (6) для уравнения (5) получим методом Фурье:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) R_n(r) \quad (7)$$

где $R_n = J_0(\lambda_n a) N_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n r) N_0(\lambda_n a)$,

λ_n - корни уравнения

$$J_0(\lambda_n a) N_0(\lambda_n R) - J_0(\lambda_n R) N_0(\lambda_n a) = 0$$

Функции $Z_n(z)$ удовлетворяют уравнениям:

$$Z_n'' + \lambda_n^2 Z_n = w_0^* a_n + U^* b_n \quad (8)$$

где

$$\lambda_n = \lambda_n / m, \quad a_n = \frac{1}{\|R_n\| \ln \frac{R}{a}} \int_a^R r \ln \frac{r}{a} R_n(r) dr, \quad b_n = \frac{1}{\|R_n\|} \int_a^R r \left[1 - \frac{\ln(r/a)}{\ln(R/a)} \right] R_n(r) dr,$$

$$\|R_n\| = \int_a^R r R_n^2(r) dr.$$

Уравнение продольного движения сечений трубопровода (стержня) $U(z)$ представим в виде

$$\frac{2a\mu}{(a^2 - b^2)E} \frac{\partial w(a, z)}{\partial r} \tag{9}$$

Пользуясь решением (7), уравнение (9) приведём к виду:

$$U'' = \pm p^2 \left[w_0 - U + \ln \frac{R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a Z_n(z) R(\lambda_n a) \right]$$

Учитывая равенство $R_n(\lambda_n a) = -J_0(\lambda_n a)N_1(\lambda_n a) + J_1(\lambda_n a)N_0(\lambda_n a) = 2/\pi \lambda_n a$, имеем:

$$U'' = \pm p^2 \left[w_0(z) - U(z) + 2/\pi \ln \frac{R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \right] \tag{10}$$

Подставляя выражение U'' из (10) в (8), получаем:

$$Z_n'' = -\lambda_n^2 Z_n \pm p^2 b_n [w_0(z) - U(z) + 2/\pi \ln \frac{R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n] + a_n w_0' \tag{11}$$

Выражения (8) и (11) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка для определения неизвестных функций $Z_n(z)$ и $U(z)$, которую можно решить методом усечения.

Из системы уравнений (8) и (11) можно получить:

$$Z_n'' + \lambda_n^2 Z_n = a_n w_0' + b_n U''.$$

Рассмотрим случай $M > 1$. Учитывая условия $Z_n(0) = 0, Z_n'(0) = 0$, имеем:

$$Z_n = \int_0^z a_n w_0'(\xi) \sin \lambda_n(z - \xi) d\xi + b_n \int_0^z g(z - \xi) U(\xi) d\xi \tag{12}$$

где $g(\xi) = [(\xi - \lambda_n^{-1} \sin \lambda_n \xi) \sin \lambda_n \xi] / \lambda_n^2$

Поставляя выражения Z_n из (12) в уравнение (10), получаем:

$$U'' + p^2 U = p^2 w_0 + p^2 \frac{2}{\pi} \ln \frac{R}{a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^z w_0'(\xi) \sin \lambda_n(z - \xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^z g_n(z - \xi) U(\xi) d\xi \right] \tag{13}$$

Уравнение (13) является интегро-дифференциальным уравнением для определения функции $U(z)$.

Рассмотрим теперь действие стационарной поверхностной волны на подземный трубопровод. Согласно работе [6], при распространении поверхностной волны, фронт которой составляет с осью Oz_1 угол α , в упругом полупространстве отличными от нуля будут перемещения вдоль осей Ox и Oz_1 , которых соответственно обозначим через $u(x, z_1, t)$ и $w(x, z_1, t)$. Используя обозначения, принятые в работе [6], выражения этих перемещений записываем в виде:

$$u = \frac{Pr}{h^2} \left[e^{-rx_1} - \frac{2f^2}{s^2 + f^2} e^{-sx_1} \right] e^{j(pt - fz_1)}, \quad w = \frac{Pf}{h^2} \left[e^{-rx_1} - \frac{2sr}{s^2 + f^2} e^{-sx_1} \right] e^{j(pt - fz_1 - \pi/2)}$$

где $x_1 = x + R, h^2 = \frac{p^2}{c_1^2}, k^2 = \frac{p^2}{c_2^2}, r = \sqrt{f^2 - h^2}, s = \sqrt{f^2 - k^2}, f$ - волновое

число, P - постоянное число, определяющее объёмную деформацию за фронтом волны, $p/f = c_R$ - скорость распространения поверхностной волны Релея, которая определяется из уравнения:

$$(c_R^2/c_2^2 - 2)^2 - 4\sqrt{1 - c_R^2/c_1^2}\sqrt{1 - c_R^2/c_2^2} = 0,$$

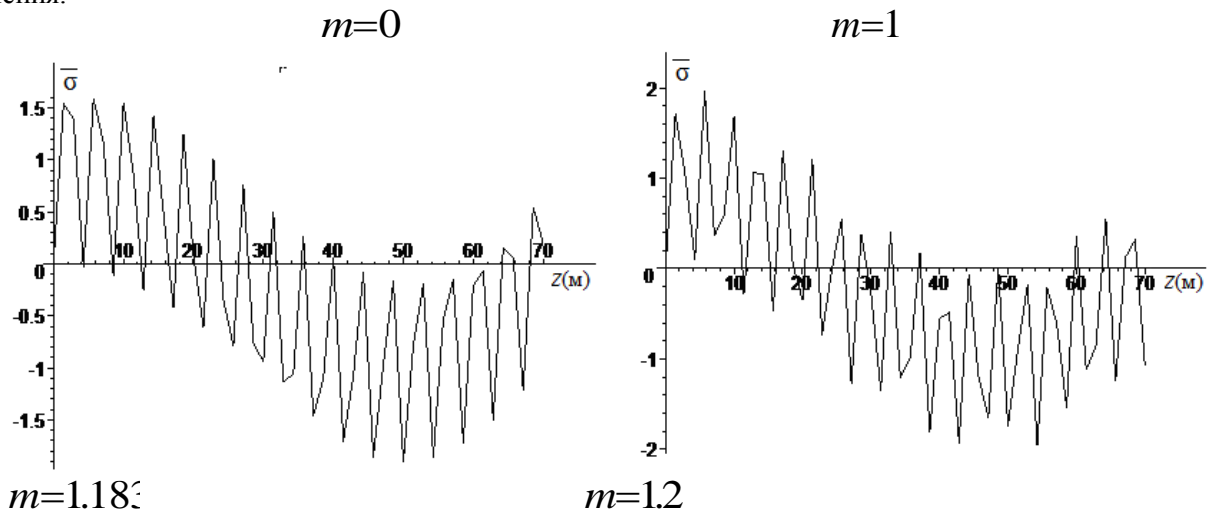
Вводим полярные координаты с центром в точке O $x=R\sin\theta$, $y=R\cos\theta$ (рисунок 16) и полагая $x_1=R(1+\sin\theta)$ усредним по контуру сечения внешней цилиндрического слоя (окружности радиуса R) перемещения частиц среды:

$$w_0 = 2\text{Re} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w d\theta = A \sin f(c_R t - z_1) \quad (14)$$

$$A = \frac{2fP}{h^2} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-Rr(1+\sin\theta)] d\theta - \frac{2sr}{s^2 + f^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-Rs(1+\sin\theta)] d\theta \right]$$

Из выражения (14) заметим, что действующая на трубопровод волна также имеет плоский фронт, распространяющийся со скоростью C_R по гармоническому закону с амплитудой A и волновым числом f , если принять C за «видимую скорость» волны, то следует принять $C = C_R / \sin\beta$, где β - угол наклона фронта поверхностной волны к оси трубопровода. Если далее требовать при действии двух волн число m одинаковыми, то между углами α и β имеет место связь $\beta = \arcsin(c_R \sin\alpha / c_1)$.

На рисунке 2 представлены кривые распределения осевых напряжений в трубопроводе, отнесённых $S_0 = -A_0 E' \omega$ по переменной z для различных значений параметра m . В расчётах принято [1]: $R = 1.5\text{м}$, $a = 0.3\text{м}$, $p = 1.5$ (бетонный трубопровод), $\omega = 1/15\text{м}$. Анализ кривых показывает, что с ростом параметра m происходят изменения амплитуды колебательного процесса по длине трубопровода, а также частотный состав колебаний. При этом существует значение числа $m = m_k$, при котором могут реализоваться параметрические колебания сечений трубопровода. В таблице представлены значения m_k для различных значений числа p . Видно, что с ростом параметра p значение числа m_k сначала быстро падает, далее ($p > 2$) его значение практически остаётся без изменения.



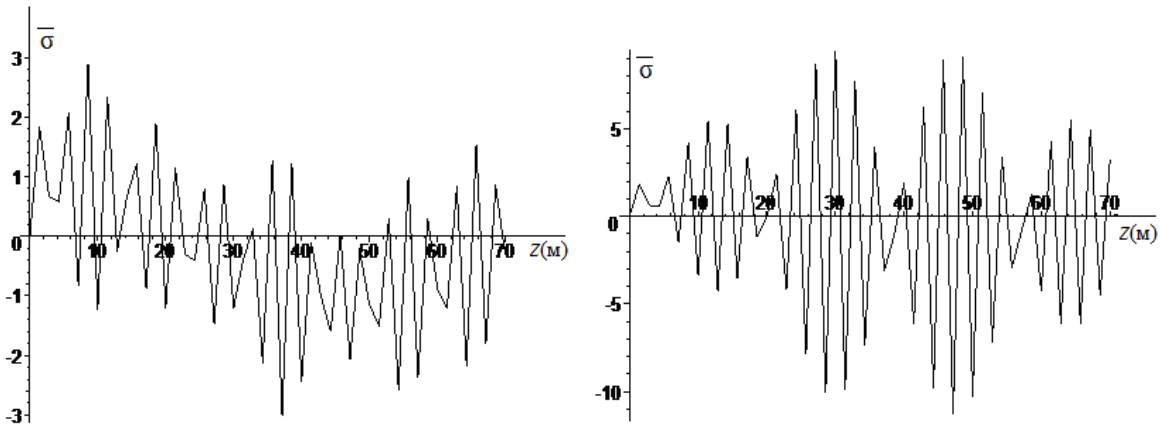


Рисунок 2. Кривые распределения приведённых напряжений $\bar{\sigma} = \sigma/S_0$ по длине трубопровода для различных значений параметра m

Таблица 1. Резонансные значения числа $m = m_k$ в зависимости от числа p

$p(M^{-1})$	0.9	1.1	1.3	1.5	1.8	2.0	2.2	2.4
m_k	1.592	1.422	1.396	1.202	1.165	1.012	0.954	0.911

Таблица 2. Значения угла наклона α (град) при $m = m_k$, для различных значений коэффициента Пуассона ν и числа p

ν	0	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
$p = 1M^{-1}$	47	42	40	37	34	30.5	27	22	16
$p = 1.5M^{-1}$	40.4	35	33.5	31	28	25	22	18	12.5
$p = 2M^{-1}$	32.5	28.5	26	24	22	19.5	17	13.5	10.5

В таблице 1 представлены значения параметра m , при котором возникает параметрическое возбуждение, в таблице 2 - соответствующие значения угла наклона α (град) для различных значений параметра p и коэффициента Пуассона ν .

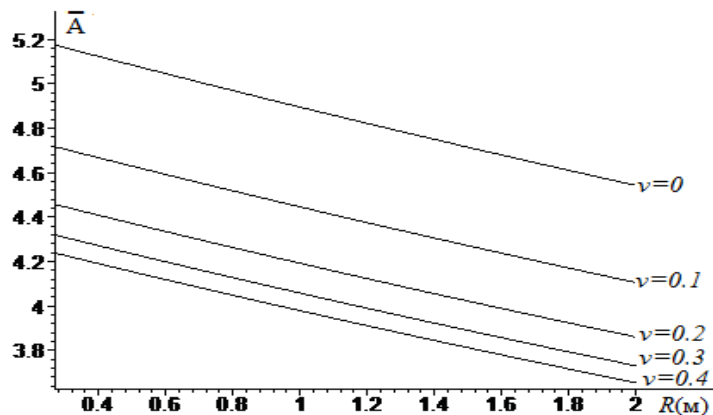


Рисунок 3. Зависимости коэффициента $\bar{A} = fA/P$ от глубины залегания трубопровода $R(M)$ при различных значениях коэффициента Пуассона грунтовой (упругой) среды

На рисунке 3 представлены кривые зависимости безразмерного коэффициента $\bar{A} = fA/P$ от глубины залегания трубопровода R для различных значениях коэффициента Пуассона ν . Видно, что этот коэффициент практически по глубине уменьшается по линейному закону, причём с ростом

коэффициента Пуассона ν интенсивно падает, и наибольшее значение имеет при $\nu=0$.

Анализ результатов. На рисунке 4 показаны кривые распределения приведённых напряжений $\sigma = A \frac{dU}{dz}$ по длине трубопровода при различных значениях глубины залегания $R(m)$. В расчётах

дополнительно принято: $\nu=0.2$, $f = \omega = 1/15 m^{-1}$, $p_{00} = p \sqrt{\ln(R/a)} = 0.2$, $\beta = 25^\circ$.

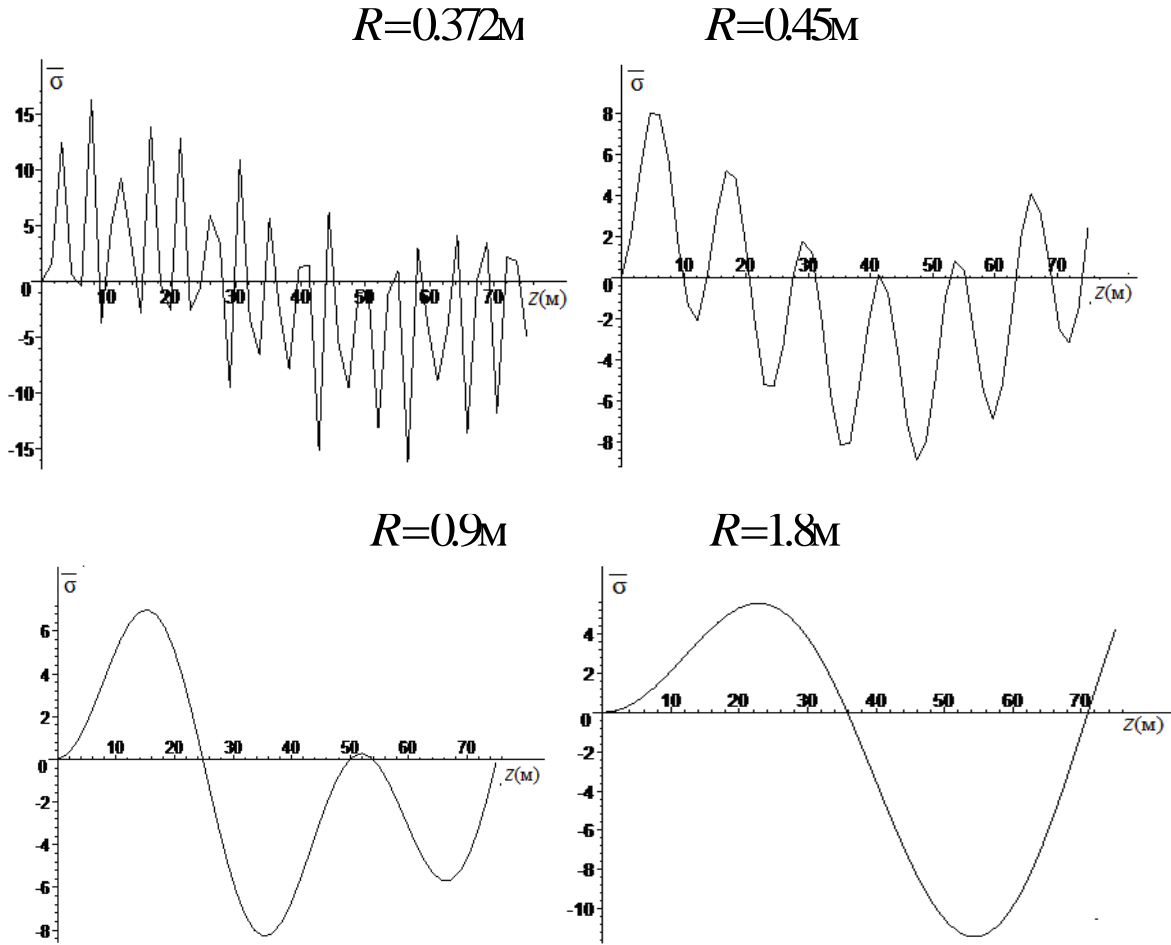


Рисунок 4. Кривые распределения приведённых напряжений σ по длине трубопровода для различных значений глубины залегания R

Из анализа кривых следует, что распределение напряжения по длине трубопровода имеет периодический характер, причём с ростом глубины заложения наблюдается снижения амплитуды приведённого напряжения, и увеличения периода колебания. При этом установлено, что при некоторой глубине залегания трубопровода, далее называемой критической, возможен переход периодического закона изменения напряжения в условиях параметрического возбуждения сечений трубопровода.

В таблице 3 представлены значения критической глубины залегания трубопровода $R_k(m)$ для различных данных параметра $p_{00}(m^{-1})$, при котором происходит резонансное явление. Видно, что значительный рост критической глубины залегания наблюдается при больших значениях параметра p_{00} .

Таблица 3. Зависимости критической глубины залегания трубопровода R_k от параметра ρ_{00} .

$\rho_{00}(M^{-1})$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$R_k(m)$	0.372	0.45	0.552	0.705	0.846	1.125	1.275	1.548	1.845	2.214

Выводы. Установлено, что степень воздействия поверхностной волны на трубопровод в значительной степени зависит от угла наклона фронта волны к оси трубопровода и глубины залегания его в грунтовой среде. С ростом глубины залегания амплитуда уменьшается, а период увеличивается. В случае $M > 1$ и расчетного значения угла наклона $\beta = 25^\circ$ для каждого значения волнового числа ρ_{00} может существовать критическая глубина залегания трубопровода, при которой сечения трубопровода по переменной $Z = Z_1 - v_0 t$ совершают колебания в резонансном режиме.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ayala A.G., O'Rourke, T.D. *Effect of the 1985 Michoacán Earthquake on Water System and Other Buried Lifelines in Mexico City. Technical Report NCEER-89-0009, MCEER, Buffalo, NY. Mar. 1989.*
2. O'Rourke T.D., Wang Y., Shi P. *Advances in Lifeline Earthquake Engineering. Proceedings of 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver, British Columbia, Canada Aug. 2004, Paper No 5003.*
3. Рашидов Т.Р., Исраилов М.Ш., Мардонов Б. *Сейсмомодинамика подземных трубопроводов при неидеальном контакте с грунтом: влияние проскальзывания на динамические напряжения. Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ) РАН. Сибирское отделение. т. 57, №6 (340) 2016, с. 189-197.*
4. Исраилов М.Ш. *Сейсмомодинамика подземных трубопроводов. Ташкент, Проблемы механики. 2012, №3. с.18-24*
5. Рашидов Т.Р., Исраилов М.Ш., Мардонов Б. *Стационарное движение системы «трубопровод – грунтовый слой» при действии сейсмических волн. Ташкент. Проблемы механики 2016. №3, с.61-65.*
6. Ляв А. *Математическая теория упругости. ОНТИ, М. 1935. 674 с.*

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЕФОКУСАЦИИ

Сафаров Журабек Шакарович,

Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезми,
100202, Ташкент, ул. Амира Тимура, 108,
Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Узбекистана, ул. Университетская,
46, Ташкент 100174, Узбекистан
j.safarov65@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется поведение полулинейного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа с нелинейным поглощением. При этом предполагаются начальные условия равные нулю. Процесс распространения волн изучается на полупрямой $x > 0$, по заданному значению производной искомой функции по переменной x при $x = 0$. С введением новых функций задача приводится к удобному к исследованию виду. С помощью интегрирования по характеристикам получают необходимые условия на данные задачи. Задача сводится к решению интегрального уравнения вольтерровского типа. Существование и единственность решения поставленной задачи доказывается методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нелинейное поглощение, ядро интеграла, теорема Банаха.

DEFOKUSATSIYA INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMASINI YECHISH

Abstrakt. Ushbu maqolada chiziqli bo'lmagan yutilishli giperbolik yarim chiziqli integro-differensial tenglama o'rganilgan. Bunda boshlang'ich shartlar nolga teng deb faraz qilinadi. To'lqin tarqalishi $x > 0$ yarim chiziqda o'rganiladi, bunda noma'lum funksiyaning x o'zgaruvchisiga nisbatan hosilasisining $x = 0$ dagi qiymati berilgan. Yangi funksiyalarni kiritish orqali masala tahlil qilish uchun qulay shaklga tushiriladi. Xarakteristikalar ustidan integrallashdan foydalanib, ushbu masala uchun zarur shartlar olinadi. Masala ikkinchi turdagi Volterra tipidagi integral tenglamani yechishga keltiriladi. Bu masala yechimining mavjudligi va yagonaligi qisqarish akslantirish usuli yordamida isbotlanadi.

Kalit so'zlar: integro-differensial tenglama, chiziqsiz yutilish, integral yadrosi, Banax teoremasi.

SOLUTION OF ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL DEFOCUSATION EQUATION

Abstract. This paper examines the behavior of a hyperbolic semilinear integro-differential equation with nonlinear absorption. Initial conditions are assumed to be zero. Wave propagation is studied on the half-line $x > 0$, with a given value for the derivative of the unknown function with respect to the variable x at $x = 0$. By introducing new functions, the problem is reduced to a form convenient for analysis. Using integration over characteristics, the necessary conditions for these problems are obtained. The problem is reduced to solving a Volterra-type integral equation. The existence and uniqueness of a solution to this problem are proved using the contraction mapping method.

Keywords: integro-differential equation, nonlinear invitation, integral kernel, Banach's theorem.

Введение. Дефокусирующие дифференциальные уравнения гиперболического типа представляют собой важный класс уравнений, которые описывают динамику волн в нелинейных средах. Эти уравнения часто используются в физике, особенно в области оптики и теории солитонов.

Дефокусирующие уравнения гиперболического типа могут быть записаны в виде:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + g(u) = 0,$$

Где $g(u)$ – нелинейный член, который может описывать взаимодействие волн.

Дефокусирующие дифференциальные уравнения с нелинейностью вида:

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0,$$

являются важным классом уравнений в теории нелинейных волн и оптики. Эти уравнения

описывают динамику полей, где нелинейные эффекты приводят к рассеиванию волн, что характерно для дефокусирующих сред.

В работе [1] исследовано глобальное поведение решений дефокусирующего полулинейного волнового уравнения $\square\varphi = |\varphi|^{p-1}\varphi$ в R^{1+b} , $b \geq 3$. Для случая $s > 1 + 2/(b-1)$ получена равномерная взвешенная энергетическая оценка для решения, а также найдено обратное полиномиальное затухание потока энергии через гиперповерхности вдали от светового конуса.

В работе [2] рассмотрено волновое уравнение $\square\varphi + |\varphi|^{p-1}\varphi = 0$ со степенной нелинейностью, определённое вне единичного шара в R^n , $n \geq 3$, с граничными условиями Дирихле. Доказано, что если $s > n + 3$ и начальные данные являются нерадиальными возмущениями больших радиальных данных, то существует глобальное гладкое решение. Решение единственно в классе решений, удовлетворяющих энергетическому неравенству. Работа [3] посвящена изучению асимптотического поведения решений одномерного волнового уравнения $\square v + |v|^{s-1}v = 0$. Доказано, что решение с конечной энергией стремится к нулю в точечном смысле, причём для достаточно локализованных данных, принадлежащих некоторому весовому энергетическому пространству, решение затухает со временем с обратной полиномиальной скоростью. В работе [4] изучается уравнение $\Delta v + |v|^{s-1}v = 0$ на $R \times R$ с граничным условием Дирихле. Здесь K – звездообразное препятствие с гладкой границей. Доказано, что решение рассеивается как в энергетическом пространстве, так и в критическом пространстве Соболева. В работе [5] рассматривается смешанная краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c|u|^{s-1}u,$$

Здесь $s > 1$ и $c > 0$ — константы. С помощью метода энергетических неравенств получены оценки для решения дифференциальной и разностной задач. В статье [6] рассмотрена одномерная обратная задача для уравнения $u_{tt} = (k^2(x)u_x)_x + q(x)|u|^{m-1}u$ на полуоси $x > 0$ с нулевыми начальными данными и граничным условием $u(0, t) = f(t)$. Основная цель — восстановить коэффициент $q(x)$ по заданному $k(x)$ и производной $u_x(0, t)$, заданной при $t \in [0, T]$. Доказана теорема единственности и существования для прямой задачи, когда заданы коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$, а также функция $f(t)$. Далее изучается обратную задачу и формулируется локальная теорема единственности и существования для этой задачи. Кроме того, находится оценка устойчивости решения обратной задачи.

Работа [7] посвящена исследованию начально-краевой задачи для уравнения

$$u_{tt} - (k^2(x)u_x)_x = \int_0^t m(t-\theta)|u|^{n-1}u(x, \theta) d\theta,$$

в области $\Omega := \{(x, t) | x > 0, 0 < t \leq T\}$.

Постановка задачи и предварительные построения. Рассмотрим в области $D := \{(x, t) | x > 0, 0 \leq t \leq T\}$ начально-краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(\tau)|u_t|^{n-1}u_t(x, t-\tau) d\tau, \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

где n и T положительные числа, $k(t)$ — непрерывно дифференцируемая положительно определённая на $[0, t/2]$ функция. Уравнение (1) описывает процесс распространения акустических волн в среде с нелинейным поглощением. В дальнейшем будем полагать, что $g(t) < 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Прямая задача заключается в отыскании решения задачи (1)-(3) при заданных функциях $k(t)$ и $g(t)$. В обратной задаче требуется определить ядро $k(t)$ по следу решения прямой задачи при $x = 0$:

$$u|_{x=0} = f(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Данная работа посвящена исследованию прямой задачи, т.е. функция $k(t)$ предполагается известной.

Прямую задачу будем рассматривать в областях D_1 и D_2 определяемых следующим образом:

$$D_1 = \{(x, t) | x \geq 0, x < t \leq T - x\}, \quad D_2 = \{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq x\}.$$

Лемма 1. $u(x, t) = 0$ для всех $(x, t) \in D_2$.

Доказательство. Введём в рассмотрение переменные

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x.$$

Преобразование обратимо на множестве $x \geq 0$. В новых переменных имеем

$$u_t = u_\xi - u_\eta, \quad u_x = u_\xi + u_\eta$$

поэтому

$$u_{tt} - u_{xx} = 4 u_{\xi\eta}.$$

Уравнение (1) переписывается как:

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \mathcal{K}[u](\xi, \eta),$$

где для удобства положим (через обратное преобразование)

$$\mathcal{K}[u](\xi, \eta) := \int_0^t k(\tau) |u_t|^{n-1} u_t(x, t - \tau) d\tau.$$

Область D_2 в новой системе координат (ξ, η) соответствует $\xi \leq 0$ и $\eta \geq 0$ с условием $t \geq 0$. Линия $t = x$ задаётся, как $\xi = 0$. По условию начальные данные (2) равны нулю, значит по линии $t = 0$ $u \equiv 0$ и $u_t \equiv 0$. Интегрируя уравнение (4) по ξ от 0 до ξ и пользуясь тем, что на $\xi = 0$ имеем $u_\xi(0, \eta) = 0$, В результате получаем:

$$u_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \int_0^\xi \mathcal{K}[u](s, \eta) ds.$$

Далее интегрируя (5) по η от 0 до η и используя условие $u(0,0) = 0$, получаем:

$$u(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^\eta u_\eta(\xi, r) dr = \frac{1}{4} \int_{\eta_0}^\eta \int_0^\xi \mathcal{K}[u](s, r) ds dr.$$

Мы получили однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Из теории интегральных уравнений следует, что, оно имеет только нулевое решение.

Лемма доказана.

Теорема об однозначной разрешимости прямой задачи. В дальнейшем будем рассматривать задачу только в области D_1 ,

учитывая, что $u(x, x) = 0$. Введём в рассмотрение новые функции:

$$u_t + u_x = v_1, \quad u_t - u_x = v_2, \quad w = u_t = v_1 + v_2. \quad (5)$$

Волновой оператор $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ представим в виде $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)(\partial/\partial t - \partial/\partial x)$. В результате мы получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \int_0^t k(\tau) |w|^{n-1} w(x, t - \tau) d\tau, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \int_0^t k(\tau) |w|^{n-1} w(x, t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $(x, t) \in D_1$.

Интегрируя эти уравнения вдоль соответствующих характеристик с учётом граничного условия и обозначений (5), получим следующее интегральное уравнение относительно функции $w(x, t)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= 2g(t - x) + \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau k(\xi) |w|^{n-1} w(\xi, x + t - 2\xi) d\xi d\tau \\ &+ \int_{\frac{t-x}{2}}^{(t-x)} \int_0^\tau k(\xi) |w|^{n-1} w(\xi, t - x - 2\xi) d\xi d\tau + \int_{t-x}^t \int_0^\tau k(\xi) |w|^{n-1} w(\xi, t - x - \xi) d\xi d\tau. \quad (6) \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие предположения:

- 1) $k \in C\left[0, \frac{T}{2}\right]$ и существует константа $k_0 > 0$ такая, что $0 \leq k(t) \leq k_0$ для всех $t \in [0, T/2]$;
- 2) $g \in C[0, T]$ и обозначим $G := \sup_{0 \leq t \leq T} |g(t)|$;
- 3) $n \geq 1$ – фиксированное число.

Тогда существует такое $T_* > 0$ (зависящее от k_0, G, n), $0 < T_* \leq T$,

что в области $D_1 \cap \{0 \leq t \leq T_*\}$ интегральное уравнение (6) имеет единственное решение принадлежащее классу $C(\overline{D_1 \cap \{0 \leq t \leq T_*\}})$. Кроме того, решение непрерывно зависит от данных g и k .

Доказательство. Положим для краткости область рассмотрения

$$\Omega := \overline{D_1 \cap \{0 \leq t \leq T_*\}} = (x, t) : 0 \leq x \leq t \leq T_*, t + x \leq 2T_*$$

и рассмотрим банахово пространство $X := C(\Omega)$ с супремум-нормой $|w| := \sup_{(x,t) \in \Omega} |w(x, t)|$.

Определим оператор $A: X \rightarrow X$ по правой части интегрального уравнения (6):

$$\begin{aligned} (Aw)(x, t) &:= \\ &2g(t - x) + \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau k(\xi) |w(\xi, x + t - 2\xi)|^{n-1} w(\xi, x + t - 2\xi) d\xi d\tau + \int_{(t-x)/2}^{t-x} \int_0^\tau k(\xi) |w(\xi, t - x - 2\xi)|^{n-1} w(\xi, t - x - 2\xi) d\xi d\tau \\ &+ \int_{t-x}^t \int_0^\tau k(\xi) |w(\xi, t - x - \xi)|^{n-1} w(\xi, t - x - \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Сначала покажем, что A отображает шар $B_R := \{w \in X : |w| \leq R\}$ в себя при подходящем выборе R и T_* . Для этого оценим каждое из интегральных слагаемых по модулю. Пользуясь тем, что $k(\xi) \leq k_0$ и $|w| \leq R$, получаем для первого двойного интеграла:

$$\left| \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau k(\xi) |\omega(\xi, \cdot)|^{n-1} \omega(\xi, \cdot) d\xi d\tau \right| \leq k_0 R^n \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau d\xi d\tau.$$

Вычисляя внутренние интегралы, заметим, что $\int_0^\tau d\xi = \tau$ и

$$\int_{(t+x)/2}^t \tau d\tau = \frac{t^2 - (t+x)^2/4}{2} \leq \frac{t^2}{2} \leq \frac{T_*^2}{2}.$$

Таким образом, первый интеграл оценивается сверху через $\frac{k_0 T_*^2}{2} R^n$. Аналогично все три интегральных слагаемых вместе оцениваются сверху константой:

$$C_1 := \frac{3k_0 T_*^2}{2},$$

и получаем:

$$|(Aw)(x, t) - 2g(t - x)| \leq C_1 R^n$$

для всех $(x, t) \in \Omega$. Отсюда

$$|Aw| \leq 2G + C_1 R^n.$$

Выберем радиус шара R так, чтобы

$$R = 4G.$$

Тогда условие $A(B_R) \subset B_R$ выполняется, если

$$2G + C_1 R^n \leq R \iff C_1 (4G)^n \leq 2G,$$

т.е.

$$C_1 \leq \frac{2G}{(4G)^n} = 2^{1-2n} G^{1-n}. \quad (7)$$

Поскольку C_1 пропорциональна T_*^2 , можно выбрать достаточно малое $T_* > 0$ (в зависимости от k_0, G, n), чтобы неравенство (7) выполнялось. Таким образом при таком T_* оператор A отображает B_R в себя.

Теперь докажем, что A является сжимающим на B_R при возможно более строгом ограничении на T_* . Пусть $u, v \in B_R$. Тогда, учитывая гладкость k и непрерывность $|\cdot|^{n-1}(\cdot)$ на отрезке, имеем оценку для разности (используя неравенство Липшица для $s \mapsto |s|^{n-1}s$ на отрезке $[-R, R]$):

$$||u|^{n-1}u - |v|^{n-1}v| \leq L_n(R) |u - v|, \quad L_n(R) := n(2R)^{n-1}.$$

(Эту оценку легко получить, дифференцируя многочленобразную функцию или применяя неравенство для степенной функции). Тогда для каждого из трёх интегралов разность даёт оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{t+x}{2}}^t \int_0^\tau k(\xi) (|u|^{n-1}u - |v|^{n-1}v) d\xi d\tau \right| \\ & \leq k_0 L_n(R) |u - v| \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau d\xi d\tau \leq k_0 L_n(R) |u - v| \frac{T_*^2}{2}. \end{aligned}$$

Суммируя по трём интегральным слагаемым, получим:

$$|Au - Av| \leq C_2 |u - v|, \quad C_2 := \frac{3k_0 T_*^2}{2} L_n(R).$$

Подставляя $L_n(R) = n(2R)^{n-1}$ и $R = 4G$, получаем явное выражение для C_2 :

$$C_2 = \frac{3k_0 T_*^2}{2} \cdot n(8G)^{n-1}.$$

Тогда для каждого из трёх интегралов разность даёт оценку:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{t+x}{2}}^t \int_0^\tau k(\xi) (|u|^{n-1}u - |v|^{n-1}v) d\xi d\tau \right| \\ & \leq k_0 L_n(R) |u - v| \int_{(t+x)/2}^t \int_0^\tau d\xi d\tau \leq k_0 L_n(R) |u - v| \frac{T_*^2}{2}. \end{aligned}$$

Суммируя по трём интегральным слагаемым, получим:

$$|Au - Av| \leq C_2 |u - v|, \quad C_2 := \frac{3k_0 T_*^2}{2} L_n(R).$$

Подставляя $L_n(R) = n(2R)^{n-1}$ и $R = 4G$, получаем явное выражение для C_2 :

$$C_2 = \frac{3k_0 T_*^2}{2} \cdot n(8G)^{n-1}.$$

Следовательно, при достаточно малом $T_* > 0$ выполняется условие:

$$C_2 < 1,$$

и оператор A является сжимающим на B_R .

По теореме Банаха о неподвижной точке [8] интегральное уравнение (6) имеет единственное решение $w(x, t)$, непрерывное на Ω .

Заключение. В данной работе исследована задача о разрешимости нелинейного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. С помощью метода сжимающих отображений

доказано существование и единственность локального (по времени) классического решения. Полученные результаты могут служить основой для исследования обратных задач, связанных с восстановлением ядра $k(t)$ по граничным данным.

Осталось заметить непрерывную зависимость решения от данных. Пусть g, \tilde{g} – два набора граничных данных и k, \tilde{k} – соответствующие ядра. Повторяя оценки выше для разности соответствующих операторов A и \tilde{A} и применяя неравенство о сжатии, получаем стандартную оценку

$$|w - \tilde{w}| \leq \frac{1}{1-c_2} (4|g - \tilde{g}| * C[0, T^{**}] + C'|k - \tilde{k}| * C[0, T^{**}/2]),$$

где C' зависит от G, k_0, n, T_* . Это доказывает непрерывную зависимость решения от начальных данных.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Yang S. *Global behaviors of defocusing semilinear wave equations*, *Analysis of PDEs*.2019. arXiv:1908.00606 [math.AP] 1 Aug 2019. <http://arxiv.org/abs/1908.00606v1>
2. D’Ancona P. *On the supercritical defocusing NLW outside a ball*, *Analysis of PDEs*.2020. arXiv:1912.13216v2 [math.AP] 28 Jul 2020. <http://arxiv.org/abs/1912.13216v2>
3. Wei D., Yang Sh. *Asymptotic decay for defocusing semilinear wave equations in R^{n+1}* , *Analysis of PDEs*. 2020. arXiv:2003.12264v1 [math.AP] 27 Mar 2020. <http://arxiv.org/abs/2003.12264v1>
4. Dai W. *The global behaviors for defocusing wave equations in two dimensional exterior region*, *Analysis of PDEs*. 2023. arXiv:2301.07935v2 [math.AP] 20 Sep 2023. <https://doi.org/10.1007/s00229-023-01511-5>
5. Романов В.Г. *Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением* // *Сиб. матем. журн.*, 64:3 (2023), 635–652. DOI: <https://doi.org/10.1134/S003744662303014X>
6. Romanov V.G., Bugueva T.V. *An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation* // *Eurasian journal of mathematical and computer applications*, 2024. V.12, Issue 2. P.134–154. DOI: 10.32523/2306-6172-2024-12-2-134-154
7. Сафаров Ж. Ш., Хуррамова М. Ж. *О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения* // *Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики»*. Фергана, 16-17 мая 2025 года. С. 236-237.
8. Колмогоров А.Н. Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука, 1976г. 544 с.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*Суяров Турсунбек Ражаббой угли,
Бухарский государственный университет
t.r.suyarov@buxdu.uz*

*Карординов Сардорхужа Равшан угли,
Бухарское отделение Института
математики АН Республики Узбекистан
s.r.qarordinov@buxdu.uz*

Аннотация. В настоящей работе исследуется обратная задача определения правой части одномерного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами по дополнительным интегральным условиям, заданным относительно решения первой начально-краевой задачи для этого уравнения. Обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящей от времени, эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра первого рода. В классе непрерывных функций установлен критерий единственности решения обратной задачи, и доказаны теоремы о существовании и устойчивости решения.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, интеграл Вольтерра первого рода, обратная задача, интегральное условие.

O'ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI GIPERBOLIK TENGLAMANING O'NG TOMONIDAGI VAQT FUNKSIYASINI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz ushbu tenglama uchun birinchi boshlang'ich chegara qiymati masalasining yechimi uchun belgilangan qo'shimcha integral shartlar asosida o'zgaruvchan koeffitsiyentlarga ega bo'lgan bir o'lchovli giperbolik tenglamaning o'ng tomonini aniqlashning teskari masalasini o'rganamiz. O'ng tomonda vaqtga bog'liq omilni topishning teskari masalasi birinchi turdagi Volterra integral tenglamasiga teng ravishda keltiriladi. Uzluksiz funksiyalar sinfidagi teskari masala yechimi uchun yagonalik mezoni o'rnatiladi va yechimning mavjudligi va barqarorligi haqidagi teoremlar isbotlanadi.

Kalit so'zlar: giperbolik tenglama, birinchi turdagi Volterra integrali, teskari masala, integral shart.

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE TIME FUNCTION ON THE RIGHT-HAND SIDE OF A HYPERBOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract. In this paper, we study the inverse problem of determining the right-hand side of a one-dimensional hyperbolic equation with variable coefficients based on additional integral conditions specified for the solution of the first initial-boundary value problem for this equation. The inverse problem of finding the time-dependent factor on the right-hand side is equivalently reduced to a Volterra integral equation of the first kind. In the class of continuous functions, a uniqueness criterion for the solution of the inverse problem is established, and theorems on the existence and stability of the solution are proved.

Keywords: hyperbolic equation, Volterra integral of the first kind, inverse problem, integral condition.

Введение и постановка задачи. В области $D := \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < l\}$, рассмотрим начальнокраевую задачу определения функции $u(t, x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(x)u = F(t, x), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

Предположим, что для коэффициентов уравнения (1) выполняются следующие условия:

A1): $0 < p(x) \in C^2[0, l], 0 \leq q(x) \in C^1[0, l]$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в (2) заданные достаточно гладкие

функции.

В прямой задаче требуется определить функцию $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,0}(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнениям (1)-(3) для заданных достаточно гладких функций $\varphi(x), \psi(x), F(t, x)$, где $\bar{D} = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$.

В работе мы предполагаем $F(t, x) = f(t)g(x)$, исследуем следующую обратную задачу.

Обратная задача. Найти $f(t) \in C[0, T]$, если относительно решения прямой задачи (1)-(3) известно интегральное условие переопределения:

$$\int_0^l g(x)u(t, x)dx = h(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $h(t)$ - заданные достаточно гладкие функции. В этой задаче интегральное условие (4) является дополнительным условием определения функции $f(t)$. Нестандартное дополнительное условие (4) соответствует среднему по времени скорости (the time-averaged velocity) с весовой функцией $f(t)$.

Уравнение с частными производными (1), определяющее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы в сплошных средах (акустика, преимущественно линейная: звук в газах, жидкостях и твёрдых телах) и электромагнетизме (электродинамике). Обратные задачи нахождения неизвестных, описывающих источники, являются линейными задачами. Различные обратные задачи для отдельных типов, параболических, гиперболических и эллиптических дифференциальных уравнений, были достаточно полно изучены (см. [1,2,3] в приведённой там обширной библиографии).

Отметим также работы [4,5,6], в которых исследован широкий круг прямых начально-краевых и обратных задач об источнике для уравнения (1) с $p(x) \equiv 1$ и $q(x) \equiv 0$. В работах [7,8,9,10] для общего параболического и гиперболического уравнения колебаний прямоугольной пластинки изучены начально-граничная и обратные задачи по отысканию правой части (источника колебаний).

В настоящей работе для одномерного неоднородного уравнения колебаний струны исследуется обратная задача восстановления источника правой части $F(t, x) = f(t)g(x)$, с неизвестной функцией $f(t)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения поставленных задач.

Исследование начально-краевой задачи (1)-(3)

Теорема 1 (теорема единственности). *Предположим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (1) удовлетворяют условиям A1). Тогда решение $u(t, x)$ начально-краевой задачи (1)-(3) в классе функций $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,0}(\bar{D}) \cap C^2(D)$ является единственным.*

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$, удовлетворяющие условиям следствия. Тогда их разность $u_1(t, x) - u_2(t, x) = u(t, x)$ принадлежит классу $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,0}(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяет однородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right] - q(x)u(t, x), \quad (5)$$

в D , нулевым начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

и одному из граничных условий:

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad (7)$$

Введём функцию:

$$v(t, x) = \int_0^t u(\tau, x) d\tau. \quad (8)$$

Она имеет непрерывные производные $v_x, v_t, v_{xx}, v_{xt}, v_{tt}$ при указанных значениях переменных. Напишем для $u(\tau, x)$ уравнение (5) и проинтегрируем его по τ на промежутке от $\tau = 0$ до $\tau = t$. Из выражений (6)-(8) следует:

$$\frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right] - q(x)v(t, x)$$

В этом уравнении заменим t на τ , умножим обе части на $v_\tau(\tau, x)$ и проинтегрируем по τ на промежутке от $\tau = 0$ до $\tau = t$. Принимая во внимание (6) – (8), получим:

$$\frac{1}{2} v_t^2(t, x) = \int_0^t v_\tau(\tau, x) \frac{\partial}{\partial x} [p(x)v_x(\tau, x)] d\tau - \frac{1}{2} q(x)v^2(t, x).$$

Интегрируем обе части по x на промежутке $[0, l]$ и в повторном интеграле меняем порядок

интегрирования:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l v_t^2(t, x) dx = \\ & = \int_0^t \left\{ \int_0^l v_\tau(\tau, x) \frac{\partial}{\partial x} [p(x)v_x(\tau, x)] dx \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^l q(x)v^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям внутренний интеграл и принимая во внимание (6)-(8), получаем, что внеинтегральный член равен нулю:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l v_t^2(t, x) dx = \\ & = - \int_0^t \left\{ \int_0^l p(x)v_{\tau x}(\tau, x)v_x(\tau, x) dx \right\} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^l q(x)v^2(t, x) dx \end{aligned}$$

Меняя опять порядок интегрирования, производя интегрирование по τ и принимая во внимание, что $v_x(0, x) = 0$, получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^l v_t^2(t, x) dx = - \frac{1}{2} \int_0^l p(x)v_x^2(\tau, x) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^l q(x)v^2(t, x) dx$$

откуда следует:

$$\int_0^l v_t^2(t, x) dx \leq 0$$

отсюда, следует $v_t(t, x) = 0$ при $0 \leq x \leq l$ и $0 < t \leq T$. В силу (8), получаем $u(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x) = 0$ в \bar{D} .

Существование решения. Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(x), \tag{9}$$

по собственным функциям уравнения:

$$L(X) \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x)X = -\lambda X, \tag{10}$$

с граничными условиями:

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{11}$$

Если условия A1, выполнены, в книгах [11, стр. 168-215], [12, стр. 225-238] показано, что спектральная задача (10), (11) в $L^2(0, l)$ имеет полную систему ортонормированных собственных функций $X_n(x)$, а положительность соответствующих собственных значений λ_n можно доказать следующим стандартным способом. Умножая обе части уравнения (10) на $X = X_n(x)$, интегрируя и принимая во внимание нормированность собственных функций, имеем

$$\lambda_n = - \int_0^l \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX_n}{dx} \right) - q(x)X_n \right] X_n(x) dx.$$

Интегрируя первое слагаемое в правой части этого равенства и учитывая (11), получим равенство:

$$\lambda_n = \int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dX_n}{dx} \right)^2 + q(x)X_n^2 \right] dx, \tag{12}$$

которое означает $\lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что λ_n образуют счётное множество и при подходящей нумерации, имеем $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. В [11, стр. 182], в частности, получена оценка:

$$m_1 n^2 + m_2 \leq \lambda_n \leq M_1 n^2 + M_2, \tag{13}$$

где пары постоянных m_1, m_2 и M_1, M_2 зависят, соответственно, от минимальных и максимальных значений функций $p(x), q(x)$ на отрезке $[0, l]$.

Разлагая правую часть (1) по собственным функциям задачи (10), (11) и приравнявая выражения при одинаковых собственных функциях из уравнения (1), мы получим уравнения для определения коэффициентов Фурье $v_n(t)$:

$$v_n''(t) + \lambda_n v_n(t) = F_n(t), \tag{14}$$

где $F_n(t) = \int_0^l F(t, x)X_n(x) dx$ и $L(X_n) = -\lambda_n X_n$. Решение уравнения (14) удовлетворяет начальным условиям.

$$v_n(0) = \varphi_n = \int_0^\ell \varphi(x)X_n(x)dx, v_n'(0) = \psi_n = \int_0^\ell \psi(x)X_n(x)dx, \quad (15)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, мы получим для $v_n(t)$ интегральное уравнение:

$$v_n(t) = \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n}t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t F_n(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds. \quad (16)$$

Итак, решение задачи (1)-(3), что следует из (9), должны быть выражены в виде формального ряда:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n}t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t F_n(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds \right] X_n(x), \quad (17)$$

Если ряд (17) сходится равномерно в \bar{D} и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по t и по x до двух раз сходятся равномерно в \bar{D} , то сумма этого ряда есть из класса $C^2(\bar{D})$ функция, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2), (3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если выполнены условия $A1$, $u, \varphi(x) \in C^3[0, l]$, $\varphi(0) = L(\varphi)(0) = \varphi(l) = L(\varphi)(l) = 0$, $\psi(x) \in C^2[0, l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $F(t, x) \in C_{t,x}^{0,2}[0, T]$, $F(t, 0) = F(t, \ell) = 0$, то существует единственное решение задачи (1)-(3), определяемое формулой (17).

Доказательство. Каждый член ряда (17) удовлетворяет уравнению (1) по самому его построению, и нам достаточно показать равномерную и абсолютную сходимость ряда (17) и рядов, полученных из (17) почленно дифференцированием по t и x до двух раз включительно в \bar{D} . Для этого достаточно доказать, что ряды

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(x), u_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n''(t)X_n(x), \quad (18)$$

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(x), u_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n''(t)X_n(x), \quad (19)$$

где $v_n''(t)$ как следует из (16)

$$v_n''(t) = -\lambda_n \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n}t - \sqrt{\lambda_n} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n}t + F_n(t) - \sqrt{\lambda_n} \int_0^t F_n(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds. \quad (20)$$

Для доказательства равномерной сходимости рядов (18),(19), достаточно доказать равномерную сходимость на отрезке $x \in [0, \ell]$ следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \left[|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\|F_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\lambda_n}} \right]; \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| [\lambda_n |\varphi_n| + \sqrt{\lambda_n} (|\psi_n| + \|F_n\|_{C[0,T]})]; \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n'| \left[|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\|F_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\lambda_n}} \right]; \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n''| \left[|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\|F_n\|_{C[0,T]}}{\sqrt{\lambda_n}} \right]. \quad (24)$$

Из уравнения (10) имеем:

$$X_n'' = \frac{-p'}{p} X_n' + \frac{q - \lambda_n}{p} X_n;$$

следовательно, равномерная сходимости рядов (23) и (24), следует из равномерной сходимости рядов (21) и (22).

При этом мы будем использовать неравенство, аналогичное неравенству Бесселя (см. [12, стр. 254]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n^2 \leq \int_0^l [p(x)(\varphi'(x))^2 + q(x)\varphi^2(x)] dx = D(\varphi), \quad (25)$$

которое справедливо для любой функции $\varphi(x) \in C^1[0, l]$ с условиями $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.
 Далее пользуясь интегральным уравнением для собственных функций $X_n(x)$

$$\frac{X_n(x)}{\lambda_n} = \int_0^l G(x, \xi) X_n(\xi) d\xi, \quad (26)$$

где $G(x, \xi)$ - функция Грина задачи (10) и (11), удовлетворяющей на отрезке $0 \leq \xi \leq l$ условиям теоремы. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\lambda_n} \leq D(G) \leq M_1, \text{ при } x \in [0, l]. \quad (27)$$

Дифференцируя (26) получаем:

$$\frac{X_n'(x)}{\lambda_n} = \int_0^l G_x(x, \xi) X_n(\xi) d\xi$$

в силу неравенства Бесселя отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n'^2}{\lambda_n^2} \leq \int_0^l G_x^2(x, \xi) d\xi \leq M_2, \text{ при } x \in [0, l], \quad (28)$$

Докажем теперь, что ряд (2) равномерно сходится на отрезке $0 \leq \xi \leq l$. Применяя неравенство Коши и пользуясь оценкой (27), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n''| \left[|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\sqrt{\lambda_n}} + \frac{\|F_n\|_{C[0, T]}}{\sqrt{\lambda_n}} \right] &= \sum_{n=1}^{k+m} \frac{|X_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\lambda_n^{\frac{3}{2}} |\varphi_n| + \lambda_n |\psi_n| \right) \leq \\ &\sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \frac{X_n^2(x)}{\lambda_n}} \left(\sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n^3 \varphi_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n^2 \psi_n^2} \right) \leq \sqrt{M_1} \left(\sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n^3 \varphi_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n^2 \psi_n^2} \right) \end{aligned}$$

отсюда следует равномерная сходимость ряда (22), так как числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \psi_n^2$ сходятся в силу (25).

Докажем равномерную сходимость ряда (23). С помощью неравенства (28) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{k+m} |X_n'(x)| \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\sqrt{\lambda_n}} \right) &= \sum_{n=k}^{k+m} \frac{|X_n'(x)|}{\lambda_n} (\lambda_n |\varphi_n| + \sqrt{\lambda_n} |\psi_n|) \\ &\leq \sqrt{M_2} \left(\sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n^2 \varphi_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n \psi_n^2} \right). \quad (29) \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \varphi_n^2$ сходится в силу неравенства Бесселя для функции $L(\varphi)(x)$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2$ сходится вследствие теоремы, применённой к функции $\psi(x)$. Тогда из (29) вытекает равномерная сходимость ряда (23). Теорема 2 доказана.

Исследуем обратную задачу (1)-(4).

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям Теоремы 2, $g(x) \neq 0$ на $(0, l), h(t) \in C^2[0, T]$ и выполнены условия:

$$\int_0^l \psi(x)g(x)dx = h'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n, \quad \int_0^l \psi(x)g(x)dx = h'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n$$

то обратная задача имеет единственное решение.

Доказательство. Решение прямой задачи (1)-(3) удовлетворим дополнительному условию (4), то получим:

$$\int_0^l g(x)u(t, x)dx = \int_0^l g(x) \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)g_n = h(t), \quad (30)$$

где $g_n = \int_0^l g(x)X_n(x)dx$. При $F(t, x) = f(t)g(x)$ функция (16) принимают вид:

$$v_n(t) = \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{g_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f(s) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds. \quad (31)$$

В (30) подставляя (31) после несложных преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $f(t)$:

$$\int_0^t K(t,s)f(s)ds = H(t), 0 \leq t \leq T, \quad (32)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$K(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s), 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (33)$$

$$H(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} g_n \left[\varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t \right]. \quad (34)$$

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x), \psi(x)$ и $g(x)$ в теореме 2 ядро $K(t,s)$ и правая часть $\tilde{H}(t)$ уравнения (32) непрерывно дифференцируемы по t в областях определения, т.е. ряды в (33) и (34) сходятся равномерно и допускают почленное дифференцирование по t . В самом деле, непрерывность этих функций сомнений не вызывает. Формальное дифференцирование (33) и (34) два раза по t :

$$K_{tt}(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n}(s-t), \quad (35)$$

$$H''(t) = h''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n [\lambda_n \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} t - \sqrt{\lambda_n} \psi_n \sin \sqrt{\lambda_n} t]. \quad (36)$$

Для ряда (35) оценка выполняется следующим образом:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n}(s-t) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} g_n^2.$$

Чтобы доказать сходимость последнего числового ряда, рассмотрим следующий функционал, определив его правую часть (12):

$$Z(S) = \int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + q(x) S^2 \right] dx.$$

Подставляя в него выражение:

$$S(x) = g(x) - \sum_{n=1}^{j-1} g_n X_n(x),$$

и принимая во внимание (12), а также легко проверяемое тождество:

$$\int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dX_k(x)}{dx} \right) \left(\frac{dX_n(x)}{dx} \right) + q(x) X_k(x) X_n(x) \right] dx = 0, k \neq n,$$

получим:

$$\begin{aligned} Z \left(g(x) - \sum_{n=1}^{j-1} g_n X_n(x) \right) &= \int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^2 + q(x) g^2(x) \right] dx \\ &+ \sum_{n=1}^{j-1} \lambda_n g_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{j-1} g_n \int_0^l \left[p(x) \frac{dg(x)}{dx} \frac{dX_n(x)}{dx} + q(x) g(x) X_n(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Учитывая условия $g(0) = g(l) = 0$, интегрируем по частям в последнем интеграле. Принимая во внимание равенство (2) при $X = X_n(x), \lambda = \lambda_n$ и находим:

$$Z \left(g(x) - \sum_{n=1}^{j-1} g_n X_n(x) \right) = \int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^2 + q(x) g^2(x) \right] dx - \sum_{n=1}^{j-1} \lambda_n g_n^2, \quad (37)$$

Поскольку $Z(S) \geq 0$, то из формулы (37) непосредственно следует неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n^2 \leq \int_0^l \left[p(x) \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^2 + q(x) g^2(x) \right] dx, \quad (38)$$

сходимость ряда, стоящего слева.

Чтобы доказать равномерную сходимость ряда в (36), достаточно доказать сходимость мажорантного для него числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \varphi_n$. Используя неравенство Коши, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |g_n| |\varphi_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\lambda_n} |g_n| \sqrt[4]{\lambda_n} |\varphi_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} g_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \varphi_n^2}.$$

Сходимость рядов в правой части этого соотношения непосредственно следует из предыдущих рассуждений.

Теперь, дифференцируя (32) и разрешая при этом получаемое уравнение относительно функции $f(t)$, получим:

$$f(t) + \int_0^t K_0(t, s) f(s) ds = H_0(t), \quad (39)$$

где $K_0(t, s) = K_{tt}(t, s) / \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$, $H_0(t) = H(t) / \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$. В силу теоремы 2 функция $g(x) \neq 0$ на $(0, \ell)$, из равенства Парсеваля-Стеклова, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 = \int_0^{\ell} g^2(x) dx = \|g\|_{L_2(0, \ell)}^2 > 0.$$

Следовательно, (39) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывными ядром и правой частью. Очевидно, что такое уравнение однозначно разрешимо в классе непрерывных на $[0, T]$ функций:

$$f(t) = H_0(t) + \int_0^t R(t, s) H_0(s) ds,$$

где $R(t, s)$ - резольвента функции $-K_0(t, s)$. Таким образом, теорема 3 доказана.

Устойчивость решения обратной задачи от заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть $\{u(t, x), f(t)\}$ и $\{\tilde{u}(t, x), \tilde{f}(t)\}$ являются решениями задачи (1)-(4) с данными $\{\varphi(x), \psi(x), h(t)\}$ и $\{\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x), \tilde{h}(t)\}$, соответственно, одними теми же функциями $p(x), q(x), g(x)$. Тогда, справедливы следующие оценки устойчивости:

$$\|f - \tilde{f}\|_{C[0, T]} \leq M_1 (\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^1[0, \ell]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^1[0, \ell]} + \|h - \tilde{h}\|_{C^2[0, T]}), \quad (40)$$

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(\bar{D})} \leq M_2 (\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^1[0, \ell]} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^1[0, \ell]} + \|h - \tilde{h}\|_{C^2[0, T]}), \quad (41)$$

где M_1 и M_2 зависят от функций $p(x), q(x), g(x)$.

Доказательство. Рассматривая уравнения (39) для $\{\tilde{\varphi}(x), \tilde{\psi}(x), \tilde{h}(t)\}$, а потом составляя разность этого уравнения с (39), имеем:

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \overline{H}_0(t) - \int_0^t K_0(t, s) [f(s) - \tilde{f}(s)] ds, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{H}_0(t) = & \left[h''(t) - \tilde{h}''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n) g_n \lambda_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n - \tilde{\psi}_n) g_n \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} t \right] / \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \end{aligned}$$

Предварительно по модулю оценим $\overline{H}_0(t)$:

$$\begin{aligned}
 |\overline{H}_0(t)| &\leq |h''(t) - \tilde{h}''(t)| + \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| g_n \lambda_n + \\
 &+ \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n - \tilde{\psi}_n| g_n \sqrt{\lambda_n} \leq |h''(t) - \tilde{h}''(t)| + \\
 &+ \tilde{M}_1 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n)^2} + \tilde{M}_2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} g_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\psi_n - \tilde{\psi}_n)^2}
 \end{aligned}$$

Далее, учитывая (38) имеем:

$$\begin{aligned}
 |\overline{H}_0(t)| &\leq \|h - \tilde{h}\|_{C^2[0,T]} + \tilde{M}_1 \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{L_2(0,l)} + \tilde{M}_2 \|\psi_n - \tilde{\psi}_n\|_{L_2(0,l)} \leq \\
 &\leq \|h - \tilde{h}\|_{C^2[0,T]} + \tilde{M}_{11} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{C^1[0,\ell]} + \tilde{M}_{22} \|\psi_n - \tilde{\psi}_n\|_{C^1[0,\ell]}.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Тогда из (42) с учётом (43), для $t \in [0, T]$ получим:

$$\begin{aligned}
 |f(t) - \tilde{f}(t)| &\leq \|h - \tilde{h}\|_{C^2[0,T]} + \tilde{M}_{11} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{C^1[0,\ell]} + \\
 &\tilde{M}_{22} \|\psi_n - \tilde{\psi}_n\|_{C^1[0,\ell]} + \tilde{M}_{12} \int_0^t [f(s) - \tilde{f}(s)] ds
 \end{aligned}$$

где постоянные $\tilde{M}_{11}, \tilde{M}_{22}, \tilde{M}_{12}$ зависят от функций $p(x), q(x), g(x)$ и числа T . Отсюда, используя неравенство Гронуолла, следует оценка (40).

Пусть $(t, x) \in \bar{D}$, рассматривая уравнение (9) для $\tilde{v}_n(t)$ и составляя разность $u - \tilde{u}$ на основании (31), (40), нетрудно получить оценку (41). Теорема 4 доказана.

Заключение. В данной работе мы изучили обратную задачу определения функции источника, зависящей от времени, для одномерного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Мы доказали теоремы о существовании и единственности решений обратной задачи. Интересные результаты получены относительно уникальности определения временной источниковой функции при условии избыточности, с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики, Наука, М., (1984).
2. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики, Наука, М., (1991).
3. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики, Наука, Новосибирск., (1982).
4. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
6. Сабитов К.Б. Обратные задачи для уравнений математической физики. М.: Наука, 2023. 288 с.
7. Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения. Матем. заметки, 77(4), 522 – 534. (2005).
8. Сабитов К. Б. Прямая и обратные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластинки по отысканию источника. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 63(4), (2023).
9. Сабитов К. Б., Зайнуллов А. Р. Обратные задачи для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию правой части. Изв. вузов. Матем. 65(3), 75-88, (2021).
10. Durdiev D. Kh. and Durdiev D. D., (2022) The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation, Turkish Journal of Mathematics: Vol. 46: No. 8, Article 11. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3329>
11. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, «Наука», 1961.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, «Наука», Том 4, Часть 2, 1981.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Хасанов Иброхим Ихтиёрвич,
преподаватель Бухарского государственного университета
ihasanov998@gmail.com, i.i.hasanov@bukdu.uz

Аннотация. В данной статье мы изучаем дифференциальные уравнения дробного порядка с сингулярными коэффициентами и построение их решений с использованием функции Грина. Кроме того, в статье анализируется влияние сингулярных коэффициентов и метод решения прямой задачи. Дробные диффузионные уравнения расширяют классические модели диффузионных процессов, позволяя эффективно описывать аномальную диффузию и сложные физические явления. Рассматриваются основные виды производных дробного порядка, их свойства и применение к диффузионным уравнениям. Анализируются методы решения краевых задач с использованием функции Грина, а также строятся и исследуются фундаментальные решения дробных уравнений. Кроме того, результаты исследования показывают широкие возможности использования дробных диффузионных уравнений для моделирования сложных физических процессов.

Ключевые слова: дробная производная Капуто, функция Mittag-Леффлера, преобразование Лапласа, начальные условия, граничные условия.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

Abstract In this article, we study fractional differential equations with singular coefficients and construct their solutions using the Green's function. Additionally, the influence of singular coefficients and the method for solving the direct problem are analyzed. Fractional diffusion equations extend classical diffusion models, allowing for an effective description of anomalous diffusion and complex physical phenomena. The main types of fractional derivatives, their properties, and applications to diffusion equations are considered. Methods for solving boundary value problems using the Green's function are analyzed, and fundamental solutions for fractional equations are constructed and investigated. Furthermore, the research results demonstrate the wide applicability of fractional diffusion equations for modeling complex physical processes.

Keywords: Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, Laplace transform, initial conditions, boundary conditions.

KASR TARTIBLI DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALA

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz singulyar koeffitsiyentli kasrli differensial tenglamalar va ularning Grin funksiyasidan foydalangan holda yechimlarini qurishni o'rganamiz. Shu bilan birga, maqolada singulyar koeffitsiyentlarning ta'siri, to'g'ri masalani yechish usuli tahlil qilingan. Kasr tartibli diffuziyali tenglamalar diffuziya jarayonlarining klassik modellarini kengaytirish va anomaliy diffuziya hamda murakkab fizik hodisalarni samarali tasvirlash imkonini beradi. Maqolada kasr tartibli hosilalarining asosiy turlari, ularning xossalari va diffuziya tenglamalariga qo'llanilishi ko'rib chiqilgan. Grin funksiya yordamida chegaraviy masalalarni yechish usullari tahlil qilingan va kasr tartibli tenglamalar uchun fundamental yechimlar qurilgan va tadqiq qilingan. Bundan tashqari tadqiqot natijalari murakkab fizik jarayonlarni modellashtirish uchun kasr tartibli diffuziya tenglamalaridan foydalanishning keng imkoniyatlarini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: Kaputo kasr hosilasi, Mittag-Leffler funksiyasi, Laplas aylantirishi, boshlang'ich shartlar, chegaraviy shartlari.

Введение. В последние десятилетия наблюдается растущий интерес к изучению дифференциальных уравнений дробного порядка. Это связано с их способностью адекватно описывать сложные процессы, обладающие памятью и наследственностью, которые встречаются в

физике, биологии, экономике и инженерных науках. Одной из таких моделей является уравнение диффузии дробного порядка, которое обобщает классическое уравнение теплопроводности и учитывает эффекты аномальной диффузии.

Особый интерес вызывает исследование прямых и обратных задач для уравнений диффузии дробного порядка с сингулярными коэффициентами. Их наличие усложняет анализ и требует применения специализированных методов для изучения корректности постановки задач, устойчивости решений и методов их нахождения. Подобные задачи возникают, например, при моделировании процессов теплопередачи в неоднородных средах, пористых материалах или в задачах фильтрации жидкостей и газов.

Прямая задача для уравнения диффузии дробного порядка предполагает нахождение распределения температуры или концентрации при известных начальных и граничных условиях, а также известных коэффициентах уравнения. Обратная задача, напротив, требует восстановления неизвестных параметров уравнения или начальных условий на основе имеющихся данных о состоянии системы в определённые моменты времени или в заданных точках пространства.

Актуальность исследования обусловлена как теоретическим интересом к углублённому анализу дробных дифференциальных уравнений, так и практическим спросом на точные модели для описания сложных физических процессов. В данной работе рассматриваются методы решения прямых и обратных задач для уравнения диффузии дробного порядка с сингулярными коэффициентами, а также анализируются их особенности и сложности.

Постановка задачи. В данной работе исследуется начально-краевая задача для дифференциального уравнения, содержащего дробную производную:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

В задаче (1)-(3) \mathcal{D}_t^α обозначает дробную производную Римана-Лиувилля в смысле Капуто, где параметры принимают значения:

$$k \in (-1, 0), T > 0, l > 0, \Omega_T = \{(x, t) | x \in (0, l), t \in (0, T)\}.$$

Методология исследования. Для анализа данной задачи используются методы дробного исчисления, теория краевых задач и численные методы. В частности, применяются методы построения решений с использованием функций Грина и специальных функций. Важным аспектом работы является исследование существования и единственности решения задачи (1)-(3), а также его асимптотического поведения при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow T$.

Настоящее исследование основано на фундаментальных работах в области дробного исчисления, в том числе на трудах таких авторов, как У.А. Розиков, А.Й. Хамраев, У.У. Джамилев, Ладра, Ф. Мухаммедов и других учёных. Дальнейшее развитие данной теории способствует расширению применения дробных дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники.

Постановка прямой задачи:

Требуется найти функцию $u(x, t)$, принадлежащую классу $C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T)$, такую, что $x^k u_x(x, t) \in C(\Omega_T)$ и удовлетворяющую следующим условиям: дифференциальному уравнению (1), начальному условию (2), граничным условиям (3), где $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Решение данной задачи (1)-(3) ищем методом Фурье. Представим искомую функцию в виде $u(x, t) = X(x)Y(t)$. Рассмотрим однородную часть уравнения (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\alpha (XY) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (XY) + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x} (XY), \\ XD_t^\alpha Y &= YX'' + Y \frac{k}{x} X' \Rightarrow \frac{D_t^\alpha Y}{Y} = \frac{X'' + \frac{k}{x} X'}{X} = -\lambda^2. \end{aligned}$$

Тогда получим уравнение $X'' + \frac{k}{x} X' + \lambda^2 x = 0$. Используем граничные условия (3):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^k u_x(x, t) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^k X'(x)Y(t) = Y(t) \lim_{x \rightarrow 0} x^k X'(x) = 0 \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^k X'(x) &= 0, \quad u(l, t) = X(l)Y(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, получаем следующую спектральную задачу:

$$X'' + \frac{k}{x}X' + \lambda^2 X = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k X'(x) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{5}$$

Если в уравнении (4) введём замену:

$$X = x^{\frac{1-k}{2}} z(\xi), \quad \xi = \lambda x, \tag{6}$$

то получим:

$$\xi^2 z''(\xi) + \xi z'(\xi) + (\xi^2 - \nu^2)z(\xi) = 0, \quad \nu^2 = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Решение уравнения Бесселя (7) представляется следующим образом:

$$z(\xi) = P_1 J_\nu(\xi) + P_2 J_{-\nu}(\xi). \tag{8}$$

Воспользовавшись уравнением (8), решение уравнения (4) представляется следующим образом:

$$X(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x).$$

Затем, применив условия (3), получаем следующее выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k X'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-P_1 \lambda x^{\frac{1+k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + P_2 \lambda x^{\frac{1+k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x) \right) = 0.$$

Для выполнения условия (5) должно выполняться следующее: $P_1 \neq 0, P_2 = 0$ (в противном случае не будет удовлетворена первая часть равенства (5)).

Отсюда получаем:

$$X = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x),$$

а из второй части (5) получаем:

$$x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda l) = 0, \tag{9}$$

Из условия $k \in (-1, 0)$ следует, что все решения уравнения (9) состоят из упорядоченно-положительных чисел. Также отметим, что для нулей уравнения (9), согласно [2], при больших n справедлива асимптотическая формула.

$$\mu_n = \pi n + \frac{\pi}{2} k - \frac{\pi}{4}.$$

Для удобства обозначим их как μ_n $n = 1, 2, 3, \dots$, $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$. Тогда отсюда получим

$$X_n(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right). \tag{10}$$

Для удобства коэффициент P_1 выберем так, чтобы $\|X_n(x)\| = 1$. Например,

$$P_1 = \left(\int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}^2(\lambda_n x) dx \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}^2(\lambda_n x) dx \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$X_n(x) = \frac{x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)}{\left(\int_0^l x J_{\frac{k-1}{2}}^2(\lambda_n x) dx \right)^{-\frac{1}{2}}}. \tag{11}$$

Лемма 1. Последовательность $\{X_n(x)\}^\infty$ является полной ортонормированной системой в пространстве $\mathcal{L}_2[0, l]$.

Строим решение задачи (1)-(3) в виде ряда Фурье–Бесселя, то есть:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{12}$$

После этого, учитывая равенство (12), из уравнения (1) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u_n + \lambda_n^2 u_n = f_n(t), \tag{13}$$

и условию

$$u_n(T) = \varphi_n, \tag{14}$$

где

$$\begin{cases} u_n(t) = \int_0^l u(x,t)x^k X_n(x)dx, \\ f_n(t) = \int_0^l f(x,t)x^k X_n(x)dx, \\ \varphi_n = \int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)dx, \end{cases} \quad n = 1,2,3, \dots \quad (15)$$

Таким образом, мы пришли к обыкновенным дробным дифференциальным уравнениям (13) относительно неизвестных функций $u_n(t)$ с условиями (14). Для их решения будем использовать формальное применение преобразования Лапласа. В результате получим следующее выражение:

$$s^\alpha \tilde{u}_n(s) - s^{\alpha-1}u_n(0) + \lambda_n^2 \tilde{u}_n(s) = \tilde{f}_n(s), \quad (16)$$

где

$$\tilde{u}_n(s) = L[u_n(t)], \quad \tilde{f}_n(s) = L[f_n(t)].$$

Решая уравнение (16) получим:

$$\tilde{u}_n = \frac{u_n(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda_n^2} + \frac{f_n(s)}{s^\alpha + \lambda_n^2}. \quad (17)$$

Применив обратное преобразование Лапласа к формуле (17), как показано в книге [1], получим решение уравнения (13), которое удовлетворяет условию (14), в следующем виде:

$$u_n(t) = u_n(0)E_\alpha(-\lambda_n^2 t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2 (t-\tau)^\alpha) f_n(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Отсюда находим, что

$$u_n(0) = (E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha))^{-1} \left(\varphi_n - \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2 (T-\tau)^\alpha) f_n(\tau) d\tau \right). \quad (19)$$

Тогда решение $u_n(t)$ можно записать в следующем виде:

$$u_n(t) = \left(\varphi_n - \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2 (T-\tau)^\alpha) f_n(\tau) d\tau \right) \frac{E_\alpha(-\lambda_n^2 t^\alpha)}{E_\alpha(-\lambda_n^2 T^\alpha)} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2 (t-\tau)^\alpha) f_n(\tau) d\tau. \quad (20)$$

Лемма 2: Для достаточно больших n справедлива следующая оценка:

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_n| + C \|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha + C \|f_n\|_{C[0,T]} t^\alpha, \quad (21)$$

$$|D_t^\alpha u_n(t)| \leq \lambda_n^2 |\varphi_n| + C \lambda_n^2 \|f_n\|_{C[0,T]} T^\alpha + C \lambda_n^2 \|f_n\|_{C[0,T]} t^\alpha + |f_n(t)|, \quad (22)$$

где C — положительная константа.

На основании найденных частных решений (20) и (11) решение задачи (1)-(3) запишем формально в виде ряда Фурье–Бесселя:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) u_n(t). \quad (23)$$

Вместе с рядом (23) рассмотрим следующие ряды:

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X'_n(x) u_n(t), \quad (24)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X''_n(x) u_n(t), \quad D_t^\alpha u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) D_t^\alpha u_n(t). \quad (25)$$

Докажем равномерную сходимость рядов (24) и (25) в области $\bar{\Omega}_T$, если функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ подчиняются некоторым дополнительным условиям.

Лемма 3: (см. [3]) Для достаточно больших n и для всех $x \in [0, l]$ выполнена оценка:

$$|X_n(x)| \leq C, \quad |X'_n(x)| \leq C \lambda_n, \quad |X''_n(x)| \leq C \lambda_n^2. \quad (26)$$

Если воспользоваться приведёнными выше леммами, то для каждой точки $(x,t) \in \Omega_T$ функциональные ряды (23), (24) и (25) могут быть мажорированы следующими числовыми рядами.

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n + \|f_n\|_{C([0,T])}), \quad (27)$$

$$C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi_n + \|f_n\|_{C([0,T])}) \quad (28)$$

и

$$C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (\varphi_n + \|f_n\|_{C([0,T])}). \quad (29)$$

Теорема 1: Пусть функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ определена и $\varphi(x) \in C^4([0, l])$ и $f(x, t) \in C^{4,1}([0, l] \times [0, T])$, причём

$$1) \quad x^{\frac{k-1}{2}} \varphi(x) \Big|_{x=0} = 0, \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{k-1}{2}} \varphi(x) \right) \Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2}{dx^2} \left(x^{\frac{k-1}{2}} \varphi(x) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$x^{\frac{k-1}{2}} f(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{k-1}{2}} f(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2}{dx^2} \left(x^{\frac{k-1}{2}} f(x, t) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (31)$$

$$2) x^{\frac{k-1}{2}} \varphi(x) \Big|_{x=l} = 0, \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{k-1}{2}} \varphi(x) \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (32)$$

$$x^{\frac{k-1}{2}} f(x, t) \Big|_{x=l} = 0, \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{k-1}{2}} f(x, t) \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (33)$$

Тогда для коэффициентов Фурье-Бесселя функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ справедливо неравенство:

$$|\varphi_n| \leq \frac{C}{\lambda_n^{5/2}}, \quad |f_n(t)| \leq \frac{C}{\lambda_n^{5/2}}. \quad (34)$$

Доказательство теоремы 1 следует из книги [2], параграф 6, теорема 1, стр. 283.

Теорема 2: Если функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы, то существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1)-(3), определяемое рядом (23), при этом $u(x, t) \in C_{x,t}^{(2,1)}(\Omega_T)$.

Доказательство теоремы 2 будет аналогично доказательству, приведённому в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА:

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. (Amsterdam, Elsevier, 2006).
2. Г.П. Толстов. *Ряды Фурье*, (Москва, Наука, 1980).
3. К. Б. Сабитов, Н. В. Зайцева, *Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения*, Изв. вузов. Матем., 2019, номер 10, 75–86 DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-75-86
4. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В., “Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода”, *Дифференц. уравнения*, 54:1 (2018), 123–135
5. Пулькин С. П., “О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 6, 214–225
6. Хасанов И.И., Акрамова Д.И., Рахмонов А.А. *Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана-Лиувилля*. // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2023. Т. 27, № 1. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1952>.
7. Дурдиев У.Д. *Задача об определении коэффициента реакции с дробном уравнении диффузии*. // *Диф. Урав.*, 2021, том 57, № 9, с. 1220- 1229.
8. Durdiev D.K., Jumaev J.J. *Inverse Coefficient Problem for a TimeFractional Diffusion Equation in the Bounded Domain*. // *Lobachevskii Journal of Mathematics* vol. 44, pp. 548-557, (2023).
9. Дурдиев Д.К. *Об определении коэффициента уравнения смешанного парабологиперболического типа с нехарактеристической линией изменения*. // *Диф. Урав.*, 2022, том 58, № 12, с. 1633-1644.
10. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.: *The H-function*. // *Theory and applications*. Springer, Dordrecht (2010) 269 p.

**ON THE CLASSIFICATION OF TWO-DIMENSIONAL FLEXIBLE ALGEBRAS OVER
ARBITRARY FIELDS**

*Asrorov Diyorjon Usmonovich,
Samarkand State University named after
Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan*

Abstract. *In this work, we consider two-dimensional algebras over an arbitrary field and investigate structural properties related to the flexibility identity $(xy)x = x(yx)$. Flexible algebras form a natural class that contains associative and alternative algebras, as well as Jordan and power-associative algebras. They arise in the study of nonassociative geometry, differential equations, and genetic algebras. As a result, we obtain an effective method for the classification of all two-dimensional flexible algebras over an arbitrary field.*

Key words: *two-dimensional algebra, flexible algebra, structure constants.*

**IKKI O‘LCHAMLI EGILUVCHAN ALGEBRALARNING IXTIYORIY MAYDONLAR
BO‘YICHA TASNIFI HAQIDA**

Annotatsiya. *Ushbu ishda ixtiyoriy maydon ustida aniqlangan ikki o‘lchovli algebra ko‘rib chiqiladi va $(xy)x = x(yx)$ ko‘rinishidagi flexiblelik sharti bilan bog‘liq tuzilmaviy xossalari o‘rganiladi. Flexible algebra assotsiativ va alternativ algebra, shuningdek Jordan va darajaviy assotsiativ algebra tabiiy umumlashmasi hisoblanadi. Ular noassotsiativ geometriya, differensial tenglamalar va genetik algebra qo‘llaniladi. Natijada, ixtiyoriy maydon ustidagi barcha ikki o‘lchovli flexible algebra tasniflash uchun samarali usulga ega bo‘lamiz.*

Kalit so‘zlar: *ikki o‘lchovli algebra, flexible algebra, struktur konstantalar.*

**О КЛАССИФИКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ГИБКИХ АЛГЕБР НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМИ
ПОЛЯМИ**

Аннотация. *В данной работе рассматриваются двумерные алгебры над произвольным полем, и изучаются структурные свойства, связанные с тождеством гибкости $(xy)x = x(yx)$. Гибкие алгебры образуют естественный класс, включающий ассоциативные и альтернативные алгебры, а также алгебры Жордана и степенно-ассоциативные алгебры. Они возникают в неассоциативной геометрии, дифференциальных уравнениях и генетических алгебрах. В результате получен эффективный метод классификации всех двумерных гибких алгебр над произвольным полем.*

Ключевые слова: *двумерная алгебра, гибкая алгебра, структурные константы.*

Introduction. The study of nonassociative algebras forms an important direction in modern algebra, where the usual associativity identity is relaxed in order to describe richer algebraic structures. Among these, flexible algebras occupy a distinguished position. An algebra A over a field F is said to be flexible if it satisfies

$$(xy)x = x(yx), \quad \forall x, y \in A.$$

This identity ensures that the binary multiplication operation is symmetrically balanced when one of the factors repeats. Flexible algebras include several significant subclasses of nonassociative systems, such as associative algebras, alternative algebras, Jordan algebras, and power-associative algebras. Because of this, flexible algebras appear naturally in the study of nonassociative geometry, differential equations, continuous transformations, and particularly in the algebraic modeling of genetic inheritance processes.

The foundations of nonassociative algebra theory were laid in classical works of Albert [1,2], Schafer [5], Okubo [3], and McCrimmon [4]. The concept of flexibility and its implications for algebraic structure were further developed in the works of Mayne [9], Benkart [10], Darpö [11], Elduque [12], and Petersson [19], where flexible algebras and flexible division algebras were studied from both structural and geometric viewpoints. The general study of low-dimensional nonassociative algebras was initiated in the works of Vasilyeva [13], Koch [14], Holgate [15], Walcher [16], Sagle and Walde [17], and Carter [18]. In recent years, major progress has been achieved in the classification of two-dimensional algebras, especially in the

works of Kaygorodov and Volkov [6], Bekbaev and Ahmed [7], and Bekbaev [8], as well as Liu and Rakhimov [20], where explicit structure constant matrices and isomorphism classes are described.

A key property of flexible algebras is that every element generates a power-associative subalgebra, meaning that all powers x^n are unambiguously defined. Moreover, flexibility is stable under algebra isomorphisms and scalar field extensions, which makes it suitable for structural and classification analysis.

Preliminaries. We begin by shortly recalling some concepts which will be using in the paper.

Definition 1. Let V be a vector space over a field \mathbb{F} equipped with a function $\cdot : V \otimes V \rightarrow V$

$((x, y) \mapsto x \cdot y)$ such that,

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z), z \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha(z \cdot x) + \beta(z \cdot y),$$

if for all $x, y, z \in V$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, then the pair $\mathbb{A} = (V, \cdot)$ is called an algebra over \mathbb{F} .

Definition 2. Let $\mathbb{A} = (V, \cdot_{\mathbb{A}})$ and $\mathbb{B} = (V, \cdot_{\mathbb{B}})$ be two algebras over the field \mathbb{F} . The algebras \mathbb{A} and \mathbb{B} are said to be isomorphic if there exists an invertible linear map $f : V \rightarrow V$ such that,

$$f(x \cdot_{\mathbb{A}} y) = f(x) \cdot_{\mathbb{B}} f(y), \text{ where } x, y \in \mathbb{A}.$$

Let \mathbf{A} be an two-dimensional algebra over \mathbb{F} and $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ be its basis. Then on the basis \mathbf{e} the algebra \mathbf{A} is represented by a 2×4 matrix (called the matrix of structure constant, shortly MSC)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

as follows

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ij}^k \mathbf{e}_k, \text{ where } i, j = 1, 2.$$

Therefore, the product on \mathbf{A} with respect to the basis \mathbf{e} is written as follows

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{e}A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad (1)$$

for any $\mathbf{x} = \mathbf{e}x, \mathbf{y} = \mathbf{e}y$, where $x = (x_1, x_2)^T$, and $y = (y_1, y_2)^T$ are column coordinate vectors of \mathbf{x} and \mathbf{y} , respectively with respect to the fixed basis $\mathbf{e} = e_1, e_2$. Throughout the paper, we assume that the basis \mathbf{e} is fixed, and therefore we will not distinguish between the algebra \mathbf{A} and its structure constants matrix A .

Lemma 1. An algebra \mathbf{A} is flexible if and only if

$$A(A \otimes I - I \otimes A)(x \otimes y \otimes x) = 0$$

where A is MSC of \mathbf{A} .

A be its MSC on a basis $e = (e_1, e_2)$, $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$. Then flexible algebra condition is nothing else

$$\begin{cases} A_1 x_1 y_1 x_1 + A_2 x_1 y_1 x_2 + A_3 x_1 y_2 x_1 + A_4 x_1 y_2 x_2 + A_5 x_2 y_1 x_1 + A_6 x_2 y_1 x_2 + A_7 x_2 y_2 x_1 + A_8 x_2 y_2 x_2 = 0 \\ B_1 x_1 y_1 x_1 + B_2 x_1 y_1 x_2 + B_3 x_1 y_2 x_1 - A_4 x_1 y_2 x_2 + B_4 x_2 y_1 x_1 + B_5 x_2 y_1 x_2 - A_7 x_2 y_2 x_1 - A_8 x_2 y_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &= \beta_1(\alpha_3 - \alpha_2), & B_1 &= \beta_1(\beta_3 - \beta_2), \\ A_2 &= \alpha_4 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2, & B_2 &= \beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_4 \beta_1 - \beta_2^2, \\ A_3 &= \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3, & B_3 &= \beta_2(\beta_3 - \beta_2), \\ A_4 &= \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4, & B_4 &= \beta_1 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_1 + \beta_3^2 - \beta_4 \beta_1, \\ A_5 &= \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_1, & B_5 &= \beta_2 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_2 + \beta_4(\beta_3 - \beta_2). \\ A_6 &= \alpha_4(\beta_3 - \beta_2), \\ A_7 &= \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_3^2 + \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3, \\ A_8 &= \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3), \end{aligned}$$

Note that the set of functions $\{x_1 y_1 x_1, x_1 y_1 x_2, x_1 y_2 x_1, x_1 y_2 x_2, x_2 y_1 x_1, x_2 y_1 x_2, x_2 y_2 x_1, x_2 y_2 x_2\}$ is linearly independent. Therefore, the system (2) in terms of the structure constants $\alpha_j, \beta_j, (j = \overline{1,4})$ the system (2) is written as follows

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_3 - \alpha_2) = 0, & \alpha_4 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 = 0 \\ \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3 = 0, & \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_4 \beta_2 - \alpha_2 \beta_4 = 0 \\ \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_1 = 0, & \alpha_4(\beta_3 - \beta_2) = 0 \\ \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_3^2 + \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3 = 0, & \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3) = 0 \\ \beta_1(\beta_3 - \beta_2) = 0, & \beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + \beta_4 \beta_1 - \beta_2^2 = 0 \\ \beta_2(\beta_3 - \beta_2) = 0, & \beta_1 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_1 + \beta_3^2 - \beta_4 \beta_1 = 0 \\ \beta_2 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_2 + \beta_4(\beta_3 - \beta_2) = 0 & \end{cases} \quad (3)$$

In the sequel, we refer to (3) as the general system of equations characterizing two-dimensional flexible algebras. In this paper, we make use of the results presented in [8]. The result that we are going to

use in the paper was given as follows.

Theorem 2.1. Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field \mathbb{F} ($\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2,3$) is isomorphic to only one of the following listed, by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_1(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$
- $A_2(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$
- $A_3(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_4(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$
- $A_5(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = \alpha_1 \in \mathbb{F}$
- $A_6(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$
- $A_7(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_8(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$

- $A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

- $A_{10}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$, the polynomial $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$

has no root in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$

- $A_{11}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where the polynomial $\beta_1 - t^3$ has no root in \mathbb{F} , $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$

- $A_{12}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 2.2. Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field \mathbb{F} ($\text{Char}(\mathbb{F}) = 2$) is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_{1,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 1 + \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$
- $A_{2,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $\alpha_4 \neq 0$
- $A_{2,2}(\alpha_1, 0, 1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$
- $A_{3,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 + \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{4,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 + \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + (1 + \beta_2)a + a^2 & \beta_2 & 1 + \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$

- $A_{5,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$

- $A_{5,2}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $A_{6,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{7,2}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a\alpha_1 + a + a^2 & 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{F}^2$ and $a \in \mathbb{F}$

- $A_{8,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\beta_1 t^3 + t + 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)$ has no root in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 t + \beta_1)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$

- $A_{9,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3 \beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$,

the polynomial $\beta_1 + t^3$ has no root in \mathbb{F}

- $A_{10,2}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$

- $A_{11,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, where $a, b \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$

- $A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Theorem 2.3. Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field \mathbb{F} ($\text{Char}(\mathbb{F}) = 3$) is isomorphic to only one of the following, listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_{1,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 + 1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1) \in \mathbb{F}^4$

- $A_{2,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, and $\alpha_4 \neq 0$

- $A_{3,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2 \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{4,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2$

- $A_{5,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = \alpha_1 \in \mathbb{F}$

- $A_{6,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $\alpha_4 \neq 0$

- $A_{7,3}(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2 \alpha_4 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$,

where $c = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$, $a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{8,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $c = \beta_1 \in \mathbb{F}$

- $A_{9,3}(\beta_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

where the polynomial $(\beta_1 - t^3)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)$ has no root in \mathbb{F} , $a \in \mathbb{F}$ and

$$\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$$

- $A_{10,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3 \beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

where the polynomial $\beta_1 - t^3$ has no root, $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$ and $a, \beta_1 \neq 0$

- $A_{11,3}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2 \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, where $a, c = \beta_1 \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$

- $A_{12,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- $A_{13,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Complete classification of 2-dimensional flexible algebras. In this sections we present isomorphism classes of two-dimensional flexible algebras over the of characteristic is not 2,3, the characteristic 2 and the characteristic 3, respectively.

Theorem 3.1. Any non-trivial 2-dimensional flexible algebra over a field \mathbb{F} ($\text{Char}(\mathbb{F}) \neq 2,3$) is isomorphic to only one of the following listed, by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_3(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

- $A_3\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$

where $\alpha_4, a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$

- $A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

To classify the two-dimensional flexible algebras it suffices to solve the general system of equations (3) with respect to MSC of each $A_i, (i = 1, 2, \dots, 13)$ given in Theorem-2.1.

It is easy to see that A_{13} is flexible. For algebras A_1, A_2 and $A_4 - A_{12}$ the system of equations (3) is inconsistent.

For $A = A_3(c) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$ where $c = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3, a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$, the system of equations 3 looks like

$$\begin{cases} \alpha_4(2\alpha_1 - 1) = 0 \\ \beta_2(1 - \alpha_1 - \beta_2) = 0 \\ \alpha_4(\beta_2 - \alpha_1) = 0 \\ \alpha_4(1 - \alpha_1 - \beta_2) = 0 \\ \beta_2(\beta_2 - \alpha_1) = 0 \\ (1 - \alpha_1)(2\alpha_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

which admits the following solutions: $A_3(1, 0, 0), A_3\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), A_3\left(\frac{1}{2}, \alpha_4, \frac{1}{2}\right).$ The description of two-dimensional flexible algebras over \mathbb{F} for the cases $Char(\mathbb{F}) = 2$ and $Char(\mathbb{F}) = 3$ can be obtained respectively. Therefore, we give here the results without proof.

Theorem 3.2. Any non-trivial 2-dimensional flexible algebra over a field \mathbb{F} ($Char(\mathbb{F}) = 2$) is isomorphic to only one of the following listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_{3,2}(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $A_{4,2}(1, \beta_1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 + a + a^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ where $\beta_1 \in \mathbb{F}$
- $A_{6,2}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $A_{11,2}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ b^2(\beta_1 + a^2) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ where $a, b \in \mathbb{F}$ and $b \neq 0$
- $A_{12,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Theorem 3.3. Any non-trivial 2-dimensional flexible algebra over a field \mathbb{F} ($Char(\mathbb{F}) = 3$) is isomorphic to only one of the following, listed by their matrices of structure constants, such algebras:

- $A_{3,3}(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $A_{3,3}(2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $A_{3,3}(2, \alpha_4, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$ where $\alpha_4, a \in \mathbb{F}$ and $a \neq 0$
- $A_{13,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Conclusion. We studied two-dimensional algebras over an arbitrary field through their matrix of structure constants (MSC) and obtained an intrinsic characterization of flexible algebras. In this paper, we have provided the complete classification of two-dimensional flexible algebras over an arbitrary field in the cases $char(\mathbb{F}) \neq 2, 3, char(\mathbb{F}) = 2,$ and $char(\mathbb{F}) = 3.$ Future research directions include: a more detailed case-by-case analysis depending on the characteristic (particularly for $char(\mathbb{F}) = 2$ and $char(\mathbb{F}) = 3$), the study of degenerations and orbit closures in the variety of two-dimensional algebras, the classification of simple or division flexible algebras in dimension two, and the development of computational tools to automate solving the defining polynomial identities and performing orbit reduction under the action of

$GL(2, \mathbb{F})$. These lines of investigation extend the present framework toward a complete and computable taxonomy of flexible algebras in low dimensions.

REFERENCES:

19. A. A. Albert, *Non-Associative Algebras*, *Annals of Mathematics*, 43 (1942), 685–707.
20. A. A. Albert, *Power-Associative Rings*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 64 (1948), 552–593.
21. S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, 1995.
22. K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer, 2004.
23. R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, 1966.
24. I. Kaygorodov and Y. Volkov, *The Variety of Two-Dimensional Algebras*, *Canadian Journal of Mathematics*, 72 (2020), 1–26.
25. Bekbaev U., Ahmed H., *On identities of 2-dimensional algebras*, *Uzbek Math. J.*, 3 (2018), 25–33.
26. Bekbaev U., *Complete classification of two-dimensional algebras over any basic field*, *AIP Conf. Proc.*, 2880 (2023), 030001.
27. J. H. Mayne, *Flexible Algebras of Degree Two*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 32 (1972), 75–79.
28. G. Benkart, *Real Flexible Division Algebras*, *Canadian Journal of Mathematics*, 38 (1986), 1130–1148.
29. E. Darpö, *On the Classification of Real Flexible Division Algebras*, *Linear Algebra and Its Applications*, 430 (2009), 1289–1311.
30. A. Elduque, *Flexible Algebras and Derivations*, *Journal of Algebra*, 98 (1986), 14–29.
31. L. N. Vasilyeva, *Low-Dimensional Nonassociative Algebras*, *Siberian Mathematical Journal*, 33 (1992), 92–103.
32. A. N. Koch, *Classification of Two-Dimensional Nonassociative Algebras*, *Ukrainian Mathematical Journal*, 61 (2009), 1–16.
33. P. Holgate, *Genetic Algebras and Flexible Laws*, *Journal of the London Mathematical Society*, 44 (1969), 95–101.
34. S. Walcher, *Genetic Algebras: Structure and Applications*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 2021.
35. A. Sagle and R. Walde, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Academic Press, 1973.
36. J. S. Carter, *Nonassociative Algebras and Applications*, Marcel Dekker, 1996.
37. H. Petersson, *Flexible and Quadratic Algebras*, *Journal of Algebra*, 81 (1983), 1–20.
38. Y. Liu and I. Rakhimov, *Two-Dimensional Algebras and Their Applications*, *Malaysian Mathematical Science Journal*, 2021.

IQTISODIY NAZARIYADA DIFFERENSIAL HISOBNING ROLI VA AHAMIYATI

G‘ulomov Ulug‘bek Hikmatullayevich,
 Profy university Navoiy filiali
 “Iqtisodiyot va aniq fanlar kafedrası” mudiri
 Ulugbek.gulomov04197@gmail.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada iqtisodiy nazariyada differensial hisobning roli, uning iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish va bashoratlashdagi ahamiyati keng yoritilgan. Differensial hisob iqtisodiy o‘zgaruvchilarning uzluksiz va vaqtga bog‘liq o‘zgarishlarini ifodalash imkonini beruvchi matematik vosita sifatida qaraladi. Ishda iqtisodiy funksiyalar daromad, ishlab chiqarish, iste‘mol, investitsiya, narx, foyda va talab o‘zgarish tezligini aniqlash orqali iqtisodiy qarorlar qabul qilish jarayonining nazariy asoslari ko‘rsatib berilgan. Shuningdek, differensial hisob yordamida ishlab chiqilgan klassik va zamonaviy iqtisodiy modellarga (masalan, Keyns modeli, o‘sish modeli, Laffar egri chizig‘i, marjinal tahlil konsepsiyasi)ga ilmiy izoh berilgan. Ularning barqarorlik sharoitlari, o‘sish sur‘atlari hamda iqtisodiy muvozanat holatlari differensial tahlil vositalari yordamida ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: differensial hisob, iqtisodiy tahlil, iqtisodiy model, marjinal tahlil, iqtisodiy o‘sish, iqtisodiy muvozanat, differensial tenglama, iqtisodiy barqarorlik, dinamik tizim, ishlab chiqarish funksiyasi, iste‘mol funksiyasi, investitsiya funksiyasi, Keyns modeli.

**РОЛЬ И ЗНАЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В
 ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ**

Аннотация. В данной статье подробно раскрыта роль дифференциального исчисления в экономической теории, а также его значение в анализе и прогнозировании экономических процессов. Дифференциальное исчисление рассматривается как математический инструмент, позволяющий описывать непрерывные и зависящие от времени изменения экономических переменных. В работе показаны теоретические основы принятия экономических решений через определение скорости изменения таких экономических функций, как доход, производство, потребление, инвестиции, цена, прибыль и спрос. Кроме того, дано научное объяснение классических и современных экономических моделей, разработанных с использованием дифференциального анализа (например, модели Кейнса, модели экономического роста, кривой Лаффера, концепции предельного анализа). Условия устойчивости, темпы роста и состояния экономического равновесия представлены с применением инструментов дифференциального анализа.

Ключевые слова: дифференциальное исчисление, экономический анализ, экономическая модель, предельный анализ, экономический рост, экономическое равновесие, дифференциальное уравнение, экономическая устойчивость, динамическая система, производственная функция, функция потребления, инвестиционная функция, модель Кейнса.

**THE ROLE AND SIGNIFICANCE OF DIFFERENTIAL CALCULUS IN ECONOMIC
 THEORY**

Abstract. This article provides a comprehensive analysis of the role of differential calculus in economic theory and its significance in analyzing and forecasting economic processes. Differential calculus is viewed as a mathematical tool that enables the representation of continuous and time-dependent variations of economic variables. The study presents the theoretical foundations of economic decision-making by determining the rates of change in such economic functions as income, production, consumption, investment, price, profit, and demand. Furthermore, scientific explanations are given for classical and modern economic models developed using differential analysis (for instance, the Keynes model, growth model, Laffer curve, and marginal analysis concept). The conditions of stability, growth rates, and states of economic equilibrium are illustrated through the use of differential analysis techniques.

Keywords: differential calculus, economic analysis, economic model, marginal analysis, economic growth, economic equilibrium, differential equation, economic stability, dynamic system, production function, consumption function, investment function, Keynes model.

Kirish. Iqtisodiy jarayonlar o‘z tabiatiga ko‘ra uzluksiz, o‘zgaruvchan va dinamikdir. Shu sababli ularni chuqur tahlil qilish, bashoratlash hamda optimallashtirishda matematik vositalar, ayniqsa, differensial hisob alohida o‘rin tutadi. Iqtisodiy nazariya bu jarayonlarni umumiy qonuniyatlar asosida o‘rganar ekan, ularning o‘zgarish tezligi, yo‘nalishi va turg‘unlik darajasini matematik tarzda ifodalash zarur bo‘ladi. Differensial hisob bu o‘zgaruvchan miqdorlarning o‘zaro bog‘liqligini, ularning o‘sish yoki kamayish tezligini aniqlashga imkon beruvchi matematik analiz bo‘limidir. Iqtisodiy nazariya esa ishlab chiqarish, iste‘mol, jamg‘arma, investitsiya, talab va taklif kabi jarayonlarning o‘zaro ta‘sirini o‘rganadi. Shu bois differensial hisob iqtisodiy nazariyaning asosiy analitik vositasiga aylangan.

Bugungi kunda yurtimizning rivojlangan davlatlari qatoriga kirishga intilishi oliy ta‘lim tizimiga bir qator qo‘shimcha talablarni qo‘yadi. Bu talablar, jumladan, matematik ta‘lim sifatini oshirishga yo‘naltirilgan. Zamonaviy iqtisodchi miqdoriy tahlil usullarini puxta egallagan bo‘lishi kerak. Bunday xulosaga iqtisodiy nazariyani o‘rganishning o‘zi yetarli bo‘lmaydi. Bunda nafaqat an‘anaviy matematik fanlar (matematik tahlil, chiziqli algebra, ehtimollar nazariyasi) bo‘yicha bilimlar, balki amaliy iqtisodiyot va iqtisodiy tadqiqotlarda zarur bo‘lgan bilimlar (matematik va iqtisodiy statistika, o‘yinlar nazariyasi va boshqalar) ham muhim ahamiyatga ega. Matematika iqtisodiy ta‘limning asosiy poydevori hisoblanadi. Agar talabalar differensial hisob nazariyasini chuqur o‘zlashtirsalar, ular uchun ilmiy istiqbollari va kasbiy imkoniyatlar keng ochiladi.

Iqtisodiyot jamiyat hayotining asosi bo‘lib, uning tuzilmasida differensial hisob alohida o‘rin egallaydi. Matematik tahlilning ushbu bo‘limi asosan funksiyaning hosilasi va differensial tushunchalari bilan bog‘liq bo‘lib, u iqtisodiy jarayonlarni miqdoriy tahlil qilish va modellashtirishda eng muhim vosita hisoblanadi.

Engels F. ta‘kidlashiga ko‘ra “Faqat differensial hisobgina tabiiy fanlarga nafaqat holatlarni, balki jarayonlarni – harakatni ham matematik tarzda ifodalash imkonini beradi. “Shu munosabat bilan ushbu tadqiqot ishida iqtisodiy masalalarni yechishda differensial hisobning qo‘llanilishiga har tomonlama yondashish hamda uning amaliy qo‘llanilishiga oid aniq misollar keltirish maqsad qilingan [1,2].

Masalan: Soliqlar oshirilganda yoki import bojlari joriy etilganda davlat daromadi qanday yo‘nalishda o‘zgaradi?

Korxonaning ishlab chiqargan mahsuloti narxi oshirilganda uning tushumi ortadimi yoki kamayadimi?

Qo‘shimcha uskunalar qanday nisbatda ishchi kuchini almashtira oladi?

Bunday masalalarni yechish uchun ushbu jarayonlarda ishtirok etuvchi o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘lanish funksiyalari tuziladi va keyinchalik ular differensial hisob usullari yordamida tahlil qilinadi.

Iqtisodiyotda qo‘llaniladigan differensial hisobning muhim usullaridan biri bu chegaraviy tahlil usulidir. Iqtisodiy chegaraviy tahlil bu ishlab chiqarish, iste‘mol va boshqa jarayonlar hajmidagi o‘zgarishlar natijasida xarajatlar yoki natijalar o‘zgarishini ularning chegaraviy qiymatlarini tahlil qilish asosida o‘rganish usullari majmuasidir. Iqtisodiyotdagi chegaraviy kattaliklarga quyidagilar kiradi: chegaraviy daromad, chegaraviy xarajatlar, chegaraviy foydalilik, mehnatning chegaraviy unumdorligi. Ular iqtisodiy obyektning holatini emas, balki jarayonni, ya‘ni uning o‘zgarishini tavsiflaydi [3,4].

Differensial tahlil. Bu iqtisodiy ko‘rsatkichlar orasidagi uzluksiz o‘zgarishlarni aniqlash, ularning o‘zaro ta‘sirini baholash hamda iqtisodiy jarayonlarning barqarorligini tahlil qilishda asosiy vosita hisoblanadi.

Iqtisodiyotda bu usul foyda, talab, taklif, xarajat, ishlab chiqarish hajmi, narx va inflyatsiya kabi ko‘rsatkichlarning marjinal o‘zgarishlarini aniqlashda keng qo‘llaniladi.

Differensial yondashuvning mohiyati iqtisodiy funksiyalarning **hosilalarini** hisoblab, ularning o‘zgarish tezligini tahlil qilishdir.

Masalan: Iqtisodiy modelda biror ko‘rsatkichning o‘zgarishini aniqlash uchun quyidagi ifoda ishlatiladi (1-jadval):

1-jadval.

$y = f(x)$	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$	
x – mustaqil o‘zgaruvchi (resurslar, mehnat, kapital, narx)	Iqtisodiy nuqtai nazardan bu hosila marjinal	$f'(x) > 0$ x ortganda y ham ortadi (ijobiy marjinal ta‘sir).
y – iqtisodiy natija (foyda, daromad, ishlab chiqarish hajmi)	qiymat sifatida talqin qilinadi ya‘ni, iqtisodiy	

	ko'rsatkichning kichik o'zgarishlarga nisbatan sezgirligi.	$f'(x) < 0$ y kamayadi salbiy (marjinal ta'sir).
--	--	---

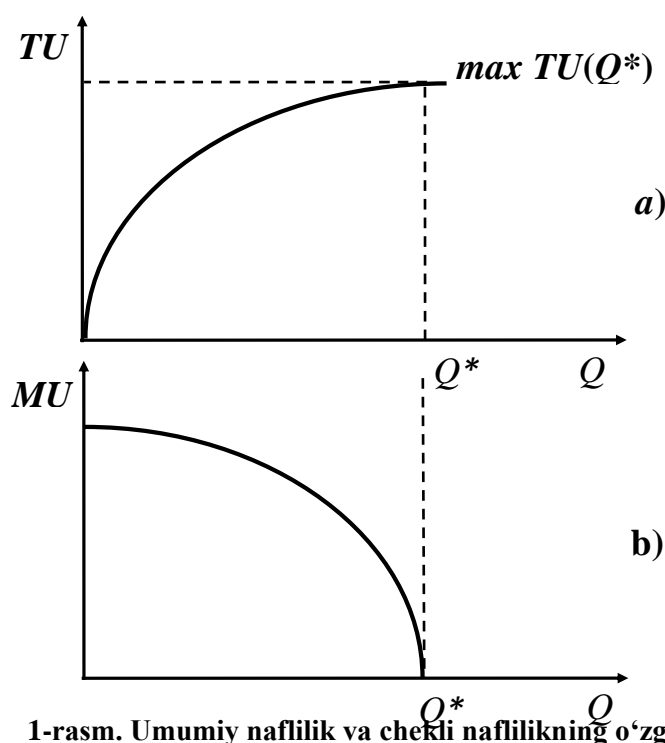
Umumiy naflilik biror ne'matdan ketma-ketlikda iste'mol qilib borilganda ulardan olingan jami naflilik yig'indisini ifodalaydi va u o'sib borish xususiyatiga ega. Shu bilan birga iste'mol to'yingan sharoitda umumiy naflilik o'zining maksimal qiymatiga erishadi.

Chekli naflilik ne'matdan qo'shimcha bir birlik iste'mol qilish natijasida olinadigan qo'shimcha naf miqdorini ifodaladi. Chekli naflilik - bu naflilik funksiyasidan biror ne'mat o'zgaruvchisi bo'yicha olingan xususiy hosilaga teng:

$$MU_i = \frac{\Delta TU}{\Delta X_i}$$

Bu yerda: MU_i - i -ne'mat bo'yicha chekli naflilik darajasi; ΔTU - umumiy naflilik darajasining o'sgan qismi; ΔX_i - i -ne'matni iste'mol qilish miqdorining o'sgan qismi.

Umumiy va chekli naflilikning o'zgarishi 1-rasmda keltirilgan.



1-rasm. Umumiy naflilik va chekli naflilikning o'zgarishi

1-rasmdan ko'rinib turibdiki, iste'mol qilinadigan ne'mat miqdorining (Q) oshib borishi bilan umumiy naflilik (TU) ham oshib boradi (a-rasm). Bunda chekli naflilik (MU) kamayib boradi (b-rasm). Umumiy naflilik Q^* nuqtada maksimal darajaga erishganda, chekli naflilik (MU) nolga teng bo'ladi.

Odatda, biror ne'matni iste'mol qilish oshganda (boshqa ne'matlar iste'moli hajmi o'zgarmaganda), umumiy naflilik darajasi oshadi. Demak chekli naflilik musbat $MU > 0$. Shu bilan birga, biror ne'matdan qo'shimcha bir birlik iste'mol qilganda (boshqa ne'matlar iste'moli hajmi o'zgarmaganda), qo'shimcha iste'mol qilingan birlik oldingisiga nisbatan kamroq naf beradi va uning bu xususiyatiga **chekli naflilikning kamayish qonuni** deyiladi. Matematik tilda bu naflilik funksiyasining ikkinchi tartibli hosilasi noldan kichik degani:

$$(MU)' = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} < 0$$

Talabni aniqlashning asosida chekli naflligining kamayish qonuni yotadi. Shu sababli ishlab chiqaruvchilar mahsulot sotish hajmini ko'paytirishlari uchun qo'shimcha sotiladigan mahsulotlar narxiga

chegirma berishlari kerak bo'лади.

Endi makroiqtisodiyotdagi differensial hisobning qo'llanilishiga to'xtalamiz. Makroiqtisodiyot bu iqtisodiyot fanining bir yo'nalishi bo'lib, u milliy miqyosdagi iqtisodiy hodisa va jarayonlarni o'rganadi. U iqtisodiy tizimdagi umumiy ishlab chiqarish, iste'mol, investitsiya, bandlik, inflyatsiya, iqtisodiy o'sish, tashqi savdo va pul muomalasi kabi jarayonlar o'rtasidagi o'zaro bog'liqlikni tahlil qiladi. Makroiqtisodiyotning asosiy maqsadi milliy iqtisodiy barqarorlik va muvozanatni ta'minlash, ya'ni ishlab chiqarish, narxlar va bandlik darajasini optimal holatda ushlab turishdir. Makroiqtisodiyotda iqtisodiy o'zgaruvchilar (daromad, investitsiya, iste'mol, inflyatsiya, foiz stavkasi va boshqalar) vaqt o'tishi bilan dinamik ravishda o'zgaradi. Bu jarayonlarni o'rganish uchun differensial tahlil, ya'ni oddiy differensial tenglamalar va oddiy differensial tenglamalar sistemalari ishlatiladi.

Makroiqtisodiy tizimda asosiy bog'lanish tenglamasi quyidagicha:

$$Y = C + I + G + (X - M)$$

Bu yerda: Y – milliy daromad, C – iste'mol, I – investitsiyalar, G – davlat xarajatlari, $(X - M)$ – sof eksport, r – foiz stavkasi. Lekin vaqt o'tishi bilan ushbu kattaliklar o'zgaradi ya'ni:

$$Y = Y(t), C = C(t), I = I(t), r = r(t).$$

Iqtisodiy tizimda milliy daromadning vaqt bo'yicha o'zgarishi Keyns modeliga ko'ra quyidagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha[C(Y) + I(r) + G - Y]$$

bunda $\alpha > 0$ – muvozanatga yaqinlashish tezligini ifodalovchi parametr. Istemol va investitsiya funksiyalarini chiziqli deb qabul qilsak:

$$C(Y) = c_0 + c_1 Y, I(r) = I_0 - br$$

c_0 – mustaqil istemol, c_1 – istemolning chegaraviy moilligi ($0 < c_1 < 1$), b – investitsiya foiz stavkasi sezgirliigi. U holda yuqoridagi differensial tenglamani quyidagicha yoza olamiz:

$$\frac{dY}{dt} = \alpha[(c_1 - 1)Y - br + (c_0 + I_0 + G)].$$

Pul bozori muvozanatini hisobga olsak foiz stavkasining dinamik modeli quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{dr}{dt} = \beta(kY - hr - \frac{M}{P})$$

bunda: $kY - hr - \frac{M}{P}$ – pulga talab, $\frac{M}{P}$ – real pul taklifi, β – moslashuv koeffitsiyenti.

Yuqoridagi ikki differensial tenglamani birlashtirsak makroiqtisodiy muvozanatning vaqt bo'yicha evolyutsasini ifodalaydigan quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \alpha[(c_1 - 1)Y - br + (c_0 + I_0 + G)] \\ \frac{dr}{dt} = \beta(kY - hr - \frac{M}{P}) \end{cases}$$

Xulosa. Differensial hisob zamonaviy iqtisodiy tahlilning metodologik asosi bo'lib, iqtisodiy nazariyada chuqur ilmiy ahamiyat kasb etadi. Iqtisodiyotning murakkab dinamik tizim sifatida faoliyat yuritishini hisobga olsak, bu tizimdagi barcha o'zgarishlarni aniqlash, ularning yo'nalishi, tezligi va barqarorligini o'rganishda differensial hisob vositalarining roli beqiyosdir. Avvalo, differensial hisob yordamida iqtisodiy jarayonlarning chegaraviy (marjinal) o'zgarishlari aniqlanadi. Bu esa iqtisodiy qarorlar qabul qilishda, resurslardan oqilona foydalanishda va foydani maksimal darajaga yetkazishda asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi. Masalan, ishlab chiqarish nazariyasida ishlab chiqarish funksiyasi $Q = f(L, K)$, ko'rinishida ifodalanadi. Bu yerda L — mehnat, K — kapital. Funksiyaning xususiy hosilalari $\frac{\partial Q}{\partial L}$ va $\frac{\partial Q}{\partial K}$ – mehnat va kapitalning chegaraviy mahsuldorligini bildiradi. Ushbu differensial tahlil iqtisodiy samaradorlikni aniqlashning eng asosiy vositasidir. Bundan tashqari, differensial hisob yordamida iste'molchi xatti-harakatlari, bozor muvozanati, foyda maksimallashtirish, xarajatlarni minimallashtirish, hamda narxlarning elastikligi masalalari ham tahlil qilinadi. Iqtisodiy muvozanatning turg'unligi, talab va taklif egri chiziqlarining o'zaro kesishish nuqtasi ham differensial hisob vositalari orqali aniqlanadi. Bu jarayon iqtisodiy tizimning barqaror yoki beqaror ekanligini baholashda katta amaliy ahamiyatga ega. Makroiqtisodiy miqyosda differensial hisob milliy daromad, inflyatsiya, foiz stavkasi, investitsiyalar va ishlab chiqarish hajmlarining vaqt bo'yicha o'zgarishini modellashtirish imkonini beradi. Masalan, Keyns modeli yoki IS–LM tizimi differensial tenglamalar orqali ifodalanib, iqtisodiy tizimning vaqt o'tishi bilan muvozanat holatiga yaqinlashish jarayonini matematik tarzda ko'rsatadi. Bu esa iqtisodiy siyosat yuritishda (pul-kredit siyosati, fiskal siyosat, soliq siyosati va boshqalar) ilmiy asoslangan qarorlar qabul qilish

imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Маркс К. и Энгельс Ф. Сочинения /, 2-е изд., Москва: Государственное издательство политической литературы, 1961. – 587с.
2. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь /, 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: «Дело», 2003. – 520 с.
3. Лемешевский И.М. «Микроэкономика: основы микроанализа и белорусская практика/ 5-е изд., перераб. - Минск: «ФУАинформ», 2013. – 400 с.
4. Малыхин В.И. Математика в экономике / Москва: «ИНФРА-М», –2000. – 356с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Москва: «ФМЛ», – 1999. – 616 с.

ON THE DYNAMICS OF 1-LIPSCHITZ FUNCTIONS IN THE CONTEXT OF p -ADIC
NUMBER THEORY

Kucharov Ramziddin R.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
Associate Professor in the Department of Algebra and Functional Analysis
Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
ramz3364647@yahoo.com

Pardayev Shohzod A.

Tashkent State University of transport, Tashkent, Uzbekistan
shohzodmath@gmail.com

Arzikulov Golibjon P.

Tashkent State Technical University named after Islam Karimov
Head of the Department of Higher Mathematics
arzikulov79@mail.ru

Abstract. In this paper, we investigate the class of p -adic 1-Lipschitz functions, which play a significant role in non-Archimedean analysis and p -adic dynamical systems. We provide a general representation of such functions and examine their algebraic and topological properties. Particular attention is given to their dynamical behavior, including the analysis of fixed points, periodic orbits, and the structure of the corresponding dynamical systems. The results contribute to a deeper understanding of the qualitative nature of p -adic dynamics and lay the groundwork for further research in the area of p -adic models in number theory and mathematical physics.

Key words: p -adic numbers, p -adic norm, 1-Lipschitz functions, dynamical systems, fixed point.

О ДИНАМИКЕ 1-ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КОНТЕКСТЕ p -АДИЧЕСКОЙ
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Аннотация. В данной работе исследуется класс p -адических 1-липшицевых функций, которые играют важную роль в неархимедовой анализе и p -адических динамических системах. Представлено общее представление таких функций, и изучены их алгебраические и топологические свойства. Особое внимание уделяется их динамическому поведению, включая анализ неподвижных точек, периодических орбит и структуры соответствующих динамических систем. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию качественной природы p -адической динамики и создают основу для дальнейших исследований в области p -адических моделей в теории чисел и математической физике.

Ключевые слова: p -адические числа, p -адическая норма, 1-липшицевы функции, динамические системы, неподвижная точка.

p -ADIK SONLAR NAZARIYASI KONTEKSTIDA 1-LIPSCHITZ FUNKSIYALAR
DINAMIKASI HAQIDA

Annotatsiya. Ushbu maqolada p -adik 1-Lipschitz funksiyalar sinfi o'rganiladi. Bunday funksiyalar noarximed tahlilida va p -adik dinamik tizimlarda muhim rol o'ynaydi. Maqolada ushbu funksiyalarning umumiy ifodasi keltiriladi hamda ularning algebraik va topologik xossalari tahlil qilinadi. Ayniqsa, ularning dinamik xatti-harakatlari — sobit nuqtalar, davriy orbitlar va mos dinamik tizimlarning tuzilmasi — batafsil o'rganilgan. Olingan natijalar p -adik dinamikaning sifat jihatidan tabiati haqida chuqurroq tushuncha beradi va sonlar nazariyasi hamda matematik fizika sohalarida p -adik modellarga oid keyingi tadqiqotlar uchun asos yaratadi.

Kalit so'zlar: p -adik sonlar, p -adik norma, 1-Lipschitz funksiyalar, dinamik tizimlar, sobit nuqta.

Introduction. The concept of p -adic numbers was first introduced by the German mathematician Kurt Hensel in 1897 as a new tool in number theory. His idea was to define a system of numbers in which the properties of divisibility by a fixed prime number p play a central role, thereby allowing the construction of number systems that are complete with respect to the p -adic norm.

Originally, p -adic numbers were studied primarily within the framework of number theory, particularly in problems related to congruences, Diophantine equations, and local-global principles. However, over the course of the 20th century and into the 21st, the scope of applications of p -adic numbers expanded significantly. As a result, several independent branches of mathematics and mathematical physics emerged, including but not limited to:

- p -adic number theory,
- p -adic analysis,
- p -adic differential equations,
- p -adic functional analysis,
- p -adic dynamical systems,
 - p -adic probability theory,
 - p -adic measure theory.

Furthermore, p -adic methods have found fruitful applications beyond pure mathematics. In theoretical physics, particularly in quantum mechanics and string theory, p -adic models have been used to describe hierarchical structures and non-Archimedean space-time geometries. In signal processing and harmonic analysis, p -adic wavelets provide an alternative to classical methods for analyzing functions with ultrametric structures. In stochastic processes, p -adic models are employed in the study of random walks and branching processes on ultrametric spaces. Recent studies also show that p -adic tools are relevant in the modeling of complex systems with multiscale or hierarchical behavior, such as protein dynamics, cognitive processes, and evolutionary biology.

Thus, the theory of p -adic numbers has evolved from a number-theoretic curiosity into a rich and active field of interdisciplinary research.

Several significant contributions have been made to the study of p -adic Gibbs measures for lattice models in statistical physics. In particular, G'anihojaev N.N., Roziqov U.A. and Muxamedov F.M. constructed p -adic Gibbs measures for the Ising model on the integer lattice \mathbb{Z} , establishing a rigorous p -adic probabilistic framework for the model [9; P. 23-29]. Moreover, they proved a p -adic analogue of Kolmogorov's extension theorem, which plays a fundamental role in the construction of consistent probability measures on infinite product spaces.

In subsequent work, Hakimov O.N. investigated the existence and uniqueness of p -adic Gibbs measures for the Ising model with four-body interactions on certain tree-like structures. He demonstrated that under specific conditions, a unique p -adic Gibbs measure exists for this model [10; P. 194-203].

Additionally, the structure of the set of generalized invariant p -adic Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree of order three was described in [11; P. 1521-1530]. This analysis provided new insights into the phase space and symmetries of p -adic statistical systems on non-Euclidean graphs.

Furthermore, the dynamical properties of the p -adic Ising-Potts model (for $p \neq 2$) have been studied, revealing complex behavior in the system's evolution. In particular, it was shown that, depending on certain parameter values, the p -adic Ising-Potts model can exhibit chaotic dynamics.

These results highlight the richness of p -adic statistical mechanics and demonstrate the applicability of non-Archimedean methods in the analysis of phase transitions, invariance, and chaos in lattice models.

The theory of dynamical systems over non-Archimedean fields is a natural extension of classical dynamical systems into the realm of non-Archimedean analysis. It provides a powerful framework in which the iteration of functions can be studied in settings endowed with ultrametric topologies.

In 1997, A.Yu. Khrennikov proposed the application of p -adic dynamical systems to model cognitive and information processing mechanisms, particularly within the theory of mental states and

decision-making processes. This opened up new interdisciplinary directions involving the use of p -adic methods in mathematical psychology, cognitive science, and physics.

It is worth noting that for any natural number, one can define and analyze dynamical systems on the ring of p -adic numbers, which significantly broadens the class of applicable models [12; P. 55-68]. Initially, studies in p -adic dynamics focused primarily on simple mappings, such as monomials and linear transformations. More complex functions were less explored, leaving a gap in the development of general p -adic dynamical theory.

Recent work by E. Yurova and A. Khrennikov has investigated p -adic dynamical systems generated by 1-Lipschitz functions, which satisfy strict non-expansion conditions under the p -adic norm. These functions are particularly well-suited for constructing contracting maps in p -adic spaces and for modeling systems with stable behavior under iteration[13; P. 217-233].

Despite this progress, the study of dynamics generated by more intricate p -adic functions, beyond simple algebraic forms, remains an active area of research with many open problems.

This paper presents an overview of p -adic 1-Lipschitz functions and their fundamental properties. A general form of such functions is provided, and their behavior under iteration is studied within the framework of p -adic dynamical systems.

Preliminaries. Let us assume that we are given a field $(K, +, \cdot)$.

Definition 2.1 A mapping $\|\cdot\|: K \rightarrow \mathbb{R}_+$ is called a norm on the field K if it satisfies the following properties:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. For all $x, y \in K$, we have $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$;
3. For all $x, y \in K$, we have $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A field K equipped with such a norm $\|\cdot\|$ is called a normed field, and is denoted by the pair $(K, \|\cdot\|)$

Definition 2.2 Let $(K, \|\cdot\|)$ be a normed field. If for all $x, y \in K$ the following inequality holds:

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \tag{1}$$

then the norm $\|\cdot\|$ is called a non-Archimedean norm.

Let \mathbb{P} denote the set of all prime numbers, and let $p \in \mathbb{P}$ be a fixed prime. For any nonzero integer $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, we introduce the notion of the p -adic order of a .

Definition 2.3 If $a \equiv 0 \pmod{p^k}$ but $a \not\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, then the integer $k \in \mathbb{Z}_+$ is called the p -adic order of a , and is denoted by $\text{ord}_p(a)$.

If $a = 0$, then since $a \equiv 0 \pmod{p^k}$ for all $k \in \mathbb{Z}$, we define $\text{ord}_p(0) := +\infty$.

Given any rational number $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, we define its p -adic order as:

$$\text{ord}_p(x) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b).$$

Definition 2.4 On the field of rational numbers \mathbb{Q} , consider the mapping $|\cdot|_p$ defined by:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p(x)}}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

The mapping given by (2) defines a non-Archimedean norm on \mathbb{Q} , and is called the p -adic norm.

The completion of the field \mathbb{Q} with respect to the p -adic norm is called the field of p -adic numbers and is denoted by \mathbb{Q}_p .

Definition 2.5 The set of p -adic numbers with norm less than or equal to 1 is denoted by \mathbb{Z}_p , and is defined as:

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}.$$

Definition 2.6 The set of p -adic numbers with norm exactly equal to 1 is denoted by \mathbb{Z}_p^* , and is given by:

$$\mathbb{Z}_p^* = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p = 1\}.$$

From this definition, it follows that:

$$\mathbb{Z}_p^* \subset \mathbb{Z}_p, \quad \text{and} \quad \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p.$$

Recall that in any metric space (X, d) , the open ball centered at a point $a \in X$ with radius $r > 0$ is defined by:

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

In the p -adic metric space \mathbb{Q}_p , this becomes:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}.$$

Definition 2.7 Let $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ be a function. If there exists $\alpha \in \mathbb{R}$ such that:

$$|f(x) - f(y)|_p \leq p^\alpha |x - y|_p \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{Z}_p,$$

then f is called a p^α -Lipschitz function. In particular, if $\alpha = 0$, then:

$$|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{Z}_p, \tag{3}$$

and f is called a 1-Lipschitz function.

Several equivalent conditions for the 1-Lipschitz condition are known:

$$|f(x+y) - f(x)|_p \leq |y|_p, \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{Z}_p;$$

$$\left| \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right|_p \leq 1, \quad \text{for all } x \in \mathbb{Z}_p, y \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\};$$

$$f(x + p^n \mathbb{Z}_p) \subset f(x) + p^n \mathbb{Z}_p, \quad \text{for all } x \in \mathbb{Z}_p, n \geq 1;$$

$$f(x) \equiv f(y) \pmod{p^n} \quad \text{whenever } x \equiv y \pmod{p^n}, \quad \text{for all } n \geq 1.$$

Let $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}_p$ be a domain, and let $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ be a function. Studying the dynamical system (f, \mathbb{D}) means investigating the behavior of the sequence:

$$x_n = f^n(x_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

for some initial point $x_0 \in \mathbb{D}$.

Definition 2.8 A point $x_0 \in \mathbb{D}$ is called a fixed point of the dynamical system (f, \mathbb{D}) if

$$f(x_0) = x_0.$$

Definition 2.9 Let x_0 be a fixed point. If there exists a neighborhood $U_r(x_0) \subset \mathbb{D}$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0, \quad \forall x \in U_r(x_0),$$

then x_0 is called an *attractive fixed point*. The set

$$A(x_0) = \{x \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0\}$$

is called the *basin of attraction* (or attractor) of x_0 .

Definition 2.10 Let x_0 be a fixed point of the function $f(x)$. Then:

1. If $|f'(x_0)|_p < 1$, then x_0 is an *attractive point*;
2. If $|f'(x_0)|_p = 1$, then x_0 is a *neutral point*;
3. If $|f'(x_0)|_p > 1$, then x_0 is a *repelling point*.

Proposition 2.1 For any $x, y \in \mathbb{Q}_p$, the following statements hold:

1. If $|x|_p \neq |y|_p$, then $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
2. If $p=2$ and $|x|_2 = |y|_2$, then $|x+y|_2 \leq \frac{1}{2}|x|_2$;
3. If $p \neq 2$ and $|x|_p = |y|_p$, then $|x+y|_p \leq |x|_p$.

Lemma 2.1 Let $x^2 - a$ be a polynomial over \mathbb{Z}_2 . Then this polynomial has a root in \mathbb{Z}_2 if and only if a can be written as

$$a = 2^\alpha(a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + \dots),$$

where $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ is even and $a_1 = a_2 = 0$.

Lemma 2.2 Let $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ be a function. If f is a polynomial whose coefficients belong to \mathbb{Z}_p , then f is a 1-Lipschitz function.

Main Results. Lemma 3.1 Let the function $f_{a,k}: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ be defined as

$$f_{a,k}(x) = \left(\frac{\alpha x + 1}{x + a}\right)^k, \quad a \in \mathbb{Z}_p.$$

Then for $k=2$ and $k=3$, the function $f_{a,k}(x)$ is 1-Lipschitz on the set \mathbb{Z}_p^* .

Proof. We first consider the case $k=2$. Define

$$f_{a,2}(x) = \left(\frac{\alpha x + 1}{x + a}\right)^2.$$

We will verify the 1-Lipschitz condition in the form:

$$|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p. \tag{4}$$

Let us compute the expression:

$$|f_{a,2}(x) - f_{a,2}(y)|_p = \left| \frac{2\alpha xy + (\alpha^2 + 1)(x+y) + 2a}{(x+a)(y+a)} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \right|_p \cdot |x - y|_p.$$

In order for $f_{a,2}(x)$ to satisfy the 1-Lipschitz condition, we must have

$$\left| \frac{2\alpha xy + (\alpha^2 + 1)(x+y) + 2a}{(x+a)(y+a)} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{(x+a)(y+a)} \right|_p \leq 1. \tag{5}$$

Note that for $x, y \in \mathbb{Z}_p^*$, we have $|x|_p = |y|_p = 1$, and since $a \in \mathbb{Z}_p$, we have $|a|_p \leq 1$. Then $|x+a|_p \leq \max\{1, |a|_p\} \leq 1$, and similarly for $y+a$. Hence, all the terms in ?? are of norm ≤ 1 , and by Proposition 2.1, their products are also of norm ≤ 1 . Therefore, inequality ?? holds.

Now consider the case $k=3$. We have:

$$f_{a,3}(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^3.$$

The difference can be expressed as:

$$|f_{a,3}(x) - f_{a,3}(y)|_p = \left| \frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left(\left(\frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} (x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \cdot |x-y|_p.$$

To satisfy the 1-Lipschitz condition, the expression inside the norm must be bounded by 1:

$$\left| \frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left(\left(\frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} (x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \leq 1.$$

As before, since $x, y \in \mathbb{Z}_p^*$ and $a \in \mathbb{Z}_p$, all terms such as $\frac{ax+1}{x+a}$ and $\frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)}$ are bounded in norm by 1. Thus, the full expression satisfies the required bound.

Hence, $f_{a,k}(x)$ is 1-Lipschitz for both $k=2$ and $k=3$ on the domain \mathbb{Z}_p^* . **W**

Theorem 3.1 *Let the function*

$$f_{a,k}(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^k, \quad a \in \mathbb{Z}_p,$$

be defined on \mathbb{Q}_p . Then, for $k=3$, the function $f_{a,k}(x)$ is 1-Lipschitz on $\mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ if and only if $\forall x \in \mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$.

Proof.

Sufficiency. To verify the 1-Lipschitz condition, we examine:

$$|f_{a,3}(x) - f_{a,3}(y)|_p = \left| \frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} \cdot \left(\left(\frac{a^2-1}{(x+a)(y+a)} (x-y) \right)^2 + 3 \cdot \frac{ax+1}{x+a} \cdot \frac{ay+1}{y+a} \right) \right|_p \cdot |x-y|_p.$$

If $x, y \in \mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$, then $|x|_p, |y|_p \geq 1$. Therefore, by ultrametric properties, each term in the expression has p -adic norm at most 1, and hence the entire expression satisfies the 1-Lipschitz condition.

Necessity. If $x \in p\mathbb{Z}_p$, i.e., $|x|_p < 1$, the norms of the involved expressions can become greater than 1, violating the Lipschitz condition. Therefore, for $f_{a,k}$ to be 1-Lipschitz, it is necessary that $x \in \mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$.

Now let us analyze the dynamics of $f_{a,k}$ for the case $p=2, k=3$.

To find the fixed points, we solve the equation $f(x)=x$:

$$\left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^3 = x.$$

This yields the fixed points:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{a^3 - 3a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_4 = \frac{a^3 - 3a - (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

For x_3 and x_4 to exist in \mathbb{Q}_2 , the term $\sqrt{a^2-4}$ must also belong to \mathbb{Q}_2 . According to known criteria, this holds if and only if $|a^2-4|_2 \geq 0$, i.e., $|a|_2 \geq \frac{1}{2}$. However, in many such cases the square root does not

exist in \mathbb{Q}_2 , hence x_3 and x_4 may not be valid fixed points.

Theorem 3.2 Let x_i for $i=1,2,3,4$ denote the fixed points of the function

$$f(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a} \right)^3,$$

where $a \in \mathbb{Z}_2$. Then the nature of the fixed points $x_1 = 1$ and $x_2 = -1$ is characterized as follows:

1. For $x_1 = 1$:
 - x_1 is **attracting** if $a \in \mathbb{Z}_2$,
 - x_1 is **neutral** if $a \in \mathbb{Z}_2^*$.
2. For $x_2 = -1$:
 - x_2 is **attracting** if $a \in \mathbb{Z}_2$,
 - x_2 is **repelling** if $a \in \mathbb{Z}_2^*$.

Proof To determine the nature of the fixed points, we analyze the derivative of the function:

$$f'(x) = \frac{3(a^2-1)(ax+1)^2}{(x+a)^4}.$$

We use the following facts about p -adic norms in \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z}_2 \Rightarrow |a|_2 \leq \frac{1}{2}, & |a \pm 1|_2 = 1, \\ a \in \mathbb{Z}_2^* \Rightarrow |a|_2 = 1, & |a \pm 1|_2 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Case 1: For $x_1 = 1$, we have:

$$f'(1) = \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2}.$$

- If $a \in \mathbb{Z}_2$, then:

$$|f'(1)|_2 = \left| \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2} \right|_2 < 1,$$

so x_1 is attracting.

- If $a \in \mathbb{Z}_2^*$, then:

$$|f'(1)|_2 = 1,$$

so x_1 is neutral.

Case 2: For $x_2 = -1$, we have:

$$f'(-1) = \frac{3a}{a-1}.$$

- If $a \in \mathbb{Z}_2$, then:

$$|f'(-1)|_2 = \left| \frac{3a}{a-1} \right|_2 < 1,$$

so x_2 is attracting.

- If $a \in \mathbb{Z}_2^*$, then:

$$|f'(-1)|_2 > 1,$$

so x_2 is repelling.

Theorem 3.3 Let $f_{a,3}(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^3$ be a function defined on \mathbb{Z}_2^* . Suppose that $a \in \mathbb{Z}_2$. Then:

1. $f_{a,3}(x)$ is a 1-Lipschitz function on \mathbb{Z}_2^* ;
2. There exists a non-empty open ball $B_r(1)$ centered at $x=1$ such that for all $x \in B_r(1)$, the

iterated sequence $x_n = f_{a,3}^n(x)$ converges 2-adically to the fixed point $x=1$, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{a,3}^n(x) = 1.$$

That is, $x=1$ is an attracting fixed point and the basin of attraction $A(1)$ contains an open ball around $x=1$.

Proof From Lemma 3.1, $f_{a,3}(x)$ is a 1-Lipschitz function on \mathbb{Z}_2^* if $a \in \mathbb{Z}_2$.

We compute the derivative:

$$f'(x) = \frac{3(a^2-1)(ax+1)^2}{(x+a)^4}, \quad \text{so} \quad f'(1) = \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2}.$$

Since $a \in \mathbb{Z}_2$, we have $|a|_2 \leq \frac{1}{2}$ and $|a \pm 1|_2 = 1$, so:

$$|f'(1)|_2 = \left| \frac{3a(a-1)}{(a+1)^2} \right|_2 < 1.$$

Hence, by the p -adic contraction principle, there exists a ball $B_r(1)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 1 \quad \text{for all } x \in B_r(1),$$

which proves that $x=1$ is an attracting fixed point.

Remark. The presented lemmas and theorems demonstrate that the function

$$f_{a,k}(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^k,$$

under certain conditions on the parameters $a \in \mathbb{Z}_p$ and $k \in \mathbb{N}$, satisfies the 1-Lipschitz condition on the set $\mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$. This allows for a rigorous investigation of its dynamical properties, including the existence and classification of fixed points. In particular, for $p=2$ and $k=3$, the system exhibits both attractive and repelling behavior depending on the value of the parameter a . This approach provides a useful framework for modeling non-Archimedean dynamics and contributes to the broader study of p -adic transformations.

Conclusion. In this paper, we studied the dynamics of 1-Lipschitz functions defined over the field of p -adic numbers. We focused on a specific class of rational functions of the form

$$f_{a,k}(x) = \left(\frac{ax+1}{x+a}\right)^k,$$

and analyzed their fixed points, local behavior, and stability properties. Our results demonstrate that these functions exhibit rich dynamical behavior depending on the parameters a , k , and the prime p .

We provided a detailed investigation for the case $p=2$, which revealed interesting phenomena such as the existence of attracting and repelling fixed points, as well as possible periodic orbits. These results contribute to the growing body of work in p -adic dynamical systems and open up new directions for future research.

Possible extensions of this work include a complete classification of periodic points, a measure-theoretic analysis of invariant sets, and applications to cryptography and p -adic models in physics.

REFERENCES:

1. Alan Adolphson, Steven Sperber, Marvin Tretkoff. *p-adic methods in number theory and algebraic geometry* AMS, Founded, 1992.
2. W.H.Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Stud. Adv. Math., 4, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984.
3. N.Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions*. Springer, New York, 1977.
4. V.S.Vladimorov, I.V.Volovich and E.I.Zelenov. *p-adic analysis and mathematical physics*. World Sci. Publ., Singapore, 1994.
5. Kiran S. Kedlaya. *p-adic differential equations* Cambridge University Press, 2010.
6. A.C.M. van Rooij. *Non-Archimedean functional analysis*. New York and Basel, Pure and applied mathematics, 1978.
7. U.A.Rozikov. *Gibbs measure on a Cayley tree*. World Scientific, 2013.
8. N.M.Chuong, Yu.V.Egorov, A.Khrennikov, Y.Meyer, D.Mumford. *Harmonic, wavelet and p-adic analysis*. World Scientific, 2007.
9. Ganikhodjaev N.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., *Phase Transitions in the Ising Model on Z over the p-adic Number Field*, *Uzb. Mat. Zh.*, 1998, 4, P. 23-29.
10. Khakimov O.N., *On p-adic Gibbs measures for Ising model with four competing interactions*. *P-adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.* 2013; 5: P. 194-203.
11. Rakhmatullayev M., Khakimov O., Tuxtaboyev A., *On p-adic generalized Gibbs measure for the Ising model on a Cayley tree*. *Theor. Math. Phys.* 2019; 201: P. 1521-1530.
12. B.Dragovich, A.Khrennikov, and D. Mihajlovic, *Linear fractional p-adic and adelic dynamical systems*, *Rep. Math. Phys.*, 2007, 60, 1, P. 55-68.
13. E.Yurova and A.Khrennikov, *Generalization of Hensel's lemma: finding the roots of p-adic Lipschitz functions*, *J.Number Theory*, 2016, 158, P. 217-233.
14. A.Yu.Khrennikov and M.Nilsson. *p-adic Deterministic and Random Dynamics*. Kluwer Academic Publishers. London. 2004.
15. S.Jeong, *Toward the ergodicity of p-adic 1-Lipschitz functions represented by the van der Put series*, *J. Number Theory*, 2013,133, (9), P. 2874–2891.

EYLER FORMULASINING MATEMATIKA VA FIZIKA FANLARIDAGI BA'ZI BIR TATBIQLARI

Xolikov Suyunjon Xamroqul o'g'li,
Navoiy davlat universiteti Matematika kafedrasida dotsenti
Qodirova Madinabonu Zokirjon qizi,
Navoiy davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada Eyer formulasi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ko'rinishi hamda uning matematika va fizika fanlaridagi asosiy tatbiqlari yoritilgan. Eyer formulasi trigonometriya va kompleks analizni o'zaro bog'lovchi eng muhim matematik tengliklardan biri hisoblanadi. Maqolada bu formuladan trigonometrik funksiyalarni eksponent shaklida ifodalash, differensial tenglamalarni yechish, to'lqin jarayonlarini modellashtirish, elektr zanjirlar va tebranish tizimlarini tahlil qilishda foydalanish usullari ko'rsatib o'tilgan. Shuningdek, Eyer formulasi Furye qatori, Muavr formulasi, kvant mexanikasi va signal tahlilidagi o'rni ham tahlil etilgan. Ushbu tadqiqot Eyer formulasi nazariy ahamiyatini chuqurroq yoritish bilan birga, uning amaliy qo'llanilish sohalarini kengroq ochib beradi.

Kalit so'zlar: Eyer formulasi, trigonometriya, eksponenta, to'lqin jarayoni, Furye qatori, fizika, algebraik ko'pxad.

НЕКОТОРЫЕ СФЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Аннотация. В данной статье рассмотрена формула Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и её основные применения в математике и физике. Формула Эйлера является одним из важнейших математических равенств, связывающих тригонометрию и комплексный анализ. В статье показано использование этой формулы для представления тригонометрических функций в экспоненциальной форме, решения дифференциальных уравнений, моделирования волновых процессов, а также анализа электрических цепей и колебательных систем. Кроме того, рассмотрена роль формулы Эйлера в ряде Фурье, формуле Муавра, квантовой механике и анализе сигналов. Проведённое исследование не только более глубоко раскрывает теоретическое значение формулы Эйлера, но и демонстрирует широту её практического применения.

Ключевые слова: формула Эйлера, тригонометрия, экспонента, волновой процесс, ряд Фурье, физика, алгебраический многочлен.

SOME APPLICATIONS OF EULER'S FORMULA IN MATHEMATICS AND PHYSICS

Abstract. This article examines Euler's formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ and its main applications in mathematics and physics. Euler's formula is one of the most important mathematical relationships connecting trigonometry and complex analysis. The paper demonstrates how this formula is used to express trigonometric functions in exponential form, solve differential equations, model wave processes, and analyze electrical circuits and oscillatory systems. Furthermore, the role of Euler's formula in Fourier series, De Moivre's formula, quantum mechanics, and signal analysis is discussed. This study not only highlights the theoretical importance of Euler's formula but also reveals the broad scope of its practical applications.

Keywords: Euler's formula, trigonometry, exponential function, wave process, Fourier series, physics, algebraic polynomial.

Kirish. Ushbu formula haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanlari orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi ko'priq vazifasini o'taydigan va bu formula matematikaning keyingi bosqichlarini rivojlantirishda o'ta muhim rol o'ynaydi. Ushbu maqolada Eyer formulasi yordamida ba'zi bir ko'phadlarning ildizlarini aniqlash hamda ularni ko'paytuvchilarga ajratish masalalari qaraladi. Bu turdagi masalalar Eyer formulasi orqali hal etiladi. Shuning uchun biz dastlab ushbu formulani bir necha xil isbotlarini keltirib so'ngra ba'zi amaliy masalalarga tatbiq etamiz.

Teorema: Quyidagi munosabat o'rinli

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1}$$

Isbot: teoremani isbotlash uchun bizga ma'lum bo'lgan ajoyib limitlardan foydalanaylik [1].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad (3)$$

$$(x + iy) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{agar } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{agar } x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

(2) ga $\alpha = ix$ deb qarasak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}, \quad (5)$$

$$1 + \frac{ix}{n} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), r = \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{n},$$

$$\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (6)$$

(6) ni (5) ga qo'yib, limitga o'tsak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2 x^2}{x^2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2}{n}} = 1, \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x, \quad (9)$$

(7) va (8) formulalarni hisobga olib (6) ni quyidagicha ifodalash mumkin. Bu yerdan (1) formulani o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

2-usul. Quyidagi funksiyani olamiz:

$$F(x) = e^{-ix}(\cos x + i \sin x)$$

Ikkala tarafidan hosila olamiz:

$$F'(x) = (-i)e^{-ix}(\cos x + i \sin x) + e^{-ix}(-\sin x + i \cos x) = 0$$

Eknaligidan $F(x) = C = \text{const}$ xulosaga olib keladi. Bunday holat faqatgina $F(0) = 1$ o'rinli bo'lganligidan

$$F(x) = e^{-ix}(\cos x + i \sin x) = 1 \Rightarrow e^{ix} = (\cos x + i \sin x)$$

Tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi yuqoridagi teorema va formulalarni ba'zibir amaliy masalalarni yechishga tatbiq etaylik.

Trigonometriyada:

$$e^{ix} = (\cos x + i \sin x)$$

$$e^{-ix} = (\cos x - i \sin x)$$

Tenglikning ikkala tarafini ko'paytirsak :

$$e^{ix} e^{-ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Yuqoridagi usul bilan $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ formulalarni oson isbotlash mumkin.

Matritsa va vektorlar bilan ishlashda: quyidagi almashtirish 2D aylanishli kompyuter grafikasi va robototexnikada ishlatiladi

$$R(\theta) = e^{i\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Elektr texnikada: Eyler formulasi yordamida sinusoidal tok va kuchlanishlar eksponenta shaklida quyidagicha ifodalanadi:

$$V = V_0 e^{i\omega t}, I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

Shunda faza farqi, reaktiv va aktiv quvvatlarni hisoblashni ancha soddalashadi.

Signal va tizimlar nazariyasida: har qanday sinusoidal signal Eyler formulasi yordamida kompleks eksponenta sifatida yoziladi:

$$x(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

bundan Furiye qatori, Laplas almashtirishi, Furiye spektrori tushunchalari kelib chiqadi.

Algebra ba'zi yuqori darajali tenglamalarni yechishda:

1. $f(x) = x^m - C_{2m}^2 x^{m-1} + C_{2m}^4 x^{m-2} + \dots + (-1)^m C_{2m}^{2m}$

Ko'pxadning ildizlarini aniqlang va R haqiqiy sonlar maydonida ko'paytuvchilarga ajrating.

$f(x)$ ko'pxadni haqiqiy ildizlarini aniqlash uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritib, ular vositasida $f(x)$ ni quyidagicha ifoda etish mumkin:

$$F_1(x+i) = (\sqrt{x} + i)^{2m}; F_2(x+i) = (\sqrt{x} - i)^{2m}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(F_1(x+i) + F_2(x+i))$$

$$F_1(x+i) = (\sqrt{x} + i)^{2m} = r^{2m}(\cos 2m\varphi + i\sin 2m\varphi)$$

$$F_2(x+i) = (\sqrt{x} - i)^{2m} = r^{2m}(\cos 2m\varphi - i\sin 2m\varphi)$$

Yuqoridagi munosabatlarni hisobga olib $f(x)$ ni ko'rsatkichli ko'rinishini quyidagicha ifoda etish mumkin.

$$f(x) = r^{2m}(e^{2m\varphi i} + e^{-2m\varphi i})/2 = r^{2m}\cos 2m\varphi;$$

Bu yerda $r = \sqrt{x+1}, x > 0, \varphi = \arctg \frac{1}{\sqrt{x}} = \text{arcctg} \sqrt{x}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow r^{2m}\cos 2m\varphi = 0, r \neq 0 \Rightarrow \cos 2m\varphi = 0$$

$$\cos 2m\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4m}(1 + 2k);$$

$$\text{arcctg} \sqrt{x} = \frac{\pi}{4m}(1 + 2k) \Rightarrow \sqrt{x} = \text{ctg} \frac{\pi}{4m}(1 + 2k) \Rightarrow x = \text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4m}(1 + 2k)\right)$$

Bu yerda $\cos x = 0$, tenglama ildizlarining davri πk ekanligini hisobga olib: $f(x) = 0$ tenglamaning har xil ildizlarini ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin.

$$x_k = \text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4m}(1 + 2k)\right), k = \overline{0, m-1}$$

Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra $f(x)$ ni ko'paytuvchiga ajratiladi.

$$f(x) = 2 \prod_{k=0}^{m-1} \left(x - \text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4m}(1 + 2k)\right)\right)$$

2. $f(x) = (x + \cos \theta + i \sin \theta)^n + (x + \cos \theta - i \sin \theta)^n$

Ko'pxadni haqiqiy koeffitsiyentli ekanligini isbotlang, ildizlarini aniqlang ko'paytuvchiga ajrating.

$$\Phi_1(x) = (x + \cos \theta + i \sin \theta)^n, \Phi_2(x) = (x + \cos \theta - i \sin \theta)^n;$$

$$f(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$$

$$x + \cos \theta + i \sin \theta = \sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}e^{i\varphi}$$

$$x + \cos \theta - i \sin \theta = \sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}e^{-i\varphi}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\sin \theta}{x + \cos \theta} = \text{arcctg} \frac{x + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Phi_1(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}\right)^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

$$\Phi_2(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}\right)^n (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = r^n e^{-in\varphi}$$

Asosida almashtirishlar va belgilashlar asosida $f(x)$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}\right)^n \cdot \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} = 2 \left(\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1}\right)^n \cos n\varphi,$$

$f(x) = 0$ tenglamani yechaylik.

$$\sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1} \cos n\varphi = 0$$

$$x^2 + 2x \cos \theta + 1 \neq 0, \cos n\varphi = 0 \Rightarrow n\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{arcctg} \frac{x + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\pi}{2n}(1 + 2k)$$

$$\frac{x + \cos \theta}{\sin \theta} = \text{ctg} \frac{\pi}{2n}(1 + 2k) \Rightarrow x = \sin \theta \text{ctg} \frac{\pi}{2n}(1 + 2k) - \cos \theta$$

$$x_k = \sin \theta \text{ctg} \frac{\pi}{2n}(1 + 2k) - \cos \theta, k = \overline{0, n-1}$$

$$f(x) = 2 \prod_{k=0}^{n-1} \left(x + \cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} (1 + 2k) \right)$$

yuqoridagi usuldan foydalanib:

$$f(x) = C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3} + C_n^5 x^{n-5} + \dots$$

Ushbu ko'pxadni ko'paytuvchiga ajratish mumkin.

$$f(x) = C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3} + C_n^5 x^{n-5} + \dots = C_n^1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{n} \right)$$

Yuqoridagi usuldan foydalanib ba'zi bir yuqori darajali algebraik tenglamalarni ildizlarini aniqlash mumkin, va ularni amaliy masalalarga tatbiq etish maqsadga muvofiq.[2]

Xulosa. Eyler formulasi matematik analiz, kompleks sonlar nazariyasi va fizikaning ko'plab yo'nalishlarida markaziy o'rin tutadi. Ushbu formula yordamida trigonometrik va eksponent funksiyalar o'rtasidagi chuqur bog'lanish aniqlanadi, bu esa ko'plab nazariy va amaliy masalalarni soddalashtiradi. Matematikada Eyler formulasi yordamida trigonometriya, differensial tenglamalarni yechish hamda Furiye qatorlarini qurish mumkin. Fizikada esa u tebranishlar, elektromagnit to'lqinlar, kvant holatlar va elektr zanjirlarni tahlil qilishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shunday qilib, Eyler formulasi nafaqat nazariy matematikaning chiroyli natijasi, balki tabiiy jarayonlarni modellashtirishda, muhandislik va ilmiy hisoblashlarda keng qo'llaniladigan universal vosita sifatida ham alohida ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1. Ляшко И.И. и др. Введение в анализ, производная интеграл. Киев, изд. "Выща школа", 1984. Стр.456.
2. Д.К.Фаддеев И.С Соминский Сборник Задач по высшей алгебре, Москва: 1977. 288 стр.

TURG‘UN QONUNLARNING XARAKTERISTIK FUNKSIYALARI HAQIDAGI TEOREMA

G‘aniyev Doniyor Musurmonovich,
Samarqand davlat universiteti Urgut filiali
Biznesni boshqarish va aniq fanlar kafedrası o‘qituvchisi
Abdumannonova Sohiba Kamoljon qizi,
Samarqand davlat universiteti Urgut filiali IV bosqich talabasi
abdumannonovasohiba@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada turg‘un taqsimotlarning xarakteristik funksiyalari haqidagi teorema yoritilgan. Tadqiqotda turg‘un taqsimotlarning zaruriy va yetarli shartlari, ularning limitik xossalari hamda tasodifiy miqdorlar yig‘indilari uchun qo‘llanishi batafsil ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, taqsimot funksiyalarining turg‘unlik holatini aniqlashda xarakteristik funksiyalarning o‘rni va ularning matematik asoslari isbotlar yordamida tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: turg‘un taqsimot, xarakteristik funksiya, limit teorema, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi, matematik isbot.

ТЕОРЕМА О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАКОНОВ

Аннотация. В статье рассматривается теорема о характеристических функциях устойчивых распределений. Исследуются необходимые и достаточные условия устойчивости распределений, их предельные свойства и применение к суммам независимых случайных величин. Особое внимание уделено роли характеристических функций при определении устойчивости распределений и их математическому обоснованию.

Ключевые слова: устойчивое распределение, характеристическая функция, предельная теорема, случайная величина, функция распределения, математическое доказательство.

THEOREM ON CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF STATIONARY LAWS

Abstract. This article discusses the theorem on characteristic functions of stable distributions. The study examines the necessary and sufficient conditions for stability, the limiting properties of such distributions, and their application to sums of independent random variables. Special attention is given to the role of characteristic functions in determining the stability of distributions and their mathematical justification through proofs.

Keywords: stable distribution, characteristic function, limit theorem, random variable, distribution function, mathematical proof.

Kirish. Turg‘un taqsimotlar nazariyasi Ehtimollar nazariyasining muhim tarmoqlaridan biridir. Bu nazariya tasodifiy miqdorlar yig‘indilarining limitik qonunlarini o‘rganadi va ko‘plab tabiiy jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega

Ushbu yo‘nalishning asoschilari sifatida P.Levy (1925), A.Ya Khinchin (1938), B.V.Genedenko (1948), A.N.Kolmogorov (1954), W.Feller (1971) kabi olimlar e‘tibor etiladi. Ayniqsa, Levy tomonidan kiritilgan “Turg‘un taqsimotlar” tushunchasi va ularning xarakteristik funksiyalar orqali ifodalanishi hozirgi zamonaviy statistik modellarning nazariy asosini tashkil etadi.

Turg‘un taqsimotlar normal taqsimotning umumlashtirilgan shakli bo‘lib, ular “cheksiz dispersiyali” jarayonlarni, masalan, moliyaviy bozor tebranishlarini, signallarni, tabiiy hodisalarni tasvirlashda qo‘llaniladi.

Masalaning qo‘yilishi:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

yig‘indini tuzamiz. S_n - yig‘indining taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ bo‘lsin, A_n va B_n lar normallovchi

koeffitsientlar.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlarga ma’lum shartlarni qo’ymasdan, umumiy holda, $F_n(x)$ funksiyaning asimptotik tahlili juda mushkul masaladir.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bir xil taqsimlangan va o’zaro bog’liq bo’lmagan hol juda ham batafsil o’rganilgan, ya’ni o’zaro bog’liqmas tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi uchun $M_{\xi_1}^{\xi} = a, D_{\xi_1}^{\xi} = \sigma^2$ mavjud bo’lsa, u holda yig’indining ko’rinishi

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{\xi} - M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{\xi}\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^{\xi}\right)}}$$

kabi bo’ladi.

Ushbu holda $F_n(x)$ funksiya $n \rightarrow \infty$ da $N(a, \sigma)$ normal qonunga intiladi. Ushbu holni I – bobda batafsil o’rganib chiqildi.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi har xil taqsimlangan bo’lsa, ya’ni $M_{\xi_k}^{\xi} = a_k, D_{\xi_k}^{\xi} = \sigma_k^2, k=1,2,\dots$ – bo’lgan hol ham ancha yaxshi o’rganilgan, mos markaziy va lokal teoremlar isbotlangan, bu teoremlardagi yaqinlashish tezliklari ham aniqlangan, bu holda jamlovchi (limitik) funksiya normal qonundan iborat bo’ladi. Biroq, A_n va B_n koeffitsientlarning qanday aniqlanishiga qarab,

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

yig’indining $F_n(x)$ taqsimot funksiyasi normal taqsimotdan boshqa taqsimotlarga intilishi mumkin.

O’zaro barqaror bog’langan (xususan, o’zaro bog’liqmas va bir xil taqsimlangan) tasodifiy miqdorlarning – yig’indisi, limitik funksiya sifatida, faqat turg’un qonunlarga intiladi.

Bu aytilganlardan kelib chiqadiki, yig’indilar taqsimot funksiyasining limiti bo’lmish – turg’un qonunlarni har tomonlama tahlil etish maqsadga muvofiqdir.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $a_1 > 0, b_1, a_2 > 0, b_2$ – lar uchun

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b) \tag{1}$$

tenglik o’rinli bo’lsa, u holda $F(x)$ taqsimot funksiya turg’un taqsimot deyiladi, bu yerda $a > 0$ va b – lar qandaydir o’zgarmas sonlar.

$F(x)$ taqsimot funksiyaga mos xarakteristik funksiyani $f(t)$ orqali belgilaymiz va ixtiyoriy $a_1 > 0, a_2 > 0$ sonlar uchun

$$f\left(\frac{t}{a_1}\right) \cdot f\left(\frac{t}{a_2}\right) = f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-ib_1} \tag{2}$$

tenglikka ega bo’lamiz, bu yerda $a > 0$ va b – lar qandaydir o’zgarmas sonlar.

O’zaro bog’liqmas ξ_k – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun quyidagi tasdiq o’rinli:

Teorema $F(x)$ taqsimot funksiya o’zaro bog’liqmas bir xil taqsimlangan ξ_k tasodifiy miqdorlarning ko’rinishdagi yig’indilariga limitik funksiya bo’lishi uchun $F(x)$ ning turg’un taqsimot bo’lishi zarur va yetarlidir.

Bu yerda dagi B_n o’zgarmaslar $B_n = n^{\frac{1}{\alpha}} h(n)$ – ko’rinishga ega bo’lib, $0 < \alpha \leq 2, h(n)$ – sust o’zgaruvchi (Karamat ma’nosida) funksiya.

Zarurlikning isboti: B_n – normallovchi koeffitsientning ko’rinishini keyingi punktlarda aniqlashtiramiz. $F(x)$ taqsimot funksiyaga mos xarakteristik funksiyani $\varphi(t)$ – deb belgilaylik, ξ_1 – tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini esa $f(t)$ – deylik.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 1 \qquad (3)$$

munosabatlarni isbotlaylik.

(3) munosabatlarning birinchisi o‘rinli emas, deb faraz qilaylik. U holda B_n ketma – ketlikdan shunday B_{n_k} – qisman ketma – ketlik ajratib olish mumkin,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_{n_k} = B \neq \infty$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra barcha t lar uchun $k \rightarrow \infty$ da

$$\left| f\left(\frac{t}{B_{n_k}}\right) \right|^{n_k} = \varphi(t) \cdot (1 + o(1)),$$

demak, barcha t lar uchun

$$|f(t)| = |\varphi(t) \cdot B_{n_k}|^{1/n_k} \cdot (1 + o(1))$$

tenglik $|f(t)| \equiv 1$ bo‘lganda, demak, $|\varphi(t)| \equiv 1$ bo‘lgandagina bajariladi, ya’ni

$F(x)$ – xosmas taqsimot bo‘lganda bajariladi. Bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki $F(x)$ – xos taqsimot funksiya deb qaralmoqda.

Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ bajarilmaydi deb qilgan farazimiz noto‘g‘ri ekan.

Endi, (2.2.3) dagi ikkinchi munosabatni isbot qilamiz.

Yuqorida isbotlangan $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$ munosabatga asosan, barcha t lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{t}{B_{n+1}}\right) \right| = 1,$$

va demak, $n \rightarrow \infty$ da

$$\left| f\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|^n = |\varphi(t) \cdot (1 + o(1))|,$$

$$\left| f\left(\frac{t}{B_{n+1}}\right) \right|^n = |\varphi(t) \cdot (1 + o(1))|.$$

Bu tengliklarning birinchisida t ni $\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot t$ bilan, ikkinchisida esa t ni $\frac{B_n}{B_{n+1}} \cdot t$ bilan almashtirib, quyidagilarni isbotlaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \varphi\left(\frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot t\right) \right|}{|\varphi(t)|} = 1, \qquad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \varphi\left(\frac{B_n}{B_{n+1}} \cdot t\right) \right|}{|\varphi(t)|} = 1.$$

Agar, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ va $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ ketma – ketliklardan hech bo‘lmaganda, bittasi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} \neq 1$$

bo‘lsa, u holda, bu ketma-ketliklardan $B < 1$ songa intiluvchi qisman ketma-ketlikni ajratib olish

mumkin.

Ushbu olingan ketma-ketliklarda (4) – bo'yicha limitga o'tib, $|\phi(t)| = |\phi(B^n t)|$ tenglikka ega bo'lamiz, bu jarayonni n marta takrorlansa, barcha n lar uchun

$$|\phi(t)| = |\phi(B^n t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(0) = 1$$

munosabat hosil bo'ladi. Ammo, xosmas taqsimotlar uchun oxirgi munosabatning bo'lishi mumkin emas. Demak, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ va $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ ketma-ketliklardan $B < 1$ ga intiluvchi qisman ketma-ketlik ajratib olish mumkin, – degan farazimiz noto'g'ri, shuning uchun (4) – dagi ikkinchi munosabat ham o'rinli.

Shunday qilib, (4) – dagi ikkinchi munosabat ham isbotlandi.

Endi, agar $F(x)$ – xos taqsimot funksiya bo'lsa, uning turg'un bo'lishini isbotlaymiz.

$a_1 < a_2$ – ixtiyoriy musbat sonlar, b_1, b_2 – lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsin.

(4) – o'rinli bo'lgani uchun $m = m(n)$ ketma-ketlikni shunday tanlash mumkinki, $n \rightarrow \infty$ da quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$\frac{B_m}{B_n} \rightarrow \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{m}{B_n} \rightarrow 0.$$

Quyidagi yig'indini qaraymiz:

$$\frac{B_n}{B} \cdot \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n - b_1 \right) + \frac{B_m}{B} \cdot \left(\frac{\xi_{n+1} + \xi_{n+2} + \dots + \xi_{n+m}}{B_m} - A_m - b_2 \right) = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+m}}{B} - A, \quad (5)$$

bu yerda

$$B = \frac{B_n}{a_1}, \quad A = \frac{1}{B} \cdot (B_n A_n + B_m A_m + b_1 B_n + b_2 B_m).$$

Teoremda talab qilingan shartlarga asosan (5) – ning chap tomonidagi yig'indilar, mos ravishda, $F(a_1 x + b_1)$ va $F(a_2 x + b_2)$ taqsimot funksiyalarga intiladi. Demak, (5) ning o'ng tomonidagi yig'indi ham yaqinlashadi va uning taqsimot funksiyasi $F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2)$ kompozitsiyadan iborat bo'ladi.

Ammo, oxirgi yig'indi quyidagi ko'rinishga ega

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+m}}{B_{n+m}} \cdot \frac{B_{n+m}}{B} - A_{n+m} - (A + A_{n+m}).$$

Demak, uning taqsimot funksiyasi $F(ax + b)$ ko'rinishda bo'ladi, u holda

$$F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2) = F(ax + b),$$

ya'ni $F(x)$ – taqsimot funksiya turg'un taqsimot ekan (ta'rifga asosan).

Yetarililikning isboti. $F(x)$ – turg'un taqsimot bo'lsin. Taqsimot funksiyalari $F(x)$ dan iborat bo'lgan

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

tasodifiy miqdorlar ketma – ketligini qaraymiz. (1) – tenglikka asosan $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ yig'indining taqsimot funksiyasi $F(a_n x + b_n)$ ko'rinishga ega bo'ladi, demak

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{a_n} + b_n$$

normallangan yig'indining taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'ladi.

Maqolada turg'un taqsimotlarning xarakteristik funksiyalari haqidagi teorema matematik nuqtayi nazardan asoslab berildi. Tadqiqot davomida tasodifiy miqdorlarning yig'indilari uchun limitik taqsimotlar mavjud bo'lishining zarur va yetarli shartlari tahlil qilindi hamda ularning turg'un qonunlarga intilish xususiyatlari isbotlar yordamida yoritildi.

Tahlillar shuni ko'rsatadiki, turg'un taqsimotlar normal taqsimotning umumlashtirilgan shakli bo'lib, ular cheksiz dispersiyali jarayonlarni ifodalashda muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa, moliyaviy bozor tebranishlari, tabiiy jarayonlar va signallarni modellashtirishda bunday taqsimotlar samarali natijalar beradi. Turg'un taqsimotlar uchun xarakteristik funksiyaning mavjudligi, uning limitik qonunlar bilan bog'liqligi

hamda tasodifiy miqdorlarning yig'indilari uchun qo'llanishi matematik asoslar yordamida isbotlab berildi. Shuningdek, teorema asosida o'zaro bog'liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar yig'indilari turg'un qonunlarga intilishi qat'iy ko'rsatib berildi. Olingan natijalar turg'un taqsimotlarning mohiyatini chuqurroq anglash, ularning matematik modellardagi o'rnini aniqlash va ehtimollar nazariyasi hamda statistik tahlil sohalarida amaliy qo'llanishini kengaytirishga xizmat qiladi. Mazkur natijalar, ayniqsa, ehtimollar nazariyasi, statistik modellashtirish, iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish va tabiiy tizimlardagi tasodifiy hodisalarni o'rganishda nazariy asos sifatida foydalanilishi mumkin.

Xulosa. Umuman olganda, turg'un taqsimotlar haqidagi teorema va ularning xarakteristik funksiyalari bo'yicha keltirilgan ilmiy tahlillar ushbu yo'nalishdagi nazariy izlanishlarni boyitadi hamda tasodifiy jarayonlar nazariyasini yanada rivojlantirishga ilmiy zamin yaratadi.

ADABIYOTLAR:

1. Сурвила П. О локальной предельной теореме для плотностей. *Лит. мат. сб.*, 1963, IIII, Н1, стр. 225-236.
2. Банис И.И., И другие. О скорости сходимости к устойчивому закону в локальной теореме, *Лит. мат. сб.*, 1971, III, Н3, стр. 511-516.
3. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины.* Москва 1965.
4. Петров В.В. *Суммы независимых случайных величин.* Москва 1972.
5. Петров В.В. *О моментах притягивающихся к устойчивым распределениям – Теория вероятностей и её применения*, 1973, 18, Н3, стр. 593-595.
6. Abdushukurov A.A. *Ehtimollar nazariyasi. Ma'ruzalar matni.* Toshkent: «Universitet», 2000.
7. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория вероятностей. Математическая статистика.* - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
8. Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В., Сиротин А. Н. *Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / Учебн. пособие.* - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

ELASTIK MUHITDAGI IDEAL SUYUQLIK BILAN TO‘LDIRILGAN SILINDRIK QATLAMNING XOS TEBRANISHI

Sabirova Ra’no Azamatovna,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
rano_sabirova85@mail.ru,*

Mirzoyeva Gulzira Turakul qizi,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
gulimirzoyeva1992@gmail.com*

Ruziyev To‘lqin Razzoqovich,

*Buxoro davlat pedagogika instituti, O‘zbekiston
ruzievtulkin@gmail.com*

Ibodov Nabijon Muzaffarovich,

*Buxoro davlat texnika universiteti, O‘zbekiston
ibodov nab@yandex.ru,*

Jumayeva Anora Amon qizi,

*Samarqand davlat arxitektura va qurilish universiteti, O‘zbekiston
anora00771@gmail.com*

Annotatsiya. Bu ishda deformatsiyalanuvchi muhitda joylashgan bo‘lakli bir jinsli suyuqlikli silindrik qobiqlarning xos tebranishlari masalasini materialning fizik mexanik xossalarini hisobga olgan holda masala yechilgan. Kompleks chastotalar Myuller usuli bilan sonli topilgan. Sonli natijalar jadval ko‘rinishda keltirilgan.

Kalit so‘zlar: silindrik qobiq, xos tebranish, suyuqlik, kompleks chastotalar, Myuller usuli.

ХАРАКТЕРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ, ЗАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Аннотация. В данной работе решена задача о собственных колебаниях цилиндрических оболочек с однородной жидкостью в деформируемой среде с учётом физико-механических свойств материала. Комплексные частоты находятся численно методом Мюллера. Результаты численных расчётов представлены в табличной форме.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, собственные колебания, жидкость, комплексные частоты, метод Мюллера.

CHARACTERISTIC OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL LAYER FILLED WITH AN IDEAL FLUID IN AN ELASTIC MEDIUM

Abstract. This paper solves the problem of natural vibrations of cylindrical shells containing a homogeneous fluid in a deformable medium, taking into account the physical and mechanical properties of the material. Complex frequencies are found numerically using the Muller method. The results of the numerical calculations are presented in tabular form.

Keywords: cylindrical shell, natural oscillations, liquid, complex frequencies, Muller method.

Kirish. To‘lqin dinamikasining masalalarining qo‘yilishi elastiklik nazariyasi, tutash muhitlar mexanikasi va qovushqoqlik nazariyasining qonunlari va tenglamalariga, matematik fizika tenglamalarining yechish usullariga asoslanadi. Bu masalalarni qo‘yishda cheksizlikda Zommerfeldning yutilish sharti qo‘yiladi [1,2]. Yerosti quvurlarini uzunligi, qolgan o‘lchamlaridan bir necha barobar katta bo‘lganligi sababli ko‘pgina ishlarda [3,4,5] qo‘yilgan masalalar elastiklik nazariyasining tekis deformatsiya holati masalalariga olib kelinib yechiladi. [6] ishda ko‘ndalang kesimi halqa ko‘rinishda bo‘lgan quvur masalasi, Vinkler asosli inersiyasiz va inersiyali halqani hisoblashga olib kelingan. Qo‘yilgan masalalarning xususiy hosilali differensial tenglamalari ko‘chish potentsiallari orqali ifodalanib, Gelmgols tenglamasiga olib kelinib yechilgan va halqani statsionar holati o‘rganilgan. Masalani bunday yechish usulini V.D. Kupradze o‘tgan asrning 30-yillarida tavsiya etgan. To‘lqin uzunligi quvur radisudan katta bo‘lgan hollar uchun Dashevskiy M.A. limit

(to‘lqin uzunligiga nisbatan) holati “Releyning statik yaqinlashi”, ya’ni kvazistatik yechimni tavsiya etgan. Muhit bilan aloqada bo‘lgan silindrik, sferik va boshqa ko‘rinishdagi jismlarga elastik to‘lqin difraksiyasi masalalarini A.N. Guzya, V.D. Kubenko va M.A. Cherevko ishida keltirilgan. Bu ishda elastik muhitda joylashgan tekis deformatsiya holatida bo‘lgan silindrik jismga R - va SV -tekis garmonik to‘lqinlar ta’siridagi statsionar to‘lqin maydoni o‘rganilgan. Xuddi shunday plastinka silindrik teshiklardan tashkil topgan masalalar ham ko‘rilgan. Qo‘yidagi [7,8] elastik muhitda joylashgan absolyut qattiq sirpanuvchi kontakli silindrik jismni ko‘ndalang SV to‘lqin bilan o‘zaro ta’sirini o‘rgangan. Elastik muhitda joylashgan bitta bo‘shliq yoki jismga (silindrik, sferik, eliptik va parabolik ko‘rinishdagi) bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqin difraksiyasi masalalari I.X. Pao va S.S. Maoning fundamental ishida xam keltirilgan. Bu yerda keltirilgan masalalar matematik fizikaning maxsus funksiyalari yordamida yechiladi. Xuddi shunday turg‘un bo‘lmagan bo‘ylama to‘lqin ta’siridagi silindrik qobiqning atrofidagi turg‘un bo‘lmagan jarayon o‘rganilgan. Ko‘rilgan masalalarning sonli natijalari olingan va tahlil etilgan [9,10]. Qattiq silindrik jismdagi bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqin bilan o‘zaro ta’siri parametrlarga bog‘liq o‘rganilgan.

Masalaning qo‘yilishi. Silindrik qobiq va uni o‘rab turgan muhit uzun bo‘lganligi sababli, o‘rganilayotgan masalani elastiklik nazariyasining tekis deformatsiya masalasiga olib kelish mumkin. U holda harakat differensial tenglamasi silindrik kordinatalar sistemasida beriladi. U holda ko‘chishlar bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqin potentsiallari orqali quyidagicha ifodalanadi[8]:

$$U_{rk} = \frac{\partial f_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_k}{\partial \theta}, \quad U_{qk} = \frac{1}{r} \frac{\partial f_k}{\partial \theta} + \frac{\partial y_k}{\partial r}, \quad k=1,2. \quad (1)$$

Bo‘ylama va ko‘ndalang potentsiallar Φ_k, Ψ_k lar to‘lqin tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_k &= \frac{1}{c_{k1}^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \Psi_k &= \frac{1}{c_{k2}^2} \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

bunda $c_{k1}^2 = (\lambda_k + 2\mu_k) / \rho_k, c_{k2}^2 = \mu_k / \rho_k$.

Uning harakat tenglamasi elastiklik nazariyasining tekis masalasi uchun Kirxgof-Lyav gipotezasini qanoatlantiradi va quyidagi ko‘rinishni egallaydi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{R^2}{B} x_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} + b^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + w \right) + w &= \frac{R^2}{B} x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

bunda

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sigma_{r\theta} \Big|_{r=R} - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x_2 = -\sigma_{rr} \Big|_{r=R} - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ b^2 &= \frac{h_0^2}{12R^2}; \quad B = \frac{E_0 h_0}{1 - \nu_0^2}; \\ \sigma_{r\theta} \Big|_{r=R} &= \mu_c \left\{ 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \right\} \Big|_{r=R} \\ \sigma_{rr} \Big|_{r=R} &= \left\{ \lambda_c \nabla^2 \varphi + 2\mu_c \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \Big|_{r=R} \quad (4) \\ \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

Bunda R - qobiqning o‘rta sirt radiusi, ρ_0 - qobiq zichligi, ν_0 -qobiqning Puasson koeffitsiyenti, E_0 - qobiqning elastiklik moduli, σ_{rr} va $\sigma_{r\theta}$ - muhitning qobiqqa ko‘rsatadigan normal va urinma kuchlanishlarni tashkil etuvchilari. Muhit va qobiq orasidagi kontakt sharti, ko‘chish va kuchlanishlarni tenglik sharti hisoblanadi :

$$u|_{r=R} = u_\theta|_{r=R}, \quad w|_{r=R} = u_r|_{r=R} \tag{5}$$

Sirpanuvchi kontakt sharti uchun

$$w|_{r=R} = u_r|_{r=R}, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0. \tag{6}$$

Differensial tenglamalar sistemasi (2) va (3) ning yechimi $r \rightarrow \infty$ da quyidagi shartni qanoatlantiradi [6]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{r}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + i\alpha \phi \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{r}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + i\beta \psi \right) = 0 \tag{7}$$

bunda α va β to'liqlinlar soni,

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_1^2 = (\lambda_c + 2\mu_c) / \rho_c, \quad c_2^2 = \mu_c / \rho_c$$

To'liqlin tenglamasining yechimini (2) va (3) quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n(R) \sin n\theta e^{-i\alpha r} \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(R) \cos n\theta e^{-i\alpha r} \\ \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) \cos n\theta e^{-i\alpha r} \\ \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r) \sin n\theta e^{-i\alpha r} \end{aligned} \tag{8}$$

bunda $\omega = \omega_R + i\omega_I$ - kompleks xos chastota; $V_n(R), W_n(R)$ - ko'chishning amplituda funksiyasi; $\phi_n(r), \psi_n(r)$ - ko'chish potentsiallarini amplituda funksiyasi bo'lib, Gelmgols tenglamalarini qanoatlantiradi:

$$\nabla^2 \phi_n + \alpha^2 \phi_n = 0, \quad \nabla^2 \psi_n + \beta^2 \psi_n = 0$$

Gelmgols tenglamalarini yechimlari Xankelning 1- va 2- jinsli funksiyasi orqali ifodalanadi:

$$\phi_n = A_{n1} H_n^{(1)}(\alpha r) + B_{n1} H_n^{(2)}(\alpha r), \quad \psi_n = A_{n2} H_n^{(1)}(\beta r) + B_{n2} H_n^{(2)}(\beta r), \tag{10}$$

bunda A_{ni} ($j=1, 2$) va B_{ni} - ixtiyoriy o'zgarmlar bo'lib (5) va (6)

chegaraviy shartlardan topiladi; $H_n^{(1)}(K_i r), H_n^{(2)}(K_i r)$ - Xankelning 1- va 2 - jinsli n -chi tartibli funksiyasi [7]. Yuqorida keltirilgan (10) yechimni tahlil qilamiz. Quyidagi xususiy yechimni ko'ramiz:

$$\phi_n = \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha r} H_0^{(1)}(\alpha r) \right]. \tag{11}$$

Bu funksiyani argumenti r -ning katta qiymatlarida $H_0^{(1)}(\alpha r)$ funksiyasi uchun qo'yidagi asimptotik formula o'rinni bo'ladi [5]

$$H_0^{(1)}(\alpha r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \left[1 + O(r^{-1}) \right] \tag{12}$$

Bu yerda $O(r^\alpha)$ bilan u kattalikning shunday munosabati belgilanganki,

$r \rightarrow \infty$ intilganda $\frac{y}{r^{\alpha k}}$ nisbat chegaralanganligini saqlaydi. (11) va (12) munosabatlarni hisobga

olsak, u holda

$$\phi = \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} e^{i(\alpha r - \frac{\pi}{4} - \alpha t)} \cdot [1 + O(r^{-1})] \right] = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot [1 + O(r^{-1})].$$

Bu funksiya $r \rightarrow \infty$ intilganda s tezlik bilan jismdan uzoqlashuvchi to'liqlinni ifodalay ekan. [7] dan foydalanilsa, xuddi shunday (11) yechimdagi ikkinchi hadni ham fizik ma'nosini ko'rsatish mumkin

$\phi_2 = \operatorname{Re} [e^{-i\alpha r} H_0^{(2)}(cr)]$. Bu had cheksizlikdan jismga yaqinlashuvchi to'liqinni ifodalaydi. Agar $r \rightarrow \infty$ Zommerfeldning yutilish shartidan foydalanilsa, u holda $B_{n1} = B_{n2} = 0$ bo'ladi. Misol sifatida cheksiz elastik muhitda joylashgan mustahkamlanmagan bo'shliqni tebranishlarini ko'ramiz. U holda $r=R$ kuchlanishlardan ozod bo'lish sharti qo'yiladi, ya'ni

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0. \quad (13)$$

Agar (10) ni (11) hisobga olib (13) chegaraviy shart qo'yilsa, u holda kompleks koeffitsiyentli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun, uning noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan asosiy aniqlovchi nolga teng bo'lishi kerak. Asosiy aniqlovchining elementlari kompleks parametr ω ning funksiyasi hisoblanadi. Bu munosabatdan kompleks parametr ω ni aniqlash uchun qo'yidagicha chastota tenglamasini olamiz:

$$D_n = xH_{n-1} [(n^2 - 1)yH_{n-1}(y) - (n^3 - n + y^2/2)H_n(y)] - H_n(x) [(n^3 - n + y^2/2)yH_{n-1}(y) - (n^2 + n - y^2/4)y^2H_n(y)] = 0, \quad (14)$$

bunda $x = \alpha R(\rho/(\lambda + 2\mu))^{1/2}$; $y = \alpha R(\rho/\mu)^{1/2}$, λ va μ -Lamye koeffitsiyentlari; ρ - material zichligi. Yuqoridagi (14) tenglamani qiyin bo'lmagan almashtirishlardan so'ng quyidagi ko'rinishdagi transcendent tenglamaga olib kelamiz:

$$(n^2 - 1)F(x)F(y) - (y^2/2)F(x) + F(y) + n^2 - (n^2 - y^2/2)^2 = 0, \quad (15)$$

bunda $F(x) = xH'_n(x)/H_n(x)$, $n=1,2,3\dots$ Kompleks parametrli chastota tenglamasi (15) Myuller usuli yordamida yechiladi [8]. Bu transcendent tenglama (15) ni ildizlari ikki qismdan iborat. Haqiqiy ($\operatorname{Re} \Omega$) va mavhum ($\operatorname{Im} \Omega$) qismlar Kompleks chastotaning haqiqiy qismi mexanik sistemani tebranishlar chastotasini ifoda qilsa, mavhum qismi esa dempirlash koeffitsiyentini ifodalay ekan (so'ndirish koeffitsiyenti) [11,12]. Hisoblash natijalari $n \geq 0$ ($\nu_1 = 0,25$) 1- jadvalga keltirilgan.

1 -jadval.

Kompleks chastotani n ga nisbatan o'zgarishi

	n=0	n=1	n=2	n=3
	0,4529D+00 -i0,47651D+00	0,10927D+01 -i0,76538D+00	0,19075D+01 -i0,89782D+00	0,27565D+01 -i0,99155D+00
			0,28621D+00 -i0,17852D+00	0,72325D+01 -i0,32283D+01
			0,404607D+00 -i0,178552D+00	0,12307D+00 -i0,22283D+00

2 -jadval.

Natijalarni taqqoslash ($\nu = 0,25$)

No	Muallifning natijasi	Pao va Mao	Bnron va Parnes
1	1,09272-0,77653 i	1.09272-0.7653 i	1.0929-0.441 i
2	1,907554-0,89782 i	1.90754-0.8978 i	1.9076-0.897 i
3	2,75652-0,99151	2.75652-0.9915 i	
4	3,63132-1,06662 i	3.63132-1.0666 i	
5	4.52440-1.13140 i	4.52440-1.1314 i	

Xulosa. Jadvaldagi natijalarni tahlilidan n ni ortib borishi bilan kompleks chastotaning haqiqiy va mavhum qismlari ham ortib borar ekan. Chastota tenglamasi (15) faqat Puasson koeffitsiyentiga (ν) bog'liq bo'lar ekan. Puasson koeffitsiyentining qiymati $0 \leq \nu \leq 0,4$ oraliqda o'zgarganda chastotaning haqiqiy va mavhum qismlari 27% gacha o'zgarishi topildi. Silindrik bo'shliq uchun olingan ($\nu_1 = \nu_2$, $\rho_1 = \rho_2$, $E_1 = E_2$) natijalar (2 -jadval) verguldan keyingi to'rtinchi raqamidan boshlab ustma-ust tushadi ($N=25$, $\nu = 0,25$). Chastotaning xos sonlarning haqiqiy va mavhum qismlari qattiq mahkamlanganlik va sirpanuvchanlik shartlarida 15% gacha farq qilinishi topildi. Qobiq qalinligini oshishi ham xos sonlarni haqiqiy va mavhum qismlarini 20% gacha oshirishi mumkin ekan.

ADABIYOTLAR:

1. Каюмов С.С., Сафаров И.И. *Распространение и дифракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических системах.* Ташкент: ФАН, 2002г, 214с
2. Новаский В. *Теория упругости.*-М.: Мир, 1975 .-872с.
3. Сафаров И.И., Умаров А.О. *Воздействие продольных и поперечных волн на цилиндрические слои с жидкостью // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014 Вып.3(26). с. 69-75*
4. Сафаров И.И. *Колебания и волны в диссипативно-неоднородных средах и конструкциях.*-Ташкент: Фан, 1992. - 250 с.
5. Сафаров И.И., Ахмедов М.Ш., Умаров А.О. *Динамические напряжения и смещения вблизи цилиндрической подкреплённой полости от плоской гармонической волны // Ежемесячный научный журнал «Просперо»(Новосибирск) 2014,№3 с. 57-61.*
6. Сафаров И.И., Жумаев З.Ф., Рашидов М. *Колебания упругого полупространства с цилиндрическими преградами при воздействии поверхностной волны. // Проблемы механики, №6. г.Ташкент: 2003. -с.11-14.*
- 7.Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Ахмедов М.Ш. *Напряжённно-деформированные состояния тонкостенных трубопроводов. LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbruceren Dentschland /Germany/ -2015 - 335с.*
- 8.Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Киличев О. *Динамические напряжённные состояния тонкостенных трубопроводов. LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbruceren Dentschland /Germany/-2015 - 230с.*
- 9.Собиров М.И. *Задачи взаимодействия упругих волн с цилиндрическими сооружениями, находящимися в деформируемой среде.// Автореф. дис.... канд. техн. наук. – Т. 1993. -19с.*
10. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами /Под.ред. Абрамовса М. и Стигана И. М., М.: 1979. -830 с.*
11. Zdanchuk E., Lalin V. *The theory of continuum medium with free rotation without coupled stresses // Proc. of the XXXVIII Summer School - Conference advanced problems in mechanics. SPb, 2010. Pp. 771-775.*
12. Yoshizaki K., Rouke T. O., Hamada M. *Large scale experiments of buried steel pipelines with elbows subjected to permanent ground deformation // Structural Eng. Earthquake Eng., JSCE. 2003.*

ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО ИНДЕКСА

Мирсабурова Гулбахор Мирахматовна,
доцент кафедры “Математика” Университета
Ренессанс, Ташкент, Узбекистан
mirsaburovagulbahor26@gmail.ru

Аннотация. В статье полученные методом регуляризации Карлемана-Векуа сингулярные интегральные уравнения с нефредгольмовым оператором в правой части сведены к интегральному уравнению Винера-Хопфа, и доказано, что индекс интегрального уравнения Винера-Хопфа равен нулю. Также интеграл Фурье, который встречается при вычислении индекса интегрального уравнения Винера-Хопфа, вычисляется с помощью теории вычетов, теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: регулярный оператор, гипергеометрическая функция, интеграл, формула Больца, уравнение Винера-Хопфа, нефредгольмовый оператор, преобразования Фурье.

WINER-HOPF INTEGRAL TENGLAMASI VA UNING INDEKSINI HISOBLASH

Annotatsiya. Ushbu maqolada Karleman-Vekua tartibga solish usulidan foydalanib, o‘ng tomonda Fredgolm bo‘lmagan operatorga ega olingan singulyar integral tenglamalar Wiener-Hopf integral tenglamasiga keltirildi va Wiener-Hopf integral tenglamasining indeksi isbotlandi. Shuningdek, Viner-Hopf integral tenglamasining indeksini hisoblashda yuzaga keladigan Furiye integrali qoldiq nazariyasi, kompleks o‘zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi yordamida hisoblanadi.

Kalit so‘zlar: regular operator, gipergeometrik funktsiya, integral, Bolza formulasi, Viner-Hopf tenglamasi, Fredgolm bo‘lmagan operatorlar, Furiye o‘zgarishlari.

DERIVATION OF THE WIENER-HOPF INTEGRAL EQUATION AND CALCULATION OF ITS INDEX

Abstract. In this article, using the Carleman-Vekua regularization method, the obtained singular integral equations with a non-Fredholm operator on the right-hand side are reduced to the Wiener-Hopf integral equation and it is proved that the index of the Wiener-Hopf integral equation is equal to zero. Also, the Fourier integral, which occurs when calculating the index of the Wiener-Hopf integral equation, is calculated using residue theory, the theory of functions of a complex variable.

Key words: regular operator, hypergeometric function, integral, Bolza formula, Wiener-Hopf equation, non-Fredholm operators, Fourier transforms.

Введение. Первые фундаментальные исследования для уравнения смешанного типа были выполнены итальянским математиком Ф.Трикоми. После этой работы теория задач для вырождающихся гиперболических, эллиптических уравнений и уравнений смешанного типа развивалась в фундаментальных исследованиях зарубежных учёных Э.Холмгрена, С.Геллерстедта и из отечественных учёных существенный вклад в развитие теории уравнений смешанного типа внесли в своих работах М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураев, Р.Р.Ашурова и Б.Исломова [2].

Для дальнейшего развития теории краевых задач для уравнений смешанного типа важное место заняла работа (задача со смещением) А.М.Нахушева, где в гиперболической части нелокальное условие поточечно связывает значения искомого решения на обеих характеристиках.

Рассмотрим уравнение:

$$\tau(x) = \cos^2 \alpha \pi g_0(x) + \frac{\sin 2\alpha \pi}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2} \right)^\alpha \left(\frac{1-cx}{1-ct} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) g_0(t) dt, \quad x \in (-1, c). \quad (1)$$

Теорема. Задача TF ($-m/2 < \beta_0 < 1$) при выполнении условий $a(x) = b(x) = a = const$,

$$\lambda \pi k^{\frac{1}{2}-\alpha} \mu(c) \cos \alpha \pi < 1, \quad (*)$$

однозначно разрешима, где $\lambda = \cos \beta \pi / \pi(1 + \sin \beta \pi)$.

Доказательство. Исследуем соотношение (1) и, подставляя выражение для $g_0(x)$ из

$$g_0(x) = -\lambda \int_{-1}^c \frac{p'(s) \mu(s) \tau(s) ds}{p(s) - x} + R[\tau] + F_1(x), \quad x \in (-1, c) \text{ в (1), имеем:}$$

$$\tau(x) = \cos^2 \alpha \pi \left[-\lambda \int_{-1}^c \frac{p'(s) \mu(s) \tau(s) ds}{p(s) - x} + R[\tau] + F_1(x) \right] +$$

$$\times \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \left[-\lambda \int_{-1}^c \frac{p'(s) \mu(s) \tau(s) ds}{p(s) - t} + R[\tau] + F_1(t) \right] dt, \quad x \in (-1, c). \quad (2)$$

Выделив характеристические части в уравнении (2), преобразуем его к виду:

$$\tau(x) = -\lambda \cos^2 \alpha \pi \int_{-1}^c \frac{p'(s) \mu(s) \tau(s) ds}{p(s) - x} -$$

$$-\lambda \frac{\sin 2\alpha \pi}{2\pi} \int_{-1}^c \mu(s) \tau(s) ds \int_{-1}^c \left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \frac{p'(s)}{p(s)-t} dt +$$

$$+ R_1[\tau] + F_2(x), \quad (3)$$

где

$$R_1[\tau] = \cos^2 \alpha \pi R[\tau] -$$

$$-\frac{\lambda \sin \alpha \pi}{2\pi} \int_{-1}^c \mu(s) \tau(s) ds \int_{-1}^c \left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2} \right)^\alpha \left[\left(\frac{1-cx}{1-ct} \right)^\alpha - 1 \right] \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \frac{p'(s)}{p(s)-t} dt +$$

$$+\frac{\sin 2\alpha \pi}{2\pi} \int_{-1}^c \left(\frac{(c-x)(1-cx)(1+x)^2}{(c-t)(1-ct)(1+t)^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) R[\tau] dt$$

-регулярный оператор,

$$F_2(x) = \cos^2(\alpha \pi) F_1(x) +$$

$$+\frac{\sin(2\alpha \pi)}{2\pi} \int_{-1}^c \left(\frac{(c-x)(1-cx)(1+x)^2}{(c-t)(1-ct)(1+t)^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) F_1(t) dt \quad (4)$$

-известная функция.

Уравнение (3), с учётом равенства $p(x) = \delta - kx$, перепишем в виде:

$$\tau(x) = \lambda k \cos^2(\alpha \pi) \int_{-1}^c \frac{\mu(s) \tau(s) ds}{\delta - ks - x} +$$

$$+\lambda k \frac{\sin(2\alpha \pi)}{2\pi} \int_{-1}^c \mu(s) \tau(s) ds \int_{-1}^c \left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \frac{dt}{\delta - ks - t} +$$

$$+ R[\tau] + F_2(x), \quad x \in (-1, c). \quad (5)$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$A(x, s) = \int_{-1}^c \frac{(c-x)^\alpha (1+x)^{2\alpha}}{(c-t)^\alpha (1+t)^{2\alpha}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \frac{dt}{\delta - ks - t}. \quad (6)$$

Рациональный множитель подынтегрального выражения разложим на простые дроби:

$$\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt} \right) \frac{1}{\delta - ks - t} = \frac{1}{\delta - ks - x} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{\delta - ks - t} \right) + \frac{1}{1 - \delta x + kx s} \left(\frac{x}{1-xt} - \frac{1}{\delta - ks - t} \right)$$

и с учётом этого разложения получим:

$$A(x,s) = \frac{(c-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{\delta-ks-x} (T_1(x)+T_2(s)) + \frac{(c-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{1-\delta x+ks} (xT_3(x)-T_2(s)), \quad (7)$$

где

$$T_1(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{(c-t)^\alpha(1+t)^{2\alpha}(t-x)}, \quad x \in (-1, c), \quad (8)$$

$$T_2(s) = \int_{-1}^s \frac{dt}{(c-t)^\alpha(1+t)^{2\alpha}(\delta-ks-t)}, \quad s \in (-1, c), \quad (9)$$

$$T_3(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{(c-t)^\alpha(1+t)^{2\alpha}(1-xt)}, \quad x \in (-1, c). \quad (10)$$

Вычислим интегралы $T_1(x)$, $T_2(s)$, $T_3(x)$:

$$T_1(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int_{-1}^x \frac{dt}{(c-t)^\alpha(1+t)^{2\alpha}(x-t)^{1-\delta}} + \int_x^c \frac{dt}{(c-t)^\alpha(1+t)^{2\alpha}(t-x)^{1-\delta}} \right]. \quad (11)$$

В первом и втором интегралах правой части (11) сделав замену переменного интегрирования $t = -1 + (1+x)\sigma$, $t = c - (c-x)\sigma$, соответственно, получим:

$$T_1(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \frac{(1+c)^{-\alpha}}{(1+x)^{2\alpha-\delta}} \int_0^1 \sigma^{-2\alpha} (1-\sigma)^{\delta-1} \left(1 - \frac{1+x}{1+c} \sigma\right)^{-\alpha} d\sigma + \frac{(1+c)^{-2\alpha}}{(c-x)^{\alpha-\delta}} \int_0^1 \sigma^{-\alpha} (1-\sigma)^{\delta-1} \left(1 - \frac{c-x}{1+c} \sigma\right)^{-2\alpha} d\sigma \right],$$

отсюда, используя интегральное представление гипергеометрической функции [50] получим:

$$T_1(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \frac{(1+c)^{-\alpha}}{(1+x)^{2\alpha-\delta}} \frac{\Gamma(1-2\delta)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-2\alpha+\delta)} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1-2\alpha+\delta; \frac{1+x}{1+c}\right) + \frac{(1+c)^{-2\alpha}}{(c-x)^{\alpha-\delta}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-\alpha+\delta)} F\left(1-\alpha, 2\alpha, 1-\alpha+\delta; \frac{c-x}{1+c}\right) \right]. \quad (12)$$

К (12), применяя формулу автотрансформации [1, с.10]

$$F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c, x), \quad (13)$$

имеем:

$$T_1(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \frac{(1+c)^{-\alpha}}{(1+x)^{2\alpha-\delta}} \frac{\Gamma(1-2\delta)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-2\alpha+\delta)} \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^{\delta-\alpha} F\left(\delta, 1-3\alpha+\delta, 1-2\alpha+\delta; \frac{1+x}{1+c}\right) + \frac{(1+c)^{-2\alpha}}{(c-x)^{\alpha-\delta}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\delta)}{\Gamma(1-\alpha+\delta)} \left(\frac{1+x}{1+c}\right)^{\delta-2\alpha} F\left(\delta, 1-3\alpha+\delta, 1-\alpha+\delta; \frac{c-x}{1+c}\right) \right].$$

Применяя формулу Больца к первому слагаемому правой части последнего равенства:

$$F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1; 1-z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} \times F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z), \quad c-a-b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \quad (14)$$

преобразуем его к виду:

$$T_1(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{(1+c)^{\delta-\alpha}(c-x)^{\delta-\alpha}}{(1+x)^{2\alpha-\delta}} F\left(\delta, 1-3\alpha+\delta, 1-\alpha+\delta; \frac{c-x}{1+c}\right) \Gamma(\delta) \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\delta)} - \frac{\Gamma(\alpha-\delta)}{\Gamma(\alpha)} \right) - \right]$$

$$-\frac{(1+c)^{-\alpha}}{(1+x)^{2\alpha-\delta}} \frac{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(1-3\alpha+\delta)} F\left(1-2\alpha, \alpha, \alpha-\delta+1; \frac{c-x}{1+c}\right) \Bigg]. \quad (15)$$

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma(\delta) \left(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+\delta)} - \frac{\Gamma(\alpha-\delta)}{\Gamma(\alpha)} \right) &= \\ = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma(1+\delta) \frac{\pi(\sin(\alpha-\delta)\pi - \sin\alpha\pi)}{\delta \sin\alpha\pi \sin(\alpha-\delta)\pi \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+\delta)} &= -\pi \operatorname{ctg}\alpha\pi. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь в (15), переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, с учётом (16), окончательно получим:

$$T_1(x) = -\frac{\pi \operatorname{ctg}\alpha\pi}{(1+x)^{2\alpha}(c-x)^\alpha} + \frac{(1+c)^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)(1+x)^{2\alpha}} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{1+c}\right). \quad (17)$$

В интегралах $T_2(s)$, $T_3(x)$ сделав замену переменного интегрирования $t = -1 + (1+c)\sigma$, $t = c - (1+c)\sigma$, соответственно, нетрудно вычислить, что

$$T_2(s) = \frac{(1+c)^{1-3\alpha}\Gamma(1-2\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)(1+\delta-ks)^{1-\alpha}(\delta-ks-s)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{1+c}{1+\delta-ks}\right), \quad (18)$$

$$T_3(x) = \frac{(1+c)^{1-3\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)(1-cx)^{1-2\alpha}(1+x)^{2\alpha}} F\left(1-2\alpha, 1-3\alpha, 2-2\alpha; -\frac{(1+c)x}{1-cx}\right). \quad (19)$$

Теперь выражения для $T_1(x)$, $T_2(s)$, $T_3(x)$ из (7), (8) и (9) подставляя в (7), получим:

$$\begin{aligned} A(x,s) &= \frac{(c-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{\delta-ks-x} \left[-\frac{\pi \operatorname{ctg}\alpha\pi}{(1+x)^{2\alpha}(c-x)^\alpha} + \right. \\ &+ \frac{(1+c)^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)(1+x)^{2\alpha}} F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{1+c}\right) + \\ &\left. + \frac{(1+c)^{1-3\alpha}\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma(2-3\alpha)(1+\delta-ks)^{1-\alpha}(\delta-ks-c)^\alpha} F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{1+c}{1+\delta-ks}\right) \right] + B_0(x,s), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$B_0(x,s) = \frac{(c-x)^\alpha(1+x)^{2\alpha}}{1-\delta x+ks} (xT_3(x) - T_2(s)).$$

Теперь (20) подставляя в (5), получим:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \lambda k \left(\cos^2(\alpha\pi) - \frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi} \pi \operatorname{ctg}(\alpha\pi) \right) \int_{-1}^1 \frac{\mu(s)\tau(s)ds}{\delta-ks-x} + \\ &+ \frac{\lambda k^{1-\alpha} \sin 2\alpha\pi (1+c)^{1-3\alpha} \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{2\pi \Gamma(2-3\alpha)} \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2\alpha}}{(1+\delta-ks)^{1-\alpha}} \times \\ &\times F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha; \frac{1+c}{1+\delta-ks}\right) \left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha \frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x} + R_2[\tau] + F_2(x), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\cos^2(\alpha\pi) - \frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi} \pi \operatorname{ctg}(\alpha\pi) = 0$

$$\begin{aligned} R_2[\tau] &= R_1[\tau] + \frac{\lambda k \sin 2\alpha\pi (1+c)^{-\alpha} \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)}{\alpha\Gamma(1-3\alpha)} \times \\ &\times F\left(1-2\alpha, \alpha, 1+\alpha; \frac{c-x}{1+c}\right) \int_{-1}^1 \frac{(c-x)^\alpha \tau(s)ds}{\delta-ks-x} + \frac{\lambda k \sin 2\alpha\pi}{2\pi} \int_{-1}^1 B_0(x,s) \mu(s) \tau(s) ds \end{aligned} \quad (22)$$

-регулярный оператор.

Выделив характеристическую часть уравнения в (21), с учётом тождества

$\left(\cos^2(\alpha\pi) - \frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi} \pi \operatorname{ctg}(\alpha\pi)\right) = 0$, преобразуем его к виду:

$$\tau(x) = \lambda k^{1-\alpha} \cos \alpha\pi \int_{-1}^{\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha} \frac{\tau(s) ds}{\delta - ks - x} + R_3[\tau] + F_2(x), \quad x \in (-1, c), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} R_3[\tau] = & R_2[\tau] + \lambda k^{1-\alpha} \sin(\alpha\pi) \int_{-1}^{\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha} \frac{\mu(s) - \mu(c)}{\delta - ks - x} \tau(s) ds + \\ & + \frac{\lambda k^{1-\alpha} \sin 2\alpha\pi (1+c)^{1-3\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-2\alpha)}{2\pi \Gamma(2-3\alpha)} \int_{-1}^{\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha} \left[\frac{(1+x)^{2\alpha}}{(1+\delta-ks)^{1-\alpha}} \times \right. \\ & \left. \times F\left(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha, \frac{1+c}{1+\delta-ks}\right) - \frac{(1+c)^{2\alpha}}{(1+c)^{1-\alpha}} F(1-\alpha, 1-3\alpha, 2-3\alpha, 1) \right] \frac{\mu(s) \tau(s) ds}{\delta - ks - x}. \end{aligned}$$

регулярный оператор.

Учитывая тождество $\delta - kc + c = 0$, уравнение (23) преобразуем к виду:

$$\tau(x) = \lambda k^{1-\alpha} \mu(c) \cos \alpha\pi \int_{-1}^{\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^\alpha} \frac{\tau(s) ds}{(c-s)(k+(c-x)/(c-s))} + R_3[\tau] + F_2(x), \quad x \in (-1, c). \quad (24)$$

В уравнении (24), сделав замену переменных $s = c - (1+c)e^{-t}$, $x = c - (1+c)e^{-y}$ и введя обозначение $\rho(y) = \tau[c - (1+c)e^{-y}] e^{(\frac{\alpha-1}{2})y}$, получим:

$$\rho(y) = \lambda k^{1-\alpha} \mu(c) \cos \alpha\pi \int_0^y \frac{\rho(t) dt}{k e^{(y-t)/2} + e^{-(y-t)/2}} + R_4[\rho] + F_3(y), \quad (25)$$

где $R_4(\rho) = R_3[\tau] e^{(\frac{\alpha-1}{2})y}$ -регулярный оператор, $F_3(y) = F_2(x) e^{(\frac{\alpha-1}{2})y}$ -известная функция.

Введя обозначение $K(x) = \frac{1}{k e^{x/2} + e^{-x/2}}$, уравнение (25) запишем в виде:

$$\rho(y) = \lambda k^{1-\alpha} \cos \alpha\pi \int_0^y K(y-t) \rho(t) dt + R_4[\rho] + F_3(y) \quad y \in [0, +\infty). \quad (26)$$

Производная функции $K(x)$ непрерывна и имеет показательный порядок убывания на бесконечности, поэтому $K(x) \in L_2 \cap H_\alpha = \{0\}$ [8, с.12].

Уравнение (26) является интегральным уравнением Винера-Хопфа. [3, с. 55], это уравнение с помощью преобразования Фурье, подобно известному характеристическому особому интегральному уравнению с ядром Коши, приводится к краевой задаче Римана и тем самым решается в квадратурах.

Если сингулярность ядра Коши $\frac{1}{t-x}$ заключается в разрыве при $t=x$, то сингулярность ядра $K(t-x)$ интегрального уравнения типа свертки вызвана неограниченностью промежутка интегрирования, и это ядро, в отличие от регулярного ядра, не убывает, если двигаться к бесконечности вдоль прямых $t=x+const$.

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки будут выполняться лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю.

Индексом уравнения (26) будет индекс выражения:

$$1 - \lambda k^{1-\alpha} \mu(c) \cos \alpha\pi K^\wedge(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (27)$$

взятый с обратным знаком: $\chi = -\operatorname{Ind}(1 - K^\wedge(x))$ [8, с.56], где

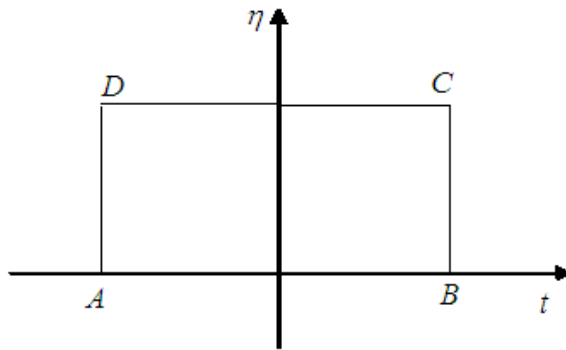
$$K^{\wedge}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}}. \quad (28)$$

Интеграл Фурье (28) вычислим с помощью теории вычетов по определению несобственного интеграла:

$$K^{\wedge}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N, \quad (29)$$

$$J_N = \int_{-N}^N \frac{e^{ix} dt}{ke^{t/2} + e^{-t/2}}. \quad (30)$$

На комплексной плоскости $z = t + i\eta$ рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A = A(-N, 0)$, $B = B(N, 0)$, $C = C(N, 4\pi)$, $D = D(-N, 4\pi)$.



Внутри четырёхугольника $ABCD$ функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{ke^{z/2} + e^{-z/2}}$ имеет только две особые точки-полюсы $z_0 = -\ln k + \pi i$ и $z_1 = -\ln k + 3\pi i$.

По теореме о вычетах, интеграл по контуру прямоугольника $ABCD$ равен

$$\int_L \frac{e^{iz} dz}{ke^{z/2} + e^{-z/2}} = 2\pi i (\text{res } f(z_0) + \text{res } f(z_1)). \quad (31)$$

Легко проследить, что

$$\begin{aligned} ke^{z/2} + e^{-z/2} &= e^{-z/2}(1 + ke^z) = e^{-z/2}(1 + i\sqrt{k}e^{z/2})(1 - i\sqrt{k}e^{z/2}) = \\ &= e^{-z/2}(1 - e^{z/2}e^{\ln(-i\sqrt{k})})(1 - e^{z/2}e^{\ln i\sqrt{k}}) = e^{-z/2}(1 - e^{z/2 + \ln\sqrt{k} - \frac{\pi}{2}i})(1 - e^{z/2 + \ln\sqrt{k} - \frac{3\pi}{2}i}) = \\ &= e^{-z/2}(e^{\frac{z-z_0}{2}} - 1)(e^{\frac{z-z_1}{2}} - 1), \end{aligned} \quad (32)$$

отсюда

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{e^{-\pi x} e^{-ix \ln k}}{i\sqrt{k}}, \quad (33)$$

$$\text{res } f(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{-e^{-3\pi x} e^{-ix \ln k}}{i\sqrt{k}}. \quad (34)$$

В силу (33) и (34), из (31) имеем:

$$\int_{L=AB \cup BC \cup CD \cup DA} \frac{e^{iz} dz}{ke^{z/2} + e^{-z/2}} = \frac{2\pi e^{ix \ln k}}{\sqrt{k}} (e^{-\pi x} - e^{-3\pi x}),$$

или

$$\left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) \frac{e^{iz} dz}{ke^{z/2} + e^{-z/2}} = \frac{2\pi e^{-ix \ln k}}{\sqrt{k}} (e^{-\pi x} - e^{-3\pi x}). \quad (35)$$

Здесь на сторонах четырёхугольника

$$AB: y=0, -N \leq x \leq N, \quad BC: x=N, 0 \leq y \leq 4\pi,$$

$$CD: y=4\pi, -N \leq x \leq N, \quad DA: x=-N, 0 \leq y \leq 4\pi.$$

Первый интеграл левой части (35) равен J_N . В третьем интеграле $z=x+4\pi i$ и с учётом, что функции $e^{z/2}$, $e^{-z/2}$ периодичны с периодом $4\pi i$, заключаем, что третий интеграл равен $-e^{-4\pi i} J_N$.

Во втором и четвёртом интегралах, соответственно, $z=N+i\eta$ и $z=-N+i\eta$, $0 \leq \eta \leq 4\pi$, для подынтегральных функций имеет место следующая оценка:

$$\left| \frac{e^{ix}}{ke^{z/2} + e^{-z/2}} \right| \leq \left| \frac{e^{A\pi}}{ke^{\frac{\pm N+i\eta}{2}} + e^{\frac{\pm N+i\eta}{2}}} \right|.$$

Из этой оценки нетрудно убедиться, что второй и четвёртый интегралы стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, имеем:

$$K^\wedge(x)(1-e^{-4\pi x}) = \frac{2\pi e^{-ix \ln k}}{\sqrt{k}} (e^{-\pi x} - e^{-3\pi x}),$$

или

$$K^\wedge(x) = \frac{\pi e^{-ix \ln k}}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x}. \quad (36)$$

Теперь вычислим индекс выражения

$$1 - \lambda k^{1-\alpha} \mu_4(c) \cos \alpha \pi K^\wedge(x). \quad (37)$$

В силу условия теоремы, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\lambda k^{1-\alpha} \mu_4(c) \cos \alpha \pi K^\wedge(x) \right) &= \lambda k^{1-\alpha} \mu_4(c) \cos \alpha \pi \frac{\pi \cos x \ln k}{\sqrt{k} \operatorname{ch} \pi x} \leq \\ &\leq \frac{\lambda k^{1-\alpha} \pi \cos \alpha \pi}{\sqrt{k}} < 1. \end{aligned}$$

Причём $\operatorname{Re} K^\wedge(x) = O(1/\operatorname{ch}(\pi x))$ для достаточно больших $|x|$. Отсюда получим:

$$\operatorname{Re}(1 - \lambda k^{1-\alpha} \mu_4(c) \cos \alpha \pi K^\wedge(x)) > 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ind}(1 - \lambda k^{1-\alpha} \cos \alpha \pi K^\wedge(x)) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(1 - K^\wedge(x))}{\operatorname{Re}(1 - K^\wedge(x))} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

т.е. изменение аргумента $1 - \lambda k^{1-\alpha} \cos \alpha \pi K^\wedge(x)$ на действительной оси, выраженное в полных оборотах, равно нулю [3, с.28], отсюда и из единственности решения задачи TF вытекает однозначная разрешимость уравнения (26), а, значит, и задачи TF . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970. -296 с.
2. Мирсабурова Гулбахор. М. Объединённая задача Трикоми и задача со смещением для уравнения Геллерстедта // Известия вузов. Математика. 2012. № 9. С. 32-46.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.Н. Уравнения типа свёртки. М.: Наука. 1978. 269 с.

FRIDRIXS MODELLARI OILASIGA MOS FREDGOLM DETERMINANTINING ASOSIY XOSSALARI

*Umirqulova Gulhayo Husniddin qizi,
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston
g.h.umirqulova@buxdu.uz*

***Annotatsiya.** Ushbu maqolada bir o'lchamli panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operatorlarning spektral xossalari o'rganishda muhim bo'lgan chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma Fridrixs modellari oilasi qaralgan. Uning Fredgolv determinantini qurilgan. Fredgolv determinantining yoyilmasi, monotonlik xossasi hamda yana bir qancha asosiy xossalari tahlil qilingan.*

***Kalit so'zlar:** zarrachalar sistemasi, model operator, Hilbert fazo, Fridrixs modeli, muhim spektr, xos qiymat, diskret spektr, Fredgolv determinantini.*

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЕТЕРМИНАНТА ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА МОДЕЛЕЙ ФРИДРИХСА

***Аннотация.** В данной статье рассматривается семейство линейных, ограниченных и самосопряжённых моделей Фридрихса, которое играет важную роль при исследовании спектральных свойств операторов модели, соответствующих системе из трёх частиц на одномерной решётке. Построен детерминант Фредгольма. Проанализированы его разложение, монотонные свойства и ряд других ключевых характеристик.*

***Ключевые слова:** система частиц, оператор модели, гильбертово пространство, модель Фридрихса, существенный спектр, собственное значение, дискретный спектр, детерминант Фредгольма.*

MAIN PROPERTIES OF THE FREDHOLM DETERMINANT FOR A FAMILY OF FRIEDRICHS MODELS

***Abstract.** This paper studies a family of linear, bounded, and self-adjoint Friedrichs models, which play a crucial role in analyzing the spectral properties of model operators corresponding to a three-particle system on a one-dimensional lattice. The Fredholm determinant is constructed. Its expansion, monotonicity, and several other fundamental properties are analyzed.*

***Keywords:** particle system, model operator, Hilbert space, Friedrichs model, essential spectrum, eigenvalue, discrete spectrum, Fredholm determinant.*

Kirish. Zamonaviy matematik fizikaning dolzarb yo'nalishlaridan biri uch zarrachali kvant sistemalarining matematik modellarini o'rganishdir. Bunday sistemalar uchun panjaradagi model operatorlarining spektral xususiyatlarini o'rganish, nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan o'rganish ham alohida ahamiyat kasb etadi. Shu sababli, Fridrixs modellari oilasining muhim va diskret spektrlarini, shuningdek, xos qiymatlarning soni, joylashuvi va mavjudlik shartlarini o'rganish dolzarb hisoblanadi. Panjaraviy modellar ko'plab ishlarda o'rganilgan, xususan to'rt zarrachali Shryodinger operatori [1] maqolada, ikkita Fridrixs modelining tenzor yig'indisi [2] maqolada, umumlashtirilgan Fridrixs modeli [3] ishda o'rganilgan. Ushbu ishlarda Fridrixs modeli va uning umumlashtirilgan shakllarining xos qiymatlari tahlil qilingan.

Bundan tashqari [4] maqolada qo'zg'alish operatori ikki o'lchamli Fredgolv integral operatori bo'lgan Fridrixs modeli tadqiq qilingan. Uning Fredgolv determinantini qurilgan va monoton emasligi isbotlangan. Fridrixs modeli xos qiymatlarining soni, joylashuv o'rni va mavjudlik shartlari topilgan. Bu natijalar panjaradagi lokal bo'lmagan potentsialga ega uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator muhim spektrining ikki va uch zarrachali tarmoqlarining joylashuv o'rni, tuzilishi va uni tashkil qiluvchi kesmalar sonini aniqlash imkonini bergan.

[5] maqolada uch o'lchamli panjaradagi ikkita bir xil zarrachalar sistemasiga mos keluvchi ikkita chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan bir o'lchamli qo'zg'alishga ega Fridrixs modellari oilasi o'rganilgan. Muhim spektrdan chapda yotuvchi xos qiymatlarning mavjudlik shartlari topilgan.

Fridriks modellari oilasi uchun bo'sag'aviy xos qiymat va nol energiyali rezonansning mavjudlik shartlari tahlil qilingan. Fredgolm determinanti uchun asimptotik yoyilma topilgan. Olingan natijalar panjaradagi uchta bir xil zarrachalar sistemasiga mos model operator xos qiymatlari sonining chekli yoki cheksiz ekanligini ko'rsatishda hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula topishda qo'llanilgan.

[6] maqolada d – o'lchamli panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model Hamiltonian Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida o'rganilgan. Bu model Hamiltonianga mos ikkita kanal operatorlar aniqlangan va bu operatorlarning spektrlari Fridriks modellari oilasining spektri orqali tavsiflangan. Model Hamiltonianning muhim spektri ikkita kanal operatorlar spektrlari birlashmasiga teng bo'lishi isbotlangan.

[7] maqolada kompakt qo'zg'alishli Fridriks modelining spektral xossalari o'rganilgan. Xususan, uning muhim spektri topilgan, muhim spektr absolyut uzluksiz spektr bo'la olmasligini ko'rsatuvchi $U(\cdot, \cdot)$ parametr funksiyaga misol keltirilgan. Qo'zg'alish operatorining musbat operator ekanligi isbotlangan va uning musbat kvadrat ildizi topilgan. Nollari to'plami qaralayotgan Fridriks modelining diskret spektri bilan ustma-ust tushuvchi Fredgolm determinanti umumiy holda qurilgan. Fridriks modeli uchun olingan natijalar panjaradagi uch zarrachali model operator muhim spektrining joylashuv o'rnini aniqlashda qo'llanilgan.

Mazkur maqolada Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan Fridriks modellari oilasi Fredgolm determinantining asosiy xossalari tahlil qilingan bo'lib, Fridriks modeli uchun quyidagi natijalar olingan: Veyl teoremasi yordamida muhim spektri o'rganilgan. Muhim spektrdan chapda joylashgan xos qiymatlar soni haqida ma'lumot berilgan hamda Fredgolm determinanti uchun asimptotik yoyilma olingan.

Panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator. $T := (-\pi; \pi]$ orqali bir o'lchamli torni belgilaymiz.

Mazkur maqolada T^2 to'plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) simmetrik funksiyalarning Hilbert fazosi bo'lgan $L_2^S(T^2)$ fazoda

$$H_{\mu, \lambda}^{(\gamma)} := H_0^{(\gamma)} - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3 \quad (1)$$

tenglik orqali ta'sir qiluvchi Hamiltonianni qaraymiz. Bunda $\mu, \lambda > 0$ ta'sirlashish parametrlari, $H_0^{(\gamma)}$ qo'zg'almas operator $E_\gamma(\cdot, \cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$\begin{aligned} (H_0^{(\gamma)} f)(x, y) &= E_\gamma(x, y)f(x, y), \\ E_\gamma(x, y) &:= \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x + y), \\ \varepsilon(x) &:= 1 - \cos x. \end{aligned}$$

$V_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$ operatorlar lokal bo'lmagan potensial operatorlari bo'lib, quyidagi ko'rinishdagi xususiy integrallari operatorlardir:

$$\begin{aligned} (V_1 f)(x, y) &= \sin(y) \int_T \sin(t) f(x, t) dt, \\ (V_2 f)(x, y) &= \sin(x) \int_T \sin(t) f(t, y) dt, \\ (V_3 f)(x, y) &= \int_T f(t, x + y - t) dt. \end{aligned}$$

Ta'kidlash lozimki, $L_2^S(T^2)$ Hilbert fazosidagi ixtiyoriy f va g elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(f, g) = \int_{T^2} f(x, y) \overline{g(x, y)} dx dy \quad (2)$$

kabi, $f \in L_2^S(T^2)$ element normasi esa

$$\|f\| = \left(\int_{T^2} |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

(1) tenglik yordamida ta'sir qiluvchi $H_{\mu, \lambda}^{(\gamma)}$ operator $L_2^S(T^2)$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligi funksional analiz kursidan ma'lum bo'lgan mos ta'rif va teoremlar hamda (2), (3) tengliklar yordamida tekshiriladi. Odatda bu operatorga panjaradagi uchta zarrachalar sistemasiga mos model operator deyiladi. Qaralayotgan model operator uch zarrachali diskret Shryodinger operator uchun o'rinli bo'lgan ayrim xossalarga ega. Shu sababli bunday modellarning spektral xossalari o'rganish zamonaviy matematik fizikada muhim hisoblanadi.

Fridriks modellari oilasiga mos Fredgolm determinanti. Ishning asosiy natijasini bayon qilish

maqsadida $L_2(T)$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma Fridriks modellari oilasini qaraymiz:

$$h_\mu^{(\gamma)}(k) := h_0^{(\gamma)}(k) - \mu v,$$

bunda $h_0^{(\gamma)}(k)$ operator $E_\gamma(\cdot, \cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori:

$$\left(h_0^{(\gamma)}(k)f\right)(x) = E_\gamma(k, x)f(x), \quad f \in L_2(T),$$

v operator esa lokal bo‘lmagan potensial operator:

$$(vf)(x) = \sin(x) \int_T \sin(t)f(t)dt.$$

Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorning muhim spektri $h_0^{(\gamma)}(k)$ operatorning muhim spektri bilan ustma–ust tushadi va quyidagi

$$\sigma_{ess}\left(h_\mu^{(\gamma)}(k)\right) = [m_\gamma(k); M_\gamma(k)]$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda

$$m_\gamma(k) := \min_{x \in T} E_\gamma(k, x), \quad M_\gamma(k) := \max_{x \in T} E_\gamma(k, x)$$

Har bir fiksirlangan $\mu, \gamma > 0$ sonlari va $k \in T$ element uchun $C \setminus [m_\gamma(k); M_\gamma(k)]$ sohada analitik bo‘lgan

$$\Delta_\mu^{(\gamma)}(k, z) := 1 - \mu \int_T \frac{\sin^2(t)dt}{E_\gamma(k, x) - z}$$

yordamchi funksiyalarni kiritamiz.

Xususiyatiga ko‘ra $\Delta_\mu^{(\gamma)}(k, \cdot)$ funksiyaga $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorga mos Fredgolm determinanti deyiladi.

Fridriks modellari oilasiga mos Fredgolm determinantining xossalari.

1-lemma. Har bir fiksirlangan $k \in T$ element va $\mu, \gamma > 0$ sonlari uchun $C \setminus [m_\gamma(k); M_\gamma(k)]$ soni $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun $\Delta_\mu^{(\gamma)}(k, z) = 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorning diskret spektri uchun

$$\sigma_{disc}\left(h_\mu^{(\gamma)}(k)\right) = \left\{z \in C \setminus [m_\gamma(k); M_\gamma(k)]: \Delta_\mu^{(\gamma)}(k, z) = 0\right\}$$

tenglik o‘rinlidir.

$h_\mu^{(\gamma)}(k)$ Fridriks modellari oilasining xos qiymatlarini tahlil qilishda muhim bo‘lgan lemmani keltiramiz.

2-lemma. Har bir fiksirlangan $\mu, \gamma > 0$ va $k \in T$ lar uchun $\Delta_\mu^{(\gamma)}(k; \cdot)$ funksiya $(-\infty; m_\gamma(k))$ va $(M_\gamma(k); +\infty)$ oraliqlarda monoton kamayuvchi funksiyadir.

Isbot. $\Delta_\mu^{(\gamma)}(k; \cdot)$ Fredgolm determinanti uchun

$$\frac{d}{dz} \Delta_\mu^{(\gamma)}(k; z) = \frac{d}{dz} \left(1 - \mu \int_T \frac{\sin^2(t)dt}{E_\gamma(k, t) - z}\right) = -\mu \int_T \frac{\sin^2(t)dt}{(E_\gamma(k, t) - z)^2}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Yuqoridagi tenglikdan ko‘rinib turibdiki, ixtiyoriy $z \in (-\infty; m_\gamma(k)) \cup (M_\gamma(k); +\infty)$ sonlari uchun

$$\frac{d}{dz} \Delta_\mu^{(\gamma)}(k; z) < 0$$

munosabat bajariladi. Bu esa $\Delta_\mu^{(\gamma)}(k; \cdot)$ funksiyaning $(-\infty; m_\gamma(k))$ va $(M_\gamma(k); +\infty)$ oraliqlarda monoton kamayuvchi funksiya ekanligini bildiradi.

Lemma to‘liq isbotlandi.

3-lemma. Har qanday o‘zgarmas $\mu, \gamma > 0$ va $k \in T$ sonlari uchun $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ Fridriks modeli $m_\gamma(k)$ nuqtadan chapda ko‘pi bilan bitta oddiy xos qiymatga ega va $M_\gamma(k)$ nuqtadan o‘ngda xos qiymatga ega emas.

Har qanday $\gamma > 0$ soni uchun $E_\gamma(\cdot, \cdot)$ funksiyaning yagona global minimumi $(0, 0) \in T^2$ nuqtada erishiladi va uning qiymati nolga teng. Shuning uchun quyidagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi:

$$E_\gamma(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_\gamma(0,0)}{\partial^2 x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 E_\gamma(0,0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 E_\gamma(0,0)}{\partial^2 y^2} y^2 \right) + o(x^2) + o(y^2)$$

ya'ni $x, y \rightarrow 0$ bo'lganda yuqoridagi tenglik bajariladi. Shu sababli, shunday $C_1(\gamma), C_2(\gamma) > 0$ o'zgaras sonlar va $\delta_\gamma > 0$ soni mavjud bo'lib, quyidagilar munosabatlar bajariladi:

$$C_1(\gamma)(x^2 + y^2) \leq E_\gamma(x, y) \leq C_2(\gamma)(x^2 + y^2), (x, y) \in (-\delta_\gamma; \delta_\gamma) \times (-\delta_\gamma; \delta_\gamma), \quad (4)$$

$$E_\gamma(x, y) \geq C_1(\gamma), (x, y) \notin (-\delta_\gamma; \delta_\gamma) \times (-\delta_\gamma; \delta_\gamma). \quad (5)$$

(4), (5) tengsizliklar va $x \rightarrow 0$ bo'lganda $\sin x \sim x$ asimptotik munosabatga tayangan holda, quyidagi integral

$$\int_T \frac{\sin^2(t) dt}{E_\gamma(k, t)}$$

har qanday $\gamma > 0$ va $k \in T$ sonlar uchun musbat va chekli bo'lishini hosil qilamiz. Shuning uchun integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasiga ko'ra $\Delta_\mu^{(\gamma)}(0; 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \Delta_\mu^{(\gamma)}(k; 0)$ tenglik bajariladi,

ya'ni $\Delta_\mu^{(\gamma)}(\cdot; 0)$ funksiya T torda uzluksiz.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\mu_\gamma^0 = (1 + \gamma) \left(\int_T \frac{\sin^2(t) dt}{\varepsilon(t)} \right)^{-1}$$

Aniqlanishiga ko'ra faqat $\mu = \mu_\gamma^0$ munosabat bajarilganda $\Delta_\mu^{(\gamma)}(0; 0) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Endi Fridriks modellarining $k = 0$ bo'lgandagi xos qiymatlari haqidagi teoremani keltiramiz.

1-teorema. Agar $0 < \mu \leq \mu_\gamma^0$ bo'lsa, u holda $h_\mu^{(\gamma)}(0)$ operator xos qiymatga ega emas, ixtiyoriy $\mu > \mu_\gamma^0$ soni uchun $h_\mu^{(\gamma)}(0)$ operator yagona manfiy xos qiymatga ega.

2-bo'limda kiritilgan $H_{\mu, \lambda}^{(\gamma)}$ model operatorning xos qiymatlari sonini o'rganishda muhim bo'lgan teorema va undan kelib chiqadigan natijani bayon qilamiz.

2-teorema. Faraz qilaylik, $\mu, \gamma > 0$ o'zgaras sonlar bo'lsin. Quyidagi yoyilma

$$\Delta_\mu^{(\gamma)}(k; z) = \Delta_\mu^{(\gamma)}(0; 0) + \frac{2\mu\pi(1 + 2\gamma - \gamma^2)}{(1 + \gamma)^2 \sqrt{1 + 2\gamma}} \sqrt{k^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{1 + 2\gamma} z} + o(k^2) + o(\sqrt{|z|})$$

$x \rightarrow 0$ va $z \rightarrow -0$ bo'lganda bajariladi.

2-natija. Shunday $C_1(\gamma), C_2(\gamma) > 0$ va $\delta_\gamma > 0$ sonlari topilib

$$C_1(\gamma)|k| \leq \left| \Delta_{\mu_\gamma^0}^{(\gamma)}(k; 0) \right| \leq C_2(\gamma)|k|, k \in U_{\delta_\gamma}(0)$$

qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xulosa. Ushbu maqolada bir o'lchamli panjaradagi ikki zarrachali Sistema Hamiltonianiga mos $h_\mu^{(\gamma)}(k)$, $\mu, \gamma > 0$, $k \in T$ Fridriks modellari oilasi qaralgan. Bunda $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operator $L_2(T)$ Hilbert fazosidagi chiziqli, chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator sifatida aniqlangan. Dastlab $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorning muhim va diskret spektrlari topilgan. $h_\mu^{(\gamma)}(k)$ operatorga mos Fredgolm determinantining monotonlik xossasi isbotlangan. Bu operator muhim spektrdan chapda ko'pi bilan bitta, o'ngda esa xos qiymatlarga ega emasligi ko'rsatilgan. $k = 0$ bo'lgan holda xos qiymatning mavjudlik shartlari topilgan. Fredgolm determinant uchun asimptotik yoyilma olingan hamda $z = 0$ bo'lgan holda baholash topilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Albeverio S., Lakaev S.N., and Abdullaev J.I. *Functional Analysis and Its Applications* 36, (2002), pp. 212–216.
2. Rasulov T.H., Bahronov B.I. *Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. Nanosystems: Phys. Chem. Math.*, 14:2 (2023), pp. 151–157 (Scopus).
3. Dilmurodov E.B. *New branches of the essential spectrum of a 2×2 operator matrix. Uzbek Mathematical Journal* 2, (2020), 44-52.

4. Расулов Т.Х. О существенном спектре одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 3 (24), С. 42–51.
5. Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical particles. *Reports on Mathematical Physics*. 63:3 (2009), pp. 359–380.
6. Umirqulova G.H. Panjaradagi uch zarrachali sistemaga mos model gamiltonianning muhim spektrining tavsifi. *O‘zMU xabarlari, Toshkent*, 2024, 118-127 b.
7. Расулов Т.Х., Рахмонов А.А. Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра одного трёхчастичного модельного оператора. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 2(23), С. 170–180.
8. Расулов Т.Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке. *Теоретическая и математическая физика*. 163:1 (2010), С. 34–44.
9. Bahronov B.I., Rasulov T.H. On the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation: threshold analysis technique. *AIP Conference Proceedings*.2764 (2023), pp. 03007: 1–10 (Scopus)
10. Umirqulova G.H. Panjaradagi uch zarrachali sistema gamiltonianiga mos kanal operatorlar. *Ilm sarchashmalari, №11* (2022), 3-7 b.

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ВАЙНБЕРГА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Тошева Наргиза Ахмедовна,
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
n.a.tosheva@buxdu.uz*

Аннотация. В данной статье рассматривается семейство операторных матриц третьего порядка, действующих на обрезанном трёхчастичном подпространстве пространства Фока. Эта матрица соответствует системе частиц на решётке, число которых не сохраняется и не превышает трёх. Описан существенный спектр заданной операторной матрицы, и найдены её двух- и трёхчастичные ветви. Построено уравнение Вайнберга, соответствующее собственным вектор-функциям.

Ключевые слова: пространства Фока, прямая сумма, операторная матрица, существенный спектр, собственная вектор-функция, уравнения Вайнберга.

ANALOGUE OF THE WEINBERG EQUATION FOR A FAMILY OF OPERATOR MATRICES OF THE THIRD ORDER

Abstract. In this paper, we consider a family of operator matrix of order three acting on the three-particle truncated subspace of Fock space. This matrix corresponds to a system of particles on the lattice whose number is not conserved and does not exceed three. The essential spectrum of a given operator matrix is described and its two- and three-particle branches are found. The Weinberg equation corresponding to the eigenvector functions is constructed.

Key words: Fock space, direct sum, operator matrix, essential spectrum, eigen-vector-function, Weinberg equation.

UCHINCHI TARTIBLI OPERATOR MATRITSALAR OILASI UCHUN VAYNBERG TENGLAMASINING ANALOGI

Annotatsiya. Ushbu maqolada Fok fazosining qirqilgan uch zarrachali qism fazosida ta'sir qiluvchi uchinchi tartibli operatorli matritysalar oilasi qaralgan. Bu matritya panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos keladi. Berilgan operatorli matrityaning muhim spektri tavsiflangan va uning ikki hamda uch zarrachali tarmoqlari topilgan. Xos funksiyalarga mos Vaynberg tenglamasi qurilgan.

Kalit so'zlar: Fok fazosi, to'g'ri yig'indi, operatorli matritya, muhim spektr, xos vektor funktsiya, Vaynberg tenglamasi.

Введение. Исследования, посвящённые спектральной теории семейства матричных операторов в обрезанном подпространстве фоковского пространства, были проведены такими учёными, как Х. Шпон, И. М. Сигал, А. Софер, В. Бах, Р. А. Минлос, Ю. В. Жуков, Х. Нейдхардт, С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов, М. Э. Муминов и многими другими.

В настоящее время задача исследования числа собственных значений семейства операторных матриц является одним из глубоко изучаемых объектов теории блочных операторных матриц. Одной из основных проблем спектрального анализа таких операторов является изучение существования конечного или бесконечного числа собственных значений, расположенных слева от их существенного спектра.

Существование бесконечного числа собственных значений впервые было исследовано В. Н. Ефимовым для системы из трёх частиц и впоследствии получило название эффект Ефимова. Строгое математическое доказательство существования данного эффекта впервые было приведено Д. Р. Яфаевым. В дальнейшем существование эффекта Ефимова для трёхчастичного непрерывного оператора Шрёдингера изучалось Ю. Н. Овчинниковым, И. М. Сигалом, Х. Тамурой, А. В. Соболевым и другими учёными.

В физике твёрдых тел, а также в теории решёточных полей появляются операторы, называемые **дискретными операторами Шрёдингера**, которые представляют собой решёточные аналоги непрерывного трёхчастичного оператора Шрёдингера в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d .

Впервые С. Н. Лакаевым было строго доказано с математической точки зрения существование эффекта Ефимова для систем трёх произвольных и трёх одинаковых частиц, попарно взаимодействующих контактным образом на трёхмерной решётке.

В работах С. Н. Лакаева, С. Альбеверии, Ж. И. Абдуллаева и З. Э. Муминова были получены асимптотические выражения по спектральным параметрам K и z для числа собственных значений $N(K, z)$, лежащих левее точки z , трёхчастичного дискретного оператора Шрёдингера.

В работе М. Э. Муминова доказано существование бесконечного числа собственных значений в спектральной лакуны гамильтониана, соответствующего системе трёх произвольных частиц в решётке.

В работе Ю. Х. Эшкобилова доказано существование эффекта Ефимова для дискретного оператора Шрёдингера трёхчастичной модели, возникающей в модели Хаббарда. При этом использованы методы минимаксного принципа для самосопряжённых ограниченных операторов и свойства положительных интегральных операторов.

В работах С. Н. Лакаева, С. Альбеверии и Т. Х. Расулова доказано существование эффекта Ефимова для матричного оператора третьего порядка, а также исследована асимптотическая формула для числа собственных значений. В работе Х. Нейдхардта, М. Муминова и Т. Расулова с использованием результатов, полученных для матричных операторов третьего порядка, подробно изучен спектр спин-бозонной модели на решётке с не более чем двумя фотонами. В работах М. Э. Муминова и Т. Х. Расулова найдены условия существования бесконечного числа собственных значений внутри (в лакуне) или слева от существенного спектра для матричных операторов данного типа.

В работах Т. Х. Расулова и Э. Б. Дилмуродова доказано существование двухстороннего эффекта Ефимова для матричного оператора второго порядка, связанного с системой частиц, число которых не сохраняется и не превышает трёх.

В этих исследованиях уравнение Фаддеева важно для доказательства бесконечности числа собственных значений и вывода асимптотической формулы для дискретного спектра. Уравнение Вайнберга также можно использовать, чтобы показать, что число собственных значений конечно. В данной статье рассматривается построение уравнения Вайнберга для семейства операторных матриц третьего порядка.

Пространства Фока и операторные матрицы. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримое множество, $X^n = X \times X \times \dots \times X$ декартово произведение $L_2(X^n)$ — это пространство Гильберта, состоящее из функций, определённых и квадратично-интегрируемых (в общем случае принимающих комплексные значения) на множестве X^n .

Введём следующие обозначения.

$$\begin{aligned} H_0 &= C; \\ H_n &= L_2(X^n), \quad n=1,2,\dots; \\ H &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i; \\ H^{(N)} &= \bigoplus_{i=0}^N H_i. \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \|f\|_0 &= |f_0|; \\ \|f_i\|_i &= \sqrt{\int_{X^i} |f_i(t)|^2 dt}, \quad i \in N. \end{aligned}$$

В этом случае получается $H = \{f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \mid \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|_i^2 < \infty, f_i \in H_i, i=0,1,2,\dots\}$,

$$H^{(N)} = \{f = (f_0, f_1, \dots, f_N) : \sum_{i=0}^N \|f_i\|_i^2 < \infty, f_i \in H_i, i=0,1,2,\dots,N\}$$

Гильбертово пространство H называется пространством Фока.

Гильбертово пространство $H^{(N)}$ называется обрезанным подпространством пространства Фока.

В гильбертовых пространствах H и $H^{(N)}$ определим скалярное произведение двух элементов и норму элемента.

Скалярное произведение произвольных элементов $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots), g = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots) \in H$ определяется следующим образом:

$$(f, g)_H = \sum_{n=0}^{\infty} (f, g)_{H_n}.$$

Здесь через $(\cdot, \cdot)_{i_n}$ обозначено скалярное произведение, определённое в гильбертовом пространстве H_n , и

$$\begin{aligned} (f_0, g_0)_0 &= f_0 \overline{g_0}; \\ (f_n, g_n)_n &= \int_{X^n} f_n(s) \overline{g_n(s)} ds, \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

Для произвольных элементов $f = (f_0, f_1, \dots, f_N), g = (g_0, g_1, \dots, g_N) \in H^{(N)}$ выполняется следующее равенство:

$$(f, g)_{H^{(N)}} = \sum_{n=0}^N (f_n, g_n)_n.$$

Норма произвольного элемента $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots) \in H$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_H = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_n^2}$$

Любой линейный ограниченный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H , представляется следующим образом:

$$A = (A_{i,j})_{i,j}^{\infty} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Здесь $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i, i, j=0,1,2,\dots$ — линейные, ограниченные операторы.

В современной математической физике операторы A_{ij} называются несмещаемыми (или неподвижными) операторами.

Если выполняется условие $i < j$, то операторы A_{ij} называются «операторами уничтожения».

Если выполняется данное условие $i > j$, то такие операторы A_{ij} называются «операторами рождения».

Если рассмотреть линейный, ограниченный оператор $A_{\leq N}$ в гильбертовом пространстве $H^{(N)}$, то его вид будет следующим:

$$A_{\leq N} = (A_{ij})_{i,j}^N = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0N} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N0} & A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор A_{ij} и оператор $i, j=0,1,2,\dots,N$ являются линейными ограниченными

операторами.

Если для произвольных элементов $f=(f_0, f_1, f_2)$, $g=(g_0, g_1, g_2) \in H^{(2)}$ выполняется условие

$$A_{\underline{2}}(f+g)=A_{\underline{2}}f+A_{\underline{2}}g$$

то оператор $A_{\underline{2}}$ называется аддитивным оператором.

Если для всех элементов $f=(f_0, f_1, f_2) \in H^{(2)}$ и для всех чисел α выполняется равенство

$$A_{\underline{2}}(\alpha f)=\alpha A_{\underline{2}}f$$

то оператор $A_{\underline{2}}$ называется однородным оператором.

Операторы, которые являются аддитивными и однородными, называются линейными операторами.

Аналог уравнения Вайнберга для семейства операторных матриц третьего порядка. Через \mathbb{C} обозначим одномерное комплексное пространство, через $T^V = [-\pi, \pi]$ V -мерный тор, а через $L_2(T^V)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (в общем случае комплекснозначных) функций, определённых на T^V а через $L_2((T^V)^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) симметричных функций, определённых на $(T^V)^2$. В этом случае, для $L_2^s((T^V)^2)$ имеет место равенство $f_2(p, q) = f_2(q, p)$ при всех $p, q \in T^V$.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbb{C}; \\ H_1 &= L_2(T^V); \\ H_2 &= L_2^s((T^V)^2); \\ H &= H_0 \oplus H_1 \oplus H_2. \end{aligned}$$

Гильбертово пространство H называется обрезанным трёхчастичным подпространством фоковского пространства.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим трёхдиагональную блочно-операторную матрицу 3×3 , задаваемую соотношением:

$$A(K) := \begin{pmatrix} A_{00}(K) & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_1(K) & A_2 \\ 0 & A_2^* & A_{22}(K) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Здесь операторы $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 0, 1, 2$ действуют согласно следующим равенствам:

$$\begin{aligned} A_{00}(K)f_0 &= v_0(K)f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{T^V} v_0(t)f_1(t)dt; \\ (A_1(K)f_1)(p) &= w_1(K; p)f_1(p), \quad (A_2f_2)(p) = \int_{T^V} v_1(t)f_2(pt)dt; \\ (A_{22}(K)f_2)(p, q) &= w_2(K; p, q)f_2(p, q), \quad f_i \in H_i, \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

A_{ij}^* ($i < j$) сопряжённый оператор к оператору A_{ij} а функции $v_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ вещественнозначные ограниченные функции на T^V , а функции $w_1(\cdot; \cdot)$ и $w_2(\cdot; \cdot)$ определены равенствами:

$$\begin{aligned} w_1(K; p) &:= l_1 \varepsilon \left(\frac{K}{2} - p \right) + l_2 \left(\frac{K}{2} + p \right) + \lambda, \\ w_2(K; p, q) &:= l_1 \varepsilon \left(\frac{K}{3} + p \right) + l_1 \varepsilon \left(\frac{K}{3} + q \right) + l_2 \varepsilon \left(\frac{K}{3} - p - q \right), \end{aligned}$$

соответственно, $\lambda, l_1, l_2 > 0$ и

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^3 \left(-\cos(nq^{(i)}) \right), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in T^3, \quad n \in \mathbb{N}$$

При таких условиях, наложенных на параметры, оператор $A(K)$, действующий в гильбертовом пространстве H по формуле (1), является линейным, ограниченным и самосопряжённым оператором.

Пусть

$$m(p) = \min_{p, q \in T^v} \omega_2(p, q); \quad M(p) = \max_{p, q \in T^v} \omega_2(p, q)$$

Заметим, что операторная матрица $A(K)$ связана с гамильтонионом системы с несохраняющимся и не более трёх частиц на решётке.

Рассмотрим следующую функцию:

$$\Delta(p, z) = l_2 \varepsilon(k) + 1 - z - \frac{1}{2} \int_{T^v} \frac{v_1^2(t) dt}{E_k(t) - z},$$

регулярную в области $C \setminus [m(p), M(p)]$.

Введём следующие обозначения: через

$$m = \min_{p, q \in T^v} \omega_2(p, q); \quad M = \max_{p, q \in T^v} \omega_2(p, q).$$

Через σ обозначим множество тех точек $z \in C$, для которых при некотором $p \in T^v$ выполняется $\Delta(p, z) = 0$.

Для существенного спектра оператора $A(K)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(A(K))$ оператора $A(K)$ справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(A(K)) = [m(p); M(p)] \cup \sigma$. Множество σ состоит из объединения не более двух отрезков.

Следует отметить, что множество σ и $[m(p); M(p)]$ называются двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра операторной матрицы $A(K)$, соответственно. Для каждого фиксированного числа $z \in C \setminus \sigma_{\text{ess}}(A(K))$ рассмотрим в гильбертовом пространстве 3×3 блочно-операторную матрицу, при этом

$$W_{A(K)}(z) = \begin{pmatrix} W_{00}(z) & W_{01}(z) & 0 \\ W_{10}(z) & W_{11}(z) & 0 \\ W_{20}(z) & W_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}$$

Матричные элементы определены следующим образом:

$$(W_{00}(z)f_0)_0 = (a_0(K) - z + 1)f_0$$

$$(W_{01}(z)f_1)_0 = \int_{T^v} v_0(s) f_1(s) ds$$

$$(W_{10}(z)f_0)_1 = -\frac{v_0(p)f_0}{\Delta(p, z)},$$

$$\Delta(p, z) = a_1(p, q) - z - \frac{1}{2} \int_{T^v} \frac{v_1^2(q) dq}{\omega_2(p, q) - z}$$

$$(W_{11}(z)f_1)_1(p) = \frac{1}{2} \frac{v_1(p)}{\Delta(p, z)} \cdot \int_{T^v} \frac{v_1(q) f_1(q)}{\omega_2(p, q) - z} ds$$

$$(W_{20}(z)f_0)_1(p, q) = \frac{v_1(p)}{2(\omega_2(p, q) - z)} \frac{v_0(q)f_0}{\Delta(q, z)} + \frac{v_1(p)}{2(\omega_2(p, q) - z)} \frac{v_0(p)}{\Delta(p, z)} f_0$$

$$(W_{21}(z)f_0)_2(p, q) = -\frac{v_1(p)}{4(\omega_2(p, q) - z)} \cdot \frac{v_1(q)}{\Delta(q, z)} \cdot \int_{T^v} \frac{v_1(p) f_1(p)}{\omega_2(q, p) - q} dp -$$

$$-\frac{v_1(p)}{4(\omega_2(p, q) - z)} \cdot \frac{v_1(p)}{\Delta(p, z)} \cdot \int_{T^v} \frac{v_1(q) f_1(q)}{\omega_2(p, q) - z} dq.$$

По определению операторы $W_{00}(z), W_{01}(z), W_{10}(z), W_{20}(z)$ являются одномерными.

Определение 1. Уравнение $f = W(z)f$, соответствующее собственным вектор-функциям

оператора $A(K)_{\mathbb{Z}}$, называется уравнением Вайнберга.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. Если число z является собственным значением оператора $A(K)$, а f — соответствующим ему собственным вектором, то вектор f удовлетворяет уравнению Вайнберга $W(z)f = f$.

Используя теорему 2, можно доказать, что число собственных значений операторной матрицы $A(K)$ конечно при некоторых естественных условиях, накладываемых на параметры.

Заключение. В данной работе проведено исследование спектральных свойств семейства операторных матриц третьего порядка, действующих на обрезанном трёхчастичном подпространстве пространства Фока. Получены условия, определяющие структуру существенного спектра, а также выделены и подробно изучены двух и трёхчастичные ветви спектра. На основе проведённого анализа построено уравнение Вайнберга, соответствующее собственным вектор-функциям операторной матрицы, что позволило описать поведение связанных состояний системы. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем изучении многочастичных квантовых систем на решётках и в задачах, связанных с теорией возбуждений и взаимодействий в моделях с переменным числом частиц.

ЛИТЕРАТУРА:

1. V.A. Malishev and R.A. Minlos, *Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs.* (American Mathematical Society, Providence, RI, 1995).
2. D.C. Mattis, *Reviews of Modern Physics*, 58(2), 361-379 (1986).

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Шарипова Мубина Шодмоновна,
Бухарский государственный университет
m.sh.sharipova@buxdu.uz

Аннотация. В статье исследуется 3×3 операторная матрица \mathcal{A}_μ , связанная с гамильтонианом системы трёх частиц на одномерной решётке. Для изучения спектра данной операторной матрицы рассмотрена обобщённая модель Фридрихса. На основе теоремы Вейля и метода определителя Фредгольма установлены свойства существенного спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ , и показано, что он может состоять не более чем из трёх отрезков. Дополнительно доказаны спектральные соотношения между операторной матрицей \mathcal{A}_μ и её блочными элементами.

Ключевые слова: операторная матрица, блочные элементы, спектральные соотношения, пространство Фока, существенный спектр, дискретный спектр.

RELATIONS FOR THE SPECTRUM OF A THIRD-ORDER OPERATOR MATRIX

Abstract. The paper investigates a 3×3 operator matrix \mathcal{A}_μ associated with the Hamiltonian of a system of three particles on a one-dimensional lattice. To study the spectrum of this operator matrix, a generalized Friedrichs model is considered. Based on Weyl's theorem and the Fredholm determinant method, the properties of the essential spectrum of the operator matrix \mathcal{A}_μ are established, and it is shown that it can consist of no more than three closed intervals. In addition, spectral relations between the operator matrix \mathcal{A}_μ and its block elements are proved.

Keywords: operator matrix, block elements, spectral relations, Fock space, essential spectrum, discrete spectrum.

UCHINCHI TARTIBLI OPERATOR MATRIXASI SPEKTRIMI UCHUN ALOQALAR

Annotatsiya. Ushbu maqolada bir o'lovli panjara ustidagi uch zarrachali tizimning Gamiltonian bilan bog'langan 3×3 operator matritsasi A_m ko'rib chiqiladi. Ushbu operator matritsasining spektrini o'rganish uchun umumlashtirilgan Fridrix modeli ko'rib chiqiladi. Veyl teoremasi va Fredgolm determinant usuli asosida A_m operator matritsasining muhim spektrining xossalari o'rnatilib, u uchtadan ko'p bo'lmagan segmentdan iborat bo'lishi mumkinligi ko'rsatilgan. Bundan tashqari, A_m operator matritsasi va uning blok elementlari orasidagi spektral munosabatlar isbotlangan.

Kalit so'zlar: operator matritsasi, blok elementlari, spektral munosabatlar, Fok fazo, muhim spektr, diskret spektr.

Введение. Известно, что под операторными матрицами понимаются матрицы, элементы которых являются линейными операторами, переводящими один банахов или гильбертово пространство в другое. Обычно такие матрицы встречаются в физике твёрдого тела [1], статистической физике [2], квантовой теории поля [3], а также во многих других областях современной математической физики. В качестве примера важных классов операторных матриц можно привести гамильтонианы систем с несохраняющимся числом частиц на евклидовом пространстве \mathbb{R}^d или на решётке \mathbb{Z}^d . При этом число частиц может быть либо неограниченным, как в модели спин-бозона [4, 5] либо ограниченным, как в усечённой модели спин-бозона [6, 7]. В первом случае возникают бесконечномерные операторные матрицы, а во втором — конечномерные операторные матрицы. Поэтому исследование спектральных свойств операторных матриц считается актуальной задачей.

Таким образом, изучение спектральных свойств операторных матриц важно не только с теоретической точки зрения, но и для анализа конкретных физических систем. В частности, существенный спектр гамильтонианов (матричных операторов) в пространстве Фока является одним из наиболее активно исследуемых объектов в теории операторов. Одной из важных задач

спектрального анализа этих операторов является описание расположения существенного спектра. Одним из известных методов изучения положения существенного спектра операторных матриц являются критерий Вейля и теорема Хунцикера-ван Винтера-Жислина (HWZ). С использованием этих методов во многих работах исследуется существенный спектр операторных матриц размерности 3×3 и 4×4 , см., например, [8-11]. В частности, в работе [11] описан существенный спектр 4×4 операторной матрицы через спектры соответствующих канальных операторов, а также доказана теорема HWZ. В [12] разработаны геометрические методы и методы коммутаторов для определения местоположения спектра и доказательства отсутствия сингулярного непрерывного спектра для гамильтонианов системы с несохраняющимся числом частиц.

Спектральные свойства операторных матриц и гамильтонианов систем с несохраняющимся числом частиц являются предметом интенсивных исследований. В работе [13] было проведено детальное изучение структуры существенного спектра гамильтониана в пространстве Фока, и получены результаты об асимптотике числа собственных значений ниже нижней границы спектра. Показано, что существенный спектр может быть описан через спектры вспомогательных операторов, а также установлено критерии существования конечного или бесконечного дискретного спектра.

В статье [14] исследовался эффект Эфимова, возникающий при наличии нулевого энергетического резонанса. Было доказано, что в этом случае в спектре возникает бесконечная последовательность собственных значений, накапливающихся к нижней границе существенного спектра. Данный результат подчёркивает важность учёта резонансных состояний при анализе дискретного спектра операторных матриц.

Особое место занимает работа [15], где рассматривается семейство 3×3 операторных матриц. Получено аналитическое описание существенного спектра, указана его интервальная структура и показано, каким образом блочные элементы и вспомогательные операторы определяют спектральные границы. Эта статья близка к настоящему исследованию как по объекту, так и по методам, и служит теоретической основой для дальнейших уточнений, включая доказательство ограниченности числа отрезков и установление связей между дискретным и существенным спектрами.

В данной работе рассматривается 3×3 операторная матрица \mathcal{A}_μ , зависящая от спектрального параметра $\mu > 0$, действующая в трёхчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Указанная матрица возникает при исследовании гамильтониана системы с несохраняющимся числом частиц, в которой допускается не более трёх частиц на одномерной решётке. Основное внимание уделяется описанию существенного спектра этой матрицы, для чего используются методы определителя Фредгольма и теорема Вейля о стабильности спектра. Наряду с этим исследуются спектральные соотношения между самой операторной матрицей \mathcal{A}_μ и её блочными элементами, что позволяет выявить взаимосвязь между дискретным и существенным спектрами и уточнить их структуру.

Существенный спектр операторной матрицы третьего порядка. Обозначим через $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ одномерный тор. Пусть $\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}$ - одномерное пространство комплексных чисел, $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T})$ - гильбертово пространство квадрато-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на \mathbb{T} и $\mathcal{H}_3 := L_2(\mathbb{T}^2)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на \mathbb{T}^2 . Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_3 , т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$. Обычно пространство \mathcal{H} называют трёхчастичным обрезанным подпространством пространства Фока $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}))$ над $L_2(\mathbb{T})$, т.е. $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}) \oplus L_2(\mathbb{T}^2) \oplus L_2(\mathbb{T}^3) \oplus \dots$.

Любой элемент $f \in \mathcal{H}$ имеет вид $f = (f_0, f_1, f_2)$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$, и его норма вычисляется по формуле:

$$\|f\| = (|f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}} |f_1(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{T}^2} |f_2(x, y)|^2 dx dy)^{1/2}.$$

Скалярное произведение в пространстве \mathcal{H} задаётся равенством

$$(f, g) = f_0 \overline{g_0} + \int_{\mathbb{T}} f_1(x) \overline{g_1(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} f_2(x, y) \overline{g_2(x, y)} dx dy,$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$, $g = (g_0, g_1, g_2) \in \mathcal{H}$.

Например, пусть заданы векторы:

$$\begin{aligned} f &= (f_0, f_1, f_2), & f_0 &= 1, & f_1(x) &= 1, & f_2(x, y) &= 1; \\ g &= (g_0, g_1, g_2), & g_0 &= 2, & g_1(x) &= e^{ix}, & g_2(x, y) &= e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

Тогда их скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f_0 \overline{g_0} + \int_{\mathbb{T}} f_1(x) \overline{g_1(x)} dx + \int_{\mathbb{T}^2} f_2(x, y) \overline{g_2(x, y)} dx dy = \\ &= 1 \cdot 2 + \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot e^{-ix} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot e^{-i(x+y)} dx dy = 2 + 0 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Находим норму вектора g :

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= |g_0|^2 + \int_{\mathbb{T}} |g_1(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{T}^2} |g_2(x, y)|^2 dx dy = \\ &= 2^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix}|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i(x+y)}|^2 dx dy = 4 + 2\pi + 4\pi^2, \end{aligned}$$

т.е.,

$$\|g\| = \sqrt{4 + 2\pi + 4\pi^2}.$$

Рассмотрим операторную матрицу \mathcal{A}_μ , $\mu > 0$, определённую в \mathcal{H} как

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} & 0 \\ \mu A_{12}^* & A_{22} & \mu A_{23} \\ 0 & \mu A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

со следующими матричными элементами $A_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} A_{11}f_1 &= \varepsilon f_1, & (A_{12}f_2) &= \int_{\mathbb{T}} v(t)f_2(t)dt; \\ (A_{22}f_2)(x) &= (\varepsilon + u(x))f_2(x), & (A_{23}f_3)(x) &= \int_{\mathbb{T}} v(t)f_3(x, t)dt; \\ (A_{33}f_3)(x, y) &= (\varepsilon + u(x) + u(y))f_3(x, y), & f_i &\in \mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на \mathbb{T} .

Легко можно увидеть, что операторная матрица \mathcal{A}_μ , определённая по формуле (1) с элементами (2) является линейной, ограниченной и самосопряженной в \mathcal{H} .

Для изучения спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ введём следующую матрицу в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$h_\mu = \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно знаменитой теореме Вейля о стабильности существенного спектра при конечномерных возмущениях, имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu) = [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$, где

$$m := \min_{x \in \mathbb{T}} u(x), \quad M := \max_{x \in \mathbb{T}} u(x).$$

Для фиксированного $\mu > 0$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$ функцию

$$\Delta_\mu(z) := \varepsilon - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^1} \frac{v^2(t)dt}{\varepsilon + u(t) - z}.$$

Обычно функцию $\Delta_\mu(\cdot)$ называют определителем Фредгольма, соответствующим операторной матрице h_μ . Легко можно показать, что число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M]$ является собственным значением операторной матрицы h_μ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(z) = 0$. Поэтому для дискретного спектра операторной матрицы h_μ имеет место равенство:

$$\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon + m; \varepsilon + M] : \Delta_\mu(z) = 0\}.$$

Видно, что функция $\Delta_\mu(\cdot)$ обладает свойством монотонности, поэтому оператор h_μ имеет не более два простых собственных значения, одно из которых расположено левее $\varepsilon + m$, а другое правее $\varepsilon + M$.

Теперь сформулируем теорему, описывающую существенный спектр операторной матрицы \mathcal{A}_μ .

Теорема 1. Для существенного спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}} (\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + u(x)) \cup [\varepsilon + 2m, \varepsilon + 2M].$$

Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ является объединением не более чем трёх отрезков.

Для доказательства равенства применяются методы определителя Фредгольма и критерия Вейля. Сначала при помощи построения последовательностей ортонормальных элементов (критерия Вейля) показывается включение

$$\bigcup_{x \in \mathbb{T}} (\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + u(x)) \cup [\varepsilon + 2m, \varepsilon + 2M] \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu).$$

Обратное включение получается из представления части операторной матрицы в виде прямого интеграла и использования теоремы о спектре разложимых операторов. В итоге получаем полное описание существенного спектра, приведённое в формулировке теоремы [16].

Замечание: Так как $Im u = [m; M]$, имеем

$$\bigcup_{x \in \mathbb{T}} (\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + u(x)) = \{\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + [m; M]\}.$$

Спектральные соотношения для операторной матрицы \mathcal{A}_μ . Перейдём теперь к изучению взаимосвязи между спектром полной операторной матрицы \mathcal{A}_μ и спектрами её блочных элементов. Как показано выше, существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ имеет интервальную структуру и может состоять не более чем из трёх отрезков. Для уточнения картины полезно ввести вспомогательные операторы, действующие в подпространствах пространства \mathcal{H} , и сопоставить их спектры со спектром исходной матрицы. С целью изучения спектра операторной матрицы \mathcal{A}_μ , в пространствах \mathcal{H}_3 и $\mathcal{H}^{(i,j)} = \mathcal{H}_i \oplus \mathcal{H}_j$ при $i < 2$ введём следующие вспомогательные операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^{(1)}: \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3, \quad \mathcal{A}_\mu^{(1)} &= A_{33} \\ \mathcal{A}_\mu^{(2)}: \mathcal{H}^{(2,3)} \rightarrow \mathcal{H}^{(2,3)}, \quad \mathcal{A}_\mu^{(2)} &= \begin{pmatrix} A_{11} & \mu A_{12} \\ \mu A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Используя соответствующие определения, операторы $\mathcal{A}_\mu^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ на своей области определения являются линейными, ограниченными и самосопряжёнными операторами.

Для чисел $\alpha = 1, 2$ изучаем спектры операторов $\mathcal{A}_\mu^{(\alpha)}$.

Из курса функционального анализа известно, что для спектра оператора умножения $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$ справедливо:

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) = [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M].$$

Опишем спектр операторной матрицы \mathcal{A}_μ

Теорема 2 Операторная матрица $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ имеет чисто существенный спектр и имеет место равенство:

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) = [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M] \cup \{\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + [m; M]\}.$$

Доказательство. Пусть $C(\mathbb{T})$ - банахово пространство непрерывных функций, определённых на торе \mathbb{T} . Покажем, что для операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$, выполняется свойство перестановочности с любым оператором вида:

$$U_\varphi \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x)f_1(x) \\ \varphi(x)f_2(x, y) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(\cdot) \in C(\mathbb{T})$, $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Иными словами, для любого $\varphi \in C(\mathbb{T})$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)} U_\varphi = U_\varphi \mathcal{A}_\mu^{(2)},$$

что и выражает указанное свойство перестановочности. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^{(2)} U_\varphi \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} &= \mathcal{A}_\mu^{(2)} \begin{pmatrix} \varphi(x)f_1(x) \\ \varphi(x)f_2(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\varepsilon + u(x))\varphi(x)f_1(x) + \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)\varphi(x)f_2(x, t)dt \\ \mu v(y)\varphi(x)f_1(x) + (\varepsilon + u(x) + u(y))\varphi(x)f_2(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \varphi(x) \begin{pmatrix} (\varepsilon + u(x))f_1(x) + \mu \int_{\mathbb{T}} v(t)f_2(x, t)dt \\ \mu v(y)f_1(x) + (\varepsilon + u(x) + u(y))f_2(x, y) \end{pmatrix} = U_\varphi \mathcal{A}_\mu^{(2)} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, из представления гильбертова пространства в виде прямого интеграла

$$\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 = \int_{\mathbb{T}} \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) dx$$

следует, что операторная матрица $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ также допускает разложение в прямой интеграл:

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)} = \int_{\mathbb{T}} \oplus (u(x)I + h_\mu) dx \quad (3)$$

где I обозначает тождественный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(1,2)}$.

Из разложения (3) операторной матрицы $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ и в силу теоремы о спектре разложимых операторов [17] для её спектра получаем равенство:

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) = \bigcup_{x \in \mathbb{T}} \{u(x) + \sigma(h_\mu)\}.$$

При этом

$$\sigma(h_\mu) = [\varepsilon + m; \varepsilon + M] \cup \sigma_{\text{disc}}(h_\mu),$$

и, учитывая равенство

$$\bigcup_{x \in \mathbb{T}} \{\varepsilon + m + u(x); \varepsilon + M + u(x)\} = [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M]$$

получаем итоговое соотношение

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) = [\varepsilon + 2m; \varepsilon + 2M] \cup \{\sigma_{\text{disc}}(h_\mu) + [m; M]\}.$$

Таким образом, для вспомогательного оператора $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ получено явное описание его спектра, что позволяет проследить связь между ним и полной матрицей \mathcal{A}_μ . В частности, эти результаты дают основание для установления спектральных соотношений между \mathcal{A}_μ и её блочными элементами, что формулируется в следующей теореме.

Теорема 3. Для операторной матрицы \mathcal{A}_μ между спектрами её блочных элементов выполняются следующие спектральные соотношения:

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) \subset \sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) \subset \sigma(\mathcal{A}_\mu).$$

Доказательство. Исходя из явного описания спектра оператора $\mathcal{A}_\mu^{(1)}$, видно, что он совпадает с отрезком $[\varepsilon + 2m, \varepsilon + 2M]$. В то же время спектр $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ включает этот отрезок вместе с дополнительными сдвигами, возникающими за счёт дискретного спектра оператора h_μ . Поэтому первое включение $\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(1)}) \subset \sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)})$ является непосредственным следствием этих описаний.

Далее, как было показано выше, существенный спектр оператора \mathcal{A}_μ совпадает со спектром вспомогательной матрицы $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$. Поскольку существенный спектр всегда содержится в полном спектре самосопряжённого оператора, отсюда немедленно следует второе включение $\sigma(\mathcal{A}_\mu^{(2)}) \subset \sigma(\mathcal{A}_\mu)$. Тем самым оба включения доказаны.

Закключение. В работе рассмотрена операторная матрица \mathcal{A}_μ связанная с гамильтонианом системы с несохраняющимся числом частиц на одномерной решётке. Для неё получено описание существенного спектра, показано, что он состоит не более чем из трёх сегментов, и установлены спектральные соотношения между \mathcal{A}_μ и её блочными элементами. Такой подход позволил выявить внутреннюю структуру спектра и уточнить взаимосвязь между дискретной и существенной его частями.

Полученные результаты дополняют известные исследования спектральных свойств операторных матриц и расширяют понимание их поведения в многокомпонентных системах. Они могут быть использованы при дальнейшем изучении операторных моделей квантовых систем с переменным числом частиц.

ЛИТЕРАТУРА:

1. A.I.Mogilner. *Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: Problems and results. Advances in Sov. Math.* 5 (1991), pp. 139 – 194.
2. V.A.Malishev, R.A.Minlos. *Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs*, 143. AMS, Providence, RI.
3. K.O.Friedrichs. *Perturbation of spectra in Hilbert space*, AMS., Providence, Rhode Island (1965).
4. M.Hubner, H.Spohn. *Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian. Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.* 62 (1995), pp. 289 – 323.
5. H.Spohn. *Ground states of the spin-boson Hamiltonian. Commun. Math. Phys.* 123 (1989), pp. 277 – 304.

6. R.A.Minlos, H.Spohn. *The three-body problem in radioactive decay: The case of one atom and at most two photons in American Mathematical Society Translations-Series 2 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996), pp. 159 – 193.*
7. M.Muminov, H.Neidhardt, T.Rasulov. *On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. J. Math. Phys., 56 (2015), 053507.*
8. Lakaev S.N., Rasulov T.Kh. *A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multi-particle operators. Math. Notes, 2003, 73(4), P. 521–528.*
9. Muminov M.I., Rasulov T.Kh. *An eigenvalue multiplicity formula for the Schur complement of a 3×3 block operator matrix. Siberian Math. J., 2015, 56(4), P. 878-895.*
10. Rasulov T.H. *Investigations of the essential spectrum of a Hamiltonian in Fock space. Appl. Math. Inf. Sci., 2010, 4(3), P. 395–412.*
11. Rasulov T.H., Muminov M.I., Hasanov M. *On the spectrum of a model operator in Fock space. Methods Funct. Anal. Topology, 2009, 15(4), P. 369–383.*
12. Sigal I.M., Soffer A., Zielinski L. *On the spectral properties of Hamiltonians without conservation of the particle number. J. Math. Phys., 2002, 42(4), P. 1844–1855.*
13. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. *On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys., 127:2 (2007), pp. 191–220.*
14. Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. *The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles. Methods Funct. Anal. Topology, 13:1 (2007), pp. 1–16.*
15. Rasulov T.H., Tosheva N.A. *Analytic description of the essential spectrum of a family of 3×3 operator matrices. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 10:5 (2019), pp. 511–519.*
16. M.Sh.Sharipova. *Uchinchi tartibli operatorli matritsaning muhim spektr tarmoqlari: 1 o'Ichamli hol. Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti №5 (2023) 52-59 b.*
17. Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. (1982), 430 с.*

АНАЛИЗ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Усмонов Бахтиёр Зохинович,

Ургутский филиал Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова

Аннотация. В данной работе рассматривается аналог задачи Геллерстедта для одного класса уравнений третьего порядка эллипτικο-гиперболического типа. Проведён анализ структуры уравнения и свойств характеристических линий, а также изучены условия сопряжения решений в областях различного типа. Построены функциональные соотношения, обеспечивающие корректность постановки задачи, и исследованы условия существования и единственности решения в ограниченной области, ограниченной характеристиками и гладкой кривой.

Полученные результаты расширяют классические методы теории уравнений смешанного типа и могут быть использованы при анализе более сложных физических процессов, описываемых уравнениями высших порядков.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, эллипτικο-гиперболическое уравнение, задача Геллерстедта, уравнения третьего порядка, краевые задачи, условия сопряжения, существование и единственность решения.

ANALYSIS OF THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR A THIRD-ORDER ELLIPTIC-HYPERBOLIC EQUATION

Abstract. In this paper, an analogue of the Gellerstedt problem is considered for a certain class of third-order elliptic-hyperbolic type equations. The structure of the equation and the properties of its characteristic lines are analyzed, and the conditions for matching the solutions in regions of different types are studied. Functional relations ensuring the correctness of the problem formulation are constructed, and the conditions for the existence and uniqueness of the solution in a bounded domain, limited by characteristics and a smooth conjugation curve, are investigated. The obtained results extend the classical methods of the theory of mixed-type equations and can be applied to the analysis of more complex physical processes described by higher-order equations.

Key words: mixed-type equations, elliptic-hyperbolic equation, Gellerstedt problem, third-order equations, boundary-value problems, conjugation conditions, existence and uniqueness of the solution.

UCHINCHI TARTIBI ELLIPTIK-GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN GELLERSTEDT MASASINI TAHLILI

Abstrakt. Ushbu maqola uchinchi tartibli elliptik-giperbolik tenglamalar sinfi uchun Gellershtedt muammosining analogini ko'rib chiqadi. Biz tenglamaning tuzilishini va uning xarakterli chiziqklarining xususiyatlarini tahlil qilamiz va har xil turdagi sohalaridagi yechimlar uchun konjugatsiya shartlarini ko'rib chiqamiz. Muammoni qo'yishning to'g'riligini ta'minlaydigan funksional aloqalar quriladi va xarakteristikalar va silliq konjugat egri chizig'i bilan cheklangan hududda yechimning mavjudligi va o'ziga xosligi uchun shartlar o'rganiladi.

Olingan natijalar aralash tipdagi tenglamalar nazariyasining klassik usullarini kengaytiradi va undan yuqori tartibli tenglamalar bilan tasvirlangan murakkabroq fizik jarayonlarni tahlil qilishda foydalanish mumkin.

Kalit so'zlar: aralash turdagi tenglamalar, elliptik-giperbolik tenglama, Gellerstedt muammosi, uchinchi tartibli tenglamalar, chegaraviy qiymat muammolari, konjugatsiya shartlari, yechimning mavjudligi va o'ziga xosligi.

Введение. Дифференциальные уравнения смешанного и переходного типов занимают особое место в современной теории уравнений в частных производных. Особый интерес представляют задачи для уравнений, которые в различных частях области изменяют свой тип — от эллиптического к гиперболическому или наоборот. Такие уравнения возникают при моделировании разнообразных

физических процессов, в частности, в задачах газовой динамики, акустики, теории упругости и фильтрации, где характер движения среды изменяется в зависимости от параметров.

Одним из классических направлений в теории уравнений смешанного типа является исследование задачи Геллерстедта, предложенной и подробно изученной для второго порядка эллипτικο-гиперболических уравнений. Эта задача представляет собой краевую задачу особого типа, в которой решение должно удовлетворять различным условиям на границах областей различного типа, а также условиям «склеивания» на линии перехода. Подобные задачи имеют важное теоретическое и прикладное значение, поскольку они отражают переходные процессы между устойчивыми (эллиптическими) и волновыми (гиперболическими) режимами.

В классических работах А.В. Бицадзе [6–8], а также в совместных исследованиях А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова [9] были заложены основы теории уравнений смешанного типа. В этих трудах разработаны общие методы построения решений и изучены вопросы корректности соответствующих краевых задач. Однако большинство существующих результатов посвящено уравнениям второго порядка, тогда как для уравнений более высокого порядка аналогичные вопросы остаются недостаточно исследованными.

В связи с этим представляет интерес постановка и исследование аналога задачи Геллерстедта для одного класса уравнений третьего порядка эллипτικο-гиперболического типа. Уравнения подобного рода естественным образом возникают при рассмотрении более сложных физических моделей, где наряду с волновыми и стационарными процессами существенную роль играют эффекты дисперсии и вязкости.

В настоящей работе рассматривается уравнение третьего порядка эллипτικο-гиперболического типа, для которого в различных частях плоскости изменяется характер оператора. Область исследования включает подмножества, ограниченные характеристическими линиями данного уравнения, а также гладкую кривую, на которой накладываются условия сопряжения. В работе вводятся необходимые обозначения, получаются основные функциональные соотношения и устанавливаются свойства решений, удовлетворяющих заданным краевым и склеивающим условиям.

Целью настоящего исследования является формулировка и анализ аналога задачи Геллерстедта для указанного класса уравнений третьего порядка, а также получение условий существования и единственности решения. Для этого рассматриваются два различных режима уравнения (в эллиптической и гиперболической частях области), строятся общие решения в каждом из них и исследуются условия согласования на линии раздела.

Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего изучения задач более общего вида, связанных с уравнениями смешанного или составного типа высших порядков, а также для разработки численных методов решения таких задач. Работа продолжает и развивает классические идеи Бицадзе и Геллерстедта, расширяя их применение на новые классы операторов.

Постановка задачи G_{ac}

Рассмотрим уравнение

$$0 \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + u_{yy}), & \text{при } y > 0, \\ (a \frac{\partial}{\partial x} + c)(u_{xx} - u_{yy}), & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Пусть Ω_1 -конечная однозначная область в плоскости (x, y) , ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и отрезком AB оси x . Ω_{21} - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(-1, 0)O(0, 0)$ оси x и двумя характеристиками $AC_1: x + y = -1$, $OC_1: x - y = 0$ уравнения (1.1), выходящими из точки $A(-1, 0)$, $O(0, 0)$ и пересекающимися в точке $C_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; Ω_{22} - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $O(0, 0)B(1, 0)$ оси x и двумя характеристиками

$OC_2: x+y=0, BC_2: x-y=1$ уравнения (1.1), выходящими из точек $A(0,0), B(1,0)$ пересекающимися в точке $C_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; Ω_{23} -характеристический четырёхугольник, ограниченный характеристиками OC_1, OC_2 и $C_1C: x+y=-1, CC_2: x-y=1$ уравнения (1.1), пересекающимися в точках O, C_1, C_2 и $A(0,-1)$ при $y < 0$.

Предположим, что кривая σ униформа относительно оси y , точка $N(0,1)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси x точкой, части AN и BN дуги σ униформы отрезка ON оси y .

Введём обозначения:

$$AB \equiv J = \{x: -1 < x < 1\}, J_1 = \{x: -1 < x < 0\}, J_2 = \{x: 0 < x < 1\}, \\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J, \Omega_2 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22} \cup \Omega_{23}, \Omega^* = \Omega_1 \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22} \cup J.$$

3. Вывод основных функциональных соотношений

Положим

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде двух систем:

$$\begin{cases} u_1(x, y) = u_1(x, y) + \omega_1(y), \\ u_{1xx} + u_{1yy} = 0, & (x, y) \in D_1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} = u_2(x, y), \\ au_{2x} + cu_2 = 0, & (x, y) \in D_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $u_2(x, y)$ — произвольная достаточно гладкая функция, а $\omega_1(y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причём

$$\omega_1'(0) = \omega_1(1) = 0. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения

$$au_{2x} + cu_2 = 0,$$

имеет вид:

$$u_2(x, y) = \omega_2(-y) \exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \quad (6)$$

где $\omega_2(-y)$ — произвольная непрерывная функция.

В области Ω исследуем аналог задачи Геллерстедта для уравнения (1).

Задача G_{ac} . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\Omega)$; 2) $u(x, y) \in C_{x,y}^{3,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $u_{xyy} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и $\Omega_{2j} (j=1, 3)$;

3) на интервале J выполняются условия склеивания:

$$\tau(x) \equiv \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y), \quad x \in J, \quad (7)$$

$$\nu(x) \equiv \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y), \quad x \in J; \quad (8)$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{\sigma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}, \quad (9)$$

$$u(x, y)|_{\partial V} = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (10)$$

$$u(x, y)|_{\partial \Omega_1} = \psi_1(y), \quad u(x, y)|_{\partial \Omega_2} = \psi_2(y), \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0, \quad (11)$$

$$u(x, y)|_{\partial \Omega} = g_2(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (12)$$

где $\varphi(x, y)$, $g_j(y)$, $\psi_j(x)$ ($j=1,2$)- заданные функции, причем

$$\varphi(0, h) = g_1(h), \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = g_1(0) = g_2(0), \quad (13)$$

$$g_1(y) \in y(1-y)g_1(y), \quad g_1(y) \in C[0,1], \quad \varphi(x, y) = y^2 \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) \in C(\sigma), \quad (14)$$

$$\psi_j(x) \in C^2\left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad g_2(y) \in C^2[-1,0]. \quad (15)$$

4. Исследование задачи G_{ac}

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. Если выполнены условия (13)-(15), то в области Ω существует единственное регулярное решение задачи G_{ac} .

Доказательство теоремы 1.4. Как нам известно [1], решение задачи Коши для уравнения (4) с учётом (6) в области Ω_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = & \frac{1}{2} [\tau(x+y) + \tau(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{4} \int_{x-y}^{x+y} d\xi \int_{\xi}^{x-y} \omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(\xi+\eta)}{2a}\right] d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

Поставляя (16) в (11) и (12) получаем:

$$\begin{aligned} u_2(x, y)|_{\partial \Omega_1} = \psi_1\left(\frac{y}{2}\right) = & \frac{1}{2} [\tau(y) + \tau(0)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^y \nu(\xi) d\xi + \frac{1}{4} \int_0^y d\xi \int_{\xi}^0 \omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(\xi+\eta)}{2a}\right] d\eta, \\ u_2(x, y)|_{\partial \Omega_2} = \psi_2\left(\frac{y}{2}\right) = & \frac{1}{2} [\tau(0) + \tau(-y)] + \frac{1}{2} \int_{-y}^0 \nu(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{4} \int_{-y}^0 d\xi \int_{\xi}^{-y} \omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(\xi+\eta)}{2a}\right] d\eta, \\ u_2(x, y)|_{\partial \Omega} = g_2(y) = & \frac{1}{2} [\tau(y) + \tau(-y)] + \frac{1}{2} \int_{-y}^y \nu(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{4} \int_{-y}^y d\xi \int_{\xi}^{-y} \omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(\xi+\eta)}{2a}\right] d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда дифференцируя по y , находим:

$$\omega_2(y) = \frac{1}{2} \left[\psi_1'\left(\frac{y}{2}\right) + \psi_2'\left(\frac{y}{2}\right) \right] - 2g_2'(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (17)$$

$$\tau'(x) + \nu(x) = \psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_x^0 \omega_2\left(\frac{x-\eta}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(x+\eta)}{2a}\right] d\eta, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (18)$$

$$\tau'(x) - \nu(x) = + \frac{1}{2} \int_0^x \omega_2\left(\frac{\xi-x}{2}\right) \exp\left[-\frac{\alpha(\xi+x)}{2a}\right] d\xi - \psi_2'\left(-\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (19)$$

Формула (18) и (19) даёт первое функциональное соотношение между $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ принесённое из области Ω_{21} и Ω_{21} на J_1 и J_2 соответственно.

Предположим, что кривая σ оканчивается сколь угодно малыми дугами окружности $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что

$$u_1(-1,0) = u_1(1,0) = u_1'(-1,0) = u_1'(1,0) = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$u_1(x,y)|_{\sigma} = \varphi(x,y) - \omega_1(y), \quad u_{1y}(x,+0) = \nu_1(x), \quad x \in (-1,1), \quad y \in [0,1] \quad (21)$$

в области D выражается формулой:

$$u_1(x,y) = \int_{-1}^1 G(t,0,x,y) \nu_1(t) dt + \int_{\sigma} \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, y)}{\partial n} [\varphi^*(s) - \omega_1(\eta(s))] ds, \quad (22)$$

где $\varphi^*(s) = \varphi(\xi(s), \eta(s))$,

$$G(\xi, \eta, x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{1}{\rho^2 r_2 r_3} \right]$$

- функции Грина для уравнения Лапласа, удовлетворяющую однородному условию (9) и $u_{1y}(x,+0) = 0$;

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \\ r_2^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad r_3^2 = (x - \xi)^2 + (y + \eta)^2, \quad x = \frac{x}{\rho^2}, \quad y = \frac{y}{\rho^2}.$$

Положив в (1.27) $y = 0$ получим:

$$\tau_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [\ln|x-t| - \ln|1-xt|] \nu_1(t) dt + f_1(x, \omega), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (23)$$

где $\tau_1(x) = u_1(x, +0)$,

$$f_1(x, \omega) = \int_{\sigma} \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, 0)}{\partial n} [\varphi^*(s) - \omega_1(\eta(s))] ds. \quad (24)$$

С учётом (21) и (22) получим второй функциональное соотношение между $\tau_1'(x)$ и $\nu_1(x)$ принесённое из области Ω_4 на J :

$$\tau_1'(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right] \nu_1(t) dt + f_1'(x, \omega), \quad -1 < x < 1, \quad (25)$$

где $f_1'(x, \omega)$ — определяется из (24), а неизвестная функция $\omega(y)$ находится из

$$\omega(y) = g(y, \nu_1) - \int_0^1 M_4^*(y, t) g(t, \nu_1) dt, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (26)$$

Лемма 1. Задача G_{ac} в области Ω не может иметь более одного решения.

Исключив $\tau'(x)$ из (18), (19) и (23) с учётом (17) аналогично получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\nu(x)$. Полученное сингулярное интегральное уравнение известным методом регуляризации Карлемана-Векуа [2] сведём к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\nu(x)$, безусловная разрешимость которого следует из леммы 1.

Таким образом, после определения $\nu(x)$, $\tau(x)$ и $\omega_j(y)$ ($j=1,2$) из (26), (17) - (19) и (18),

(19) решение задачи G_{ac} можно восстановить в области Ω_1 как решение задачи N с условиями (1.124) и $u_{1y}(x,0)=v(x)$, $(x,0) \in J$ для уравнения (1), а в областях Ω_{2j} ($j=1,2$) и Ω_{23} как решение задачи Коши-Гурса с условиями (11), $u_{2y}(x,0)=v(x)$, $(x,0) \in J_1 \cup J_2$ и Гурса с условиями (11) для уравнения (1).

Следовательно, задача G_{ac} однозначно разрешима в области D .

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 736 с.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.
3. Ishtomov B. I., Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. // "Labachevskii Journal of Mathematics". 2020. Vol. 41. No 1. Pp. 32-38.
4. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation. // Euroasian Mathematical Journal. Eurasian National University. 2016. № 1. P.74-83.
5. Базаров Д. Об аналоге задачи Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка. // «Дифференциальные уравнения». 1989. Т.25. № 1. С. 21-27.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.
7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: «Наука». 1981. 448 с.
8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Издательство АН СССР. Москва, 1959. 164 с.
9. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа. // "Сибирский математический журнал". 1961. Т. II. №1. С. 7-19.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА БИРМАНА-ШВИНГЕРА ДЛЯ 3×3 ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ НА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЁТКЕ

Неъматова Шохида Бобожон кизи,
 Бухарский государственный университет,
 Бухара, Узбекистан
 s.b.nematova@buxdu.uz

Аннотация. В настоящей статье рассматривается операторная матрица третьего порядка, которая соответствует системе с несохраняющимся и не более трёх частиц на нецелочисленной решётке. Эта матрица действует в прямой сумме нульчастичном, одночастичном и двухчастичном подпространстве бозонного пространства Фока. Определено местоположение её существенного спектра, и доказан аналог принципа Бирмана-Швингера. Этот принцип используется для доказательства конечности или бесконечности числа собственных значений и для вывода асимптотической формулы для дискретного спектра.

Ключевые слова: блочно-операторная матрица, модели Фридрихса, принцип Бирмана-Швингера, существенный и дискретный спектры.

BUTUN SONLI BO‘LMAGAN PANJARADAGI 3×3 OPERATOR MATRITSA UCHUN BIRMAN–SHVINGER PRINSIPINI QO‘LLASH

Annotatsiya. Mazkur maqolada butun bo‘lmagan panjaradagi soni saqlamaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos uchunchi tartibli operatorli matrisa qaralgan. Bu matrisa bozonli Fok fazoning nol zarrachali, bir zarrachali va ikki zarrachali qism fazolari to‘g‘ri yig‘indisida ta’sir qiladi. Uning muhim spektri spektrining joylashuv o‘rni aniqlangan va Birman-Shvinger prinsipining analogi isbotlangan. Bu prinsipning xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz bo‘lishini isbotlashda hamda diskret spektr uchun asimptotik formula keltirilib chiqarishda qo‘llanilishi asoslangan.

Kalit so‘zlar: blok-operatorli matrisa, Fridriks modeli, Birman-Shvinger prinsipi, muhim va diskret spektrlar.

APPLICATION OF THE BIRMAN-SCHWINGER PRINCIPLE FOR A 3×3 OPERATOR MATRIX ON A NON-INTEGGER LATTICE

Abstract. In the present paper an operator matrix of order three, corresponding to a system with non-conserved and no more than three particles on the non-integer lattice. This matrix is acting in the direct sum of zero-particle, one-particle and two-particle subspaces of the bosonic Fock space. The location of its essential spectrum is defined and an analogue of the Birman-Schwinger principle is proved. This principle is used to prove whether the number of eigenvalues is finite or infinite and to derive an asymptotic formula for a discrete spectrum.

Key words: block-operator matrix, Friedrichs model, Birman-Schwinger principle, essential and discrete spectra.

Введение. Одним из важнейших направлений современной математической физики и функционального анализа является подробное изучение спектральной теории операторов. Спектральная теория широко применяется при анализе физических процессов с использованием дифференциальных операторов, интегральных операторов и операторных матриц, в частности, в задачах физики твёрдого тела [1], квантовой механики [2] и статистической физики [3]. Операторная матрица — это матрица, элементами которой являются линейные операторы, действующие между некоторыми банаховыми или гильбертовыми пространствами [4,5]. Операторные матрицы естественным образом возникают при исследовании систем уравнений в частных производных, многокомпонентных физических моделей, задач механики и квантовой теории поля. Их спектральные свойства тесно связаны со спектрами входящих в них операторов, что делает их удобным инструментом в спектральной теории и теории возмущений.

В исследованиях проблем вышеуказанных областях особое место занимает принцип Бирмана-

Швингера. Данный принцип устанавливает связь между собственными значениями (или спектром) оператора и спектром соответствующего ему компактного оператора. Принцип Бирмана-Швингера был изначально разработан в квантовой механике, в частности, для исследования связанных состояний операторов Шрёдингера [6,7]. Впоследствии этот принцип был обобщён на различные типы линейных и нелинейных операторов, включая операторные матрицы [8,9].

Применение принципа Бирмана-Швингера к операторным матрицам имеет не только теоретическое значение, но и существенную практическую ценность, поскольку позволяет упростить вычислительные методы и оценку спектральных границ. С помощью данного принципа задача изучения спектра операторной матрицы во многих случаях сводится к анализу спектра компактных операторов, что значительно удобнее с математической точки зрения. В статьях [8-10] принцип Бирмана-Швингера был эффективно использован при доказательстве конечности или бесконечности числа собственных значений операторной матрицы, а также при получении асимптотической формулы для числа собственных значений.

В данной статье изучен класс операторных матриц третьего порядка $H_h(K)$, соответствующих оператору энергии системы частиц на нецелочисленной решётке, число которых не сохраняется и не превышает трёх. Сначала дана характеристика существенного спектра этого оператора. Затем доказан аналог принципа Бирмана-Швингера для класса операторных матриц, и рассмотрены его приложения.

Операторная матрица и её существенный спектр. Для каждого фиксированного $h > 0$ через \mathbb{T}_h^3 обозначим куб $(-\pi/h; \pi/h)^3$ – с соответствующим отождествлением противоположных граней.

Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на \mathbb{T}_h^3 и $L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых симметричных (комплекснозначных) функций, определённых на $(\mathbb{T}_h^3)^2$. Обозначим через \mathcal{H} прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^3)$ и $\mathcal{H}_2 := L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^2)$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Пространства \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 называются нульчастичной, одночастичной и двухчастичной подпространствами бозонного фокковского пространства $\mathcal{F}_b(L_2(\mathbb{T}_h^3))$ по $L_2(\mathbb{T}_h^3)$, соответственно, где

$$\mathcal{F}_b(L_2(\mathbb{T}_h^3)) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}_h^3) \oplus L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^2) \oplus \dots \oplus L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^n) \oplus \dots$$

Здесь при $n \geq 3$ через $L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^n)$ обозначено гильбертово пространство симметричных (относительно любых двух переменных) функций n переменных, определённых на $(\mathbb{T}_h^3)^n$.

В гильбертовом пространстве \mathcal{H} при каждом фиксированном $h > 0$ рассматривается следующее семейство трёхдиагональных блочно-операторных матриц:

$$H_h(K) := \begin{pmatrix} H_{00}(h; K) & H_{01}(h) & 0 \\ H_{01}^*(h) & H_{11}(h; K) & H_{12}(h) \\ 0 & H_{12}^*(h) & H_{22}(h; K) \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{T}_h^3,$$

где матричные элементы определяются по формулам:

$$\begin{aligned} H_{00}(h; K)f_0 &= \omega_0(K)f_0, & H_{01}(h)f_1 &= \int v_0(t) f_1(t) dt, \\ (H_{11}(h; K)f_1)(p) &= \omega_1(K; p)f_1(p), & (H_{12}(h)f_2)(p) &= \int v_1(t) f_2(p, t) dt, \\ (H_{22}(h; K)f_2)(p, q) &= \omega_2(K; p, q)f_2(p, q). \end{aligned}$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1, 2$; $\omega_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ – вещественнозначные ограниченные функции на \mathbb{T}_h^3 , а функции $\omega_1(\cdot; \cdot)$ и $\omega_2(\cdot; \cdot)$ определены по формулам:

$$\begin{aligned} \omega_1(K; p) &:= l_1 \varepsilon_h(p) + l_2 \varepsilon_h(K - p) + 1, \\ \omega_2(K; p, q) &:= l_1 \varepsilon_h(p) + l_2 \varepsilon_h(K - p - q) + l_1 \varepsilon_h(q), \end{aligned}$$

где $l_i > 0$, $i = 1, 2$, и функция $\varepsilon_h(\cdot)$ имеет вид:

$$\varepsilon_h(q) := \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(hq_i)), \quad q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}_h^3.$$

При этом $H_{ij}^*(h): \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_j$, $i < j$ сопряжённый оператор к $H_{ij}(h)$ и легко можно проверить, что

$$(H_{01}^*(h)f_0)(p) = v_0(p)f_0, \quad (H_{12}^*(h)f_1)(p, q) = \frac{1}{2}(v_1(p)f_1(q) + v_1(q)f_1(p)), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1.$$

Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей

области изменения переменных интегрирования.

В этих предположениях блочно-операторная матрица $H_h(K)$ является ограниченным и самосопряжённым в \mathcal{H} .

Обозначим через $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ существенный и дискретный спектры ограниченного самосопряжённого оператора.

Чтобы изучить спектральные свойства оператора $H_h(K)$, мы вводим семейство ограниченных самосопряжённых операторов (модели Фридрихса) $\mathcal{A}_h(k), k \in \mathbb{T}_h^3$, при каждом фиксированном $h > 0$ действующую в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ по правилу:

$$\mathcal{A}_h(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(h; k) & A_{01}(h) \\ A_{01}^*(h) & A_{11}(h; k) \end{pmatrix},$$

где операторы $A_{ii}(h; k): \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i, i = 0, 1$ и $A_{01}(h): \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ определяются по правилам:

$$A_{00}(h; k)f_0 = (l_2\varepsilon_h(k) + 1)f_0, \quad A_{01}(h)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}(h; k)f_1)(q) = E_h(k; p)f_1(q), \quad E_h(k; q) := l_1\varepsilon_h(q) + l_2\varepsilon_h(k - q).$$

Следующая теорема описывает расположение существенного спектра оператора $H_h(K)$ по спектру, моделей Фридрихса $\mathcal{A}_h(k)$.

Теорема 1. Для существенного спектра оператора $H_h(K)$ имеет место равенство:

$$\sigma_{\text{ess}}(H_h(K)) = \bigcup_{p \in \mathbb{T}_h^3} \{ \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_h(K - p)) + l_1\varepsilon_h(p) \} \cup [m_K(h); M_K(h)]$$

где числа $m_K(h)$ и $M_K(h)$ определяются:

$$m_K(h) := \min_{q, p \in \mathbb{T}_h^3} \omega_2(K; p, q), \quad M_K(h) := \max_{q, p \in \mathbb{T}_h^3} \omega_2(K; p, q).$$

Пусть $\tau_h(K)$ нижняя грань существенного спектра оператора $H_h(K)$ и $N_h(K; z)$ число собственных значений (с учётом кратности) оператора $H_h(K)$, лежащих левее точки $z, z < \tau_h(K)$.

При каждом фиксированном $k \in \mathbb{T}_h^3$ определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathcal{A}_h(k)$)

$$\Delta_h(k; z) := l_2\varepsilon_h(k) + 1 - z - \frac{1}{2} \int \frac{v_h^2(t)dt}{E_h(k; t) - z},$$

где числа $E_{\min}(h; k)$ и $E_{\max}(h; k)$ определяются следующим образом:

$$E_{\min}(h; k) := \min_{q \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; q), \quad E_{\max}(h; k) := \max_{q \in \mathbb{T}_h^3} E_h(k; q).$$

Отметим, что для любых $p \in \mathbb{T}_h^3$ и $z < \tau_h(K)$, функция $\Delta_h(K - p; z - l_1\varepsilon_h(p))$ положительна и следовательно, существует её положительный квадратный корень.

Принцип Бирмана-Швингера. Для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и ограниченного самосопряжённого оператора A , действующего в гильбертовом пространстве \mathcal{R} , определим число $n(\lambda, A)$ как

$$n(\lambda, A) = \sup\{\dim F : (Au, u) > \lambda, u \in F \subset \mathcal{R}, \|u\| = 1\}.$$

Число $n(\lambda, A)$ равно бесконечности, если $\lambda < \max \sigma_{\text{ess}}(A)$ и если число $n(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A , больших чем λ , с учётом кратности.

По определению числа $N_h(K; z)$ имеем, что

$$N_h(K; z) = n(-z, -H_h(K)), \quad z < \tau_h(K).$$

В исследованиях дискретного спектра оператора $H_h(K)$ основную роль играет компактный (симметризованный) оператор $T_h(K, z), z < \tau_h(K)$, действующий в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ следующим образом

$$\hat{T}_h(K, z) := \begin{pmatrix} T_{00}(K, h; z) & T_{01}(K, h; z) \\ T_{01}^*(K, h; z) & T_{11}(K, h; z) \end{pmatrix},$$

где операторы $T_{ij}(K, h; z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i, i = 0, 1, z < \tau_h(K)$ определяются равенствами:

$$T_{00}(K, h; z)g_0 = (1 + z - \omega_0(K))g_0, \quad T_{01}(K, h; z)g_1 = - \int \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_h(K - t; z - l_1\varepsilon_h(t))}};$$

$$(T_{11}(K, h; z)g_1)(p) = \frac{v_1(p)}{2\sqrt{\Delta_h(K - p; z - l_1\varepsilon_h(p))}} \int \frac{v_0(t)g_1(t)dt}{\sqrt{\Delta_h(K - t; z - l_1\varepsilon_h(t))(\omega_2(K; p, t) - z)}}.$$

Здесь $g_i \in \mathcal{H}_i, i = 0, 1$.

Следующая теорема является реализацией известного Бирмана-Швингера для оператора $H_h(K)$.

Теорема 2. При всех $z < \tau_h(K)$ оператор $T_h(K, z)$ является компактным и непрерывным по z и для чисел $N_h(K; z)$ и $n(1, T_h(K, z))$ справедливо равенство:

$$N_h(K; z) = n(1, T_h(K, z)). \tag{1}$$

Доказательство. Сначала оператор $H_h(K)$ перепишем в виде:

$$H_h(K) = \begin{pmatrix} H_{00}(h; K) & 0 & 0 \\ 0 & H_{11}(h; K) & 0 \\ 0 & 0 & H_{22}(h; K) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & H_{01}(h) & 0 \\ H_{01}^*(h) & 0 & H_{12}(h) \\ 0 & H_{12}^*(h) & 0 \end{pmatrix}$$

Через I_i обозначим единичный оператор в \mathcal{H}_i , $i = 0, 1, 2$ и через $I = \text{diag}\{I_0, I_1\}$ (соот. $J = \text{diag}\{I_0, I_1, I_2\}$) обозначим единичный оператор в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ (соот. \mathcal{H}).

Для любого $z < \tau_h(K)$ операторы $H_{11}(h; K) - zI_1$ и $H_{22}(h; K) - zI_2$ положительны и обратимы, и следовательно, квадратный корень $R_{11}^{1/2}(K, h; z)$ ($R_{22}^{1/2}(K, h; z)$) резольвенты $R_{11}(K, h; z) = (H_{11}(h; K) - zI_1)^{-1}$ ($R_{22}(K, h; z) = (H_{22}(h; K) - zI_2)^{-1}$) оператора $H_{11}(h; K)$ ($H_{22}(h; K)$) существует.

Пусть $M_h(K; z)$, $z < \tau_h(K)$ – 3×3 -операторная матрица с элементами

$$\begin{aligned} M_{00}(K, h; z) &:= (1+z)I_1 - H_{11}(h; K), & M_{01}(K, h; z) &:= -H_{01}(h)R_{11}^{1/2}(K, h; z); \\ M_{12}(K, h; z) &:= -R_{11}^{1/2}(z)H_{12}(h)R_{22}^{1/2}(K, h; z), & M_{10}(K, h; z) &:= M_{01}^*(K, h; z), \\ & & M_{21}(K, h; z) &:= M_{12}^*(K, h; z); \end{aligned}$$

а в остальных случаях $M_{\alpha\beta}(K, h; z) = 0$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2$.

Простые рассуждения показывают, что имеет место равенство $((H_h(K) - zJ)f, f) < 0$, $f \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $((M_h(K, z) - zJ)g, g) > 0$, $g = (g_1, g_2, g_3)$, $g_1 = f_1$, $g_i = (H_{ii}(h; K) - zI_i)^{1/2}f_i$, $i = 1, 2$. Отсюда получаем

$$N_h(K; z) = n(1, M_h(K, z)). \tag{2}$$

Пусть оператор $L_h(K, z)$, $z < \tau_h(K)$ действует в $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ как 2×2 -операторная матрица с элементами $L_{11}(K, h; z) := M_{12}(K, h; z)M_{21}(K, h; z)$, в остальных случаях $L_{\alpha\beta}(K, h; z) := M_{\alpha\beta}(K, h; z)$, $\alpha, \beta = 0, 1$.

Обозначим через $F := F_1 \oplus F_1 \subset \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ подпространство, для которого справедливо равенство $\dim F = n(1, L_h(K, z))$. Тогда $(M_h(K, z)g, g) = (L_h(K, z)f, f)$ для всех $f = (f_1, f_2) \in F$ и $g = (f_1, f_2, M_{21}(K, h; z)f_2)$. Кроме того $((M_h(K, z) - zJ)g, g) = ((L_h(K, z) - zI)f, f) - \|f_2^\perp\|^2$ для всех $f = (f_1, f_2) \in F$ и $g = (f_1, f_2, M_{21}(K, h; z)f_2 + f_2^\perp)$, $f_2^\perp \perp M_{21}(K, h; z)f_2$.

Следовательно,

$$n(1, M_h(K, z)) = n(1, L_h(K, z)). \tag{3}$$

Очевидно, что соотношение $((L_h(K, z) - I)\varphi, \varphi) > 0$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$(\psi_1, \psi_1) + ((H_{11}(h; K) - zI_1)\psi_2, \psi_2) < (M_{00}(K, h; z) - (H_{01}(h)\psi_2, \psi_1) - (H_{10}(h)\psi_1, \psi_2) + (H_{12}(h)R_{22}(z)H_{12}^*(h)\psi_2, \psi_2)) \tag{4}$$

при $\psi_1 = \varphi_1$, $\psi_2 = R_{11}^{1/2}(z)\varphi_2$. Это означает, что

$$n(1, L_h(K, z)) = n(-z, G_h(K, z)), \tag{5}$$

где

$$G_h(K, z) := \begin{pmatrix} -H_{00}(h; K) & -H_{01}(h) \\ -H_{01}^*(h) & H_{12}(h)R_{22}(z)H_{12}^*(h) - H_{11}(h; K) \end{pmatrix}.$$

Теперь оператор $H_{12}^*(h)$ представим в виде суммы двух операторов $H_{12}^{(1)}(h)$ и $H_{21}^{(2)}(h)$ из $L_2(\mathbb{T}_h^3)$ в $L_2^s((\mathbb{T}_h^3)^2)$ как

$$(H_{21}^{(1)}(h)f_2)(p, q) = \frac{1}{2}v_2(p)f_2(q), \quad (H_{21}^{(2)}(h)f_2)(p, q) = \frac{1}{2}v_2(q)f_2(p).$$

Оператор $D_h(K, z) := H_{11}(h; K) - z - H_{12}(h)R_{22}(K, h; z)H_{21}^{(2)}(h)$, $z < \tau_h(K)$ является оператором умножения на функцию $\Delta_h(\cdot; z)$, определённую на \mathbb{T}_h^3 , и поэтому он обратим. Очевидно, что положительный квадратный корень $D_h^{-1/2}(K, z)$ оператора $D_h^{-1}(K, z)$ является оператором умножения на функцию $\Delta_h^{-1/2}(\cdot; z)$.

Таким образом, $(G_h(K, z)\varphi, \varphi) > -z(\varphi, \varphi)$ тогда и только тогда, когда $(T_h(K, z)\eta, \eta) > (\eta, \eta)$ при $\eta_1 = \varphi_1$, $\eta_2 = D_h^{-1/2}(K, z)\varphi_2$ и следовательно

$$n(-z, G_h(K, z)) = n(1, T_h(K, z)). \tag{6}$$

Из равенств (2), (3), (4) и (5) получаем (1).

Отметим, что оператор $T_h(K, z)$, $z < \tau_h(K)$ – компактен и непрерывен по z .

Если выполнены условия, что число собственных значений, лежащих левее существенного спектра операторной матрицы $H_h(K)$, то пользуясь принципом Бирмана-Швингера и неравенством Вейля

$$n(\lambda_1 + \lambda_2, A_1 + A_2) \leq n(\lambda_1, A_1) + n(\lambda_2, A_2)$$

для суммы компактных операторов A_1 и A_2 и для любых положительных чисел λ_1 и λ_2 можно показать, что число собственных значений, лежащих левее существенного спектра операторной матрицы $H_h(K)$.

Принцип Бирмана-Швингера также используется для показа бесконечности дискретного спектра операторной матрицы $H_h(K)$ и нахождения для него асимптотической формулы.

Заключение. В данной работе рассматривается операторная матрица $H_h(K)$, $h > 0, k \in T_h^3$, действующая в прямой сумме нульчастичного, одночастичного и двухчастичного подпространства бозонного пространства Фока. Этот оператор соответствует гамильтониану системы с несохраняющимся и не более трёх частиц на нецелочисленной решётке. Определено местоположение существенного спектра операторной матрицы $H_h(K)$. Доказан аналог принципа Бирмана-Швингера для операторной матрицы $H_h(K)$. Используя этот принцип, утверждается, что дискретный спектр операторной матрицы $H_h(K)$ может быть конечным множеством, и может быть получена асимптотическая формула для дискретного спектра.

ЛИТЕРАТУРА:

1. D.Mattis. *The few-body problem on lattice. Rev. Modern Phys.*, 58 (1986), pp. 361-379.
2. К.О.Фридрихс. *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.*
3. В.А. Малышев, Р. А. Минлос. *Кластерные операторы. Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 9. (1983), 63-80.*
4. C.Treter. *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.*
5. A. Jeribi. *Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices. Springer International Publishing, Switzerland, 2015.*
6. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov, *Schrödinger Operators on Lattices. The Efimov Effect and Discrete Spectrum Asymptotics, Annales Henri Poincaré, 5 (2004), 743–772.*
7. Ж.И. Абдуллаев, С.Н. Лакаев. *Асимптотика дискретного спектра разностного трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке. Теор. и мат. физ., 136:2, (2003), 231-245.*
8. S. Albeverio, S.N. Lakaev, T.H. Rasulov. *On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics. J. Stat. Phys. 127:2 (2007), pp. 191-220.*
9. Т.Х. Расулов. *О числе собственных значений одного матричного оператора. Сибирский математический журнал, 52:2 (2011), С. 400-415*
10. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). *Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. ТМФ. 3(205), С. 368-390.*

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ НА ДИСКРЕТНУЮ ФУНКЦИЮ ЛЯПУНОВА

Алимова Василя Баходировна,

*докторант Национального университета Узбекистана
имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
vasilarobiyaxon@gmail.com*

Аннотация. В данной работе исследована задача стабилизации положения равновесия для гиперболической системы с положительными нелокальными характеристическими скоростями и погрешностью измерения. Приведена постановка задачи смешанного управления для данной гиперболической системы. Построена дискретная функция Ляпунова, и приведена теорема устойчивости состояния равновесия начально-краевой разностной задачи при l^2 –норме относительно дискретного возмущения. Получены результаты численного решения гиперболической системы, состоящей из двух уравнений с положительными нелокальными характеристическими скоростями. Изучено влияние параметров задачи на устойчивость численного решения этой системы.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная характеристическая скорость, устойчивость, явная разностная схема, дискретная функция Ляпунова.

INFLUENCE OF MIXED PROBLEM PARAMETERS ON THE DISCRETE LYAPUNOV FUNCTION FOR A HYPERBOLIC SYSTEM WITH NONLOCAL CHARACTERISTIC VELOCITIES

Abstract. In this work, the problem of stabilizing the equilibrium position for a hyperbolic system with positive nonlocal characteristic velocities and measurement error is investigated. The problem of mixed control for a given hyperbolic system is presented. A discrete Lyapunov function is constructed and the theorem for the stability of the equilibrium state of the initial-boundary difference problem at the l^2 –norm relative to the discrete perturbation is given. Results of the numerical solution of a hyperbolic system consisting of two equations with positive nonlocal characteristic velocities were obtained. The influence of the problem parameters on the stability of the numerical solution of this system was studied.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal characteristic velocity, stability, explicit difference scheme, discrete Lyapunov function.

NOLOKAL XARAKTERISTIK TEZLIKLARGA EGA BO‘LGAN GIPERBOLIK SISTEMA UCHUN QO‘YILGAN ARALASH MASALA PARAMETRLARINING DISKRET LYAPUNOV FUNKSIYASIGA TA‘SIRI

Annotatsiya. Ushbu ishda musbat nolokal xarakteristik tezliklarga va o‘lchash xatoligiga ega bo‘lgan giperbolik sistema uchun muvozanat holatini turg‘unlashtirish masalasi o‘rganilgan. Berilgan giperbolik sistema uchun boshqaruv aralash masalasining qo‘yilishi keltirilgan. Diskret Lyapunov funksiyasi qurilgan va diskret qo‘zg‘alishga nisbatan l^2 –normada boshlang‘ich-chegaraviy ayirmali masalaning muvozanat holatining turg‘unlik teoremasi keltirilgan. Musbat nolokal xarakteristik tezliklarga ega bo‘lgan ikkita tenglamadan iborat giperbolik sistemani sonli yechish natijalari olingan. Ushbu sistema sonli yechimining turg‘unligiga masala parametrlarining ta‘siri o‘rganilgan.

Kalit so‘zlar: giperbolik tenglama, nolokal xarakteristik tezlik, turg‘unlik, oshkor ayirmali sxema, Lyapunov funksiyasi.

Введение и постановка задачи. Рассмотрим следующую симметрическую гиперболическую систему:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + M(\bar{A}(t)) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где

$$M(\bar{A}(t)) \square \text{diag}(\mu_1(a_1(t)), \mu_2(a_2(t)), \dots, \mu_m(a_m(t))), \\ U \square (u_1, u_2, \dots, u_m)^T, \quad \bar{A}(t) \square (a_1(t), a_2(t), \dots, a_m(t))^T.$$

где характеристические скорости $M(\bar{A}(t))$ зависят от интеграла неизвестного вектора функции по всей области $[0, 1]$

$$\bar{A}(t) = \int_0^1 U(t, x) dx, \quad t \in (0, +\infty). \quad (2)$$

Начальные условия для системы (1):

$$U(0, x) = \Phi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3)$$

Здесь $\Phi(x) \square (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))^T$ - заданная начальная вектор функция.

В этой работе ограничиваемся случаем, когда функции характеристических скоростей положительные, т.е. $M(\bar{A}(t)) > 0$. В таком случае из теории гиперболических систем известно, что граничные условия для системы (1) требуются только на левой границе, при $x=0$:

$$M(\bar{A}(t))U(t, 0) = \mathbf{V}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{V}(t) \square (V_1(t), V_2(t), \dots, V_m(t))^T$ - вектор-функция управления, которая используется для управления системой, т.е. обеспечением устойчивости равновесного состояния системы. На основе результатов работ [1-2], при соответствующем выборе $M(\bar{A}(t)), U(t, 0), \mathbf{V}(t)$ можно доказать корректность постановки смешанной задачи (1)-(4).

В этой работе рассмотрим один частный случай задания граничных условий. Относительно гиперболической системы (1) с нелокальными характеристическими скоростями здесь исследуем глобальную обратную задачу стабилизации замкнутой системы (1) по закону обратной связи:

$$\mathbf{V}(t) - MU^* = R \{ M(\bar{A}(t)) [U(t, 1) + \bar{\Delta}(t)] - MU^* \}, \quad t \in (0, +\infty). \quad (5)$$

где

$$M^* \square M(U^*) = \text{diag}(\mu_1(u_1^*), \mu_2(u_2^*), \dots, \mu_m(u_m^*)), \\ U^* \square (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)^T, \quad R \square \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m), \\ \bar{\Delta}(t) \square (\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_m(t))^T.$$

и $r_i \in [0, 1], i = \overline{1, m}$ - коэффициенты обратной связи, а U^* , где $u_i^* > 0, i = \overline{1, m}$ - заданное равновесие и $\bar{\Delta}(t)$ - ограниченное возмущение. Заметим, что при заданном равновесии значение характеристической вектор-функции вычисляется следующим образом:

$$M(\bar{A}(t))|_{U=U^*} = M(U^*).$$

В настоящей работе ограничиваемся следующим семейством характеристических скоростей типа

$$\mu_i(s) = \frac{P_i}{Q + s}, \quad s \in [0, +\infty), \quad i = \overline{1, m} \text{ с } P_i > 0, \quad Q > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (6)$$

Итак, рассмотрим следующую задачу управления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + M(\bar{A}(t)) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, +\infty), x \in (0, 1), \\ U(0, x) = U_0(x), \quad x \in (0, 1), \\ \mathbf{V}(t) - M U^* = R \{ M(\bar{A}(t)) [U(t, 1) + \bar{\Delta}(t)] - M^* U^* \}, \quad t \in (0, +\infty), \\ M(\bar{A}(t)) U(t, 0) = \mathbf{V}(t), \quad t \in [0, +\infty), \\ \bar{A}(t) = \int_0^1 U(t, x) dx, \quad t \in (0, +\infty). \end{array} \right. \quad (7)$$

где U - подлежащая определению вектор-функция, $M(\bar{A}(t)) \in C([0, +\infty), R_+^{m \times m})$ -

диагональная матрица функций характеристических скоростей, $R_+^{m \times m}$ - пространство квадратных матриц размерности $m \times m$, элементы которых являются ограниченными положительными функциями от t , $\bar{A}(t)$ - интеграл по x по всей области $[0, 1]$ от неизвестной вектор функции $U(t, x)$, $\mathbf{V}(t)$ - является контроллером, R - диагональная матрица обратной связи, элементы которых принадлежат полуинтервалу $[0, 1)$, U^* - является состоянием равновесия, $\bar{\Delta}(t)$ - является ограниченным (заданным) возмущением.

Экспоненциальная устойчивость численного решения. В этом разделе мы распространяем полученный нами результат экспоненциальной устойчивости решения дифференциальной задачи. Следующие результаты основаны на тех же оценках, что и в предыдущем разделе, и являются небольшим расширением доказательства, представленного в ([2], раздел 4.2).

Как и в ([2], раздел 4.2), мы применим для численного расчёта системы (7) противопоточную разностную схему. Для этого дискретизируем пространственную область $[0, 1]$ с помощью

равномерной сетки $\Omega_h = \left\{ x_j = \left(j - \frac{1}{2} \right) h, \quad j = \overline{1, J} \right\}$, h - шаг по x .

Аппроксимируем $\bar{A}(t)$ по формуле:

$$\bar{A}^k \square \left({}_1 a^k, {}_2 a^k, \dots, {}_m a^k \right)^T, \quad {}_i a^k = h \sum_{j=1}^k u_j^k, \quad k = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (8)$$

Далее определим дискретное значение M^k

$$\begin{aligned} M^k \square M(\bar{A}^k) &\equiv \text{diag}({}_1 \mu^k, {}_2 \mu^k, \dots, {}_m \mu^k), \\ {}_i \mu^k \square \mu({}_i a^k) &= \frac{{}_i P}{{}_i Q + {}_i a^k}, \quad {}_i P > 0, \quad {}_i Q > 0, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим, что выполнено условия Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\begin{aligned} 0 < \bar{\Lambda}^k \square \frac{\tau}{h} M^k &\leq E, \quad k = \{1, 2, \dots\}, \\ \bar{\Lambda}^k &= \text{diag}({}_1 \lambda^k, {}_1 \lambda^k, \dots, {}_m \lambda^k), \end{aligned} \quad (10)$$

τ = шаг по времени

Для численного решения системы (7) предлагаем противопоточную разностную схему:

$$\begin{cases} U_j^{k+1} = (1 - \bar{\Lambda}^k) U_j^k + \bar{\Lambda}^k U_{j-1}^k, & j = \overline{1, J}; k \in \{0, 1, \dots\}; \\ U_0^{k+1} = R U_1^{k+1} + (E - R) (M^k)^{-1} M^k U^* + R \bar{\Lambda}^{k+1}, & k \in \{0, 1, \dots\}; \\ U_j^0 = U_0(x_j), & j = \overline{0, J}. \end{cases}$$

$$R = \text{diag}({}_1 r, {}_2 r, \dots, {}_m r), \quad M^k = \text{diag}({}_1 \mu({}_1 u^*), {}_2 \mu({}_2 u^*), \dots, {}_m \mu({}_m u^*)), \quad (11)$$

$$U^* = ({}_1 u^*, {}_2 u^*, \dots, {}_m u^*)^T, \quad U_j^k = ({}_1 u_j^k, {}_2 u_j^k, \dots, {}_m u_j^k)^T, \quad \bar{\Lambda}^k \square ({}_1 \delta^k, {}_2 \delta^k, \dots, {}_m \delta^k)^T.$$

Введём в рассмотрение следующие матрицы:

$$U^k \square \text{diag}({}_1 u_1^k, {}_2 u_1^k, \dots, {}_m u_1^k, {}_1 u_2^k, {}_2 u_2^k, \dots, {}_m u_2^k, \dots, {}_1 u_j^k, {}_2 u_j^k, \dots, {}_m u_j^k),$$

$$U^* \square \text{diag} \left(\overbrace{{}_1 u^*, {}_2 u^*, \dots, {}_m u^*, {}_1 u^*, {}_2 u^*, \dots, {}_m u^*, \dots, {}_1 u^*, {}_2 u^*, \dots, {}_m u^*}^{m \times J} \right),$$

$$\bar{\Lambda}^k \square \text{diag}({}_1 \delta^k, {}_2 \delta^k, \dots, {}_m \delta^k).$$

Определение 1. Пусть $\Xi > 0$. Состояние равновесия U^* начально-краевой разностной задачи (11) является устойчивым в l^2 -норме относительно дискретных возмущений, которые удовлетворяют матричным неравенствам $\bar{\Lambda}^k \leq \Xi, k \in \{1, 2, \dots\}$, если существуют положительные вещественные константы $\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0$ и $\zeta_3 > 0$ такие, что для любого начального условия $U_j^0, j \in \{1, 2, \dots, J\}$ решение $U_j^k, k \in \{1, 2, \dots\}, j \in \{1, 2, \dots, J\}$ начально-краевой разностной задачи (11) удовлетворяет неравенству:

$$\|U^k - U\|_2 \leq \zeta_2 e^{-\zeta_1 k} \|U^0 - U\|_2 + \zeta_3 \max_{0 \leq s < k} (|\bar{\Lambda}^s|), \quad k \in \{1, 2, \dots\}, \quad (12)$$

где

$$U^k \square \begin{pmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ \dots \\ U_j^k \end{pmatrix}, \quad U \square \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ \dots \\ U_j^* \end{pmatrix}, \quad |\bar{\Lambda}^s| = \max_{0 \leq i < m} |\delta^s|.$$

и

$$\|U^k - U\|_2^2 \square h \sum_{j=1}^J (U_j^k - U_j^*), (U_j^k - U_j^*), \quad k \in \{0, 1, \dots\}.$$

Определение 2 (Дискретная функция Ляпунова). Говорят, что функция $L: \check{Y}^{m \times J} \rightarrow \check{Y}_0^*$ является дискретной функцией Ляпунова для начально-краевой разностной задачи (11), если

(i) существуют положительные константы $\chi_1 > 0$ и $\chi_2 > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \dots\}$:

$$\chi_1 \|U^k - U\|_2^2 \leq L(U^k) \leq \chi_2 \|U^k - U\|_2^2, \quad (13)$$

(ii) существуют положительные константы $\eta > 0$ и $\nu > 0$ такие, что для всех $k \in \{0, 1, \dots\}$:

$$\frac{\mathbf{L}(\mathbf{U}^{k+1}) - \mathbf{L}(\mathbf{U}^k)}{\Delta t} \leq -\eta \mathbf{L}(\mathbf{U}^k) + \nu (\bar{\Delta}^k, \bar{\Delta}^k)^2.$$

Для упрощения обозначений в дальнейшем мы будем определять последовательность дискретных значений \mathbf{L}^k как

$$\mathbf{L}^k = \mathbf{L}(\mathbf{U}^k), \quad k \in \{0, 1, \dots\}$$

и где \mathbf{U}^k заданное решение начально-краевой разностной задачи (11).

Теорема. (Дискретная устойчивость для случая $\mathbf{U}^* \geq 0$). Предположим, что условие КФЛ (11) выполнено. Пусть $\bar{\Xi} > 0$. Для каждого \mathbf{U}^* , удовлетворяющего матричному неравенству $\mathbf{U}^* \geq 0$, каждого R удовлетворяющего матричному неравенству $0 \leq R < 1$, каждого $\mathbf{U} > 0$ и для любых начальных данных \mathbf{U}^0 удовлетворяющих матричному неравенству с $\mathbf{U}^0 \geq 0$, и

$$\|\mathbf{U}^0 - \mathbf{U}^*\|_{l^2} < \mathbf{U} \quad (14) \text{ решение } \mathbf{U}^k \text{ начально-краевой}$$

разностной задачи (11) удовлетворяет матричным неравенствам $\mathbf{U}^k \geq 0, k \in \{0, 1, \dots\}$, а стационарное состояние \mathbf{U}^* начально-краевой разностной задачи (11) является устойчивым в l^2 -норме относительно любой дискретной функции возмущения $\bar{\Delta}^k, k \in \{0, 1, \dots\}$, такой что справедливо матричное неравенство $\bar{\Delta}^k \leq \bar{\Xi}$.

Вычислительный эксперимент. В этом разделе в области $x \in [0, 1]$ рассмотрим диагональную гиперболическую систему 2×2 для инвариантов Римана u и v . Используем положительные нелокальные характеристические скорости λ_1, λ_2 зависящие от пространственных интегралов u и v . Применяем диссипативные граничные условия при $x=0$ вида $u(0, t) = -k^* \text{mean}(u)$, $v(0, t) = -k^* \text{mean}(v)$. Дискретизируем гиперболическую систему с помощью явной разностной схемы против потока (эта схема подходит, поскольку характеристические скорости положительны). Вычисляем дискретную энергию $E(t) = \int_0^1 (u^2 + v^2) dx$ и численно показываем экспоненциальное убывание. Значения параметров задачи выбраны для наглядного отображения экспоненциального убывания.

В области $\{(x, t) : x \in [0, 1], t \geq 0\}$ рассмотрим диагонализированную (в переменных Римана) симметрическую 2×2 систему:

$$\begin{cases} \partial_t u + \lambda_1(t) \partial_x u = 0, \\ \partial_t v + \lambda_2(t) \partial_x v = 0, \end{cases}$$

где характеристические скорости $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ зависят нелокальным образом от решения (через интегралы по пространству):

$$\lambda_1(t) = a + \alpha \int_0^1 u(x, t) dx, \quad \lambda_2(t) = b + \beta \int_0^1 v(x, t) dx,$$

с $a, b > 0$ и коэффициентами α, β такими, что $\lambda_{1,2}(t) > 0$ (гарантируется отсечкой/положительной конструкцией).

Начальные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x),$$

и диссипативные граничные условия на входящем конце $x=0$ (так как характеристические скорости положительны — характеристики исходят слева):

$$u(0, t) = -k \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx, \quad v(0, t) = -k \frac{1}{L} \int_0^L v(x, t) dx,$$

где $k > 0$ — коэффициент диссипации (обратная связь), $L=1$. Эти граничные условия

обеспечивают рассеяние энергии через границу (линейная обратная связь по среднему значению).

Энергия (в непрерывной постановке):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2 + v^2) dx.$$

Цель: показать экспоненциальное убывание дискретной энергии при выбранной схеме.

Сетка: равномерная, шаг по $x - \Delta x$, по времени Δt .

Так как $\lambda_{1,2}(t) > 0$, применим одностороннюю противоточную разностную схему:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_1^n (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad i=1, \dots, N-1,$$

и u_0^{n+1} задаётся граничным условием $u_0^{n+1} = -k \cdot \text{среднее}(u^n)$. Аналогично для v . Условие

CFL: $\max_t \lambda(t) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ (на практике взято CFL=0.9).

Дискретная оценка убывания энергии. Для противоточной разностной схемы при положительных характеристических скоростях стандартно получать априорную оценку энергии за счёт граничного вклада. Простейшая дискретная энергия

$$E^n = \sum_{i=0}^{N-1} ((u_i^n)^2 + (v_i^n)^2) \Delta x$$

при обновлении даёт член, содержащий разность квадрата и граничный вклад от $i=0$. Благодаря граничному условию $u_0^{n+1} = -ku^n$ получается вклад порядка $-ck\Delta E^n$ (линейный отрицательный вклад в энергию) при небольших предположениях о знаках — это даёт неравенство вида

$$E^{n+1} \leq (1 - c\Delta) E^n$$

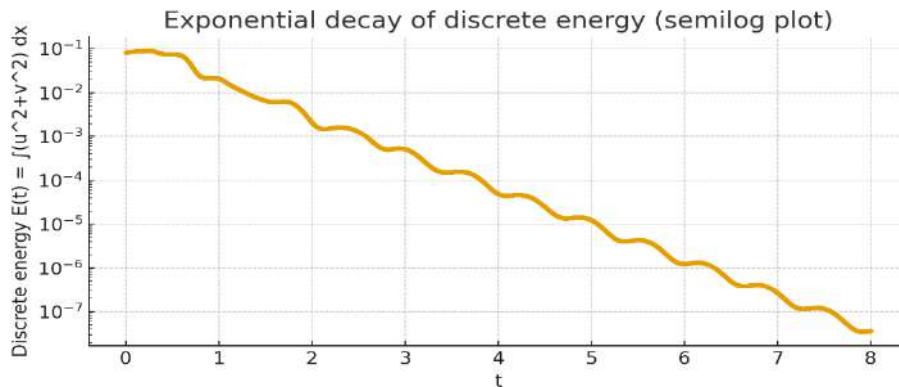
с некоторым $c > 0$ пропорциональным k (и зависящим от размеров множителей), откуда по итерации

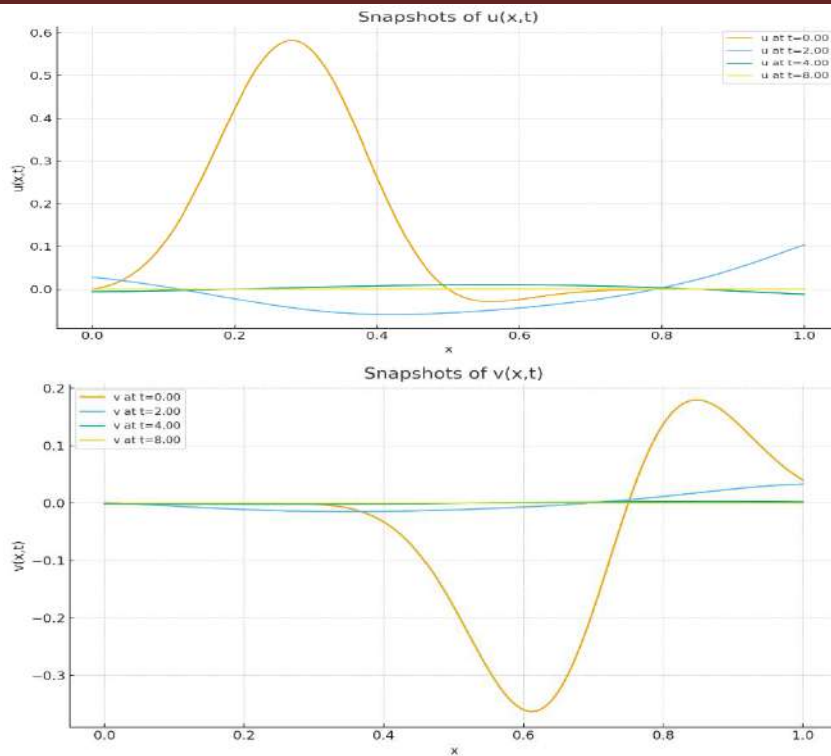
$$E^n \leq E^0 (1 - c\Delta)^n \approx E^0 e^{-cn\Delta} = E^0 e^{-\alpha_n}.$$

То есть экспоненциальная устойчивость дискретного решения.

Итак, численно показано, что при выбранных положительных нелокальных скоростях и линейно диссипативных граничных условиях дискретная энергия убывает экспоненциально. Это подтверждает интуитивно корректность дискретного Ляпунов-аргумента.

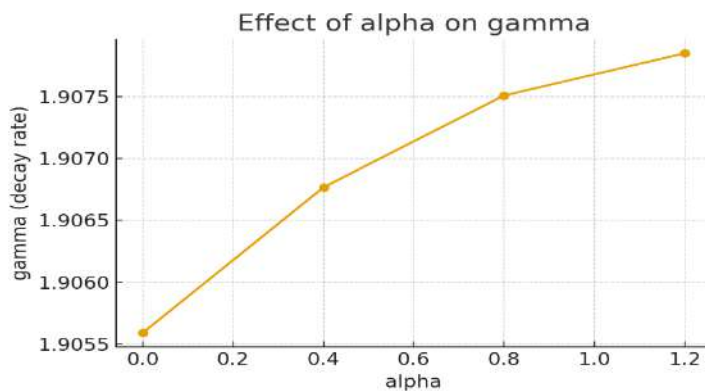
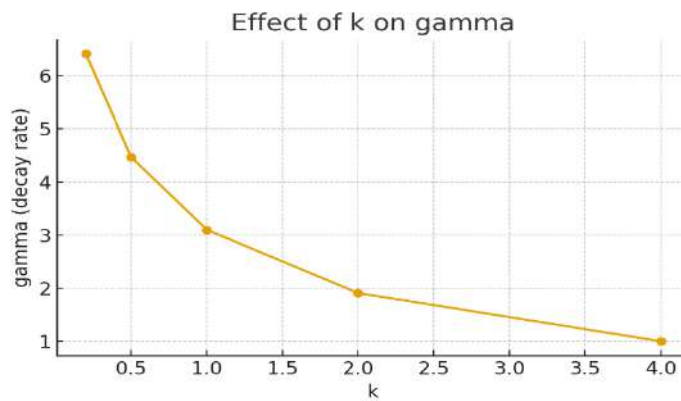
Итак ниже даётся численный пример и смоделирована поведение дискретного решения. Ниже приведём формулировку задачи, дискретизацию, оценка устойчивости и дадим краткое резюме полученных численных результатов.

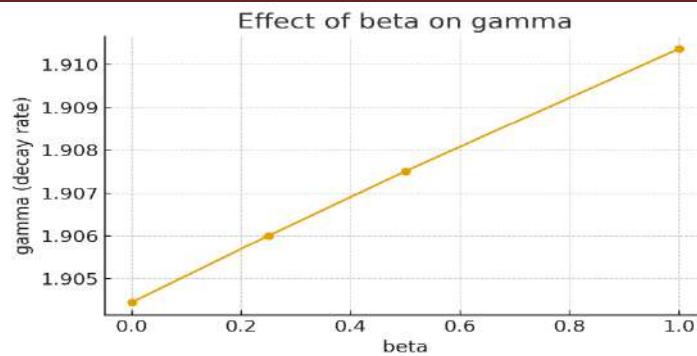




Влияние параметров задачи. Изучим влияние параметров (k, α, β, a, b) и начальных данных на γ . Проведём серию экспериментов (параметрический анализ).

Проводим параметрический анализ (one-factor-at-a-time) для параметров (k, α, β, a, b) и амплитуды начальных данных.





Заключение. В данной работе исследована задача стабилизации положения равновесия для гиперболической системы с положительными нелокальными характеристическими скоростями и погрешностью измерения. Приведена постановка задачи смешанного управления для данной гиперболической системы. Построена дискретная функция Ляпунова, и приведена теорема устойчивости равновесного состояния начально-краевой разностной задачи при нормальном относительно дискретного возмущения. Получены результаты численного решения гиперболической системы, состоящей из двух уравнений с положительными нелокальными характеристическими скоростями. Изучено влияние параметров задачи на устойчивость численного решения данной системы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Coron, J.M.; Wang, Z. *Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity*. *SIAM J. Math. Anal.* 2013, 45, 2646–2665, doi:10.1137/120902203.
2. Chen, W.; Liu, C.; Wang, Z. *Global Feedback Stabilization for a Class of Nonlocal Transport Equations: The Continuous and Discrete Case*. *SIAM J. Control Optim.* 2017, 55, 760–784, doi:10.1137/15m1048914.
3. Simone Göttlich, Michael Herty and Gediyon Weldegiyorgis. *Input-to-State Stability of a Scalar Conservation Law with Nonlocal Velocity*. *Axioms* 2021, 10, 12. <https://doi.org/10.3390/axioms10010012>.
4. Алоев Р.Д., Алимова В.Б. Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2023. – № 2(47) 2023.-С.
5. Алоев Р.Д., Бердышев А., Алимова В.Б. Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболического уравнения с отрицательной нелокальной характеристической скоростью и погрешностью измерения // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2024. – № 1(55) 2024.-С. 122-140.
6. Rakhmatillo Djuraevich, Abdumauvlen Suleimanovich Berdyshev, Vasila Alimova and Kymbat Slatovna Bekenayeva. *Exponential Stability of the Numerical Solution of a Hyperbolic System With Nonlocal Characteristic Velocities*// *axioms* № 13(334) 2024.-С. 1-21.
7. Алоев Р.Д., Алимова В.Б. Исследование экспоненциальной устойчивости численного решения гиперболической системы с отрицательными нелокальными характеристическими скоростями // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2025. – № 4(68) 2025.-С. 75-88.
8. Alov R., Berdyshev A., Alimova V. *Exponential stability of a numerical solution of a hyperbolic system with negative nonlocal characteristic velocities and measurement error*// *Uzbek Mathematical Journal* 2025, Volume 69, Issue 4, pp.7-14.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*. М., «Наука», 1968. 687 стр.
10. Сакамото Р. *Смешанные задачи для гиперболических уравнений*. -В кн. «Математика», 1972, т.16, №1, с. 62-100.
11. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем*. М., «Наука», 1971. 553 стр.

О НЕТЕРОВОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАСТЯГИВАЮЩИМ СДВИГОМ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Маматов Шамсидин Каршиевич,

Ургутский филиал Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова

Усмонов Бахтиёр Зохиорович,

Ургутский филиал Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова

Улугбекова Азиза Улугбек кизи,

Ургутский филиал Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова

tamatov shamsiddin @ samduuf.uz

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы нетеровости сингулярных интегральных операторов с необратимым сдвигом и обратимости одного оператора в обобщённых пространствах Гельдера. Результаты обратимости функциональных операторов направлены на приложения к теории сингулярных интегральных операторов с необратимым сдвигом в обобщённых пространствах Гельдера.

Ключевые слова: Банахово пространство, функция сдвига, ядро, коядро, спектральный радиус, обратимый.

UMUMLASHTIRILGAN GYOLDER FAZOLARIDA CHO‘ZILGAN SILJISHLI SINGULAR INTEGRAL OPERATORLARNING NEYTERIYA XOSSASI HAQIDA

Annotatsiya. Maqolada teskarilanmovchi siljishli singulyar integral operatorlarning Nyoter operatori bo‘lishlik shartlari o‘rganilib, dastlab tatbiqi teskarilanmovchi siljishli singulyar integral operatorning Nyoter operatori bo‘lishlik shartlarida qo‘llaniladigan bir funksional operatorning teskarilanuvchi bo‘lishlik shartlari umumlashgan Gyolder fazolarida konturning siljish funksiyasi cho‘zuvchi bo‘lgan hol uchun qaraladi. So‘ngra, cho‘zuvchi siljishli singulyar integral operatorning umumlashgan Gyolder fazolarida Nyoter operatori bo‘lishlik shartlari o‘rganiladi.

Kalit so‘zlar: Banax fazosi, siljish funrsiyasi, yadro, koyadro, spectral radius, teskarilanuvchi.

ON THE NOETHERIAN PROPERTY OF SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH STRETCHING SHIFT IN GENERALIZED HÖLDER SPACES

Abstract. The article considers the Noetherian properties of singular integral operators with irreversible shift and the invertibility of one operator in generalized Hölder spaces. The results on the invertibility of functional operators are aimed at applications to the theory of singular integral operators with irreversible shift in generalized Hölder spaces.

Keywords: Banach spase, bounded function, operator Noetherian, kernel, cokernel.

Введение. Интенсивное систематическое изучение уравнений, в которых предельные значения искомых функций вычисляются в различных точках несущего контура, связаны с сингулярными интегро-функциональными уравнениями и соответствующими им операторами, у которых линии особенностей ядер задаются отображениями (сдвигами) кривой интегрирования на себя.

Метод исследования и характер получаемых для сингулярных интегральных операторов со сдвигом результатов существенно зависят от пространств, свойств коэффициентов a , d функционального оператора, функции сдвига и контура интегрирования.

В основополагающих для этой проблематики исследованиях Г.С. Литвинчука [1], посвящённых построению теории Нетера сингулярных интегральных операторов, изучался случай периодического диффеоморфизма при предположении непрерывности коэффициентов.

Напомним, что линейный ограниченный оператор называется нетеровым, если образ оператора замкнут, а размерность ядра и коядра конечны.

Весомый вклад в развитие теории сингулярных интегральных операторов с таким сдвигом внесли Н.К. Карапетянц и С.Г.Самко [2 – 4] , Н.Я. Крупник и В.И. Няга [5] и другие. Подчеркнём, что во всех работах, посвящённых сингулярным интегральным операторам со сдвигом, предполагалось, что отображение (сдвиг) действует на контуре носителей гомеоморфно.

Теория с необратимым сдвигом только начинает создаваться. В этом направлении первый шаг сделан был в работах Ю.Д. Латушкина [6] в пространстве L_p . Что касается теории нетеровости интегральных операторов с необратимым сдвигом в обычных и обобщённых пространствах Гельдера, то она до последнего времени не изучалась. Таким образом, в настоящей статье результаты о функциональных операторах и об операторах взвешенного необратимого сдвига направлены на приложения к теории сингулярных интегральных операторов с необратимым сдвигом. В то же время исследование таких операторов представляет значительный самостоятельный интерес.

Пусть Γ - простой замкнутый гладкий контур, d – диаметр Γ , α – дифференцируемое отображение (сдвиг) Γ на себя, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Согласно [1] через Φ обозначим класс неотрицательных функций $\omega(\delta) \neq 0$ заданных в промежутке $(0, d]$ и удовлетворяющих условиям:

а) $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности,

б) $\sup_{\delta \in (0, d]} \frac{\delta}{\omega(\delta)} \int_0^d \frac{\omega(t)}{t^2 + t\delta} dt < +\infty$.

В качестве характеристики непрерывных на Γ функций выбирается модуль непрерывности

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|t-\tau| < \delta} |f(t) - f(\tau)|, \delta \in (0, d].$$

Определение 1. Комплексная функция $f(t)$ принадлежит классу $H_\omega(\Gamma)$, если она определена на кривой и удовлетворяет условию $\omega(f, \delta) \leq c_f \omega(\delta)$, $\delta \in (0, d]$, где $\omega(\delta) \in \Phi$, c_f – постоянная, зависящая от функции $f(t)$.

Известно, что $H_\omega(\Gamma)$ становится банаховым пространством, если ввести норму следующим образом:

$$\|f\|_{H_\omega(\Gamma)} = \|f\|_{C(\Gamma)} + \sup_{\delta \in (0, d]} \frac{\omega(f, \delta)}{\omega(\delta)}.$$

Пространство $H_\omega(\Gamma)$ назовём обобщённым пространством Гельдера. В частности, если $\omega(\delta) = \delta^\mu$ ($0 < \mu < 1$), то $H_\omega(\Gamma)$ превращается в обычное пространство Гельдера $H_\mu(\Gamma)$. Заметим, что для любой функции $\omega(\delta) \in \Phi$ существуют постоянные $0 < \mu < \nu < 1$, $c_1, c_2 > 0$ такие, что $\varepsilon \in (0; 1)$

и $\delta \in (0; d]$ выполняется

$$c_2 \varepsilon^\nu \leq \frac{\omega(\varepsilon \delta)}{\omega(\delta)} \leq c_1 \varepsilon^\mu \tag{1}$$

Пусть \mathcal{E} -множества фиксированных точек Γ .

Определение 2. Функция $\omega(\delta)$ принадлежит множеству Φ_0 , если $\omega(\delta) \in \Phi$ и для любого постоянного $k > 0$ существует предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(k\delta)}{\omega(\delta)}$.

Заметим, что множество $\bigcup_{\omega \in \Phi_0} H_\omega$ намного шире множества обычных гильдеровских функций H_μ , ($0 < \mu < 1$). Для того чтобы вычислить спектральный радиус $R_\omega(T_g)$ оператора T_g в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$, сначала вычислим спектральный радиус $R_\omega(T_g)$ в пространстве $H_\omega^0(\Gamma, \tau) = \{f(t) \in H_\omega(\Gamma) : f(\tau) = 0\}$, $\tau \in \Gamma$ - любая фиксированная неподвижная точка $\alpha(t)$. Согласно [1], норму в этом пространстве определяем равенством $\|f\|_\omega^* = \sup_{\delta \in (0, d]} \frac{\omega(f, \delta)}{\omega(\delta)}$, $t, x \in \Gamma$. Предлагаемый способ вычисления спектрального радиуса $R_\omega(T_g)$ и $R_\omega^0(T_g)$ оператора T_g соответственно в пространствах $H_\omega(\Gamma)$ и $H_\omega^0(\Gamma, \tau)$, $\omega \in \Phi_0$, связан, с одной стороны, с необратимостью сдвига $\alpha(t)$, а с другой стороны, со спецификой пространств $H_\omega(\Gamma)$. Нормы $\|\cdot\|_{H_\omega^0}$ и $\|\cdot\|_{H_\omega}$ эквивалентны в пространстве $H_\omega^0(\Gamma, \mathcal{E})$. В самом деле $\|f\|_{H_\omega^0(\Gamma, \mathcal{E})} \leq \|f\|_{H_\omega(\Gamma)}$. С другой стороны для $f(t) \in H_\omega^0$

$$\|f\|_{C(\Gamma)} \leq \omega(d) \cdot \|f\|_\omega$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\omega(d)+1} \|f\|_{H_\omega(\Gamma)} \leq \|f\|_{H_\omega^0(\Gamma, \mathcal{E})} \leq \|f\|_{H_\omega(\Gamma)}$$

Отметим, что $H_\omega^0(\Gamma, \mathcal{E})$ тоже является банаховым пространством.

Пусть α – N – листное сохраняющее ориентацию неособое дифференцируемое растягивающее ($|\alpha'(t)| > 1$) отображение простого замкнутого гладкого контура Γ на себя, $N \in \mathbb{N}$, $\alpha'(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, $N \geq 2$. Через W обозначим оператор необратимого сдвига, действующий по правилу $(Wf)(t) = f(\alpha(t))$, $t \in \Gamma$, через T_g оператор умножения на обобщённо гильдеровскую функцию.

Оператор взвешенного необратимого сдвига будем называть $T_g = gW$.

Оператор W ограниченно действует в $H_\omega(\Gamma)$, и для его нормы справедлива следующая оценка:

$$\|W\|_{H_\omega(\Gamma)} \leq \max \left\{ 1, \sup_{t,x \in \Gamma} \frac{\omega(|\alpha(t) - \alpha(x)|)}{\omega(|t-x|)} \right\}.$$

Теорема 1. Спектральный радиус оператора T_g в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$ вычисляется по формуле:

$$R_\omega(T_g) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{t \in F_k} \left\{ G_k^{\frac{1}{k}}(t) \right\}, \quad (2)$$

где F_k – множество неподвижных точек α_k на Γ , α_k k -я итерация отображения α , $G_k^{\sim}(t) = \prod_{j=0}^{k-1} g^{\sim}(\alpha_j(t))$, $g^{\sim}(t) = |g(t)| \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha(t)| \cdot \delta)}{\omega(\delta)}$

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть α – растягивающее отображение Γ на себя.

Рассмотрим действующий в пространстве $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$ оператор взвешенного необратимого сдвига $Tg = g \circ W$. где $g(t) \in H_\omega(\Gamma)$. Для того чтобы вычислить спектральный радиус $R_\omega(Tg)$, оператора Tg в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$, сначала вычислим спектральный радиус $R(Tg)$ оператора Tg в пространстве:

$$H_\omega^0(\Gamma, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(t) \in H_\omega(\Gamma) : f(\tau) = 0 : f(\tau) = 0\}.$$

τ - любая фиксированная неподвижная точка}

Введём следующие обозначения: $g^{\sim}(t) = |g(t)| \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha^1(t) \cdot \delta|)}{\omega(\delta)}$,

$$G_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1} g(\alpha_j(t)), \quad \tilde{G}_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1} g^{\sim}(\alpha_j(t)) = |G_k(t)| \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha_k^1(t) \cdot \delta|)}{\omega(\delta)} \quad (3)$$

где $k \in \mathbb{N}$. $G_0(t) = 1, \quad t \in \Gamma$

$$R_\omega \Gamma_{(g)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in \Gamma} \left\{ \tilde{G}_k(t) \right\}^{1/k}, \quad (4)$$

Отметим, что $\tilde{g}(t)$ непрерывна на Γ . Действительно, так как $\alpha'(t)$ непрерывна на Γ , то

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ что при $|t - x| < \delta$ имеем $|\alpha'(t) - \alpha'(x)| < \varepsilon$. То согласно полуаддитивности $\omega(\delta)$ и неравенству получаем:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\alpha'(t) \cdot \delta)}{\omega(\delta)} - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\alpha'(x) \cdot \delta)}{\omega(\delta)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha'(t) - \alpha'(x)| \cdot \delta)}{\omega(\delta)} < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\varepsilon \cdot \delta)}{\omega(\delta)} < C_1 \varepsilon^\mu, \quad \mu \in (0, 1)$$

Следовательно, $\tilde{g}(t)$ непрерывен как произведение двух непрерывных функций. Кроме того, напомним, что предел в правой части (4) существует согласно известной лемме Поля.

Лемма 1. Спектральный радиус оператора T_g в пространствах $H_\omega^0(\Gamma, \tau)$, $\omega \in \Phi_0$ вычисляется соответственно по формуле:

$$R_\omega^0(Tg) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in \Gamma} \left\{ \tilde{G}_k(t) \right\}^{1/k} \quad (5)$$

Обозначим:

$$Y_k(t, x) = |G_k(t) f(\alpha_k(t)) - G_k(x) f(\alpha_k(x))| \frac{1}{\omega(|t-x|)}, \quad \text{где } t, x \in \Gamma, t \neq x, k \in \mathbb{N},$$

$$f(t) \in (H_\omega^0(\Gamma, \tau))$$

Следующие леммы справедливы для растягивающих отображений.

Лемма 2. Пусть $k, k_0 \in \mathbb{N}; k > k_0; \delta > 0, \varepsilon > 0; t, x$ – произвольные точки Γ . Если для достаточно малого $\delta > 0$ выполнено $|\alpha_j(t) - \alpha_j(x)| < \delta, j = \overline{0, k - k_0}$, то верно неравенство:

$$|G(t)| \frac{1}{\omega(|t-x|)} \leq C \left(1 + \varepsilon(\delta) + C_1(\varepsilon(\delta))^M \right) \tilde{G}_k(t) \frac{1}{\omega(|\alpha_k(t) - \alpha_k(x)|)}. \quad (6).$$

здесь и ниже буквой C обозначаются постоянные, не зависящие от k , Функция $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0; \mu \in (0, 1)$.

Доказательство. Воспользуемся тождеством:

$$\frac{|G_k(t)|}{\omega(|t-x|)} = \prod_{j=0}^{k-1} \left| g(\alpha_j(t)) \right| \cdot \frac{\omega \left| \frac{\alpha_{j+1}(t) - \alpha_{j+1}(x)}{\alpha_j(t) - \alpha_j(x)} \cdot (|\alpha_j(t) - \alpha_j(x)|) \right|}{\omega(|\alpha_j(t) - \alpha_j(x)|) \cdot \omega(|\alpha_k(t) - \alpha_k(x)|)}. \quad (7)$$

При достаточно малом $\delta > 0$ и любых $t, x \in \Gamma$ для которых $|t-x| < \delta$, выполнено

$$|\alpha(t) - \alpha(x)| |t-x|^{-1} \leq |\alpha^1(t)| + \varepsilon(\delta)$$

Согласно определению класса Φ_0 (см. опр.1.3 § 1) и второму неравенству (1.3)

$$\frac{\omega\left(\frac{|\alpha(t)-\alpha(x)|}{t-x}\cdot(t-x)\right)}{\omega(|t-x|)} \leq \frac{\omega(|\alpha^1(t)|\cdot|t-x|)}{\omega(|t-x|)} + \frac{\omega(\varepsilon(\delta)\cdot|t-x|)}{\omega(|t-x|)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha'(t)|\cdot\delta)}{\omega(\delta)} + \varepsilon(\delta) + C_1(\varepsilon(\delta))^\mu \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha'(t)|\cdot\delta)}{\omega(\delta)} \left(1 + \frac{\varepsilon(\delta) + C_1(\varepsilon(\delta))^\mu}{m_\omega}\right),$$

где $m_\omega = \min_{t \in \Gamma} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha(t)|\cdot\delta)}{\omega(\delta)}\right)$.

Поэтому, согласно (7), левая часть (6) оценивается сверху выражением:

$$\tilde{G}_{k-k_0+1}(t) \left(1 + \frac{\omega(\delta) + (\varepsilon(\delta))^{M-k_0}}{m_\omega}\right) \cdot \left(\max_{t \in \Gamma} |g(t)|\right)^{k_0-1} \cdot \sup_{t, x \in \Gamma} \left(\frac{\omega(|\alpha(t)-\alpha(x)|)}{\omega(|t-x|)}\right)^{k_0-1} \cdot \frac{1}{\omega(|\alpha_k(t)-\alpha_k(x)|)}.$$

что и требуется доказать. Лемма доказана.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$

Лемма 3. Пусть дуга $\tilde{\gamma} = [t, x] \subset \Gamma$ такова, что для некоторой компоненты связности γ множества S при $j = 0, \bar{k}$, найдётся такая компонента связности $\gamma^{(k-j)}$ образа γ при отображении α_{k-j} , тогда для достаточно больших k верна оценка:

$$Y_k(t, x) \leq C_k(R_\omega C(g) + \varepsilon)^k \|f\|_\omega^* \tag{8}$$

где $C_k^{1/2} \rightarrow 1 + (\varepsilon + C, \varepsilon^\mu) \cdot m_\omega^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно условию леммы, по любому $\delta > 0$ найдётся такой k_0 , для которого при $j = 0, \bar{k} - k_0$ выполняется:

$$|\alpha_j(t) - \alpha_j(x)| < \theta_{k-j}(\delta) < \delta \tag{9}$$

Выберем δ так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon(\delta) < \varepsilon$. Легко видеть, что

$$Y_{k(t,x)} \leq |G_k(t)| \cdot \frac{|f(\alpha_k(t)) - f(\alpha_k(x))|}{\omega(|t-x|)} + \sum_{v=0}^{k-1} |G_v(t)| \cdot \frac{|g(\alpha_v(t)) - g(\alpha_v(x))|}{\omega(|t-x|)} \cdot |G_{k-v-1}(\alpha_{\gamma+1}(x))| |f(\alpha_k(x))| \tag{10.}$$

Для $v = 1, \bar{k}$ имеем:

$$\frac{G_v(t)}{\omega(|t-x|)} \leq C \left(1 + \frac{\varepsilon + C_1 \varepsilon^\mu}{m_\omega}\right)^v \tilde{G}_v(t) \frac{1}{\omega(|\alpha_v(t) - \alpha_v(x)|)}. \tag{11}$$

Пусть τ^* – лежащий в $\tilde{\gamma}^{(k)}$ прообраз конца γ – компонента связности множества Γ .

Имеем

$$|G_{k-v-1}(\alpha_{v+1}(x))| \cdot |f(\alpha_k(x))| = G_{k-v-1}(\alpha_{v+1}(x)) \cdot \frac{1}{\omega(|\alpha_{v+1}(x) - \alpha_{v+1}(r^*)|)} \cdot \omega(|\alpha_{v+1}(x) - \alpha_{v+1}(r^*)|) \cdot |f(\alpha_k(x))| \cdot |f(\alpha_k(r^*))| \cdot \omega(|\alpha_k(x) - \alpha_k(r^*)|) \cdot \omega(|\alpha_k(x) - \alpha_k(r^*)|) \leq C(1 + (\varepsilon + C_1 \varepsilon^\mu) / m_\omega)^{k-v-1} \tilde{G}_{k-v-1}^{(\alpha_{v+1}(x))} \|f\|_\omega^*.$$

Согласно, при $k \rightarrow \infty$

$$\max_{t \in \tilde{C}} \{\tilde{G}_k(t)\}^{1/k} \rightarrow R_\omega(T_g).$$

Лемма доказана.

Пусть $g(t) \neq 0, t \in \Gamma$. Зафиксируем $t \in \Gamma$, и ближайшую к t точку $\tau \in F$ – конец компоненты связности $\gamma \in \Gamma$, содержащей $t \in \gamma$.

Лемма 4. Для достаточно больших k верна оценка:

$$|G_k(t)^*| \cdot \frac{1}{\omega(|t^* - r^*|)} \geq C_k \tilde{G}_k(r^*) \left(1 - \frac{\varepsilon - C_1 \varepsilon^\mu}{M_\omega}\right), \tag{12}$$

где $C_k^{1/k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, $M_\omega = \max_{t \in \Gamma} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha^1(t)|\cdot\delta)}{\omega(\delta)}\right)$.

Доказательство. Для любого $\delta > 0$ найдётся такой k_0 , для которого $j = 0, \bar{k} - k_0$ выполнено неравенство $|\alpha_j(t^*) - \alpha_j(r^*)| < \delta$, Так как модуль $|\alpha'(t)|$ отдалён от нуля на Γ , то для

$|t - x| < \delta$ при достаточно малом δ выполнено $|\alpha(t) - \alpha(x)| |t - x|^{-1} \geq |\alpha'(t)| - \varepsilon(\delta)$

где $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\omega(|\alpha(t) - \alpha(x)|)}{\omega(|t-x|)} &\geq \frac{\omega(\alpha'|x| \cdot |t-x|)}{\omega(|t-x|)} - \frac{\omega(\varepsilon \cdot |t-x|)}{\omega(|t-x|)} \geq \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(|\alpha'(t)|\cdot\delta)}{\omega(\delta)} \left(1 - \frac{\varepsilon - C_1 \varepsilon^\mu}{M_\omega}\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись тождеством (7), имеем:

$$|G_k(t^*)| \cdot \frac{1}{\omega(|t^* - r^*|)} \geq C_k G_{k-k_0+1}(t^*) \left(1 - \frac{\varepsilon - C_1 \varepsilon^\mu}{M_\omega}\right)^{k-k_0}$$

Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы 1. Отметим, что $T_g \in tr(P_\tau, I - P_\tau)$ в $H_\omega(\Gamma)$, где tr-матрица нижнетреугольная, P_τ и $I - P_\tau$ – взаимно дополнительные проекторы в $H_\omega(\Gamma)$. Спектр $P_\tau T_g P_\tau$ в $m P_\tau$ состоит из единственной точки $g(\tau)$. Поскольку α – отображение растягивающее, для спектрального радиуса $R_\omega^0(T_g)$ оператора T_g в $H_\omega^0(\Gamma, \tau)$, пользуясь выше доказанными леммами, имеем $R_\omega^0(T_g) \geq |g(t)|$. Отсюда следует доказываемое равенство, что завершает доказательство теоремы.

В качестве следствия теоремы получим.

Следствие. Спектр оператора T_g в $H_\omega(\Gamma)$ представляет собой круг с центром в начале координат радиуса $R_\omega(T_g)$.

Рассмотрим функциональный оператор вида $K = aI - dW$, где $a, d \in H_\omega(\Gamma)$

Основным результатом данного исследования является следующая

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Оператор $K = aI - dW$ обратим в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$.
- 2) Для функций a и d выполняются (i) $a(t) \neq 0, t \in \Gamma$; (ii) $R_\omega(T_{a^{-1}d}) < 1$.

Доказательство. Импликация 2) \rightarrow 1) очевидна. Докажем 1) \rightarrow 2). Пусть условие (i) доказано. Тогда в силу теоремы 1, предположим, что $R_\omega(T_g) > 1$. Множество обратимых операторов открыто равномерной топологии. Поэтому не уменьшая общности, можно считать $g(t) = \frac{d(t)}{a(t)} \neq 0, t \in \Gamma$ и $R_\omega(T_g) > 1$. Учитывая (i), при необходимости мало возмущая функцию g , для некоторой точки $\tau \in F_k$ имеем: 1) $G_k(\tau) \neq 1$; 2) $G_k \sim > 1$.

Теперь мы находимся в условиях теоремы 1, что противоречит обратимости оператора K . Импликация 1) \rightarrow (ii) доказана. Доказательство импликации получается аналогично. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть α – растягивающее отображение Γ на себя. $a(t) \neq 0, d(t) \neq 0, t \in \Gamma$. Оператор K обратим только слева (Φ_0^+ -оператор) тогда и только тогда, когда $R_\omega(T_g) > 1$, где $g = \frac{d}{a}$.

Действительно, если выполнено условие $R_\omega(T_g) > 1$, то в силу теоремы 1 K обратим в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$, только слева. Пусть теперь K обратим только слева, но $R_\omega(T_g) > 1$. Множество обратимых только слева операторов открыто в равномерной топологии. Учитывая $a(t) \neq 0$, при необходимости мало возмущая функцию $g = \frac{d}{a}$ имеем $R_\omega(T_g) < 1$.

Тогда в силу теоремы 2 K двусторонне обратимый оператор и тем самым получим утверждение следствия.

Теперь докажем критерий нетеровости оператора $U = K_1 P_+ + K_2 P_-$ где $P_\mp = \frac{1}{2}(I \mp S)$, I – тождественный оператор S – оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши действующий по формуле:

$$(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(x)}{x-t} dx, x, t \in \Gamma$$

Коэффициент K_i -функциональный оператор вида

$$K_i = a_i I - d_i W, i=1,2.$$

$a_i, d_i \in H_\omega(\Gamma)$ -операторы умножения на функции, W -оператор сдвига определяемый формулой

$$(Wf)(t) = f(\alpha(t)), t \in \Gamma.$$

Теорема 3. Пусть α -сохраняющее ориентацию отображение без периодических блоков. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) U нетеров в $H_\omega(\Gamma)$, $\omega \in \Phi_0$;
- 2) K_i обратим в $H_\omega(\Gamma)$, $i = 1, 2$.
- 3) для функций a_i и d_i выполняется

- а) $a_i \neq 0, t \in \Gamma$; б) $R_\omega(T_{g_i}) < 1, i = 1, 2$ где $g_i(t) = \frac{d_i(t)}{a_i(t)}, i = 1, 2$ При выполнении условий 1)-2)

индекс оператора U вычисляется по формуле:

$$\text{Ind } U = \text{ind}_\Gamma \frac{a_2}{a_1} \tag{13}$$

Доказательство. Импликации 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1) и 2) \Rightarrow б) при условии $a_i(t) \neq 0, t \in \Gamma, i = 1, 2$, следуют из компактности $WS-SW$ и теоремы 2. Формула для индекса доказывается гомотопией оператора U семейством операторов

$$U_\lambda = (a_1 I - \lambda d_1 W) P_+ + (a_2 I - d_2 W) P_-, \lambda \in [0; 1],$$

к оператору $a_1P_+ + a_2P_-$, индекс которого равен правой части (13) (см.[7]) где

$$\text{ind}_\Gamma \frac{a_2(t)}{a_1(t)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \arg \frac{a_2(t)}{a_1(t)} \right\}_\Gamma,$$

через $\{*\}_\Gamma$ обозначено приращение функции $\frac{a_2(t)}{a_1(t)}$ вдоль Γ .

Докажем импликацию 1) \Rightarrow 3). Пусть U нетеров в $H_\omega(\Gamma)$ и 1) \Rightarrow а) доказано.

Достаточно показать что из нетеровости

$$U(1, g) = (I - T_g)P_+ + P_-, g = \frac{d}{a},$$

следует неравенство $R_\omega(T_g) < 1$, где в условия а) и б) опущен индекс “i”.

Предположим, что $R_\omega(T_g) \geq 1$. Множество нетеровых (обратимых) операторов открыто в равномерной топологии. Учитывая а), формулу (1) и при необходимости мало возмущая функцию $g(t)$ для некоторой точки $\tau_k \in F_k$ где F_k -множество k -периодических точек отображения α предполагаем выполненными неравенства:

$$G_k^\sim(\tau) > 1; |G_k(\tau)| \neq 1.$$

Теперь мы находимся в условиях 1) $G_k(\tau) \neq 1 (\forall \tau \in \Gamma)$; 2) $\sup_{\tau \in \Gamma} G_k^\sim(\tau) > 1$.

Тогда найдётся дуга $\Delta \subset \Gamma$ и такой левый обратный к оператору $A = I - T_g$ в $H_\omega(\Gamma)$ оператор A^{-1} , что для всех $f(t) \in H_\omega(\Gamma)$ с носителем $\text{supp} f \subset \Delta$ выполнено $f \in \text{Ker } A^{-1}$, и мы находимся в этих условиях. Выберем дугу Δ , а также левый обратный к $A = I - T_g$ в $H_\omega(\Gamma)$ оператор A^{-1} .

В силу нетеровости $U \stackrel{\text{def}}{=} U(1, g) = (I - T_g)$ оператор $U^{-1} = P_+A^{-1} + P_-$ является правым регуляризатором для U . Фиксируем $f \in H_\omega, \text{supp} f \subset \Delta$, и точку t_0 для которой $f(t_0) \neq 0, f(t) \in \text{Ker } A^{-1}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} FP_+ &\approx P_+fI \approx P_+U^{-1}U^{-1}fI \approx P_+(AP_+ + P_-)(P_+A^{-1} + P_-)fI = \\ &= P_+AP_+A^{-1}fI = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $f(t_0)I - f(t)P_+ = (f(t_0) - f(t))P_+ + f(t_0)P_-$ нетеров как сумма обратимого и компактного операторов. Но $(f(t_0) - f(t))P_+ + P_-$ нетеров (см[7]) в пространстве $H_\omega(\Gamma)$ тогда и только тогда когда $f(t_0) - f(t) \neq 0, t \in \Gamma$.

Так как при $t=t_0$ указанный оператор не нетеров. Полученное противоречие доказывает, что $R_\omega(T_g) < 1$.

Завершим теперь доказательство теоремы, установив что 1) \Rightarrow а). Согласно сказанному, достаточно показать что из нетеровости оператора:

$$U(a, d) = (aI - dW)P_+ + P_-, a, d \in H_\omega(\Gamma)$$

следует $a(t) \neq 0, t \in \Gamma$.

Так как U нетеров в $H_\omega(\Gamma)$, то $U(a, d)$ тоже нетеров и

$$\text{Ind } U(a, d) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \arg a(t) \right\}_\Gamma. \tag{14}$$

Пусть $a(t_0) = 0, t \in \Gamma$. Множество нетеровых операторов открыто в равномерной топологии. Выберем достаточно близкие к $a(t)$ функции $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{a}^\sim(t)$ так чтобы $\tilde{a}(t) \neq 0, \tilde{a}^\sim(t) \neq 0, t \in \Gamma$. Тогда из нетеровости $U(a, d)$ будет следовать нетеровость оператора $U(\tilde{a}, d)$ и $U(\tilde{a}^\sim, d)$.

Заметим, что для функций \tilde{a} и \tilde{a}^\sim будут выполнены условия теоремы. Однако легко выбрать \tilde{a} и \tilde{a}^\sim так, что $\text{ind } \tilde{a} \neq \text{ind } \tilde{a}^\sim$ а это противоречит (2) и теореме об устойчивости индекса нетерового оператора. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 2 было фактически доказано что нетеровость оператора U с необратимым сдвигом в $H_\omega(\Gamma)$ эквивалентна обратимости операторов K_1, K_2 в $H_\omega(\Gamma)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука. 1977.- 448 с.
2. Карапетянц Н.К., Самко С.К. Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных операторов со сдвигом. Докл. АН СССР. 1972. Т.202. №2. С.273-276.
3. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Сингулярный интегральный оператор на оси с дробно-линейным сдвигом и нетеровость операторов с инволюцией. Изв. АН Арм.ССР. Сер.

Матем.1972.Т.7.№1.С.68-77.

4. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочно-непрерывных коэффициентов *Изв. ВУЗов.Сер.мат. 1975. №2.С.43-54.*

5. Крупник Н.Я., Няга. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом вдоль кусочно-ляпуновского контура. *Изв. ВУЗов.Мат.1975. №6. С.60-72.*

6. Латушкин Ю.Д. Об интегро-функциональных операторах с неважно-однозначным сдвигом. *Изв. АН СССР.Сер.мат.1981. Т.45.№6.С.1241-1257.*

7. Карлович Ю.И. Турсункулов Б. О функциоальных и сингулярных интегральных операторах с некарлемановским сдвигом в обобщённых пространствах Гельдера. Самарканд. 1983. Рукопись представлена Самаркандским ун-том. Деп. в УзНИИНТИ 20 июня 1983.

2030

UZBEKISTAN RESEARCH ONLINE

uzjournals.edu.uz



® digital object
identifier

Google
scholar

ROAD

DIRECTORY
OF OPEN ACCESS
SCHOLARLY
RESOURCES

ADVANCED SCIENCES INDEX

**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
29.10.2025 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish
Bukhari street, 190 B-house