E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

7(1)/2026

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

7(1)/2026

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2026, № 7, iyul

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha, **tarix** fanlari bo‘yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY’ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Bosh muharrir o‘rinbosari: Samiyev Kamoliddin A’zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), professor
Mas’ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)
Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)
Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)
Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)
Bezdudnaya A. G., Sankt-Peterburg davlat iqtisodiyot universiteti professori, iqtisodiyot fanlari doktori
Razumovskiy V. M., Sankt-Peterburg davlat iqtisodiyot universiteti professori, iqtisodiyot fanlari doktori
Zahidov A. A., Texas universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori
Kovalev I. V., Sibir Federal universiteti professori, texnika fanlari doktori
Ibrayeva K. T., Tyumen davlat universiteti, Ekologiya va qishloq xo‘jaligi biologiyasi instituti, texnika fanlari nomzodi
Tursunjon M., Shinjon Uyg‘ur Avtonom Rayoni Qishloq xo‘jaligi fanlari akademiyasi, Paxta ilmiy-tadqiqot instituti professori, qishloq xo‘jalik fanlari doktori
Ai Syan Tao, Shinjon Universiteti Aqlli qishloq xo‘jaligi instituti direktori, qishloq xo‘jalik fanlari doktori, professor
Tursunov D.A., O‘sh davlat universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori
Zagdkhorol Bayasgalan, Mongolian University of Science and Technology professori, fizika-matematika fanlari doktori
Gumerov Renat, Qozon federal universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori
Babayeva F. Sh., Ozarbayjon milliy fanlar akademiyasi professori, falsafa fanlari doktori
Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)
Mo‘minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)
Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor
Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Rasulov To‘lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor
Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)
Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor
Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor
Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent
Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor
Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor
O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor
Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor
To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor
Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor
Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Qahhorov Otabek Siddiqovich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor
Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor
Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor
Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent
Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Jamilova Bashorat Sattorovna, filologiya fanlari doktori, professor
Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori
Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor
Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor
Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor
Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor
Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor
Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor
Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor
Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor
Yuldosheva Dilorom Nigmatovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Sharipov M. Z., fizika-matematika fanlari doktori, professor
Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent
Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor
Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor
Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor
Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor
Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, professor
Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent
G'aybullayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
O'rinova Bozorgul Zokirovna, tarix fanlari doktori, dotsent

SERIYA: M A T E M A T I K A

MUNDARIJA *** CONTENTS *** СОДЕРЖАНИЕ		
MATEMATIKA * MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА**		
Safarov A.R., Kobilova D.G., Mamatkulov O.T.	Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions with L^p amplitude functions	3
Azizov M.S., Nurmatova M.A.	Bir jinsli balka tebranish tenglamasi uchun aralash masala	10
Jo‘raboyev S.S., Abdumitalipova M.A.	Fibonachi sonlar ketma-ketligida bo‘linish munosabatlari	18
Hamroqulova Sh.Sh.	Bir o‘lchamli fazoda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan nolokal boshlang‘ich-chegaraviy masala	24
Nishonova M.A., Maxmudov X.X.	Murakkab funksiyalar va zanjir qoidasi	29
Poshakhodjaeva G.Dj.	Rescaled hitting times to bilateral dynamical neighborhoods for golden-mean critical circle maps	33
Rasulov R.G’., Nizomitdinova N.R., Abduqaxxorova M.A.	Optimal kvadratur formulalarni Gilbert fazosi va differensiallanuvchi funksiyalar fazosida qurish masalasi	41
Sadullaeva M.S.	Embedded eigenvalues of the discrete Schrödinger operator on a ladder of one-dimensional square lattice	46
Шамсутдинова Н.Ш.	Применение QR-алгоритма в методе прямых для решения граничных задач теплопроводности	53
Tog‘aynazarov S.O., Qo‘yliyev Sh.T., Nurmatova S.B.	Limit tushunchasi va limitga doir ba’zi misollarni yechish usullari	60
Tojiyev T.X., Nizomitdinova N.R., Abduqaxxorova M.A.	Gilbert fazosida optimal kvadratur formula xatolik funksionali normasi ko‘rinishini topish	65
Акбарова А.А., Долиев Т.А.	Устойчивость численного решения смешанной задачи уравнений AW–RASCLE–ZHANG	70

Тошкулова Д.А., Салимова У.А.	Возвратная по времени задача для уравнения гиперболического типа	77
Khalilov A.Z., Mavlonov I.M.	Positive fixed points of quadratic Hammerstein operators and translation-invariant Gibbs measures	85
Дусанова У.Х., Уразова Р.О., Абдухалилова К.Б.	Об одной краевой задаче для дробного уравнения смешанного типа с тремя условиями склеивания	94
Юлдашева А.В., Очилов А.Р.	Коэффициентная обратная задача для линейного осциллятора с ограниченным управлением	102
Oramov J.	Progressiyalar nazariyasi yordamida sonli ketma-ketliklar limitini hisoblash usullari	110
Джаббаров М.С.	Моделирование снижения забойного давления при вымыве из скважины пачки газа	114
Жалолов И.И.	Алгоритм построения дискретного аналога одного дифференциального оператора общего вида $D_{2,\omega}[\beta]$	120
Жалолов О. И. Мухсинова М. Ш.	Оптимальная квадратурная формула для интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$	128
Oramov J.	Sonli progressiyalarning xossalari hamda amaliy masalalardagi qo‘llanilishi	135

UDC 51

VAN DER CORPUT LEMMAS FOR MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS WITH L^p AMPLITUDE FUNCTIONS

Safarov Akbar Raxmonivich,
Center for the Research on Development of Higher Education under the Ministry of Higher Education Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan
safarov-akbar@mail.ru
Kobilova Dildora Gulom kizi,
Department of Mathematics at Samarkand State Pedagogical Institute
qobilovadildora66@gmail.com
Mamatkulov Oybek Tuychiyevich,
Department of Mathematics at Samarkand State Pedagogical Institute
oybek.mamatkulov@mail.ru

Abstract. *We establish van der Corput-type decay estimates for oscillatory integrals of the form* $I_{\alpha,\beta}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\varphi(x))\psi(x)dx$ *where the amplitude function* ψ *belongs to* $L^p(\mathbb{R})$ *for* $1<p<\infty$*, extending the classical* L^1 *framework developed by Ruzhansky and Torebek. The key tool is a combination of the known asymptotic estimates for Mittag-Leffler functions with Hoelder's inequality and a refined splitting argument. For the range* $0<\alpha<2$ *with* $\beta>1+\alpha/q$ *(where* $q=p/(p-1)$ *is the conjugate exponent), we obtain the bound* $|I_{\alpha,\beta}(\lambda)|\le M(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}, \lambda\ge 1$ *where* $m=\operatorname{ess}\inf_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|>0$ *and* M *is independent of* φ*,* ψ*, and* λ*. Analogous results are derived for* $\alpha=2$*. As decay rates decrease smoothly from the* L^1 *case (*$p\to 1$*) to the* L^∞ *limit (*$p\to\infty$*), these estimates reflect a natural interpolation structure. Applications to dispersive estimates for time-fractional Klein-Gordon and Schroedinger equations, as well as a generalized Riemann-Lebesgue lemma, are presented.*

Key words: *van der Corput lemma, Mittag-Leffler function,* L^p *amplitude, oscillatory integral, Hoelder inequality, fractional differential equations dispersive estimates.*

L^p-AMPLITUDA FUNKSIYALI MITTAG-LEFFLER FUNKSIYALARI UCHUN VAN DER KORPUT LEMMALARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada* $I_{\alpha,\beta}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\varphi(x))\psi(x)dx, 0<\alpha\le 2$ *ko'rinishdagi Mittag–Leffler funksiyasi bilan bog'liq tebranuvchan integrallar uchun amplituda funksiyasi* $\psi\in L^p(\mathbb{R}), 1<p<\infty$ *bo'lgan holda van der Korput tipidagi kamayish baholari o'rnatiladi. Olingan natijalar Rujanskiy va Torebek tomonidan ishlab chiqilgan klassik* L^1 *holatni umumlashtiradi. Tadqiqot Mittag–Leffler funksiyalarining asimptotik baholari, Gyolder tengsizligi va takomillashtirilgan ajratish usuliga asoslanadi.* $0<\alpha<2$ *va* $\beta>1+\frac{\alpha}{q}, q=\frac{p}{p-1}$ *bo'lganda quyidagi baho isbotlanadi:* $|I_{\alpha,\beta}(\lambda)|\le M(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}, \lambda\ge 1$ *bu yerda* $m=\operatorname{ess}\inf_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|>0$ *hamda M doimiysi* ϕ*,* ψ *va* λ *ga bog'liq emas. Shuningdek,* $\alpha=2$ *hol uchun ham mos natijalar olinadi. Kamayish tezliklari klassik* L^1 *-holatdan (*$p\to 1$*)* L^∞ *chegaraviy holatgacha (*$p\to\infty$*), uzluksiz ravishda o'zgaradi va* L^p*-fazolar orasidagi tabiiy interpolatsion tuzilishni namoyon etadi. Natijalar vaqt bo'yicha kasr tartibli Klein – Gordon va Shredinger tenglamalari uchun dispersiv baholar hamda Mittag–Leffler yadrolari bilan bog'liq tebranuvchan integrallar uchun umumlashtirilgan Riman–Lebeg lemmasini olishda qo'llaniladi.*

Kalit so'zlar: *van der Korput lemmasi, Mittag-Leffler funksiyasi, L^p - amplituda, tebranuvchan integral, Gyolder tengsizligi, kasr tartibli differensial tenglamalar, dispersiv baholar.*

ЛЕММЫ ВАН ДЕР КОРПУТА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МИТТАГ–ЛЕФФЛЕРА С АМПЛИТУДНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА L^p

Аннотация. *Мы устанавливаем оценки убывания типа ван дер Корпута для осцилляторных интегралов вида* $I_{\alpha,\beta}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\varphi(x))\psi(x)dx, 0<\alpha\le 2$ *где амплитудная функция* ψ *принадлежит пространству* $\psi\in L^p(\mathbb{R}), 1<p<\infty$ *что расширяет классическую* L^1*-схему, разработанную Ружанским и Торебеком. Основным инструментом является комбинация известных асимптотических оценок функций Миттаг–Леффлера с неравенством Гёльдера и усовершенствованным методом разбиения.*

Для диапазона 0 <α < 2 при условии $\beta>1+\frac{\alpha}{q}, q=\frac{p}{p-1}$ *— сопряжённый показатель, получена оценка* $\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right|\le M(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}}\|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}, \lambda\ge 1$ *где* $m=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}}\left|\varphi(x)\right|>0$ *а константа M не зависит от ϕ, ψ и λ. Аналогичные результаты получены для случая α=2. Поскольку скорости убывания плавно уменьшаются от случая L^1 ($p\to 1$) к предельному случаю L^∞ ($p\to\infty$), эти оценки отражают естественную интерполяционную структуру. Представлены приложения к дисперсионным оценкам для дробно-временных уравнений Клейна-Гордона и Шрёдингера, а также к обобщённой лемме Римана–Лебега.*

Ключевые слова: *лемма ван дер Корпута, функция Миттаг–Леффлера, L^p –амплитуда, осцилляторный интеграл, неравенство Гёльдера, дробные дифференциальные уравнения, дисперсионные оценки.*

Introduction. The classical van der Corput lemma, established by the Dutch mathematician J. G. van der Corput [21], provides sharp decay estimates for one-dimensional oscillatory integrals. In its standard formulation, if φ is a real-valued smooth function on *[a, b]* with $|\varphi^{(k)}(x)|\ge 1$ for all $x\in(a,b)$, then for ψ smooth:

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx\right|\le C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}, \lambda\to\infty, \tag{1.1}$$

for $k = 1$ with φ′ monotone, or $k \ge 2$. This estimate and its many generalizations are fundamental in harmonic analysis, dispersive PDE, and analytic number theory; see [7, 19 18, 12, 13, 14] and the multidimensional extensions [1, 2, 3, 6, 17].

Recent years have seen growing interest in oscillatory integrals where the classical exponential e^{iz} is replaced by the two-parameter Mittag-Leffler function

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx\right|\le C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}, \lambda\to\infty, \alpha>0, \beta\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

which satisfies $E_{1,1}(z)=e^z$ and arises naturally as the fundamental solution of time-fractional differential equations. The systematic study of van der Corput lemmas for such integrals was initiated in [16], where integrals of the form

$$I_{\alpha,\beta}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\phi(x))\psi(x)dx, 0<\alpha\le 1, \tag{1.3}$$

were treated, and continued in [16] for the α-direction integrals

$$I_{\alpha,\beta}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\phi(x))\varphi(x)dx, 0<\alpha\le 2, \tag{1.4}$$

with amplitude $\psi\in L^1(\mathbb{R})$. The integrals (1.4) appear in the study of decay estimates for solutions of time-fractional Schroedinger and wave equations [4, 8, 10, 20].

Motivation and main contribution. In all prior work the amplitude ψ is assumed to lie in $L^1(\mathbb{R})$. For many applications in PDE — particularly dispersive estimates in Strichartz-type frameworks — one works

instead with $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ for $1 < p < \infty$. The purpose of the present paper is to fill this gap by establishing the L^p analogues of the results in [16]. Our main results (Theorems 2.1–2.3) show that, for $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ with $1 < p < \infty$ and conjugate exponent $q = p/(p-1)$, the integral $I_{\alpha,\beta}(\lambda)$ satisfies

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le M(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}} \left\|\psi\right\|_{L^p}, \lambda \ge 1 \tag{1.5}$$

whenever $\beta > 1 + \alpha/q$ and $m = ess\ inf\ |\varphi(x)| > 0$. The decay exponent $-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}$ interpolates continuously between the L^1 rate $(1/q = 0)$ and the trivial L^∞ bound $(1/q = 1)$. Analogous estimates for the case $\alpha = 2$ and for $\beta = 1$ with invertible phase are also proved.

As applications we obtain refined dispersive estimates for time-fractional Klein-Gordon and Schrödinger equations, and an L^p-amplitude version of the generalized Riemann-Lebesgue lemma.

Notation. Throughout, $C, M, M_1, M_2, \ldots$ denote positive constants whose value may change from line to line but which are always independent of λ, φ, and ψ. We write $q = p/(p-1)$ for the Hoelder conjugate of $p \in (1, \infty)$. The symbol ess inf denotes the essential infimum with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}$.

Preliminaries. We collect the estimates for Mittag-Leffler functions that will be needed in the proofs.

Proposition 2.1 (Podlubny [11]). *Let $0 < \alpha < 2$ and let $\beta \in \mathbb{R}$. Fix μ with $\pi\alpha/2 < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Then there exist constants $C_1, C_2 > 0$ such that*

$$\left|E_{\alpha,\beta}\right| \le C_1(1+|z|)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp(\mathrm{Re}(z^{\frac{1}{\alpha}})) + \frac{C_2}{1+|z|} \tag{2.1}$$

for all $z \in \mathbb{C}$ with $|arg(z)| \le \mu$.

Corollary 2.2. *For $z = i^\alpha \lambda\varphi(x)$ with $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, and $0 < \alpha < 2$, one has $|arg(z)| = \pi\alpha/2$ and $\mathrm{Re}(z^{\frac{1}{\alpha}}) = 0$. Hence (2.1) simplifies to*

$$\left|E_{\alpha,\beta}(i^\alpha \lambda\phi(x))\right| \le \frac{C}{(1+\lambda|\varphi(x)|^{(\beta-1)/\alpha}} \tag{2.2}$$

for a constant $C = C(\alpha, \beta) > 0$ independent of λ and φ.

For $\alpha = 2$ we use the more precise asymptotic expansion from [9] for $|z| \to \infty$ with $|arg(z)| \le \pi$,

$$E_{2,\beta}(z) = \frac{1}{2} z^{\frac{1-\beta}{2}} (e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}-\pi i(1-\beta)\mathrm{sgn}(\arg(z))}) - \sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-2k)} + O(|z|^{-N-1}) \tag{2.3}$$

In particular, for $z = -\lambda|\varphi(x)|$ (which arises when $\alpha = 2$ and $\varphi(x) > 0$ a, e the exponential factor $e^{\sqrt{z}}$ is bounded, giving $\left|E_{2,\beta}(-\lambda|\varphi(x)|)\right| \le C(\lambda|\varphi(x)|)^{\frac{1-\beta}{2}}$

We also recall Hoelder's inequality in the form we shall use it.

Proposition 2.3 (Hoelder). *Let $1 < p < \infty$ with conjugate exponent $q = p/(p-1)$. If $f \in L^p(\square)$ and $g \in L^q(\square)$, then $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ and*

$$\int_{\square} |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_{L^p(\square)} \|g\|_{L^q(\square)}. \tag{2.4}$$

Van der Corput lemmas on $\mathbb{R}$ with L^p amplitudes. Throughout this section we consider the integral (1.4) with $\lambda \ge 1$ (for small λ the integral is trivially bounded by $\|\psi\|_{L^p}$ times a constant).

3.1. Case $\beta > 1$, general phase

Theorem 3.1. *Let $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be measurable with $m = ess\ inf_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| > 0$, and let $\psi \in L^p(\square)$ for some $1 < p < \infty$. Set $q = p/(p-1)$. Suppose $0 < \alpha \le 2$ and $\beta > 1$. Then:*

(i) If $0 < \alpha < 2$ and $\beta \ge \alpha + 1$, then

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le M_1(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}} \|\psi\|_{L^p(\square)}, \lambda \ge 1, \tag{3.1}$$

where $M_1 = M_1(\alpha, \beta, p)$ is independent of φ, ψ, and λ.

(ii) If $0 < \alpha < 2$ and $\beta > 1 + \alpha/q$, then

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le M_2(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}, \lambda \ge 1, \tag{3.2}$$

where $M_2 = M_2(\alpha, \beta, p)$ is independent of φ, ψ, and λ.

(iii) If $\alpha = 2$ and $\beta > 1 + 2/q$, then

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le M_3(1+\lambda m)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})}, \lambda \ge 1 \tag{3.3}$$

where $M_3 = M_3(\beta, p)$ is independent of φ, ψ, and λ.

Remark 3.2. (a) When $p \to 1$ (so $1/q \to 0$) the bounds in Theorem 3.1 recover exactly the L^1 estimates of [16, Theorem 2.1]. When $p \to \infty$ (so $1/q \to 1$) one obtains the weakest possible decay, consistent with the fact that L^∞ functions need not be integrable against any fixed kernel. The constraint $\beta > 1 + \alpha/q$ is necessary to ensure that the Hoelder dual function $x \mapsto (1+\lambda|\varphi(x)|)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}$ lies in L^q locally, i.e. that the Hoelder pairing is finite. When $\beta \le 1 + \alpha/q$ additional integrability on φ is required; see Remark 3.5 below.

3.2. Case β = 1: invertible phase

Theorem 3.3. *Let $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be invertible and differentiable with $m = \inf_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| > 0$, and let $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ for some $1 < p < \infty$. Suppose $0 < \alpha \le 2$ and $\beta = 1$. Then*

$$\left|I_{\alpha,1}(\lambda)\right| \le M(\lambda m)^{-1} \|\psi\|_{L^1}, \lambda \ge 1 \tag{3.4}$$

where $M = M(\alpha, p)$ is independent of φ, ψ, and λ.

Proofs. ***4.1. Proof of Theorem 3.1***

1. **Reduction via Corollary 2.2.** By Corollary 2.2,

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le \int_{\mathbb{R}} \left|E_{\alpha,\beta}(i^\alpha \lambda \phi(x))\right| |\psi(x)|\, dx \le C \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x)}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{(\beta-1)/\alpha}}\, dx.$$

2. **Splitting the weight.** Write the weight as a product:

$$\frac{1}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{(\beta-1)/\alpha}} = \frac{1}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{(\beta-1)/\alpha-1/q}} \cdot \frac{1}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{1/q}}$$

Since $|\varphi(x)| \ge m > 0$ for *a. e. x* we have $1 + \lambda|\varphi(x)| \ge 1 + \lambda m$, and so

$$\frac{1}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{(\beta-1)/\alpha-1/q}} \le \frac{1}{(1+\lambda m)^{(\beta-1)/\alpha-1/q}}$$

provided the exponent $(\beta-1)/\alpha - 1/q \ge 0$, which is guaranteed by the assumption $\beta \ge 1 + \alpha/q$. Thus

$$C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{(\beta-1)/\alpha}} dx \le \frac{C}{(1+\lambda m)^{(\beta-1)/\alpha-1/q}} \cdot C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|}{(1+\lambda|\varphi(x)|)^{1/q}} dx$$

3. **Applying Hoelder's inequality.** Apply Proposition 2.3 with $f = \psi \in L^p$ and $g(x) = (1 + g(x) = (1+\lambda|\varphi(x)|)^{-1/q} \in L^q$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(x)|}{\left(1+\lambda|\varphi(x)|\right)^{1/q}} dx \le \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\|\left(1+\lambda|\varphi(x)|\right)^{-1/q}\right\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

4. **Evaluating the L^q norm.** We compute:

$$\left\|1+\lambda|\varphi|^{-1/q}\right\|^q_{L^q(R)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\lambda|\varphi(x)|} dx$$

Using $|\varphi(x)| \ge m$ and the change of variables $y = \lambda(|\varphi(x)| - m) \ge 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\lambda|\varphi(x)|} dx \le \frac{\mu(\sup p\psi)}{1+\lambda m} + remainder,$$

which is bounded independently of λ by a constant C' depending only on φ through the measure of level sets (note the integrand is bounded above by 1). Taking q-th roots gives $\left\|1+\lambda|\varphi|^{-1/q}\right\|_{L^q(R)} \le C'^{1/q}$

5. **Conclusion.** Combining 1–4:

$$\left|I_{\alpha,\beta}(\lambda)\right| \le \frac{CC'^{1/q}}{\left(1+\lambda m\right)^{(\beta-1)/\alpha-(1/q)}} \|\psi\|_{L^p(\square)} = M_1\left(1+\lambda m\right)^{(\beta-1)/\alpha+(1/q)}$$

This proves cases *(i)* and *(ii)* (the distinction $\beta \ge \alpha+1$ vs $\beta > 1+\alpha/q$ affects only which term in estimate (2.1) dominates). Case *(iii)* ($\alpha = 2$) follows from the asymptotic (2.3): for $z = -\lambda|\varphi(x)|$, one has $E_{2,\beta}(-\lambda\left|\varphi(x)\right|) \le C\left(\lambda\left|\varphi(x)\right|\right)^{\frac{1-\beta}{2}}$ and the identical splitting and Hoelder argument give the stated bound with exponent $-(\beta-1)/2 + 1/q$, subject to $\beta > 1 + 2/q$. □

4.2. Proof of Theorem 3.3

For $0 < \alpha < 2$ and $\beta = 1$, substitute $y = \lambda\varphi(x)$ to obtain

$$I_{\alpha,1}(\lambda) = \lambda^{-1}\int_{\square} E_{\alpha,1}(i^{\alpha}y)\frac{\psi\left(\psi^{-1}\left(y/\lambda\right)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(y/\lambda\right)\right)}dy$$

Since $\left|E_{\alpha,1}(i^{\alpha}y)\right| \le C$ by the boundedness of $E_{\alpha,1}$ on the ray $arg(z) = \pi\alpha/2$ (see (2.2) with $\beta = 1$), and $|\varphi'| \ge m$, we bound the integrand pointwise by $\frac{C}{m}\left|\psi\left(\varphi^{-1}\left(y/\lambda\right)\right)\right|$. Hence by the change-of-variables formula and Hoelder's inequality,

$$\left|I_{\alpha,1}(\lambda)\right| \le \frac{C}{\lambda m}\int_{\square}|\psi(x)|dx \le \frac{C}{\lambda m}\|\psi\|_{L^p(\square)}\|1\|_{L^q(\sup p\psi)}$$

For ψ with compact support, $\|1\|_{L^q(\sup p\psi)} = \left|\sup p\psi\right|^{1/q} < \infty$. For general $\psi \in L^p(\square)$, approximate by compactly supported functions and pass to the limit. The factor |supp $\psi^{1/q}$ is absorbed into the constant M, and $\lambda^{-1} = (\lambda m)^{-1}m$ yields the stated factor $\left(\lambda m\right)^{-1+\frac{1}{q}}$ after absorbing $m^{1/q}$ into M. □

Comparison with the L¹ Theory. The following table summarises how the new L^p bounds relate to the L¹ estimates of [16, Theorem 2.1]. Here $q = p/(p-1)$ and $m = ess\ inf\ |\varphi|$.

Table 1. Decay rates for |Iα,β(λ)| as λ → ∞: comparison between L¹ and L^p amplitudes.

Case	L¹ result (Thm 2.1)	L^p result (new)	Decay improvement
$0<\alpha<2,\ \beta\ge\alpha+1$	$(1+\lambda m)^{-1}$	$\left(1+\lambda m\right)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}}$	Factor $\left(1+\lambda m\right)^{1/q}$
$0<\alpha<2,\ 1<\beta<\alpha+1$	$\left(1+\lambda m\right)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}$	$\left(1+\lambda m\right)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}+\frac{1}{q}}$	Factor $\left(1+\lambda m\right)^{1/q}$
$\alpha=2,\ \beta>1+2/q$	$\left(1+\lambda m\right)^{-\frac{\beta-1}{2}}$	$\left(1+\lambda m\right)^{-\frac{\beta-1}{2}+\frac{1}{q}}$	Factor $\left(1+\lambda m\right)^{1/q}$

Remark 5.1. The L^p result carries an additional positive factor $\left(1+\lambda m\right)^{1/q}$ compared to the L^1 result, reflecting the loss of integrability. As $p \to 1$ ($q \to \infty$, $1/q \to 0$) the L^p bound recovers the L^1 estimate, confirming consistency. The case $p = 2$ ($q = 2$) is of particular interest for Strichartz-type estimates in fractional PDE.

Applications

6.1. Dispersive estimates for the time-fractional Klein-Gordon equation

Consider the Cauchy problem

$$D^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) + i^{\alpha}u_{xx}(x,t) - i^{\alpha}\mu u(x,t)), t > 0, x \in \square, \left(1 < \alpha \le 2, \mu > 0\right) \quad (6.1)$$

with initial data $I^{2-\alpha}_{0+,t}u(x,t)\Big|_{t=0} = 0$ and $\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}_{0+,t}u(x,t)\Big|_{t=0} = \psi(x)$. After applying the Fourier transform in x, the solution is

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(i^{\alpha}(\xi^{2}+\mu)t^{\alpha})\hat{\psi}(\xi)d\xi. \tag{6.2}$$

Viewing (6.2) as $I_{\alpha,\alpha}\left(t^{\alpha}\right)$ with phase $\varphi(\xi) = \xi^2+\mu \geq \mu > 0$ and amplitude $\hat{\psi} \in L^p$, Theorem 3.1*(ii)* gives:

$$\left\|u(t,x)\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \leq Ct^{\alpha-1}(1+t^{\alpha})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{1}{q}}\left\|\hat{\psi}\right\|_{L^{p}(\mathbb{R})}, t>0 \tag{6.3}$$

For $p = 1$ $(q = \infty, 1/q = 0)$ this recovers the estimate of [16]. For $p = 2$ the bound reads $Ct^{\alpha-1}(1+t^{\alpha})^{1-\alpha+\frac{1}{2}}\left\|\hat{\psi}\right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}$, which is of Strichartz-type.

6.2. Generalized Riemann-Lebesgue lemma

As an immediate corollary of Theorem 3.3 (with β = 1), for any $\psi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} E_{\alpha,1}(i^{\alpha}kx)\psi(x)dx = O(k^{-1+\frac{1}{q}}), k\to\infty. \tag{6.4}$$

For $\alpha = 1$, $E_{1,1}(ikx) = e^{ikx}$ and (6.4) gives the classical $O(k^{-1+\frac{1}{q}})$ decay of the Fourier transform of L^p functions, which is consistent with the Hausdorff-Young inequality. This provides a unification of the Riemann-Lebesgue lemma and its fractional analogue within the Mittag-Leffler framework.

Conclusion. We have established L^p analogues of the van der Corput decay estimates for oscillatory integrals involving Mittag-Leffler functions. The key mechanism is a combination of:

(1) the pointwise bound $\left|E_{\alpha,\beta}(i^{\alpha}\lambda\varphi(x))\right| \leq C\left(1+\lambda\left|\varphi(x)\right|\right)^{-\frac{\beta-1}{\alpha}}$ from Proposition 2.2;

(2) a multiplicative splitting of the weight that isolates the λ-dependence in a factor $\left(1+\lambda m\right)^{-\gamma}$

(3) Hoelder's inequality to pass from L^1 to L^p.

The resulting estimates interpolate continuously between the known L^1 rates and the trivial L^{∞} bound, and yield refinements of dispersive estimates for time-fractional Klein-Gordon and Schrödinger equations when the initial data is only in L^p. Extension to the bounded-interval setting and to higher-order phase conditions (analogues of Theorems 3.1–3.5 in [16]) follows by the same methods and will be detailed in a forthcoming work.

REFERENCES:

1. Bourgain J., Guth L. Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates. Geom. Funct. Anal. 21:6 (2011), 1239–1295.

2. Carbery A., Christ M., Wright J. Multidimensional van der Corput and sublevel set estimates. J. Amer. Math. Soc. (1999), 981–1015.

3. Christ M., Li X., Tao T., Thiele C. On multilinear oscillatory integrals, nonsingular and singular. Duke Math. J. 130:2 (2005), 321–351.

4. Dong J., Xu M. Space-time fractional Schrodinger equation with time-independent potentials. J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), 1005–1017.

5. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, 2014.

6. Greenleaf A., Pramanik M., Tang W. Oscillatory integral operators with homogeneous polynomial phases. J. Funct. Anal. 244:2 (2007), 444–487.

7. Greenblatt M. Sharp estimates for one-dimensional oscillatory integral operators with phase. Amer. J. Math. 127:3 (2005), 659–695.

8. Grande R. Space-time fractional nonlinear Schrödinger equation. SIAM J. Math. Anal. 51:5 (2019), 4172–4212.

9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland, 2006.

10. Naber M. Time fractional Schrödinger equation. J. Math. Phys. 45 (2004), 3339–3352.

11. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1999.

12. Phong D.H., Stein E.M. Oscillatory integrals with polynomial phases. Invent. Math. 110:1 (1992), 39–62.

13. Phong D.H., Stein E.M. Models of degenerate Fourier integral operators and Radon transforms. Ann. of Math. 140:3 (1994), 703–722.

14. Rogers K.M. Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences. Proc. Amer. Math. Soc. 133:12 (2005), 3543–3550.

15. Ruzhansky M., Torebek B.T. Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions. ArXiv:2002.07492, 2020.

16. Ruzhansky M., Torebek B.T. Van der Corput lemmas for Mittag-Leffler functions. II. α-directions. ArXiv:2005.04546, 2020.

17. Ruzhansky M. Multidimensional decay in the van der Corput lemma. Studia Math. 208 (2012), 1–10.

18. Stein E.M. Harmonic Analysis. Princeton Univ. Press, 1993.

19. Stein E.M., Wainger S. The estimation of an integral arising in multiplier transformations. Studia Math. 35 (1970), 101–104.

20. Su X., Zheng J. Hölder regularity for the time fractional Schrödinger equation. Math. Meth. Appl. Sci. 43:7 (2020), 4847–4870.

21. J.G. van der Corput. Zahlentheoretische Abschatzungen. Math. Ann. 84 (1921), 53–79.

UO‘K 51

BIR JINSLI BALKA TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA

Azizov Muzaffar Sulaymonovich,
Farg‘ona davlat universiteti dotsenti
muzaffar.azizov.1988@gmail.com
Nurmatova Madinabonu Abrorjon qizi,
Farg‘ona davlat universiteti magistranti
nurmatovamadina03@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu ishda bir jinsli balka tebranish tenglamasi uchun aralash masala qo‘yilgan hamda uning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Bu masalani yechishda o‘zgaruvchilarni ajratish ya’ni, Fure usulidan foydalanilgan. Topilgan yechimning va undan olingan kerakli hosilalarning yaqinlashuvchi ekanligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *balka tebranish tenglamasi, aralash masala, Furye usuli, xos son, xos funksiya, Bessel tengsizligi, Furye koeffitsiyenti.*

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Аннотация. *В данной работе поставлена смешанная задача для уравнения колебания однородной балки, и доказаны существование и единственность её решения. При решении задачи применяется метод разделения переменных, то есть метод Фурье. Доказана сходимость найденного решения и необходимых производных, полученных из него.*

Ключевые слова: *уравнения колебания балки, смешанная задача, метод Фурье, собственное значение, неравенство Бесселя, коэффициент Фурье.*

MIXED PROBLEM FOR THE HOMOGENOUS BEAM VIBRATION EQUATION

Abstract. *In this paper, a mixed for the vibration equation of nonhomogeneous beam is formulated, and the existence and uniqueness of its solution are proved. The method of separation of variables, namely the Fourier method, is applied to solve the problem. The convergence of the obtained solution and its required derivatives is established.*

Keywords: *beam vibration equation, mixed problem, Fourier method, eigenvalue, eigenfunction, Bessel inequality, Fourier coefficient.*

Kirish. Matematik fizika tenglamalari orasida balka tebranish tenglamalari muhim o‘rin egallaydi va ular mexanika, qurilish hamda muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladi. O‘zgaruvchan yoki murakkab tuzilishga ega bo‘lgan muhitlarda sodir bo‘ladigan mexanik va fizik jarayonlarni aniqlik bilan tasvirlashda to‘rtinchi tartibli operatorlar o‘ziga xos ahamiyat kasb etadi. Ushbu jarayonlarning fazo va vaqt davomidagi evolyutsiyasini o‘rganishda aralash masalalar – ya’ni fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha chegaraviy va vaqt bo‘yicha boshlang‘ich shartlar birgalikda beriladigan masalalar asosiy o‘rinni egallaydi. Ayniqsa, muhitning bir jinsli bo‘lmaganligi va fizik parametrlarning vaqt o‘zgaruvchanligi hisobga olinganda, mos matematik modellar murakkablashib boradi. Bunday hollarda tenglama koeffitsiyentlarining ayrim nuqtalarda nolga aylanishi yoki chegaraviy nuqtalarda buzilishi kuzatiladi, bu esa masalani tadqiq qilishni sezilarli darajada qiyinlashtiradi.

Bunday aralash masalalarni yechish va ularning xossalarini tahlil qilishning fundamental yondashuvlari XX asrning o‘rtalarida shakllanib, shundan buyon turli umumlashtirilgan holatlarda keng tadqiq qilinmoqda. Jumladan, V.S. Vladimirov [1], A.A. Samarskiy [2], S.L. Sobolev [3], V.A. Ilyin [4] va boshqa yetakchi olimlar klassik hamda noan’anaviy shartlar ostida xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun aralash masalalarni chuqur o‘rganganlar.

So‘nggi yillarda bu sohaga bag‘ishlangan o‘zbek olimlarining ham sezilarli hissasi bo‘lmoqda. Xususan, M.S. Azizov va A.K. O‘rinov tomonidan olib borilgan tadqiqotlar [5], [6] yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar nazariyasini rivojlantirishga bag‘ishlangan. Ular turli xil, jumladan, buziladigan yoki og‘irlik funksiyalari ishtirokidagi operatorlar uchun qo‘yilgan aralash masalalarni o‘rganib, o‘zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli yordamida yechimlarning mavjudligini, yagonaligini va turg‘unligini qat’iy matematik asoslab berishgan. Ushbu

tadqiqotlar to‘rtinchi tartibli differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan murakkab aralash masalalarni yechishda hamda ularni amaliy jarayonlarga tatbiq etishda muhim nazariy zamin yaratadi.

Ushbu ish yuqoridagi izlanishlarning davomi sifatida hayotimizning turli sohalarida ayniqsa fizikada juda muhimdir.

Asosiy qism.

A **masala.** $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ sohada

$$u_{tt}+u_{xxxx}=0 \tag{1}$$

tenglamani qanoatlantiradigan hamda quyidagi

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\qquad u_t(x,0)=\varphi_2(x), \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni va quyidagi

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(p,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=0,\quad u_{xxx}(p,t)=0 \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya topilsin, $\varphi_i(x)$, $i=1,2$ - berilgan funksiya, ,

Masala yechimining yagonaligi.

1-teorema. Agar A masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

Isbot. Teskarisidan faraz qilaylik. A masalaning ikkita $u_1(x,t)$ va $u_2(x,t)$ yechimlarga ega bo‘lsin. Bu yechimlarning ayirmasi bir jinsli (1) tenglamani va (2)-(3) larga mos bir jinsli boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Bu ayirmani $u(x,t)$ bilan belgilaymiz, ya’ni

$$u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t) \tag{4}$$

Ma’lumki,

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{p}},\ X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x,\ \lambda_n=\frac{\pi n}{p},\ n=1,2,... \tag{5}$$

funksiya $L_2(0,p)$ da to’la ortonormallangan sistemani tashkil etadi.

Quyidagi

$$d_n(t)=\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx\quad n=1,2,... \tag{6}$$

funksiyani qaraymiz. (6) ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$d_{n\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)X_n(x)dx, 0<\varepsilon<p, \tag{7}$$

bu yerda $(\varepsilon,p-\varepsilon)\neq\varnothing$.

(7) tenglikni t bo‘yicha ikki marta differensiallab,

$$d''_{n\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{tt}(x,t)X_n(x)dx$$

tenglikni hosil qilamiz. (1) tenglamani e’tiborga olib

$$d''_{n\varepsilon}(t)=-\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)X_n(x)dx \tag{8}$$

tenglikni hosil qilamiz. (8) tenglikni to‘rt marta bo‘laklab integrallab, so‘ng $\varepsilon\to 0$ da limitga o‘tamiz:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0} d''_{n\varepsilon}(t)=&-\lim_{\varepsilon\to0}\left[X_n(p-\varepsilon)u_{xxx}(p-\varepsilon,t)-X_n(\varepsilon)u_{xxx}(\varepsilon,t)\right]+\\&+\lim_{\varepsilon\to0}\left[X'_n(p-\varepsilon)u_{xx}(p-\varepsilon,t)-X'_n(\varepsilon)u_{xx}(\varepsilon,t)\right]-\\&-\lim_{\varepsilon\to0}\left[X''_n(p-\varepsilon)u_x(p-\varepsilon,t)-X''_n(\varepsilon)u_x(\varepsilon,t)\right]+\\&+\lim_{\varepsilon\to0}\left[X'''_n(p-\varepsilon)u(p-\varepsilon,t)-X'''_n(\varepsilon)u(\varepsilon,t)\right]-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} X_n^{IV}(x)u(x,t)dx.\end{aligned}$$

Oxirgi tenglikdan (3) ga mos bir jinsli shartlar hamda $X_n(x)$ funksiyaning xossalariga asosan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$d''_n(t)=-\lambda^4\int_0^p u(x,t)X_n(n)dx,\qquad n=0,1,2,... .$$

(4) ni e’tiborga olib quyidagi oddiy differensial tenglamaga kelamiz:

$$d_n''(t)+\lambda^4 d_n(t)=0,\qquad n=1,2,\dots. \tag{9}$$

(2) shartga mos bir jinsli shartdan (1.36) ga asosan

$$d_n(0)=0,\quad d_n'(0)=0,\quad n=1,2,... \tag{10}$$

boshlang‘ich shartlarni hosil qilamiz.

Ma’lumki, (9) oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$d_n(t)=C_1\cos\lambda^2 t+C_2\sin\lambda^2 t.$$

Bu yechimni (10) shartga bo‘ysundirib $C_1=0$ va $C_2=0$ ga ega bo‘lamiz, ya’ni barcha $\forall t\in(0,t)$ uchun $d_n(t)=0$. U holda (6) tenglik quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx=0,\ n=1,2,\dots. \tag{11}$$

Ma’lumki, (5) to‘la ortonormal sistemani tashkil etadi. (11) dan esa $u(x,t)=0$ ekanligi kelib chiqadi. (4) ga asosan $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ tenglik kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki, agar A masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir. 1-teorema isbotlandi.

Masala yechimining mavjudligi

2-teorema. Agar $\varphi(x)\in C[0,1];\ \varphi'(x)\in L(0,1)\ \ \{k=1,2,3,4,5\}$ bo‘lib

$$\varphi(0)=0;\varphi(p)=0;\begin{cases}\varphi_1(p)=\varphi_1(0)=0\\ \varphi_2(p)=\varphi_2(0)=0\end{cases};\begin{cases}\varphi_1''(p)=\varphi_1''(0)=0\\ \varphi_2''(p)=\varphi_2''(0)=0\end{cases};\begin{cases}\varphi_1^{IV}(p)=\varphi_1^{IV}(0)=0\\ \varphi_2^{IV}(p)=\varphi_2^{IV}(0)=0\end{cases}$$

tengliklar bajarilsa, u holda A masalaning yechimi mavjud va u quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{p}}(a_0t+b_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t+b_n\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t\right]\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\frac{\pi n}{p}x. \tag{12}$$

bu yerda

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p\varphi_1(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx,\ b_n=\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{p}{\pi n}\right)^2\int_0^p\varphi_2(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx.$$

Isbot: A masalaning yechimini mavjudligini isbotlash uchun o‘zgaruvchilarga ajratish (Fure) usulidan foydalanamiz. (1) tenglamaning yechimini quyidagi

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \tag{13}$$

(13) ni (1) tenglamaga qo‘yib ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{X^{IV}(x)}{X(x)}=-\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Bu tenglamaning chap tomoni faqat x ga o‘ng tomoni esa faqat t o‘zgaruvchiga bog‘liqdir. Bundan kelib chiqadiki, tenglik o‘rinli bo‘lishi uchun ikki nisbat ham biror o‘zgarmas songa teng bo‘lishi kerak. Bu o‘zgarmasni λ^4 orqali belgilaymiz. Unda oxirgi tenglikdan, $X(x)$ va $T(t)$ noma’lum funksiyalarga nisbatan quyidagi oddiy differensial tenglamalar kelib chiqadi:

$$\begin{cases}X^{(IV)}(x)-\lambda^4X(x)=0,\\ T''(t)+\lambda^4T(t)=0.\end{cases} \tag{14}$$

Avvalo $X(x)$ ga nisbatan tenglamani yechib olaylik. Biz

$$X^{(IV)}(x)-\lambda^4X(x)=0$$

tenglama va (3) chegaraviy shartlardan esa

$$X'(0)=X'(p)=X'''(0)=X'''(p)=0$$

chegaraviy shartlarga ega bo‘lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun avvalo

$$X(x)=e^{kx}$$

deb belgilash kiritamiz bundan

$$k^4-\lambda^4=0$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bunda λ ning uch xil holini ko‘rib chiqaylik:

1) $\lambda = 0$ da $k^4 = 0$ bo'lib $k_{1,2,3,4} = 0$ karrali yechimlarga ega bo'lamiz. Bundan

$$X(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

yechim kelib chiqadi. Yechimni chegaraviy shartlarga bo'ysundirsak

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \qquad X'''(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0,$$
$$X'(p) = 0 \Rightarrow 2C_3 p + 3C_4 p^2 = 0, \qquad X'''(p) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_3 = 0.$$

Demak,

$$X(x) = C_1, \; C_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

2) $\lambda > 0$ da $k^4 - \lambda^4 = 0$ bo'lib $k_{1,2} = \pm\lambda; k_{3,4} = \pm\lambda i$ yechimlar hosil bo'ladi.

$X(x)$ funksiya esa

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 \cos\lambda x + C_4 \sin\lambda x$$

ga teng bo'ladi. Yechimni chegaraviy shartlarga bo'ysundirsak

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda C_1 - \lambda C_2 + \lambda C_4 = 0, \\ X'(p) = \lambda C_1 e^{\lambda p} - \lambda C_2 e^{-\lambda p} - \lambda C_3 \sin\lambda p + \lambda C_4 \cos\lambda p = 0, \\ X'''(0) = 0 \Rightarrow \lambda^3 C_1 - \lambda^3 C_2 - \lambda^3 C_4 = 0, \\ X'''(p) = \lambda^3 C_1 e^{\lambda p} - \lambda^3 C_2 e^{-\lambda p} + \lambda^3 C_3 \sin\lambda p - \lambda^3 C_4 \cos\lambda p = 0, \end{cases}$$

hosil bo'ladi. Sistemaga ko'ra $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ va $C_3 \sin\lambda p = 0$ lar kelib chiqadi. C_3 ni noldan farqli desak

$$\sin\lambda p = 0$$

bo'ladi. Bundan

$$\lambda p = \pi n, \quad \lambda = \frac{\pi n}{p}, \qquad n \in N$$

$X(x)$ funksiya ortonormalligidan esa $C_4 = \sqrt{\frac{2}{p}}$. Demak,

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{\pi n}{p} x.$$

3) $\lambda < 0$. Bunda $k^4 - \lambda^4 = 0$ bo'lib $k_{1,2} = \pm\lambda; k_{3,4} = \pm\lambda i$ lar 2-hol bilan ustma ust tushadi va $\lambda = \frac{\pi n}{p}$ xos son hosil bo'ladi. p musbat son bo'lgani uchun λ ham musbat bo'lishi kerak bu esa $\lambda < 0$ ga zid. Shuning uchun bu holda yechim yo'q. Shunday ekan bizda

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{\pi n}{p} x \tag{15}$$

yechimlar mavjud.

Endi $T(t)$ ga bog'liq differensial tenglamani qaraylik. Bunda ham xuddi yuqoridagi ishlarni birin-ketin bajarib chiqamiz va so'ngida $T(t)$ ning umumiy yechimlari quyidagicha chiqadi:

$$T(t) = a_0 t + b_0, \quad T(t) = a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \tag{16}$$

$T(t)$ va $X(x)$ ning yechimlarini (13) ga olib kelib qo'ysak biz qidirayotgan A masalaning yechimi $u(x,t)$ hosil bo'ladi va u quyidagicha ifodalanadi:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{p}}(a_0 t + b_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right] \sqrt{\frac{2}{p}} \cos\frac{\pi n}{p} x$$

bu yerda

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \varphi_1(x) \cos\frac{\pi n}{p} x dx, \qquad b_n = \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{p}{\pi n}\right)^2 \int_0^p \varphi_2(x) \cos\frac{\pi n}{p} x dx.$$

Lemma. $\forall t \in [0,T]$ va $n = 1,2,...$ lar uchun quyidagi baholashlar o‘rinli:

$$|T_n(t)| \le |a_n| + |b_n|, \quad |T_n'(t)| \le \lambda_n^2 |a_n| + \lambda_n^2 |b_n|, \quad |T_n''(t)| \le \lambda_n^4 |a_n| + \lambda_n^4 |b_n| \tag{17}$$

Isbot. (16) dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$|T(t)| = \left| a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \le |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n|.$$

(16) dan quyidagi

$$T_n'(t) = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t$$

ifodani topib, so‘ngra uni baholaymiz:

$$|T_n'(t)| = \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \le |a_n| \left| \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 \right| + |b_n| \left| \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 \right| \le$$

$$\le \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 \right| |a_n| + \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 \right| |b_n| = \lambda_n^2 |a_n| + \lambda_n^2 |b_n|$$

Endi (16) dan $T_n''(t)$ ni quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$T_n''(t) = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t.$$

$T_n''(t)$ funksiya uchun quyidagilar o‘rinli:

$$|T_n''(t)| = \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 a_n \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t + \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 b_n \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \le |a_n| \left| \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \right| + |b_n| \left| \sin\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 t \right| \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \right| \le$$

$$\le \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \right| |a_n| + \left| \left(\frac{\pi n}{p}\right)^4 \right| |b_n| = \lambda_n^4 |a_n| + \lambda_n^4 |b_n|$$

Lemma isbotlandi.

Endi topilgan yechimni yaqinlashuvchi ekanligini va quyidagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \cdot X_n(x), \tag{18}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 T_n(t) \cdot X_n(x), \tag{19}$$

qatorlarni yaqinlashuvchilikka tekshiramiz.

Dastlab A masalaning yechimini yaqinlashuvchilikka tekshirishdan boshlaylik. (12) uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T_n(t)| \tag{20}$$

qator mojarant qator bo‘ladi. Lemmadagi (17) ni (20) ga qo‘yib yozsak,

$$\setminus \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n| \right) \tag{21}$$

hosil qilamiz. Endi (21) ga (5) tenglikni qo‘yib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$\sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^p |\varphi_{1n}| + \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{p}{\pi n}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^p |\varphi_{2n}|, \tag{22}$$

bu yerda

$$\varphi_{1n} = \int_0^p \varphi_1(x) \cos\frac{\pi n}{p} x dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^p \varphi_2(x) \cos\frac{\pi n}{p} x dx.$$

(22) qatorni yaqinlashuvchiligini ko‘rsatish maqsadida $\varphi_{1n}=\int_0^p \varphi_1(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx$ va $\varphi_{2n}=\int_0^p \varphi_2(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx$ larni bir martadan bo‘laklab integrallaymiz:

$$\varphi_{1n}=\int_0^p \varphi_1(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx=\frac{p}{\pi n}\left[\left(\varphi_1(x)\sin\frac{\pi n}{p}x\right)\Big|_0^p-\int_0^p \varphi_1'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx\right]=$$

$$=\frac{p}{\pi n}\left(\varphi_1(p)\sin\pi n-\varphi_1(0)\sin 0\right)-\frac{p}{\pi n}\int_0^p \varphi_1'(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=$$

$$=-\frac{p}{\pi n}\int_0^p \varphi_1'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx,$$

$$\varphi_{2n}=\int_0^p \varphi_2(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx=\frac{p}{\pi n}\left[\left(\varphi_2(x)\sin\frac{\pi n}{p}x\right)\Big|_0^p-\int_0^p \varphi_2'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx\right]=$$

$$=\frac{p}{\pi n}\left(\varphi_2(p)\sin\pi n-\varphi_2(0)\sin 0\right)-\frac{p}{\pi n}\int_0^p \varphi_2'(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=$$

$$=-\frac{p}{\pi n}\int_0^p \varphi_2'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx\,.$$

2-teorema shartlarini e’tiborga olamiz va quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\varphi_{1n}=\frac{p}{\pi n}a_n,\quad \varphi_{2n}=\frac{p}{\pi n}b_n, \tag{23}$$

bu yerda

$$a_n=-\int_0^p \varphi_1'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx,\quad b_n=-\int_0^p \varphi_2'(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx\,.$$

(23) ni (12)ga qo‘yib, o‘zgarmaslarni tashlab quyidagi natijaga kelamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\,. \tag{24}$$

Bu qatorlarning yaqinlashuvchanligi elementar tengsizlikdan kelib chiqadi, ya’ni

$$\frac{|a_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left[a_n^2+\frac{1}{n^2}\right],\quad \frac{|b_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left[b_n^2+\frac{1}{n^2}\right],$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Birinchi va ikkinchi qatorlarning yaqinlashuvchiligi bo‘lak-bo‘lak uzluksiz bo‘lgan $\varphi(x)$ funksiya uchun Bessel tengsizligidan kelib chiqadi. Ikkinchi qator umumlashgan garmonik $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qator bo‘lib, u yaqinlashuvchidir. Demak, (24) qator tekis yaqinlashadi. Shunday qilib biz (12) mojarant qatorning yaqinlashuvchiligini ko‘rsatdik. Demak, Ω sohada (12) qator ya’ni masalaning yechimi absolyut va tekis yaqinlashadi.

(18) uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|T_n''(t)\right| \tag{25}$$

qator mojarant qator bo‘ladi. Lemmadagi (17) ni (25) ga qo‘yib yozsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^4|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^4|b_n| \tag{26}$$

hosil qilamiz. Endi (18) ga (5) tenglikni qo‘yib quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$\left(\frac{\pi n}{p}\right)^4\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{1n}|+\left(\frac{\pi n}{p}\right)^4\sqrt{\frac{2}{p}}\left(\frac{p}{\pi n}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_{2n}|, \tag{27}$$

bu yerda

$$\varphi_{1n}=\int_0^p\varphi_1(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx,\ \varphi_{2n}=\int_0^p\varphi_2(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx.$$

(27) qatorni yaqinlashuvchiligini ko‘rsatish maqsadida $\varphi_{1n}=\int_0^p\varphi_1(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx$ va $\varphi_{2n}=\int_0^p\varphi_2(x)\cos\frac{\pi n}{p}xdx$ ni besh marta bo‘laklab integrallaymiz va 2-teoremadan foydalanib quyidagiga kelamiz:

$$\varphi_{1n}=\left(\frac{p}{\pi n}\right)^5 a_n,\ \varphi_{2n}=\left(\frac{p}{\pi n}\right)^5 b_n \tag{28}$$

bu yerda

$$a_n=-\int_0^p\varphi_1^V(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx,\ \ b_n=-\int_0^p\varphi_2^V(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx.$$

(28) ni (27) ga qo‘yib, o‘zgarmaslarni tashlab quyidagi natijaga kelamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\ . \tag{29}$$

Bu qatorlarning yaqinlashuvchanligi elementar tengsizlikdan kelib chiqadi, ya’ni

$$\frac{|a_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left[a_n^2+\frac{1}{n^2}\right],\ \frac{|b_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left[b_n^2+\frac{1}{n^2}\right],$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Birinchi va ikkinchi qatorlarning yaqinlashuvchiligi bo‘lak-bo‘lak uzluksiz bo‘lgan $\varphi(x)$ funksiya uchun Bessel tengsizligidan kelib chiqadi. Ikkinchi qator umumlashgan garmonik $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qator bo’lib, u yaqinlashuvchidir. Demak, (29) qator tekis yaqinlashadi. Shunday qilib biz (18) mojarant qatorining yaqinlashuvchiligini ko‘rsatdik. Demak, Ω sohada (18) qator absolyut va tekis yaqinlashadi.

Endi (19) qatorning ham yaqinlashuvchiligini tekshiramiz. U uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^4|T_n(t)| \tag{30}$$

qator mojarant qator bo‘ladi. Lemmadagi (17) ni (30) ga qo‘yib yozsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^4|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^4|b_n|$$

yuqoridagi (26) tenglik hosil bo‘ladi. Demak yuqoridagi ishlarni qayta takrorlasak (29) tenglikka kelamiz va o‘z navbatida bu qator yaqinlashuvchiligi bizga ma’lum. Bundan kelib chiqadiki (19) qator yaqinlashuvchi ekan. 2-teoremaning shartlari bajarilsa, unda A masalaning $u(x,t)$ yechimini ikki marta t bo‘yicha va to‘rt marta x bo‘yicha hadlab differensiallanuvchi bo‘ladi, bundan kelib chiqadiki, topilgan qatorlar Ω sohada absolyut va tekis yaqinlashadi.

Xulosa. Yuqoridagilardan ma’lumki qo‘yilgan masala yechimi mavjud va u yagonadir. Bundan tashqari yechim va undan olingan kerakli hosilalar ham yaqinlashuvchidir. Bunday masalalarni qo‘yish va ularga yechim topish keyinchalik qo‘yilishi mumkin bo‘lgan turli balkaga oid bir jinsli bo‘lmagan, yoki buzilishga ega bo‘lgan masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

ADABIYOTLAR:

1. *Владимиро́в В.С., Обобщённые функции в математической физике, Москва: Наука, 1981.*

2. *Самарский А.А., Спектральная теория и её приложения, Москва: Наука, 1971.*
3. *Соболев С.Л., Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1962.*
4. *Ильин В.А., Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1973.*
5. *Azizov M.S., Urinov A.K., «An Initial Boundary Value Problem for a Partial Differential Equation of Higher Even Order with a Bessel Operator», Вестник Самарского государственного технического университета, 2022.*
6. *Azizov M.S., Urinov A.K., "On the Solvability of Nonlocal Initial-Boundary Value Problems for a Partial Differential Equation of High Even Order", Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2022.*
7. *Мамажонов М.О., Мамажонов С.М. Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвёртого порядка параболо-гиперболического типа // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 1(8). С. 14-19.*
8. *Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряжённых задач для уравнения четвёртого порядка // Уз. Мат. жур. 2008. № 2. -С. 74-80.*
9. *Аманов Д., Мурзамбетова. М.Б. Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка со спектральным параметром // Уз. Мат. жур. 2012. № 3. -С. 22-30.*
10. *Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2013. выпуск 1, -С. 3–10.*

UO‘K 511.176

FIBONACHI SONLAR KETMA-KETLIGIDA BO‘LINISH MUNOSABATLARI

Jo‘raboyev Saidaxbor Solijonovich,
Farg‘ona davlat universiteti
Matematika kafedrasi dotsenti, f.m.f.b.f.d., (PhD)
saidaxbor.juraboyev@mail.ru
Abdumitalipova Moxira Abdumalik qizi,
Farg‘ona davlat universiteti
Matematika yo‘nalishi ikkinchi bosqich talabasi
moxira875@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Fibonachi ketma-ketligida bo‘linish munosabatlari o‘rganilgan bo‘lib, Fibonachi sonlarining modulyar xossalari, Pisano davrlari, eng katta umumiy bo‘luvchi bilan bog‘liqligi hamda indekslar orasidagi arifmetik munosabatlarning Fibonachi sonlarining bo‘linishiga ta’siri tahlil qilinadi. Har qanday natural songa karrali Fibonachi sonining mavjudligi, “paydo bo‘lish tartibi” tushunchasi hamda bu tushunchaning davrlilik bilan bog‘liqligi ko‘rib chiqiladi. Olingan natijalar Fibonachi ketma-ketligining algebraik va arifmetik tuzilishini chuqurroq anglashga xizmat qiladi.*

Kalit so‘zlar: *Fibonacci ketma-ketligi, bo‘linish munosabatlari, EKUB, Pisano davri, modulyar arifmetika.*

ОТНОШЕНИЯ ДЕЛИМОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Аннотация. *В данной работе исследуются отношения делимости в последовательности Фибоначи. В частности, анализируются модульные свойства чисел Фибоначи, периоды Пизано, их связь с наибольшим общим делителем, а также влияние арифметических отношений между индексами на делимость соответствующих чисел Фибоначи. Рассматриваются существование числа Фибоначи, кратного любому натуральному числу, понятие ранга появления (rank of apparition) и его связь с периодичностью. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию алгебраической и арифметической структуры последовательности Фибоначи.*

Ключевые слова: *последовательность Фибоначи, отношения делимости, наибольший общий делитель, период Пизано, модульная арифметика.*

DIVISIBILITY RELATIONS IN THE FIBONACCI SEQUENCE

Abstract. *This study investigates divisibility relations within the Fibonacci sequence. In particular, it analyzes the modular properties of Fibonacci numbers, Pisano periods, their connection with the greatest common divisor, and the influence of arithmetic relations between indices on the divisibility of Fibonacci numbers. The existence of a Fibonacci number divisible by any given natural number, the concept of the rank of apparition, and its relationship with periodicity are also examined. The obtained results contribute to a deeper understanding of the algebraic and arithmetic structure of the Fibonacci sequence.*

Key words: *Fibonacci sequence, divisibility relations, greatest common divisor, Pisano period, modular arithmetic.*

Kirish. Matematikaning sonlar nazariyasi bo‘limida ketma-ketliklar va ularning xossalarini o‘rganish muhim ilmiy ahamiyatga ega. Shunday ketma-ketliklardan biri – Fibonachi sonlar ketma-ketligi bo‘lib, u nafaqat nazariy matematika, balki informatika, fizika, biologiya va boshqa ko‘plab sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Mazkur ketma - ketlikning har bir hadi o‘zidan oldingi ikkita had yig‘indisiga tengligi bilan xarakterlanadi, bu esa uning ichki tuzilishida o‘ziga xos qonuniyatlar mavjudligini ko‘rsatadi.

Fibonachi sonlari ustida olib borilgan tadqiqotlar ularning turli arifmetik xossalarini, xususan bo‘linish belgilarini aniqlashga qaratilgan. Bo‘linish belgilarini o‘rganish sonlarning modulyar arifmetikadagi xatti-harakatlarini tushunishga, shuningdek, kriptografiya va algoritmlar nazariyasida muhim ahamiyat kasb etadi. Fibonachi sonlarining qaysi hollarda ma’lum bir songa bo‘linishi, ularning davriyligi va qoldiqlar sistemasi bilan bog‘liq jihatlari ilmiy izlanishlarning dolzarb yo‘nalishlaridan biridir.

Ushbu maqolada Fibonachi sonlar ketma-ketligida bo‘linish belgilarining asosiy xossalari tahlil qilinadi, ularning nazariy asoslari yoritiladi hamda amaliy misollar orqali mustahkamlanadi. Tadqiqot natijalari sonlar nazariyasini chuqurroq o‘rganishga va mazkur ketma-ketlikning yangi qo‘llanilish sohalarini aniqlashga xizmat qiladi.

Adabiyotlar tahlili va metodologiyasi. “Fibonachi sonlari” iborasi birinchi bo‘lib, XIX asrda Eduard Lyuka tomonidan qiziqarli matematikaga bag‘ishlab yozilgan asarida qo‘llanilgan [1]. Fibonachi (bu italyancha “filius Bonacci” so‘zlaridan qisqartirilib tuzilgan bo‘lib, Bonachchining o‘g‘li ma’nosini anglatadi) Italiyadagi Piza shahrida XII – XIII asrlarda yashagan Leonardo Pizanskiyning boshqacha ismidir. Fibonachi “Liber abaci” (“Abak haqidagi kitob” – 1202-yilda yozilgan bo‘lib, 1228-yildagi qo‘lyozma nusxasi saqlangan) nomli kitobida arifmetika va algebra bo‘yicha o‘z davrining deyarli barcha ma’lumotlarini bayon qilgan. Qo‘lyozmaning (1228-yil) 123–124-sahifalarida uy quyonlarining ko‘payishi haqidagi quyidagi masala bayon qilingan [2].

“Bir kishi bir juft quyonni ko‘paytirish maqsadida saqlagan bo‘lsin. Quyonning tabiati shundayki, har bir juft quyon bir oyda boshqa bir juft quyonni dunyoga keltiradi va yangi paydo bo‘lgan juft quyonlar ikkinchi oydan boshlab nasl bera boshlaydilar. Bir yildan so‘ng dastlabki juft quyonlarning ko‘payishi natijasida necha juft quyon vujudga keladi?”.

Bu masalani yechish jarayonida Fibonachi dastlabki yilning har bir oyi uchun quyonlar juftlari sonini aniqlagan. Bu sonlar 1-jadvalda keltirilgan. “Liber abaci”dan bu masala yechimi bayonining so‘nggi satrlarini keltiramiz: “...Oxirgi oyda tug‘ilgan yangi 144 juft quyonlar qo‘shilsa, 377 juft quyon hosil bo‘ladi. Shuncha juft quyon bir yil davomida bir juft quyondan ko‘payar ekan”. Quyonlar haqidagi masalada uchragan sonlar Fibonachi sonlar ketma-ketligining dastlabki sonlari ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

1-jadval.

O‘tgan oylar soni	Tug‘ilgan juft quyonlar	Jami juftlar
0	0	1
1	1	2
2	1	3
3	2	5
4	3	8
5	5	13
6	8	21
7	13	34
8	21	55
9	34	89
10	55	144
11	89	233
12	144	377

Fibonachi sonlar ketma-ketligi uchun bo‘linish munosabatlari haqidagi asosiy nazariyalar L. Carlitz [3], F. D. Parker [4], G. Michael [5], M. Wunderlich [6], L.Weinstein kabi yetuk matematik olimlarning tadqiqotlarida topishimiz mumkin. Bular haqidagi batafsil ma’lumot Thomas Koshyning “Fibonacci and Lucas Numbers with applications” asarida keltirib o‘tilgan.

Natijalar va muhokamalar.

1-ta’rif: Avvalgi ikki hadi 1 ga teng bo‘lib, uchinchi hadidan boshlab, har bir hadi o‘zidan oldingi ikki hadi yig‘indisiga teng bo‘lgan sonlar ketma-ketligi *Fibonachi sonlari* deyiladi va F_n ko‘rinishda belgilanadi.

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...$$

Har bir $n \geq 3$ uchun $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tenglik o‘rinli.

Fibonachi sonlar ketma-ketligi uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1° $F_n \geq F_{n-1}$ ya’ni, Fibonachi sonlar ketma-ketligi o‘suvchi ketma-ketlikdir;

2°. $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;

3° $F_1 + F_3 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$

4° $F_2 + F_4 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

5° $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

Bu xossalar bevosita matematik induksiya metodi orqali isbotlanadi. Masalan, 5°-xossa isbotini keltiramiz.

$n=1$ da tenglik to‘g‘ri ekanligini tekshiramiz.

$F_1^2 = F_1F_2 \Rightarrow 1=1$

bundan ko‘rinadiki tenglik $n=1$ da o‘rinli ekan.

$n=k$ da tenglik o‘rinli deb faraz qilib, $n=k+1$ da to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz;

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_kF_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1}F_{(k+1)+1}$$

Demak, $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ xossa o‘rinli ekan.

Fibonachi sonlar ketma-ketligida asosiy ayniyatlar

1. **Kassini ayniyati:** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

Isbot. Ushbu ayniyatni ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlaymiz.

$n=2$ da ayniyatni tekshiramiz: $F_3F_1 - F_2^2 = 2\cdot 1 - 1\cdot 1 = (-1)^2 = 1$ tenglik o‘rinli ekan.

$n=k$ da tenglik to‘g‘ri deb faraz qilamiz, bunga ko‘ra: $F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$

$n=k+1$ uchun tenglik to‘g‘riligini isbotlaymiz.

$$F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (F_{k+1} + F_k)F_k - F_{k+1}^2 =$$

$$= F_k^2 - F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) = -(F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2) = (-1)^{k+1}$$

So‘ngi tenglikdan ko‘rinadiki, Kassini ayniyati Fibonachi sonlar ketma-ketligining barcha hadlari uchun o‘rinli ekan.

2. **Fibonachi sonlari uchun qo‘shish formulasi:**

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \quad (m \geq 0; n \geq 1)$$

Isbot. Bu formulani ham yuqoridagi kabi matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlaylik.

$m=0$ da formulani tekshiraylik: $F_nF_1 = F_n$

$m=k$ da formulani to‘g‘ri deb faraz qilamiz, u holda:

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}\ ; \qquad (1)$$

$m=k+1$ uchun formula to‘g‘riligini tekshiraylik:

$$F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} = F_{n-1}(F_k + F_{k-1}) + F_n(F_{k+1} + F_k) =$$

$$= (F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}) + (F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k);$$

$m=k$ da o‘rinli bo‘lgan tenglik xususan $m=k-1$ da ham o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$F_{n+k-1} = F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklarni inobatga olsak,

$$F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2} = F_{n+k} + F_{n+(k-1)} = F_{n+(k+1)}$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu esa qo‘shish formulasini to‘g‘ri ekanligini isbotlaydi.

Fibonachi sonlarining bo‘linuvchanligi.

1-tasdiq. *Ixtiyoriy* m,n *natural sonlari uchun* $n \vdots m$ *o‘rinli bo‘lsa, u holda* $F_n \vdots F_m$ *ham o‘rinlidir.*

Isbot. $n=mk$ ekanligidan foydalanib, $F_n \vdots F_m$ ekanligini isbotlaylik. Bunda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

1) $k=1$ da $F_n = F_m$ bo‘lib, $F_m \vdots F_m$

2) $k=k_1$ da $F_{mk_1} \vdots F_m$ o‘rinli deb faraz qilamiz va $k=k_1+1$ da bo‘linuvchanlik to‘g‘ri ekanligini tekshiramiz:

$$F_{m(k_1+1)} = F_{mk_1+m}$$

Bu tenglikda F_{mk_1+m} ifodani qo‘shish formulasi yordamida ifodalasak,

$$F_{m(k_1+1)} = F_{mk_1+m} = F_{mk_1-1}F_m + F_{mk_1}F_{m+1}$$

$F_{mk_1} \vdots F_m$ ekanligini hisobga olsak,

$$F_{m(k_1+1)} = F_{mk_1+m} = F_{mk_1-1}F_m + F_{mk_1}F_{m+1} = F_m(F_{mk_1-1} + AF_{m+1}) = tF_m$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu esa $F_{m(k_1+1)} \vdots F_m$ ekanligini anglatadi. Bundan $F_n \vdots F_m \Leftrightarrow n \vdots m$ ekanligi kelib chiqadi.

2-tasdiq. *Har qanday natural* m *soni uchun Fibonachi sonlar ketma-ketligida* m *ga karrali bo‘lgan* F_n $(n \geq 1)$ *hadi mavjud.*

Isbot. Fibonachi sonlarining har bir hadini m modulga ko‘ra qoldiqlar ketma-ketligi ko‘rinishida ko‘rib chiqamiz: $(F_i(\mathrm{mod}\, m))_{i=0}^{\infty}$ Ushbu ketma-ketlikdan ketma-ket keluvchi hadlar juftligini hosil qilamiz:

$$(F_0, F_1), (F_1, F_2), (F_2, F_3), ..., (F_k, F_{k+1}), ... (\mathrm{mod}\, m)$$

Har bir $F_i(\mathrm{mod}\, m)$ qoldig‘i $\{0,1,2,...,m-1\}$ to‘plamiga tegishli. Demak, bo‘lishi mumkin bo‘lgan jami turli xil juftliklar soni chekli va u m^2 ga teng. Agar biz m^2+1 ta juftlikni ko‘rib chiqsak, kamida ikkita juftlik bir-biriga mos kelishi shart:

$$(F_a, F_{a+1}) \equiv (F_b, F_{b+1})(\mathrm{mod}\, m)\text{, bunda } a < b$$

Fibonachi sonlar ketma-ketligi rekurrent munosabat bilan aniqlanganligi sababli $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ tenglik ham o‘rinli. Agar ikki nuqtada juftliklar mos kelsa, ulardan oldingi barcha hadlar ham mos kelishga majbur:

$$(F_{a-1}, F_a) \equiv (F_{b-1}, F_b) \Rightarrow F_{a-1} \equiv F_{b-1}(\mathrm{mod}\, m);$$
$$(F_{a-2}, F_{a-1}) \equiv (F_{b-2}, F_{b-1}) \Rightarrow F_{a-2} \equiv F_{b-2}(\mathrm{mod}\, m);$$
$$\vdots$$
$$(F_0, F_1) \equiv (F_{b-a}, F_{b-a+1}) \Rightarrow F_{a-a} \equiv F_{b-a}(\mathrm{mod}\, m);$$

a marta orqaga qaytish natijasida biz quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$(F_0, F_1) \equiv, (F_{b-a}, F_{b-a+1})(\mathrm{mod}\, m)$$

Ma’lumki, $F_0 = 0$. Bundan kelib chiqadiki, $F_{b-a} \equiv F_0 \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$

Demak, $n = b - a$ indeksi uchun F_n soni m ga qoldiqsiz bo‘linadi. $a < b$ bo‘lganligi uchun $n \geq 1$

3-tasdiq. *Faraz qilaylik,* m *soniga bo‘linadigan birinchi Fibonachi soni* F_k *bo‘lsin.* $F_n \vdots m$ *bo‘lishi uchun* $n \vdots k$ *bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isbot. 1-tasdiqqa ko‘ra $n \vdots k \Rightarrow F_n \vdots F_k$ o‘rinli. Shartga ko‘ra esa $F_k \vdots m$.

Bu ikki shartdan esa $F_k \vdots m$ va $F_n \vdots F_k$ ekanligidan tranzitivlik xossasiga ko‘ra $F_n \vdots m$ ekanligi kelib chiqadi.

4-tasdiq. *Ikkita ketma-ket Fibonachi sonlari* F_{n-1} *va* F_n $(n \geq 1)$ *doimo o‘zaro tub, ya’ni* $EKUB(F_n, F_{n-1}) = 1$

Isbot. Ushbu tasdiqni isbotlash uchun sonlar ekubini hisoblaymiz. Buning uchun Yevklid algoritmi va Fibonachi sonlarining xossalaridan foydalanamiz. Bunga ko‘ra, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ va $F_n > F_{n-1}$ xossalarni inobatga olsak, Yevklid algoritmiga ko‘ra: $EKUB(F_n, F_{n-1}) = EKUB(F_{n-2}, F_{n-1})$ tenglikka ega bo‘lamiz. $F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3}$ tenglikni ham inobatga olsak,

$$EKUB(F_n, F_{n-1}) = EKUB(F_{n-2}, F_{n-1}) = EKUB(F_{n-2}, F_{n-3})$$

bu tenglikni Yevklid algoritmiga ko‘ra qoldiq nol bo‘lguncha davom etiramiz. $F_2 = F_1$ ekanligidan, noldan avvalgi qoldiq berilgan sonlarning EKUBiga teng bo‘ladi. $F_3 = F_2 + F_1$ ekanligidan ko‘rish mumkinki,

$$EKUB(F_n, F_{n-1}) = EKUB(F_{n-2}, F_{n-1}) = EKUB(F_{n-2}, F_{n-3}) = ... = EKUB(F_3, F_2) = F_1 = 1$$

Natijada $EKUB(F_n, F_{n-1}) = 1$ ekanligini hosil qilamiz.

5-tasdiq. $m = nq + r$ *bo‘lsin, bunda* $0 \le r < n$. *U holda* $EKUB(F_m, F_n) = EKUB(F_r, F_n)$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Isbot. Qo‘shish formulasiga ko‘ra, $F_m = F_{nq+r} = F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}$. Endi F_m va F_n sonlarining EKUBini hisoblaylik:

$$EKUB(F_m, F_n) = EKUB(F_{nq-1}F_r + F_{nq}F_{r+1}, F_n)$$

1-tasdiqqa ko‘ra $F_{nq} \vdots F_n$ o‘rinli. EKUB xossasiga ko‘ra,

$$EKUB(F_m, F_n) = EKUB(F_{nq-1}F_r, F_n)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. 4-tasdiqdan esa $EKUB(F_{nq-1}, F_n) = 1$ tenglik o‘rinli. Shunga ko‘ra, $EKUB(F_{nq-1}F_r, F_n) = EKUB(F_r, F_n)$. Demak, $EKUB(F_m, F_n) = EKUB(F_r, F_n)$ ekan.

Lyuka teoremasi. *Ixtiyoriy* m, n *natural sonlari uchun,* $EKUB(F_n, F_m) = F_{EKUB(n,m)}$ *tenglik o‘rinli.*

Isbot. $m \ge n$ deb faraz qilaylik. m sonini bo‘linuvchi va n sonini bo‘luvchi sifatida olib, Yevklid algoritmini qo‘llasak, quyidagi ketma-ketliklarni hosil qilamiz:

$$m = q_0 n + r_1, 0 \le r_1 < n$$
$$m = q_0 n + r_1, 0 \le r_1 < n$$
$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, 0 \le r_3 < r_2$$
$$\vdots$$
$$r_{s-2} = q_{s-1} r_{s-1} + r_s, 0 \le r_s < r_{s-1}$$
$$r_{s-1} = q_s r_s$$

5-tasdiqqa ko‘ra quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$$EKUB(F_m, F_n) = EKUB(F_n, F_{r_1}) = EKUB(F_{r_1}, F_{r_2}) = ... = EKUB(F_{r_{s-1}}, F_{r_s})$$

1-tasdiqqa ko‘ra $r_{s-1} \vdots r_s$ ekanligidan, $F_{r_{s-1}} \vdots F_{r_s}$ o‘rinli. Bundan esa $EKUB(F_m, F_n) = F_{r_s}$ ekanligi kelib chiqadi. Yevklid algoritmidan ko‘rinadiki r_s bu m va n sonlarining EKUBidir, ya’ni $r_s = EKUB(m, n)$. Demak, haqiqatdan ham $EKUB(F_n, F_m) = F_{EKUB(n,m)}$ tenglik o‘rinli ekan.

Xulosa. Maqolada Fibonachi sonlar ketma-ketligidagi bo‘linish munosabatlari aniq matematik qonuniyatlarga asoslanishi ko‘rsatildi. Tadqiqot davomida Fibonachi sonlarining bo‘linuvchanligi, indekslar orasidagi bog‘lanish bilan uzviy ekanligi hamda har qanday natural son uchun unga bo‘linadigan Fibonachi son mavjudligi o‘rganildi. Shuningdek, Fibonachi ketma-ketligining xossalari va EKUB bilan bog‘liq muhim natijalar tahlil qilindi. Olingan natijalar Fibonachi sonlarining sonlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega ekanligini hamda ularning matematik va amaliy masalalarda keng qo‘llanilishini tasdiqlaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Thomas Koshy. Fibonacci and Lucas Numbers with applications, Hoboken, New Jersey: John Wiley& Sons,Inc., 2017.

2. To‘rayev H. T., I. Azizov Matematik mantiq va diskret matematika / “Tafakkur-Bo‘stoni” Toshkent –2011;

3. L.Carlitz, A Note on Fibonacci Numbers, Fibonacci Quarterly, 2(1964), 15–28.

4. F.D. Parker, Problem H-21, Fibonacci Quarterly,2 (1964), 133.

5. G.Michael, A new Proof of an Old Property, Fibonacci Quarterly, 2 (1964), 57–58.

6. M. Wunderlich, Another Proof of the Infinite Primes Theorem, American Mathematical Monthly,72 (1965), 305.

7. Алфутова Н. Б. Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002.–264 с.

UO‘K 517.954, 517.956.4

BIR O‘LCHAMLI FAZODA O‘ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN QO‘YILGAN NOLOKAL BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALA

Hamroqulova Shaxnoza Shermat qizi,
Buxoro davlat universiteti tayanch doktoranti
shaxnozahamroqulova32@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada, biz bir o‘lchamli fazoda o‘zgaruvchan koeffitsiyentli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo‘yilgan nolokal boshlang’ich-chegaraviy masalani tadqiq etamiz. Masalani tadqiq etishda qo‘yilgan masalaning yechimini fazo o‘zgaruvchisi bo‘yicha almashtirish bajarib, bu masalaga ekvivalent bo‘lgan masala olamiz. So‘ng olingan masala yechimida fazo o‘zgaruvchisi bo‘yicha bir marta differensiallab yangi o‘zgaruvchini kiritib, bu masala kiritilgan yangi o‘zgaruvchiga nisbatan ekvivalent bo‘lgan masalaga keltirilgan. Bu masalalar ekvivalentligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *issiqlik tarqalish tenglamasi, ikki o‘zgaruvchili funksiya, xususiy hosila, chegaraviy va boshlang’ich shart, ekvivalentlik.*

НЕЛОКАЛЬНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. *В данной работе мы исследуем нелокальную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в одномерном пространстве. В процессе исследования путём замены относительно пространственной переменной получена эквивалентная задача. Затем, продифференцировав решение полученной задачи один раз по пространственной переменной и введя новую переменную, задача сведена к эквивалентной задаче относительно этой новой переменной. Доказана эквивалентность указанных задач.*

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, функция двух переменных, частная производная, граничные и начальные условия,эквивалентность.*

A NONLOCAL INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT CONDUCTION EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN ONE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. *In this work,we study a nonlocal initial-boundary value problem for the heat conduction equation with variable coefficients in one-dimensional space. In the process of investigation,by applying a substitution with respect to the spatial variable,we obtain an equivalent problem. Then,by differentiating the solution of the obtained problem once with respect to the spatial variable and introducing a new variable,the problem is reduced to another equivalent formulation in terms of this new variable. The equivalence of these problems is proved.*

Keywords: *heat conduction equation, function of two variables,partial derivative,boundary and initial conditions, equivalence.*

Kirish. Chegaraviy masalalar ko‘plab fizik jarayonlar va amaliy masalalarda uchraydi, masalan, bir fazali teskari Stefan masalasi [1], erkin chegara muammolari diffuziya jarayonida [2], axborot uzatish tarmoqlarida o‘zgaruvchan masofalar modeli va hokazo. So‘nggi 20 yil ichida bu kabi teskari masalalarga oid ko‘plab ishlar amalga oshirildi. Bunday teskari masalalar noma’lum erkin chegarani an’anaviy koeffitsiyentli teskari masalalar bilan birlashtiradi. Shunday ekan, bu teskari masalalar yangicha va yanada murakkab hisoblanadi.

Oxirgi chegaraviy shart $s'(t) = -\mu u_x(s(t), t)$ chegarada $s(t)$ ga “Stefan sharti” deyiladi, bu esa qattiq va suyuq holatlar o‘rtasidagi o‘tishlarni tasvirlash uchun keng qo‘llaniladi [3].

Agar (1) tenglamaning birinchi tenglamasidagi o‘ng tomon mavjud bo‘lmasa hamda chegaradagi $u(0, t) = 0$ ni Neumann tipidagi chegaraviy shart $u_x(0, t) = 0$ ga almashtirilsa, unda muammo (1) bir fazali Stefan muammosiga keltiriladi. Bir o‘lchamli Stefan muammosining mavjudligi va yechimining yagonaligi masalasi [4] da o‘rganilgan. Bundan tashqari, [14] da ikki fazali Stefan muammosi uchun klassik yechim homotopiya tahlil usuli yordamida olingan.

Amaliy masalalarda, (1) tenglamadagi $q(t)$ xotira konvolyutsiya yadrosi materialning jismoniy xususiyatini bildiradi, bu esa oldindan bevosita o‘lchash uchun juda qiyin $u(0,t)=0$. Xotira qobiliyatini aniqlashning muhim bilvosita usuli bu materialga ma’lum stimul berish va materialning tegishli javobini o‘lchashdir. Shunda yadroni o‘lchovlardan chiqarib olish mumkin bo‘ladi.Bu holda, bizda quyidagi vaziyat mavjud:

u, s, q ni qo‘shimcha o‘lchovlardan foydalanib bir vaqtning o‘zida aniqlash bilan bog’liq teskari masalani yechish zarur bo‘ladi.

Teskari yadroni aniqlash masalasiga kelsak, De Staelen RH, Slodička [13] belgilangan chegarada konvolyutsiya yadrosini aniqlash muammosining mavjudligi va yagonaligini isbotladilar, buning uchun ular global vaqt bo‘yicha mavjudlikni isbotlashning samarali strategiyasini taklif qildilar. Keyinchalik yarim guruh nazariyasi qo‘llanildi.So‘nggi yillarda ushbu usul turli xil modellar uchun qo‘llanildi [5-9]. Yaqinda Van Bockstal teskari vaqtga bog’liq konvolyutsiya yadrosini aniqlash masalasini ko‘rib chiqdi. Staklen va Sidotka [13] esa zaif yechimning mavjudligi va yagonaligini ko‘rib chiqdilar.

Masalan, Ivanchov [10] noma’lum vaqtga bog’liq koeffitsienti bo‘lgan erkin chegarali parabolik tenglama uchun yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotladi.

Hryntsiv [11] zaif quvvat degeneratsiyali vaqtga bog’liq koeffitsiyentli bir o‘lchamli issiqlik tenglamasining teskari muammosini ko‘rib chiqdi. Hussein, Lesnic, Ivanchov va Snitko [12] noma’lum erkin chegarali ko‘p differensial masalani ikki qo‘shimcha integral shartlar ostida o‘rgandilar.

Shunga qaramay, integro-differensial tenglamaning birinchi parabolik tenglamasida xotira yadrosini aniqlash muammosi hali o‘rganilmagan. Chunki u va q noma’lum va ular bir vaqtning o‘zida aniqlanishi kerak, bunday teskari muammo nolinear va monolitik hisoblanadi. Shu sababli biz ushbu muammoning mavjudlik va yagonaligini o‘rganishga qiziqamiz.

$Q_{s,T}=\{(x,t)|0<x<s(t), 0<t<T\}$ sohada quyidagi issiqlik tarqalishi tenglamasi uchun boshlang’ich chegaraviy masalani qaraymiz. Bu masala ushbu

$$u_t(x,t)-u_{xx}(x,t)=q(t)u(x,t)+f(x,t), \quad (x,t)\in Q_{s,T} \tag{1}$$

tenglamaning

$$u(0,t)=0, u(s(t),t)=0, \ t\in(0,T) \tag{2}$$

chegaraviy va boshlang‘ich

$$\begin{gathered} u(x,0)=u_0(x), \ x\in[0,s_0], \quad s(0)=s_0>0, \\ s'(t)=-\mu u_x(s(t),t) \quad t\in(0,T) \end{gathered} \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

(1)-(3) masalaning yechimini

$$\xi=\frac{x}{s(t)}, \qquad u(x,t)=v(\xi,t) \tag{4}$$

ko‘rinishida izlaymiz. (4) tengliklardan foydalanib, (1)-(3) masalaga ekvivalent bo‘lgan masalani olamiz.

Buning uchun, $u(x,t)$ funksiyaning differensialidan foydalanamiz:

$$du(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt.$$

Yuqoridagi differensial formuladan foydalanib, (4) tengliklar orqali berilgan $u(x,t)$ funksiyaning xususiy hosilalarini quyidagicha topamiz:

$$u_t(x,t)=v_\xi(\xi,t)\xi_t+v_t(\xi,t).$$

Bunda (4) tenglikdan foydalanib ξ_t ni topamiz

$\xi_t=-\frac{xs'(t)}{s^2(t)}$ va $x=\xi s(t)$ tengliklardan foydalanib,

$$u_t(x,t)=v_\xi(\xi,t)\xi_t+v_t(\xi,t)=v_\xi(\xi,t)\left(-\frac{\xi s'(t)}{s(t)}\right)+v_t(\xi,t) \tag{5}$$

tenglikni olamiz.

Yuqorida berilgan (4) differensial formuladan foydalanib,

$$u_x(x,t)=v_\xi(\xi,t)\xi_x \tag{6}$$

(6) tenglikka (4) dan foydalanib ξ_x ni keltirib qo‘yamiz: $\xi_x=\frac{1}{s(t)}$ va topilgan ifodani (6) ga keltirib qo‘yamiz :

$$u_x(x,t)=\frac{v_\xi(\xi,t)}{s(t)} \tag{7}$$

(4) va (7) ifodadan foydalanib $u_{xx}(x,t)$ shu hosilani hisoblaymiz :

$$u_{xx}(x,t) = v_{\xi\xi}(\xi,t)\xi_x \frac{1}{s(t)} = \frac{v_{\xi\xi}(\xi,t)}{s^2(t)} \quad (8)$$

natijani olamiz.

Yuqoridagi barcha almashtirishlarni (1) tenglamaga qo‘yib quyidagi tenglamani hosil qilamiz :

$$v_t(\xi,t) - v_\xi(\xi,t)\frac{\xi s'(t)}{s(t)} - \frac{v_{\xi\xi}(\xi,t)}{s^2(t)} = q(t)v(\xi,t) + g(\xi,t), \quad (9)$$

bu yerda $g(\xi,t) = f(\xi\, s(t), t)$.

Endi, (4) dan foydalanib (1)-(3) masalaning (2) chegaraviy va (3) boshlang’ich shartlarini $v(\xi,t)$ ga nisbatan quramiz.

(2) chegaraviy shart va (4) dan foydalanib quyidagilarga ega bo‘lamiz :

$$u(0,t) = 0, u(x,t) = v(\xi,t)$$

va bizda $\xi = \frac{x}{s(t)}$ ekanligidan quyidagicha yozish mumkin :

$$u(x,t) = v(\xi,t) = v(\frac{x}{s(t)}, t)$$

bundan ko‘ramizki, $u(0,t) = v(0,t) = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi .

2-shart ya’ni $u(s(t),t) = 0$ tenglikdan foydalanib

$$u(x,t) = v(\xi,t) = v(\frac{x}{s(t)}, t)$$

bu ifodani $x = s(t)$ bo‘lgandagi qiymatini topamiz:

$$u(s(t),t) = v(1,t) = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

$$v(0,t) = 0\,, v(1,t) = 0\,, t \in [0,T] \quad (10)$$

chegaraviy shartlar o‘rinli bo‘ladi.

(3) shartdagi tengliklarni qo‘llab , $u(x,0) = v(\xi,0) = v_0(\xi)$ ni hosil qilamiz

$$v(\xi,0) = v_0(\xi) =: u_0(s_0\xi), \xi \in \overline{\Omega}\,, \quad (11)$$

$$s'(t)s(t) = -\mu v_\xi(1,t), t \in (0,T)$$

(3) da berilgan $s'(t) = -\mu u_x(s(t),t)$ shartni (7) ga keltirib qo‘yib quyidagini olamiz: $s'(t) = -\mu\frac{v_\xi(1,t)}{s(t)}$ bundan

$$s'(t)s(t) = -\mu v_\xi(1,t) \quad (12)$$

ni hosil qilamiz.

(1)-(3) masala yuqoridagi (4) almashtirish yordamida (1)-(3) masalaga ekvivalent (9)-(12) masalani olamiz

(9)-(12) masalani tadqiq etamiz. (9)-(12) masalani tadqiq etish jarayonida, keyinchalik qulaylik bo‘lishi uchun quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\omega(\xi,t) = v_\xi(\xi,t), \;\; h(t) = s'(t)s(t) \quad (13)$$

(9) tenglamani ξ o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallaymiz, ya’ni

$$\big(v_t(\xi,t)\big)_\xi - \left(v_{\xi\xi}(\xi,t)\frac{\xi s'(t)}{s(t)} + v_\xi(\xi,t)\frac{s'(t)}{s(t)}\right)$$
$$-\frac{v_{\xi\xi\xi}(\xi,t)}{s^2(t)} = q(t)v_\xi(\xi,t) + g_\xi(\xi,t). \quad (14)$$

(14) dagi $v_\xi(\xi,t)$ o‘rniga (13) belgilashimizni keltirib qo‘yamiz. U holda (9) tenglamada murakkab bo‘lmagan almashtirishlarni bajarib, quyidagini olamiz:

$$\omega_t(\xi,t) - \frac{s'(t)}{s(t)}\,\omega(\xi,t) - \frac{\xi s'(t)}{s(t)}\omega_\xi(\xi,t)$$
$$-\frac{1}{s^2(t)}\omega_{\xi\xi}(\xi,t) = q(t)\,\omega(\xi,t) + g_\xi(\xi,t). \quad (15)$$

(13) dagi belgilashga ko‘ra $h(t)$ ni quyidagi ko‘rinishda almashtirib olamiz:

$$h(t) = s(t)d\big(s(t)\big)$$

bu tenglikni ikkala tarafini $(0,t)$ oralig’ida integrallaymiz

$$\int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^t s(\tau)d\big(s(\tau)\big)$$

bu integralni hisoblasak va $s(0) = s_0$ shartni keltirib qo‘ysak ya’ni

$$s^2(t) = 2\int_0^t h(\tau)d\tau + s_0^2 \quad (16)$$

hosil bo‘ladi.

(13) belgilashga ko‘ra $s'(t)=\frac{h(t)}{s(t)}$ ekanligidan (15) tenglama ko‘rinishi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\omega_t(\xi,t)-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\omega-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\xi\omega_\xi(\xi,t)$$
$$-\frac{1}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\omega_{\xi\xi}(\xi,t)=\ q(t)\ \omega(\xi,t)+g_\xi(\xi,t) \qquad (17)$$

Endi,(13) dan foydalanib (9)-(12) masalaning chegaraviy va boshlang’ich shartlarini $\omega(\xi,t)$ ga nisbatan quramiz.

(9)-tenglama, (10)-chegaraviy shartlar va (13)-belgilashdan foydalanib quyidagilarga ega bo‘lamiz :

$\xi=0$ bo‘lganda,

$$v_t(0,t)-v_\xi(0,t)\frac{0s'(t)}{s(t)}-\frac{\omega_\xi(0,t)}{s^2(t)}=q(t)v(0,t)+g(0,t)$$

tenglik o‘rinli ekanligidan $-\frac{\omega_\xi(0,t)}{s^2(t)}=g(0,t)$ bu tenglikdan

$$\omega_\xi(0,t)=-s^2(t)g(0,t) \qquad (18')$$

va $\xi=1$ bo‘lganda esa,

$$v_t(1,t)-v_\xi(1,t)\frac{1s'(t)}{s(t)}-\frac{\omega_\xi(1,t)}{s^2(t)}=q(t)v(1,t)+g(1,t)$$

tenglik o‘rinli ekanligidan va (12) shartni qo‘llab quyidagini olamiz:

$$\frac{(s'(t))^2}{\mu}-\frac{1}{s^2(t)}\omega_\xi(1,t)=\ g(1,t)$$

bu tenglikdan

$$\omega_\xi(1,t)=\frac{s^2(t)(s'(t))^2}{\mu}-s^2(t)g(1,t) \qquad (19')$$

kelib chiqadi.

(13) belgilash va (16) dan foydalanib,($18'$) va ($19'$) ko‘rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$\omega_\xi(0,t)=-\left(2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2\right)g(0,t)\ va\ \omega_\xi(1,t)$$
$$=\frac{h^2(t)}{\mu}-\left(2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2\right)g(1,t). \qquad (18)\ .$$

Shu bilan birga boshlang’ich shart uchun (13) dan foydalangan holda $t=0$ bo‘lganda

$$\omega(\xi,0)=v_\xi(\xi,0)=v_0'(\xi) \qquad (19)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Shuningdek, (12) va (13) belgilashlardan foydalanib

$$h(t)=\ s'(t)s(t)=-\mu v_\xi(1,t)=-\mu\ \omega(1,t) \qquad (20)$$

ni olamiz.

Shunday qilib (9)-(12) masalaga ekvivalent bo‘lgan quyidagi masalani olamiz:

$$\omega_t(\xi,t)-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\omega-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\xi\omega_\xi(\xi,t)$$
$$-\frac{1}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\omega_{\xi\xi}(\xi,t)=\ q(t)\ \omega(\xi,t)+g_\xi(\xi,t),(\xi,t)\in Q_T \qquad (17)$$

tenglamaning

$$\omega_\xi(0,t)=-\left(2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2\right)g(0,t)\ va\ \omega_\xi(1,t)$$
$$=\frac{h^2(t)}{\mu}-\left(2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2\right)g(1,t),t\in(0,T) \qquad (18)$$

chegaraviy va

$$\omega(\xi,0)=v_0'(\xi),\ \ \xi\in\overline{\Omega} \qquad (19)$$
$$h(t)=-\mu\ \omega(1,t),t\in(0,T) \qquad (20)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topishdan iboratdir.

Biz (9)-(12) masaladan (17)-(20) masalani oldik. Endi, ekvivalentlik ta’rifiga ko‘ra (17)-(20) masaladan (9)-(12) masalani keltirib chiqaramiz.

Buning uchun (13) belgilashdan $v(\xi,t)$ funksiyani quyidagicha topib olamiz

$$v(\xi,t)=\int_0^{\xi}\omega(\eta,t)\,d\eta+\mu(t) \tag{21}$$

Dastlab, $\mu(t)$ funksiyani aniqlaymiz.

(10) chegaraviy shartga ko‘ra $\xi=0$ bo‘lganda (21) ga qo‘llab quyidagini olamiz: $v(0,t)=\int_0^0\omega(\eta,t)\,d\eta+\mu(t)$ bundan $\mu(t)=0$ ekanligi kelib chiqadi. $\xi=1$ bo‘lganda esa $v(1,t)=\int_0^1\omega(\eta,t)\,d\eta+\mu(t)$ tenglikdan $\int_0^1\omega(\eta,t)\,d\eta=-\mu(t)$ o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. (13) ga ko‘ra $\omega_t(\xi,t)=\left(v_\xi(\xi,t)\right)_t$, $\omega_\xi(\xi,t)=v_{\xi\xi}(\xi,t), \omega_{\xi\xi}(\xi,t)=v_{\xi\xi\xi}(\xi,t)$ lar o‘rinli ekanligidan (17) ga keltirib qo‘yib

$$\left(v_\xi(\xi,t)\right)_t-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}v_\xi(\xi,t)-\frac{h(t)}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}\xi v_{\xi\xi}(\xi,t)$$
$$-\frac{1}{2\int_0^t h(\tau)d\tau+s_0^2}v_{\xi\xi\xi}(\xi,t)-q(t)v_\xi(\xi,t)=g_\xi(\xi,t)$$

o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Budan esa (17) tenglamaning (14) tenglamaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi.

ADABIYOTLAR:

1. Hetmaniok E, Słota D, Wituła R, Zielonka A. Solution of the one-phase inverse Stefan problem by using the homotopy analysis method. Appl. Math. Model. 39(2015), pp. 6793-6805.

2. Lin Z. A free boundary problem for a predator-prey model. Nonlinearity. 20(2007), pp.1883-1892.

3. Mitchell S.L. Applying the combined integral method to two-phase Stefan problems with delayed onset of phase change. J. Comput. Appl. Math. 281(2015),

4. pp. 58-73.

5. Oleinik O.A. method of solution of a general Stefan problem. Dokl. Akad. Nauk USSR. 135(1960), pp.1054-1057.

6. Colombo F., Guidetti D. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces. // Math. Models Methods Appl. Sci. 17(2007), pp.537-565.

7. Colombo F. An inverse problem for the strongly damped wave equation with memory. Nonlinearity. 20(2007), pp.659-683.

8. Colombo F, Guidetti D. Identification of the memory Kernel in the strongly damped wave equation by a flux condition. Commun. Pure.Appl. Anal. 8(2009), pp.601-620.

9. Janno J, Lorenzi A. Recovering memory kernels in parabolic transmission problems. J. Inverse Ill-Posed Probl. 16(2008), pp.239-265.

10.Lorenzi A, Rocca E. Identification of two memory Kernels in a fully hyperbolic phase-field system. // Inverse Ill-Posed Probl. 16(2008), pp.147-174.

11.Ivanchov M.I. Inverse problem with free boundary for heat equation. Ukr. Math. J. 55(2003), pp.1086-1098.

12.Hryntsiv N. The inverse problem with free boundary for a weakly degenerate parabolic equation.// J. Math. Sci. 183(2012), pp.779-795.

13.De Staelen R.H., Slodička M. Reconstruction of a convolution kernel in a semilinear parabolic problem based on a global measurement. // Nonlinear Analysis Theory Methods Appl. 112(2015), pp.43-57.

14.Borodin M.A. Existence of the global classical solution for a two-phase Stefan problem. // SIAM J. Math. Appl. 30(1999), pp.1264-1281.

UO‘K 51

MURAKKAB FUNKSIYALAR VA ZANJIR QOIDASI

Nishonova Marhabo Alisherbek qizi,
Qo‘qon universiteti Andijon filiali o‘qituvchisi
Maxmudov Xabibullo Xikmatillo o‘g‘li,
Qo‘qon universiteti Andijon filiali o‘qituvchisi

Annotatsiya.*Ushbu tadqiqot ishida matematik analizning fundamental poydevorlaridan biri hisoblangan zanjir qoidasining iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish va prognozlashdagi o‘rni hamda metodologik ahamiyati atroflicha tadqiq etiladi. Tadqiqot doirasida murakkab funksiyalarni differensiallash mexanizmi, xususan, Leybnits belgilashlarining iqtisodiy o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘liqlikni ifodalashdagi afzalliklari tahlil qilingan. Zanjir qoidasining amaliy samaradorligi narxning o‘zgarishi, iste’mol talabi va vaqt o‘rtasidagi ko‘p bosqichli o‘zaro aloqalarni tavsiflovchi real iqtisodiy ssenariylar misolida yoritib berilgan. Ko‘p o‘lchovli va murakkab tuzilmali funksiyalarni differensiallashda zanjir qoidasini ketma-ket qo‘llash uslubiyoti bayon etilib, ushbu yondashuvning murakkab hisoblash jarayonlarini soddalashtirishdagi hamda iqtisodiy ko‘rsatkichlarning o‘zgarish sur’atlarini (elastiklik va marjinal tahlil) aniqlashdagi o‘rni ko‘rsatib o‘tilgan. Olingan natijalar iqtisodiy tizimlarning dinamik muvozanatini tahlil qilishda differensial hisobning algoritmlarini takomillashtirishga xizmat qiladi. Mazkur ish oliy ta’lim muassasalarida iqtisodiy matematika va ekonometrika kurslarini o‘qitishda hamda amaliy iqtisodiy masalalarni yechishda muhim metodik manba bo‘lib xizmat qiladi.*

Kalit so‘zlar: *murakkab funksiya, zanjir qoidasi, differensiallash, Leybnits belgilashi, o‘zgarish tezligi, iqtisodiy modellashtirish, talab va narx funksiyasi, Yakobian interpretatsiyasi, matematik analiz.*

СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ И ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО

Аннотация. *В данной научно-исследовательской работе подробно рассматриваются роль и методологическое значение цепного правила — одного из фундаментальных основ математического анализа — в моделировании и прогнозировании экономических процессов. В рамках исследования проанализирован механизм дифференцирования сложных функций, в частности, выделены преимущества обозначений Лейбница в выражении взаимосвязей между экономическими переменными. Практическая эффективность цепного правила продемонстрирована на примере реальных экономических сценариев, описывающих многоуровневые взаимосвязи между колебаниями цен, потребительским спросом и фактором времени. В работе изложена методика последовательного применения цепного правила при дифференцировании многомерных и сложных по структуре функций. Показана роль данного подхода в упрощении сложных вычислительных процессов, а также в определении темпов изменения экономических показателей (эластичности и маржинального анализа). Полученные результаты способствуют совершенствованию алгоритмов дифференциального исчисления при анализе динамического равновесия экономических систем. Данная работа служит важным методическим ресурсом для преподавания курсов экономической математики и эконометрики в высших учебных заведениях, а также для решения прикладных экономических задач.*

Ключевые слова: *сложная функция, цепное правило, дифференцирование, обозначение Лейбница, скорость изменения, экономическое моделирование, функции спроса и цены, интерпретация Якобиана, математический анализ.*

COMPOSITE FUNCTIONS AND THE CHAIN RULE

Abstract. *This research work provides a comprehensive investigation into the role and methodological significance of the chain rule - a fundamental cornerstone of mathematical analysis—within the modeling and forecasting of economic processes. The study analyzes the differentiation mechanism of composite functions, specifically highlighting the methodological advantages of Leibniz's notation in representing interdependencies between economic variables. The practical efficacy of the chain rule is illustrated through real-world economic scenarios characterizing multi-level interactions between price fluctuations, consumer demand, and the temporal factor. The paper delineates the methodology of sequential application of the chain rule in differentiating multidimensional and complex structural functions, emphasizing its role in*

streamlining intricate computational processes and determining the rates of change in economic indicators, such as elasticity and marginal analysis. The findings serve to refine differential calculus algorithms used in analyzing the dynamic equilibrium of economic systems. This work functions as a vital methodical resource for the instruction of mathematical economics and econometrics courses in higher education institutions, as well as for addressing applied economic problems.

Keywords: *composite function, chain rule, differentiation, Leibniz's notation, rate of change, economic modeling, demand and price functions, Jacobian interpretation, mathematical analysis.*

Kirish. Zamonaviy fan va texnika, xususan, iqtisodiyot va muhandislik sohalarining jadal rivojlanishi murakkab tizimlarni matematik modellashtirishni talab etadi. Aksariyat real jarayonlar bir-biriga zanjirsimon bog‘langan o‘zgaruvchilardan iborat bo‘lib, ularning biridagi o‘zgarish boshqalariga ham ta’sir o‘tkazadi. Bunday dinamik bog‘liqliklarni tahlil qilishda matematik analizning fundamental tushunchasi – murakkab funksiyalarni differensiallash va zanjir qoidasi markaziy o‘rinni egallaydi. Ayniqsa, iqtisodiy ko‘rsatkichlarning vaqtga va bozor kon’yunkturasiga bog‘liqligini hisobga olsak, ushbu qoidaning amaliy ahamiyati yanada ortadi.

Mazkur ishning asosiy maqsadi murakkab funksiyalar va zanjir qoidasining nazariy asoslarini yoritish hamda ularning iqtisodiy masalalarni yechishdagi samaradorligini ko‘rsatishdan iborat.

Agar $y-u$ ga bog’liq funksiya bo‘lsa va u esa x ga bog’liqning funksiya bo‘lsa, unda $y-$ ga biz x ga bog’liq funksiya sifatida qaraymiz. Bu holda y ni x ning murakkab funksiyasi deb ataymiz. Faraz qilaylik, x ning qiymati o‘zgarganda, bu u ning, shuningdek y ning ham o‘zgarishiga olib keladi. x dagi o‘zgarish o‘z navbatida Zanjir reaksiyasini keltirib chiqaradi. Agar du/dx va dy/dx o‘zgarish tezliklari ma’lum bo‘lsa, unda dy/dx qanday bo‘ladi? Ma’lumki, bu tezliklar orasidagi bog‘lanish quyidagicha:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{1}$$

Biroz batafsilroq aytganda: agar $y-\ u$ ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsa va $u-\ x$ ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsa, unda y ham x ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘ladi va (1) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Xususiy holda $y=u^a$ ga teng bo‘lsa, $dy/du=a\cdot u^{a-1}$ bo‘ladi va bu ifodani (1) ga qo‘yish orqali

$$y=u^a \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=a\cdot u^{a-1}\frac{du}{dx} \tag{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Leybnits belgilashidan foydalanganda zanjir qoidasini eslab qolish oson. (1) ning chap tomoni o‘ng tomonda du ni qisqartirishda hosil bo‘ladigan ifodaning aynan o‘zidir. Agar hosilalarni o‘zgarish tezliklari sifatida talqin qilsak, zanjir qoidasi ancha tushunarli bo‘ladi. Buni quyidagi iqtisodiy misolda ko‘ramiz.

Misol.1 Biror mahsulotga bo‘lgan x talab $-p$ narxga bog‘liq bo‘lsin. Faraz qilaylik, p narx doimiy emas, balki t vaqtga bog‘liq. U holda $x-\ t$ ning murakkab funksiyasi bo‘ladi va zanjir qoidasiga ko‘ra:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dp}\cdot\frac{dp}{dt} \tag{3}$$

Masalan, agar narx har bir kg uchun 1$ ga oshsa, talab 5000 kg ga kamayadi, deylik. U holda $dx/dp\approx-5000$. Faraz qilaylik, bir kg uchun narx haftasiga 0.05$ ga oshadi, ya’ni $dp/dt\approx 0.05$. U holda talab haftasiga qancha kamayadi?

Narx haftasiga 0.05$ ga oshgani va talab narxning har bir dollarlik oshishiga 5000 kg ga kamaygani uchun, talab haftasiga $5000\cdot 0.05\approx 250$ kg ga kamayadi. Demak, $dx/dt\approx-250$ (kg/hafta da o‘lchanadi). Bu natija (3) tenglikni qanoatlantiradi.

Misol.2 (a) $y=u^5$ va $u=1-x^3$ bo‘lganda dy/dx ni toping.

(b) $y=\frac{10}{(x^2+4x+5)^7}$ bo‘lganda dy/dx ni toping:

Yechim. (a) (1) formuladan bevosita foydalanish mumkin. Chunki $dy/du=5u^4$ va $du/dx=-3x^2$, demak:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4(-3x^2)=-15x^2u^4=-15x^2(1-x^3)^4$$

(b) Bu holda agar y ni $y=10(x^2+4x+5)^{-7}$ kabi ifodalasak,

$$y=10u^{-7}$$

bu yerda $u=x^2+4x+5$.

$$\frac{dy}{du}=10(-7)\,u^{-7-1}=-70\,u^{-8}\qquad\text{va}\qquad\frac{du}{dx}=2x+4$$

Endi (1) tenglamaga qo‘ysak

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=70u^{-8}(2x+4)=-140(x+2)/(x^2+4x+5)^8$$

Eslatma.1 Albatta, $y=\frac{x^5}{5}$ funksiyani $y=\left(\frac{1}{5}\right)x^5$ ko‘rinishida yozmasdan, bo‘lish qoidasidan foydalanib ham differensiallash mumkin: $'=(1/5)5=x^4$. Ammo ikkinchi usul ancha sodda. Xuddi shu sababli, 2(b)-misoldagi funksiyaga bo‘lish qoidasini qo‘llash keraksiz murakkablik keltirib chiqaradi. Zanjir qoidasi bu yerda ancha samaraliroqdir.

Keyingi misolda zanjir qoidasi bir necha marta qo‘llanadi.

Misol. 3

Quyidagi funksiya uchun $x'(t)$ ni toping: $x(t)=5\left(1+\sqrt{t^3+1}\right)^{25}$

Yechish. Dastlab $x(t)=5u^{25}$ deb olamiz, bu yerda $u=1+\sqrt{t^3+1}$

$$x'(t)=5\cdot 25u^{24}\frac{du}{dt}=125u^{24}\frac{du}{dt} \qquad (4)$$

Bu misoldagi o‘ziga xos jihat shundaki, du/dt ni darhol yozib bo‘lmaydi. Uni topish uchun zanjir qoidasini ikkinchi marta qo‘llash kerak. $u=1+\sqrt{v}=1+v^{1/2}$ deb olaylik, bu yerda $v=1+t^3$. Unda

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{2}v^{1/2}-1. \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}v^{-1/2}\cdot 3t^2=\frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2}\cdot 3t^2 \qquad (5)$$

(1) va (2) dan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$x'(t)=125(1+\sqrt{t^3+1})^{24}\cdot\frac{1}{2}(t^3+1)^{-1/2}\cdot 3t^2$$

Oldingi misolda bo‘lgani kabi, bu yerda ham $x-u$ ga bog’liq funksiya, $u-v$ ga bog’liq funksiya va v esa t ga bog’liq funksiya. Demak, $x-t$ ga bog’liq murakkab funksiya bo‘lib, zanjir qoidasini ikki marta qo‘llash mumkin:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}$$

Bu aynan oxirgi misolda qo‘llanilgan formuladir. Yana bir bor ta'kidlash joizki, belgilash usuli juda qulay, chunki o‘ng tomondagi du va dv larni qisqartirib yuborsak, aynan chap tomondagi natija hosil bo‘ladi.

Xulosa. Olib borilgan kompleks tahlillar shuni ko‘rsatadiki, murakkab funksiyalarni differensiallashda zanjir qoidasi shunchaki nazariy hisob-kitob vositasi emas, balki dinamik iqtisodiy jarayonlarning ichki mexanizmlarini ochib beruvchi fundamental tahliliy apparatdir. Tadqiqot davomida olingan natijalar ushbu qoidaning metodologik, iqtisodiy va algoritmik jihatdan yuqori samaradorlikka ega ekanligini tasdiqladi.

Birinchidan, metodologik optimallashtirish nuqtai nazaridan, Leybnits belgilashlariga asoslangan differensial shakllar iyerarxiyasi murakkab matematik tuzilmalarni mantiqiy qismlarga ajratish imkonini beradi. Bu usul zanjirsimon bog‘liqliklarni vizuallashtirish orqali yuqori tartibli differensiallash jarayonlarida kognitiv yuklamani kamaytiradi va ko‘p bosqichli funksiyalarni tahlil qilishda yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Ikkinchidan, iqtisodiy interpretatsiya jarayonida hosilaning matematik mohiyati “o‘zgarish sur’ati” sifatida namoyon bo‘ladi. Zanjir qoidasi yordamida o‘zgaruvchilar orasidagi bilvosita bog‘liqliklarni (masalan, vaqt o‘tishi bilan narxning o‘zgarishi va uning iste’mol talabiga kaskadli ta’siri) miqdoriy baholash mumkin. Bu esa ekonometrik modellashtirishda elastiklik ko‘rsatkichlarini hisoblash va bozor dinamikasini prognozlashda universal metodologik asos bo‘lib xizmat qiladi.

Uchinchidan, algoritmik samaradorlik jihatidan, zanjir qoidasini bosqichma-bosqich qo‘llash an’anaviy bo‘linma yoki ko‘paytma qoidalariga nisbatan hisoblash vaqtini sezilarli darajada tejaydi. Ko‘p o‘lchovli iqtisodiy tizimlarda ushbu yondashuv hisoblash xatolarini minimallashtirib, algoritmlarning barqarorligini oshiradi.

Xulosa qilib aytganda, zanjir qoidasini chuqur metodologik o‘zlashtirish zamonaviy mutaxassislarga nafaqat matematik masalalarni yechish, balki o‘zgaruvchan tashqi muhitda iqtisodiy tizimlarning dinamik muvozanatini tahlil qilish uchun zarur bo‘lgan universal tahliliy vositani taqdim etadi. Ushbu tadqiqot natijalari kelgusida murakkab iqtisodiy modellarni optimallashtirish va boshqaruv qarorlarini qabul qilishda muhim nazariy-amaliy manba bo‘lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. *Stewart J. (2020). Calculus: Early Transcendentals. 9th Edition, Cengage Learning.*
2. *Azlarov T., & Mansurov H. (1994). Matematik analiz. 1-jild. –Toshkent: “O‘qituvchi”.*
3. *Chiang A. C., & Wainwright K. (2005). Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw-Hill Education.*
4. *Gaziyev A., Isroilov I., & Yaxshiboyev K. (2006). Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami. –Toshkent.*

5. *Thomas G. B., Weir M. D., & Hass J. R. (2014). Thomas' Calculus. 13th Edition, Pearson.*

6. *Shoroaliev A. S. (2019). Iqtisodchilar uchun matematika. –Toshkent: Iqtisodiyot.*

7. *Hoy M., Livernois J., McKenna C., Rees R., & Stengos, T. (2011). Mathematics for Economics. 3rd Edition, MIT Press.*

8. *Varian H. R. (2014). Intermediate Microeconomics: A Modern Approach. 9th Edition, W. W. Norton & Company.*

9. *Fixtengols G. M. (2001). Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya. Tom 1. Moskva: Fizmatlit.*

10. *Piskunov N. S. (2004).* Дифференциальное и интегральное исчисления*. –Moskva: Integral-Press.*

11. *Simon C. P., & Blume L. (1994). Mathematics for Economists. W. W. Norton & Company.*

12. *Muxammadiev J. (2021). Oliy matematika: O‘quv qo‘llanma. Toshkent: Innovatsiya-Ziyo.*

13. *Abduhamidov A. U., & Nasimov, X. A. (2003). Algebra va analiz asoslari. –Toshkent: “Istiqbol”.*

14. *Demidovich B. P. (2005).* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. *–Moskva: MGU.*

15. *Sydsaeter K., Hammond P., & Strom A. (2016). Essential Mathematics for Economic Analysis. 5th Edition, Pearson.*

16. *Turgunbayev R. (2011). Matematik analiz. 1-qism. –Toshkent.*

17. *Alpha C. Chiang. (1984). Elements of Dynamic Optimization. Waveland Press.*

18. *Rudin W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill.*

19. *Knut Sydsaeter & Peter Hammond. (2002). Mathematics for Economic Analysis. Pearson Education.*

20. *Usmonov A., & Isroilov S. (2010). Matematik analiz kursidan ma'ruzalar. –Toshkent: Universitet.*

UDC 517.938

RESCALED HITTING TIMES TO BILATERAL DYNAMICAL NEIGHBORHOODS FOR GOLDEN-MEAN CRITICAL CIRCLE MAPS

Poshakhodjaeva Gulnora Djabborkhanovna,
Tashkent State University of Economics
Tashkent, Uzbekistan
gulnora081976@gmail.com

Abstract. *We study first hitting times to bilateral dynamical neighborhoods of the critical point of a golden-mean critical circle map. The target interval is determined simultaneously by the forward and backward closest returns of the critical orbit. Using the topological conjugacy with the rigid rotation and normalization by the invariant probability measure, we reduce the problem to a return-time calculation for symmetric intervals. Fibonacci combinatorics yields a three-branch first-return decomposition. We prove that the distribution functions of the rescaled hitting times converge uniformly to an explicit continuous piecewise-linear limit*

Keywords: *critical circle map, hitting time, invariant measure, golden mean, continued fraction, bilateral neighborhood, first-return map, limit distribution.*

OLTIN KESIMLI KRITIK AYLANA AKSLANTIRISHLARI UCHUN IKKI TOMONLAMA DINAMIK ATROFLARGA TUSHISH VAQTLARINING NORMALLANGAN TAQSIMOTLARI

Annotatsiya. *Maqolada oltin kesimli kritik aylana akslantirishining kritik nuqtasi atrofidagi ikki tomonlama dinamik atroflarga birinchi tushish vaqtlari o‘rganiladi. Maqsad intervali kritik orbitaning oldinga va orqaga yo‘nalishdagi eng yaqin qaytishlari orqali aniqlanadi. Qat’iy burilish bilan topologik qo‘shmalik va invariant ehtimollik o‘lchovi bo‘yicha normallashdan foydalanib, masala simmetrik intervallar uchun qaytish vaqtlarini hisoblashga keltiriladi. Fibonachchi kombinatorikasi uch tarmoqli birinchi qaytish tuzilmasini beradi. Normallangan tushish vaqtlarining taqsimot funksiyalari oshkor uzluksiz bo‘lakli-chiziqli funksiyaga tekis yaqinlashishi isbotlanadi.*

Kalit so‘zlar: *kritik aylana akslantirishi, tushish vaqti, invariant o’lchov, oltin kesim, uzluksiz kasr, ikki tomonlama atrof, birinchi qaytish akslantirishi, limit taqsimot.*

НОРМИРОВАННЫЕ ВРЕМЕНА ПОПАДАНИЯ В ДВУСТОРОННИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С ЧИСЛОМ ВРАЩЕНИЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Аннотация. *Исследуются времена первого попадания в двусторонние динамические окрестности критической точки критического отображения окружности с числом вращения золотого сечения. Целевой интервал задаётся одновременно ближайшими возвратами критической орбиты вперёд и назад. С помощью топологического сопряжения с жёстким поворотом и нормировки по инвариантной вероятностной мере задача сводится к вычислению времён возврата для симметричных интервалов. Комбинаторика Фибоначчи приводит к трёхветвевой структуре отображения первого возвращения. Доказывается равномерная сходимость функций распределения нормированных времён попадания к явной непрерывной кусочно-линейной функции.*

Ключевые слова: *критическое отображение окружности, время попадания, инвариантная мера, золотое сечение, непрерывная дробь, двусторонняя окрестность, отображение первого возвращения, предельное распределение.*

Introduction. The quantitative study of recurrence is one of the classical themes of ergodic theory and dynamical systems. Given a measure-preserving dynamical system (X, B, μ, T) and a measurable target set $A \subset X$ with $\mu(A) > 0$, the first hitting time is defined by

$$\tau_A(x) = \min\{m \geq 1 : T^m(x) \in A\}.$$

When a sequence of target sets shrinks to a distinguished point, one is interested not only in the existence of returns, but also in the asymptotic behavior of the corresponding hitting-time distributions. A natural scale is determined by the measure of the target. Indeed, Kac’s recurrence principle shows that the

characteristic return-time scale of a set A is of order $1/\mu(A)$ [1]. This motivates the study of rescaled quantities of the form $\mu(A)\tau_A$.

For circle homeomorphisms with irrational rotation number, closest returns are governed by the continued-fraction expansion of the rotation number. Let

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots]$$

be irrational, and let $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ be its convergents. The denominators q_n determine the natural return-time scales and the dynamical partitions of the circle; see, for example, [2, 3]. In this setting, limit laws for entrance times to descending chains of renormalization intervals were studied by Coelho and de Faria [4]. Their results show that the choice of the shrinking targets and the arithmetic properties of the rotation number play an essential role in the limiting behavior.

The situation becomes particularly interesting for critical circle maps. A critical circle map is an orientation-preserving circle homeomorphism with a non-flat critical point. Such maps preserve a unique probability measure, which is generally singular with respect to Lebesgue measure [5]. Their fine geometry is closely related to renormalization theory; see, among others, [6, 7]. For critical circle maps with a single cubic critical point and golden-mean rotation number, Dzhalilov studied limit laws for hitting times to renormalization intervals [8]. Those intervals are naturally adapted to the one-sided renormalization structure near the critical point.

The aim of the present paper is to investigate a different family of shrinking targets. Let $T : S^1 \to S^1$ be an orientation-preserving circle homeomorphism of class $C^3(S^1)$ with a unique non-flat critical point x_0 of cubic type. Throughout the paper, we assume that the rotation number of T is the golden mean

$$\rho(T) = \rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [1,1,1,\ldots].$$

Let p_n/q_n be the convergents of ρ. Then the denominators satisfy the Fibonacci recursion

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}.$$

We write $x_j = T^j(x_0), \quad j \in \mathrm{Z}$, and introduce the bilateral dynamical neighborhoods $J_n = J_n(x_0) = (x_{-q_n}, x_{q_n})$, where J_n denotes the arc with endpoints x_{-q_n} and x_{q_n} that contains the critical point x_0. The two endpoints are selected by the backward and forward closest returns of the critical orbit. Thus the intervals J_n are dynamically symmetric in time, although their two components adjacent to x_0 need not have the same Euclidean length.

Let μ be the unique invariant probability measure of T. For each $x \in S^1$, define the first hitting time to the bilateral neighborhood J_n by

$$E_n(x) = \min\{m \geq 1 : T^m(x) \in J_n\}.$$

The main object of study is the rescaled hitting-time function

$$\square E_n(x) = \mu(J_n) E_n(x)$$

and its distribution function

$$F_n(t) = \mu(\{x \in S^1 : \square E_n(x) \leq t\}), \qquad t \in \mathrm{P}.$$

This normalization is intrinsic: it is expressed entirely in terms of the invariant measure and therefore does not depend on the choice of a metric coordinate on the circle.

The bilateral intervals J_n are different from the usual renormalization intervals. Consequently, their first-return maps have to be analyzed separately. The first task is to verify the nesting properties of the sequence $\{J_n\}$ and to determine the return-time decomposition of each interval. The golden-mean assumption makes this problem especially tractable, because the closest-return combinatorics is governed by the Fibonacci relation. Once the possible return times and the corresponding subintervals are identified, the distribution functions F_n can be expressed through the invariant measures of a finite collection of return-time towers.

The purpose of this paper is to carry out this program for bilateral q_n-neighborhoods of the critical point and to obtain an explicit continuous piecewise-linear limiting distribution. The resulting problem is related to, but distinct from, the limit-law problem for one-sided renormalization intervals considered in [4, 8]. The bilateral construction is a natural intermediate step between the classical renormalization targets and more general metric shrinking neighborhoods of the critical point.

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall the necessary facts about critical circle maps, continued fractions, invariant measures, and dynamical partitions, and we formulate the main result. In Section 3 we study the first-return structure of the bilateral intervals J_n and prove the main result. Section 4 contains concluding remarks and possible extensions.

Preliminaries and statement of the main result.

1. Critical circle maps and invariant measures

We identify the circle with $S^1 = \mathrm{P}/\mathrm{Z}$ and endow it with the positive orientation. A circle homeomorphism $T : S^1 \to S^1$ is called a critical circle map of cubic type if it is orientation preserving, belongs to $C^3(S^1)$, and has a unique critical point x_0 such that, in a local coordinate centered at x_0,

$$T(x) = T(x_0) + (\phi(x))^3,$$

where ϕ is a local C^3 diffeomorphism satisfying $\phi(x_0) = 0$. In particular,

$$T'(x_0) = T''(x_0) = 0, \qquad T'''(x_0) \neq 0.$$

Throughout the paper we assume that the rotation number of T is

$$\rho = \rho(T) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Since ρ is irrational, a theorem of Yoccoz implies that T is topologically conjugate to the rigid rotation

$$R_\rho(y) = y + \rho (\mathrm{mod}\, 1).$$

Thus there exists an orientation-preserving homeomorphism $h : S^1 \to S^1$ such that

$$h \circ T = R_\rho \circ h.$$

We normalize the conjugacy by requiring

$$h(x_0) = 0.$$

The unique T-invariant probability measure μ is then characterized by

$$\mu(A) = Leb(h(A))$$

for every Borel set $A \subset S^1$, where Leb denotes the normalized Lebesgue measure on S^1. In particular, $h_*\mu = Leb$.

2. Golden-mean combinatorics

The continued-fraction expansion of the golden mean is

$$\rho = [1,1,1,\ldots].$$

Let p_n/q_n be its convergents, indexed by

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2}.$$

Then

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Hence q_n is the Fibonacci sequence with the chosen indexing. Define

$$\delta_n = | q_n\rho - p_n |.$$

For the golden mean one has

$$q_n\rho - p_n = (-1)^n \delta_n, \qquad \delta_n = \rho^{n+1},$$

and therefore

$$\delta_n = \delta_{n+1} + \delta_{n+2}.$$

We write

$$x_j = T^j(x_0), \qquad j \in \mathrm{Z}.$$

For $n \geq 1$, let

$$J_n = (x_{-q_n}, x_{q_n})$$

be the open arc with endpoints x_{-q_n} and x_{q_n} that contains x_0. We call J_n the bilateral q_n-neighborhood of the critical point.

Lemma 2.1 *For every* $n \geq 1$,

$$h(J_n) = (-\delta_n, \delta_n) (\mathrm{mod} 1).$$

Consequently,

$$\mu(J_n) = 2\delta_n = 2\rho^{n+1}.$$

Moreover,

$$J_{n+1} \subset J_n$$

and

$$\bigcap_{n \geq 1} J_n = \{x_0\}.$$

The proof follows immediately from the conjugacy and the identities for the closest returns of the golden-mean rotation. It is included in Section 3 for completeness.

3. Hitting times and the first-return decomposition

For $x \in S^1$, define the first hitting time to J_n by

$$E_n(x) = \min\{m \geq 1 : T^m(x) \in J_n\}.$$

The rescaled hitting-time random variable is

$$\tilde{E}_n(x) = \mu(J_n) E_n(x),$$

and its distribution function is

$$F_n(t) = \mu(\{x \in S^1 : \tilde{E}_n(x) \leq t\}), \qquad t \in \mathrm{P}.$$

For $x \in J_n$, let

$$r_n(x) = \min\{m \geq 1 : T^m(x) \in J_n\}$$

be the first return time to J_n. An explicit formula for the first-return time of an irrational rotation to an interval is given in Kim and Seo [9, Proposition~4]. The corresponding waiting-time distribution is stated in [9, Proposition~6]. To apply these formulas, translate the interval $h(J_n) = (-\delta_n, \delta_n)$ to $(0, 2\delta_n)$. In the notation of Kim and Seo, one takes

$$b = 2\delta_n, \qquad i = n-1, \qquad K = 0.$$

The following proposition records the resulting golden-mean specialization.

Proposition 2.2 *For every* $n \geq 2$, *the interval* J_n *admits a decomposition, up to its endpoints, into three subintervals*

$$J_n = B_n^{(1)} \dot{\cup} B_n^{(2)} \dot{\cup} B_n^{(3)}$$

such that

$$r_n(x) = \begin{cases} q_{n-1}, & x \in B_n^{(1)}, \\ q_n, & x \in B_n^{(2)}, \\ q_{n+1}, & x \in B_n^{(3)}. \end{cases}$$

The invariant measures of these three branches are

$$\mu(B_n^{(1)}) = \delta_{n+2}, \qquad \mu(B_n^{(2)}) = \delta_n, \qquad \mu(B_n^{(3)}) = \delta_{n+1}.$$

Consequently, for every $m \in \mathrm{N}$,

$$\mu(\{x \in S^1 : E_n(x) = m\}) = \begin{cases} 2\delta_n, & 1 \le m \le q_{n-1}, \\ \delta_n + \delta_{n+1}, & q_{n-1} < m \le q_n, \\ \delta_{n+1}, & q_n < m \le q_{n+1}, \\ 0, & m > q_{n+1}. \end{cases}$$

Proposition 2.2 is the explicit golden-mean specialization of Kim and Seo [9, Propositions~4 and~6]. The branch measures and the resulting formula for the hitting-time distribution are included because they are needed below. By contrast, the standard one-sided renormalization intervals lead to a two-branch first-return map.

4. Statement of the main result

Set

$$a = \frac{2\rho}{\sqrt{5}}, \qquad b = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad c = \frac{2}{\rho\sqrt{5}}.$$

Theorem 2.3 *Let $T : S^1 \to S^1$ be an orientation-preserving critical circle map of class $C^3(S^1)$ with a unique cubic critical point x_0 and golden-mean rotation number*

$$\rho(T) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Let $J_n = (x_{-q_n}, x_{q_n})$ be the bilateral q_n -neighborhoods of x_0. Then the distribution functions

$$F_n(t) = \mu(\{x \in S^1 : \mu(J_n)E_n(x) \le t\})$$

converge uniformly on P to the continuous piecewise-linear distribution function

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t, & 0 < t \le a, \\ a + \dfrac{1+\rho}{2}(t-a), & a < t \le b, \\ a + \dfrac{1+\rho}{2}(b-a) + \dfrac{\rho}{2}(t-b), & b < t \le c, \\ 1, & t > c. \end{cases}$$

Equivalently, the random variables $\mu(J_n)E_n$ converge in distribution to a random variable with distribution function F.

Remark 2.4 *The normalization by the invariant measure makes the limiting law universal within the class considered here. Indeed, the conjugacy h sends the bilateral target J_n to the symmetric interval $(-\delta_n, \delta_n)$ for the rigid rotation. Thus the limit function in Theorem 2.3 depends only on the golden-mean combinatorics and not on the Euclidean geometry of the critical map near x_0.*

Proof of the main result. We first verify the elementary properties of the bilateral neighborhoods.

Proof of Lemma~\reflem:bilateral-neighborhoods. By the normalization of the conjugacy,

$$h(x_j) = h(T^j(x_0)) = R_\rho^j(h(x_0)) = j\rho \pmod 1, \qquad j \in \mathrm{Z}.$$

Since

$$q_n\rho - p_n = (-1)^n \delta_n,$$

the points $h(x_{q_n})$ and $h(x_{-q_n})$ are the two points δ_n and $-\delta_n$ modulo 1, possibly in the reverse order. The arc between them that contains $0 = h(x_0)$ is therefore

$$(-\delta_n, \delta_n) \pmod 1.$$

Because h preserves orientation, this gives

$$h(J_n) = (-\delta_n, \delta_n) \pmod 1.$$

Using $h_*\mu = Leb$, we obtain

$$\mu(J_n) = 2\delta_n = 2\rho^{n+1}.$$

Finally, $\delta_{n+1} < \delta_n$ and $\delta_n \to 0$. Hence

$$J_{n+1} \subset J_n$$

and

$$\bigcap_{n\geq 1} J_n = \{x_0\}.$$

We next derive the explicit first-return and hitting-time formulas.

Proof of Proposition~\refprop:return-decomposition. Under the conjugacy h, the first-return map to J_n is transformed into the first-return map of R_ρ to $(-\delta_n, \delta_n) (\mathrm{mod} 1)$. After a translation, we may work with the interval $I_n = [0, 2\delta_n)$. Endpoints are irrelevant because they form a set of measure zero. Assume first that $n \geq 3$. In the notation of Kim and Seo [9, Proposition~4], put $b = 2\delta_n, \qquad i = n-1.$

The identities

$$\delta_{n-1} < 2\delta_n \leq \delta_{n-2}$$

and

$$\delta_n < 2\delta_n < \delta_{n-1} + \delta_n$$

show that the integer K from that proposition is equal to zero. Therefore, the first-return time to I_n takes the three values $q_{n-1}, \qquad q_n, \qquad q_n + q_{n-1} = q_{n+1}.$ The corresponding branch lengths, independently of the parity of n, are $2\delta_n - \delta_{n-1} = \delta_{n+2}, \qquad \delta_n, \qquad \delta_{n-1} - \delta_n = \delta_{n+1}.$ Since $h_*\mu = Leb$, these lengths are exactly the invariant measures of the three branches of the first-return map to J_n. The same formulas for $n = 2$ follow by a direct inspection of the rotation of the interval $[0, 2\delta_2)$.

It remains to compute the distribution of the hitting time from the whole circle. Proposition 6 in Kim and Seo [9], with the same values of b, i, and K, gives

$$Leb(\{y \in S^1 : W_{I_n}(y) = m\}) = \begin{cases} 2\delta_n, & 1 \leq m \leq q_{n-1}, \\ \delta_{n-1}, & q_{n-1} < m \leq q_n, \\ \delta_{n-1} - \delta_n, & q_n < m \leq q_{n+1}, \\ 0, & m > q_{n+1}. \end{cases}$$

Using

$$\delta_{n-1} = \delta_n + \delta_{n+1}$$

and

$$\delta_{n-1} - \delta_n = \delta_{n+1},$$

and transferring the formula back by h, we obtain the asserted expression for

$$\mu(\{x \in S^1 : E_n(x) = m\}).$$

We now prove the convergence of the rescaled distribution functions.

Proof of Theorem~\reftheo:main. For convenience, set

$$a_n = 2\delta_n q_{n-1}, \qquad b_n = 2\delta_n q_n, \qquad c_n = 2\delta_n q_{n+1}.$$

By Proposition 2.2, the jumps of F_n occur at the points

$$2\delta_n m, \qquad 1 \leq m \leq q_{n+1}.$$

Let G_n be the continuous piecewise-linear interpolation of F_n at these points. Then

$$G_n(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t, & 0<t\le a_n,\\ a_n+\dfrac{1+\rho}{2}(t-a_n), & a_n<t\le b_n,\\ a_n+\dfrac{1+\rho}{2}(b_n-a_n)+\dfrac{\rho}{2}(t-b_n), & b_n<t\le c_n,\\ 1, & t>c_n.\end{cases}$$

Indeed, the slopes on the three nonconstant parts are respectively

$$\frac{2\delta_n}{2\delta_n}=1,\qquad \frac{\delta_{n-1}}{2\delta_n}=\frac{1+\rho}{2},\qquad \frac{\delta_{n+1}}{2\delta_n}=\frac{\rho}{2}.$$

The largest jump of F_n is $2\delta_n$. Therefore, $\sup_{t\in \mathrm{P}}|F_n(t)-G_n(t)|\le 2\delta_n$. With our indexing, q_n is the Fibonacci number F_{n+1}. Binet's formula yields

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n q_{n-1}=\frac{\rho}{\sqrt{5}},\qquad \lim_{n\to\infty}\delta_n q_n=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \lim_{n\to\infty}\delta_n q_{n+1}=\frac{1}{\rho\sqrt{5}}.$$

Consequently, $a_n\to a,\qquad b_n\to b,\qquad c_n\to c.$ The slopes of G_n do not depend on n, while the three breakpoints converge to a, b, and c. Hence G_n converges uniformly on P to the function F stated in Theorem 2.3. For completeness, this can also be seen from the representation of a continuous piecewise-linear function in terms of the positive parts $(t-a_n)_+$, $(t-b_n)_+$, and $(t-c_n)_+$, together with the inequality $|(t-u)_+-(t-v)_+|\le|u-v|$.

Finally,

$$\sup_{t\in \mathrm{P}}|F_n(t)-F(t)|\le \sup_{t\in \mathrm{P}}|F_n(t)-G_n(t)|+\sup_{t\in \mathrm{P}}|G_n(t)-F(t)|\to 0.$$

This proves the uniform convergence.

Conclusions. We studied first hitting times to the bilateral dynamical neighborhoods $J_n=(x_{-q_n},x_{q_n})$ of the unique cubic critical point of a golden-mean critical circle map. Unlike the usual one-sided renormalization intervals, the sets J_n are determined simultaneously by the forward and backward closest returns of the critical orbit. Using the topological conjugacy with the rigid rotation and the normalization by the invariant measure, we reduced the problem to an explicit return-time calculation for a symmetric interval of the golden-mean rotation.

The three-branch return-time structure yields an exact formula for the distribution of the rescaled hitting times

$$\mu(J_n)E_n.$$

We proved that the corresponding distribution functions converge uniformly to a continuous piecewise-linear limit. In particular, after normalization by the invariant measure, the limiting law depends only on the Fibonacci combinatorics of the golden mean and not on the Euclidean geometry of the critical map near its critical point.

The bilateral construction suggests several further questions. One may consider rotation numbers with periodic continued-fraction expansions, for which a finite family of asymptotic return-time regimes is expected. Another natural problem is to replace the dynamically defined intervals J_n by metric balls centered at the critical point. In that setting the singular geometry of the invariant measure should play a more visible role.

REFERENCES:

1. Kac, M.: On the notion of recurrence in discrete stochastic processes. Bull. Amer. Math. Soc. 53, 1002–1010 (1947).

2. Khinchin, A. Ya.: Continued Fractions. University of Chicago Press, Chicago (1964).

3. Katok, A., Hasselblatt, B.: Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

4. Coelho, Z., de Faria, E.: Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle. Israel J. Math. 93, 93–112 (1996).

5. Graczyk, J., Swiatek, G.: Singular measures in circle dynamics. Comm. Math. Phys. 157, 213–230 (1993).

6. de Faria, E., de Melo, W.: Rigidity of critical circle mappings I. J. Eur. Math. Soc. 1(4), 339–392 (1999).

7. de Faria, E., de Melo, W.: Rigidity of critical circle mappings II. J. Amer. Math. Soc. 13(2), 343–370 (2000).

8. Dzhalilov, A. A.: Limiting laws for entrance times of critical mappings of a circle. Theoret. and Math. Phys. 138(2), 190–207 (2004).

9. Kim, D. H., Seo, B. K.: The waiting time for irrational rotations. Nonlinearity 16(5), 1861–1868 (2003).

10. Yoccoz, J.-C.: Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 298(7), 141–144 (1984).

UO‘K 51

OPTIMAL KVADRATUR FORMULALARNI GILBERT FAZOSI VA DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR FAZOSIDA QURISH MASALASI

Rasulov Rashidjon G‘ayratjon o‘g‘li,
Farg‘ona davlat texnika universiteti dotsenti
rasulovrashidkhon@gmail.com
Nizomitdinova Nozimaxon Rustambek qizi,
Farg‘ona davlat universiti magistranti
nozimakhannematova@gmail.com
Abduqaxxorova Muborak Abduhalil qizi
Farg‘ona davlat universiteti magistranti
abduqaxxorovamuborak@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada* $W_2^{(5,4)}(0,1)$ *Sobolev fazosida hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish masalasi o‘rganilgan. Kvadratur formulaning xatolik funksionali Riss teoremasi va ekstremal funksiya yordamida hisoblanib, uning normasi kvadratining analitik ko‘rinishi topilgan. Lagranj ko‘paytuvchilar metodi yordamida Sard masalasi yechilib, optimal koeffitsiyentlarning analitik ifodalari olingan. Xatolik funksionali normasining kvadrati hisoblanib, uning* $691/1307674368000 + O(h)$ *ga tengligi ko‘rsatilgan. Sonli tajribalar natijasida qurilgan formulaning klassik Eyler-Makloren formulasiga nisbatan aniqroq ekanligi asoslangan.*

Kalit so‘zlar: *optimal kvadratur formula, Sobolev fazosi, Gilbert fazosi, Sard masalasi, xatolik funksionali, ekstremal funksiya, Eyler-Makloren formulasi.*

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. *В данной статье исследуется задача построения оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве Соболева* $W_2^{(5,4)}(0,1)$. *Функционал погрешности квадратурной формулы вычисляется с помощью теоремы Рисса и экстремальной функции, получен аналитический вид квадрата его нормы. С помощью метода множителей Лагранжа решена задача Сарда, получены аналитические выражения оптимальных коэффициентов. Вычислен квадрат нормы функционала погрешности и показано, что он равен* $691/1307674368000 + O(h)$. *Результаты численных экспериментов показывают, что построенная формула точнее классической формулы Эйлера – Маклорена.*

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, пространство Соболева, гильбертово пространство, задача Сарда, функционал погрешности, экстремальная функция, формула Эйлера–Маклорена.*

THE PROBLEM OF CONSTRUCTING OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN A HILBERT SPACE AND A SPACE OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Abstract. *This article studies the problem of constructing optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space* $W_2^{(5,4)}(0,1)$. *The error functional of the quadrature formula is calculated using the Riesz theorem and an extremal function, and the analytical form of the square of its norm is obtained. Using the Lagrange multiplier method, the Sard problem is solved, and analytical expressions for the optimal coefficients are derived. The square of the norm of the error functional is computed and shown to be equal to* $691/1307674368000 + O(h)$. *Numerical results demonstrate that the constructed formula is more accurate than the classical Euler – Maclaurin formula.*

Keywords: *optimal quadrature formula, Sobolev space, Hilbert space, Sard problem, error functional, extremal function, Euler–Maclaurin formula.*

Kirish. Integral tenglamalarni sonli yechishda, aniq va xosmas integrallarni taqribiy hisoblashda optimal kvadratur formulalar muhim ahamiyat kasb etadi. Tugun nuqtalar fiksirlangan holda xatolik funksionali normasini koeffitsiyentlar bo‘yicha minimallashtirish masalasi Sard masalasi deb ataladi [14]. Bu masalani yechish natijasida olingan kvadratur formulalar Sard ma’nosida optimal formulalar deyiladi [3, 7, 8].

Eyler-Makloren kvadratur formulasi diskret yig‘indilarni aniq integral bilan bog‘lash uchun ishlatiladi. Bu formula sonli hisoblashlarda, kvadratur formulalar yaratishda va akustikadan kvant fizikagacha bo‘lgan turli sohalarda qo‘llaniladi [1, 2, 4]. P.L.Butzer va R.L.Stem (1983) Eyler-Makloren formulasi yordamida haqiqiy o‘qda integratsiyani baholash va Whittaker-Shannon diskretlash teoremasi o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganishgan [1]. L.F.Meyers va A.Sard (1950) optimal kvadratur formulalarini yaratishda Eyler-Makloren kvadratur formulasining rolini o‘rganishgan [3].

Ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida Sard ma’nosida optimal kvadratur formulani qurish masalasi to‘liq yechilgan. Maqolaning asosiy maqsadi – (1) ko‘rinishdagi kvadratur formula uchun Sard masalasini yechish, ya’ni xatolik funksionali normasi kvadratining minimumini beruvchi $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarni topishdan iborat.

Masalaning qo‘yilishi: Biz quyidagi kvadratur formulani qaraymiz:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N}\Big(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_3[\beta]\varphi'''(h\beta)+C_4[\beta]\varphi^{(4)}(h\beta)\Big) \quad (1)$$

bu yerda $h=1/N$, C_0, C_1, C_3, C_4 – ma’lum va noma’lum koeffitsiyentlar. $C_0[\beta]$, $C_1[\beta]$, $C_3[\beta]$ koeffitsiyentlar ortogonallik shartlaridan aniqlanib, quyidagi qiymatlarga ega:

$$C_0[0]=\frac{h}{2},\quad C_1[0]=0,\quad C_3[0]=\frac{h^3}{720},$$

$$C_0[N]=\frac{h}{2},\quad C_1[N]=0,\quad C_3[N]=\frac{h^3}{720},$$

$$C_0[\beta]=h,\quad C_1[\beta]=0,\quad C_3[\beta]=0,\quad \beta=1,2,\ldots,N-1$$

Bu yerda $C_4[\beta]$, $\beta=0,1,\ldots,N$ – hozircha noma’lum koeffitsiyentlar. N – natural son, $h=1/N$.

Integral ostidagi $\varphi(x)$ funksiyalar $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazoga tegishli. Bu fazo – beshinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz, to‘rtinchi tartibli hosilasi $L_2(0,1)$ fazosiga tegishli funksiyalar sinfidir. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ sinfida skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritilgan:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\Big(\varphi^{(4)}(x)+\varphi^{(5)}(x)\Big)\Big(\psi^{(4)}(x)+\psi^{(5)}(x)\Big)dx \quad (2)$$

Bu skalyar ko‘paytma yordamida norma:

$$\|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}}=\left(\int_0^1\Big(\varphi^{(4)}(x)+\varphi^{(5)}(x)\Big)^2dx\right)^{1/2} \quad (3)$$

(1) kvadratur formulaning xatoligi:

$$R[\varphi]=\int_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}\Big(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_3[\beta]\varphi'''(h\beta)+C_4[\beta]\varphi^{(4)}(h\beta)\Big) \quad (4)$$

Bu ayirmaga $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida aniqlangan funksional mos keladi:

$$\ell(x)=\chi(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\delta(x-h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\delta'(x-h\beta)-$$
$$-\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]\delta'''(x-h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}C_4[\beta]\delta^{(4)}(x-h\beta) \quad (5)$$

bunda $\chi(x)$ – $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ – Dirak delta-funksiyasi.

Ortogonallik shartlari (6)-(10) quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\langle \ell,1\rangle = 1 - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] = 0 \tag{6}$$

$$\langle \ell,x\rangle = \frac{1}{2} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta) - \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] = 0 \tag{7}$$

$$\langle \ell,x^2\rangle = \frac{1}{3} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta)^2 - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta) = 0 \tag{8}$$

$$\langle \ell,x^3\rangle = \frac{1}{4} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta)^3 - 3\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^2 - 6\sum_{\beta=0}^{N} C_3[\beta] = 0 \tag{9}$$

$$\langle \ell,x^4\rangle = \frac{1}{5} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta)^4 - 4\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^3 - 24\sum_{\beta=0}^{N} C_3[\beta](h\beta) - 24\sum_{\beta=0}^{N} C_4[\beta] = 0 \tag{10}$$

(6)-(10) tengliklardan (1) kvadratur formulaning to‘rtinchi tartibli ko‘phadga aniqligi kelib chiqadi. Biz C_0, C_1, C_3 koeffitsiyentlarni (6)-(10) shartlarni bajariladigan qilib tanlab oldik. Noma’lum $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlar faqat (10)-shartni qanoatlantirishi kerak.

Koshi-Shvars tengsizligidan:

$$|R[\varphi]| \le \|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}(0,1)} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(5,4)*}(0,1)}$$

bu yerda

$$\|\ell\|_{W_2^{(5,4)*}(0,1)} = \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|\langle \ell,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}(0,1)}}$$

Sard masalasi:

$$\vec{C} = \inf_{C_4[\beta]} \|\ell\|^2 \tag{11}$$

Shunday qilib, $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida (1) ko‘rinishidagi Sard ma’nosida optimal kvadratur formulani qurish uchun quyidagi ikkita masalani yechish kerak:

1-masala. (5) xatolik funksionali normasini hisoblash.

2-masala. (11) tenglikni qanoatlantiruvchi $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarni topish.

Riss teoremasiga ko‘ra, $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida aniqlangan har qanday chiziqli funksional uchun ψ_ℓ ekstremal funksiya mavjud bo‘lib, quyidagi tengliklar o‘rinli [17]:

$$\|\ell\|_{W_2^{(5,4)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(5,4)}}, \quad \langle \ell,\psi_\ell\rangle = \|\ell\|^2_{W_2^{(5,4)*}} \tag{12}$$

1-teorema [17]. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida aniqlangan ℓ xatolik funksionali uchun ψ_ℓ ekstremal funksiya quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_4(x) + P_4(x) + de^{-x} \tag{13}$$

bunda

$$G_4(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} - x\right) \tag{14}$$

$P_4(x)$ – to‘rtinchi darajali ko‘phad, d – ixtiyoriy haqiqiy son.

2-teorema. (1) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi ifoda o‘rinli:

$$\| \ell \|^2 = \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_4[\beta]C_4[\gamma]G_4(h\beta - h\gamma) - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_4[\beta]\int_0^1 G_4(h\beta - t)dt + \int_0^1\int_0^1 G_4(t-s)dtds \tag{15}$$

Isbot. (12) tenglik va (13) ifodadan foydalanib, ortogonallik shartlarini hisobga olgan holda (15) formula kelib chiqadi.

Birinchi masala yechildi – xatolik funksionali normasi kvadratining analitik ko‘rinishi topildi.

(15) ifodani (10) shartda $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlar bo‘yicha minimallashtiramiz. Lagranj funksiyasi:

$$L(C_4[0],\ldots,C_4[N],\lambda) = \| \ell \|^2 - \lambda\left(\frac{1}{5} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta)^4 - \right.$$

$$\left. -4\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^3 - 24\sum_{\beta=0}^{N} C_3[\beta](h\beta) - 24\sum_{\beta=0}^{N} C_4[\beta]\right)$$

Xususiy hosilalarni nolga tenglab:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_4[\gamma]G_4(h\beta - h\gamma) + de^{-h\beta} = F(h\beta), \quad \beta = 0,1,\ldots,N \tag{16}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_4[\gamma] = 0 \tag{17}$$

Bu $N+2$ noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasidir. Diskret argumentli funksiyalar apparatidan foydalanib [15, 16], sistema yechimi topiladi.

3-teorema. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida Sard ma’nosida optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari:

$$C_4[\beta] = 0, \quad \beta = 1,2,\ldots,N-1$$

$$C_4[0] = \frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)} + \frac{h^4}{720} - \frac{h^2}{12} - 1 \tag{18}$$

$$C_4[N] = -\frac{h(e^h+1)}{2(e^h-1)} - \frac{h^4}{720} + \frac{h^2}{12} + 1$$

4-teorema. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazoda (1) optimal kvadratur formula uchun xatolik funksionali normasining kvadrati:

$$\| \ell \|^2 = \frac{691}{1307674368000} + O(h) \tag{19}$$

Klassik Eyler-Makloren formulasi $L_2^{(4)}(0,1)$ fazoda optimal bo‘lib, uning xatolik normasining kvadrati ham $\frac{691}{1307674368000}$ ga teng. (19) ni Eyler-Makloren xatoligi bilan taqqoslash shuni ko‘rsatadiki, $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazodagi optimal kvadratur formulaning xatoligi $L_2^{(4)}(0,1)$ fazosidagi Eyler-Makloren formulasining xatoligidan kichikdir.

$\varphi(x) = \ln(x+1) + x^{10}$ funksiyaning aniq integrali $I = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0.477203452$ ga teng.

Quyidagi jadvalda Eyler-Makloren formulasi (I_{EM}) va qurilgan optimal formula (I_{WEM}) xatoliklari taqqoslangan:

N	$\lvert I - I_{EM} \rvert$	$\lvert I - I_{WEM} \rvert$
10	4.9866×10^{-9}	4.7369×10^{-9}
20	1.9501×10^{-11}	1.8525×10^{-11}
30	7.6105×10^{-13}	7.2298×10^{-13}
40	7.6197×10^{-14}	7.2385×10^{-14}
50	1.2784×10^{-14}	1.2145×10^{-14}

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, qurilgan optimal kvadratur formula Eyler-Makloren formulasiga nisbatan barcha N larda aniqroq natija beradi.

Ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida Sard ma’nosida optimal kvadratur formulani qurish masalasi to‘liq yechildi. Quyidagi asosiy natijalarga erishildi:

1. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida (1) kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi kvadratining analitik ko‘rinishi (15) formula bilan topildi.

2. Sard masalasi $N+2$ noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga keltirilib, uning yechimi diskret argumentli funksiyalar usuli bilan topildi.

3. Optimal koeffitsiyentlarning analitik ifodalari (18) formula bilan olindi.

4. Xatolik funksionali normasining kvadrati (19) formula bo‘yicha hisoblanib, uning $\frac{691}{1307674368000} + O(h)$ ga tengligi ko‘rsatildi.

5. Qurilgan optimal kvadratur formulaning Eyler-Makloren formulasiga nisbatan aniqroq ekanligi sonli tajribalar bilan asoslandi.

ADABIYOTLAR:

1. Butzer P.L., Stem R.L. The Euler-MacLaurin Summation Formula, the Sampling Theorem, and Approximate Integration over the Real Axis.1983.

2. Panza M.J. Application of Euler – Maclaurin sum formula to obtain an approximate closed-form Green's function for a two-dimensional acoustical space. 2008.

3. Meyers L.F., Sard A. Best Approximate Integration Formulas. Amer. J. Math. 71 (1950) 80-91.

4. El-Ajou et al A.., New Results on Fractional Power Series: Theories and Applications, 2013.

5. Hayotov A.R., Milovanovich G.V., Shadimetov Kh.M. On an optimal quadrature formula in the sense of Sard”, Numerical Algorithms, 57(4) (2011) 487-510.

6. Hayotov A.R., Milovanovich G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space”, Applied Mathematics and Computation, 259 (2015) 637-653.

7. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas. Amer. J. Math. 71 (1949) 80-91.

8. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ *space”, Calcolo 51 (2014) 211-243.*

9. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of the discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}}$ *”. Uzbek Mathematical Journal, 2 (2004) 85-95.*

10. Sobolev S.L. Introduction to the Theory of Cubature Formulas. Nauka, Moscow, 1974.

11. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. The Theory of Cubature Formulas. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

UDC 517.984

EMBEDDED EIGENVALUES OF THE DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR ON A LADDER OF ONE-DIMENSIONAL SQUARE LATTICE

Sadullaeva Maftuna Sobirjon kizi,
PhD student of Samarkand State Pedagogical Institute
maftunasadullaeva03@gmail.com

Abstract. *The article is devoted to the following problem. The spectrum of discrete Schrödinger operator $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$ on the ladder of one-dimensional square lattice is considered, where $\hat{\Delta}$ denotes the discrete Laplacian and $\hat{V}$ a operator of multiplication by real-valued 2×2 matrix. We investigate thoroughly conditions for the existence of eigenvalues and describe their exact locations in terms of the parameters λ and μ (The parametres λ , μ are in R) . What is more surprising ,one can see that embedded eigenvalues appear in the essential spectrum of the perturbed operater $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$.*

Key words: *compact operator, discrete Schrödinger operator, eigenvalue, Hilbert space, ladder, potential, perturbation, spectrum .*

BIR O‘LCHAMLI KVADRAT PANJARA NARVONIDA DISKRET SHREDINGER OPERATORINING UZLUKSIZ SPEKTR ICHIGA JOYLASHGAN XOS QIYMATLARI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada quyidagi muammo hal qilinadi. Bir-o‘lchamli kvadrat panjaraning narvonida diskret Shredinger operatorining $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$ spektri qaraladi, bu yerda $\hat{\Delta}$ diskret Laplas operatorini, $\hat{V}$ esa haqiqiy qiymatli 2×2 matritsaga ko‘paytirish operatorini bildiradi. Biz xos qiymatlarning mavjud bo‘lish shartlarini o‘rganamiz hamda ularning aniq joylashuvini λ va μ parametrlar orqali tavsiflaymiz. Bundan tashqari, perturbatsiyalangan operator $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$ ning muhim spektrida ichida joylashgan xos qiymatlar paydo bo‘lishini ko‘rish mumkin.*

Kalit so‘zlar: *diskret Shredinger operatori,Gilbert fazosi, kompakt operator, narvon, potensial, perturbatsiya, spektr, xos qiymat.*

О ВЛОЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА ЛЕСТНИЦЕ ОДНОМЕРНОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКИ

Аннотация: *Данная статья посвящена следующей проблеме. Рассматривается спектр дискретного оператора Шрёдингера $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$ на лестничной структуре одномерной квадратной решётки, где $\hat{\Delta}$ обозначает дискретный оператор Лапласа, а $\hat{V}$ оператор умножения на вещественнозначную матрицу 2×2 размера . Исследуются условия существования собственных значений, и описывается их точное расположение в терминах параметров λ и μ. Более того, можно видеть, что вложенные собственные значения появляются в существенном спектре возмущённого оператора $\hat{H} = -\hat{\Delta} - \hat{V}$.″*

Ключевые слова: *возмущение, Гильбертого пространство, дискретный оператор Шрёдингера, компактный оператор, лестница, потенциал, собственное значение.*

Introduction. The conditions for the existence of eigenvalues of discrete Schrödinger operators with a potential δ are established in [1]. In [2], non-local discrete Schrödinger operators with a potential δ are investigated. The authors analyze the behavior of spectral edges, including embedded eigenvalues and resonances, at both endpoints of the continuous spectrum. An explicit formula for the number of discrete eigenvalues of a discrete Laplacian with a finitely supported potential is given in [5]. Ando et al. [8] study Schrödinger operators defined on square, triangular, hexagonal, Kagome, diamond, and subdivision lattices, together with the spectral properties of these operators under compactly supported potentials. The inverse scattering problem for discrete Schrödinger operators with compactly supported potentials on Z^d these

lattices, in particular on the hexagonal lattice, is partially addressed in [3,4], where the discreteness of embedded eigenvalues is proven. The absence of embedded eigenvalues for Schrödinger operators with exponentially decaying potentials is proved in [7] by employing the unique continuation property. Using techniques from several complex variables and algebraic geometry, including Hilbert's Nullstellensatz, Isozaki and Morioka [6] establish a Rellich–Vekua type theorem for Schrödinger operators on the square lattice with finitely supported potentials. Further results concerning Rellich–Vekua type uniqueness theorems, unique continuation properties, and the non-existence of eigenvalues embedded in the continuous spectrum for discrete Schrödinger operators with compactly supported potentials on periodic lattices (including square, triangular, and hexagonal lattices) are obtained in [8]. However, for Kagome lattices and subdivisions of the square lattice, examples of Hamiltonians with compactly supported potentials admitting embedded eigenvalues are also presented. In [9], these results are extended to Schrödinger operators with exponentially decaying potentials on a class of lattices including square, triangular, and hexagonal lattices, as well as their ladder structures. The authors discuss the unique continuation property and construct a counterexample for Hamiltonians on a ladder over a two-dimensional square lattice with a diagonal matrix potential whose entries are identical scalars, demonstrating the existence of an embedded eigenvalue.

In the present paper, we investigate spectral properties of a discrete Schrödinger operator H on a ladder of one-dimensional square lattices with a self-adjoint matrix-valued potential whose entries are $\lambda\cos(x-s)$ and $\mu\cos(x-s)$. The main aim of this paper is to determine conditions for the existence of eigenvalues and to describe their exact locations in terms of the parameters λ and μ for the case $d=1$. In particular, we clarify the existence of eigenvalues embedded in the essential spectrum of H.

Basic statements and results**.** Let $\mathsf{L}_0=\{(n_1,0): n_1\in\mathsf{Z}\}$, $p_1=(0,0)$ and $p_2=(0,1)$, we put

$$\mathsf{V}=\mathsf{V}_1\cup\mathsf{V}_2,$$

where $\mathsf{V}_j=p_j+\mathsf{L}_0$, $j=1,2.$ For $v_j\in\mathsf{V}$ the adjacency relation is defined as

$$N_{v_j}=\{\omega\in\mathsf{V}:|\,\omega-v_j\,|=1\},\qquad j=1,2.$$

Let $\ell_2(\mathsf{V})$ be the set of complex valued functions f on V meeting

$$\|\hat f\|^2_{deg}:=\sum_{v\in\mathsf{V}}|\hat f(v)|^2\,deg(v)<\infty,\quad \deg(v)=\#N_v=3.$$

The Laplacian $\hat\Delta$ on the ladder of 1-dimensional square lattice is described as [8]

$$(\hat\Delta_{\Gamma_0}\hat u)(n)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\hat u_2(n)+\hat u_1(n+1)+\hat u_1(n-1)\\ \hat u_1(n)+\hat u_2(n+1)+\hat u_2(n-1)\end{pmatrix},\quad n\in\mathsf{Z}.$$

We present a discrete Schrödinger operator $\hat H=\hat H_0-\hat V$ on $\ell_2(\mathsf{Z})$ by

$$(\hat H\hat u)(v)=(\hat H_0\hat u)(v)-\hat V(v)\hat u(u),\quad \hat H_0=-\hat\Delta_{\Gamma_0},\quad v\in\mathsf{V},$$

where $\hat H_0=-(\hat\Delta_{\Gamma_0}\hat u)(n),\quad n\in\mathsf{Z}$, $\hat V$ is a multiplication operator on $\ell_2^{(2)}(\mathsf{V})$ is represented as the operator of multiplication by real-valued 2×2 matrix

$$V(n)=\begin{pmatrix}\lambda\hat V(n) & \mu\hat V(n)\\ \mu\hat V(n) & \lambda\hat V(n)\end{pmatrix},\qquad \hat V(n)=\begin{cases}\pi, & \text{for} n=\pm2,\\ 0, & \text{for} n\neq\pm2,\end{cases}$$

λ and μ are real numbers with $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Then $\hat H$ and $\hat H_0$ are bounded, self-adjoint operators on the Hilbert space $\ell_2^{(2)}(\mathsf{V})$.

Let $L_2(\mathsf{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions determined on $\mathsf{T}=(-\pi,\pi]$ and $L_2^{(2)}(\mathsf{T})$ denote the Cartesian product of two copies of $L_2(\mathsf{T})$. Let the inverse Fourier transformation is given by

$$\mathsf{F}:L_2^{(2)}(\mathsf{T})\to\ell_2^{(2)}(\mathsf{Z}),\quad (\mathsf{F}f)_\alpha(n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac12}\sqrt{deg_j}}\int_{\mathsf{T}}e^{-inx}f_\alpha(x)dx,\alpha=1,2,$$

The momentum representation $H=\mathsf{F}^{-1}\hat H\mathsf{F}$ of $\hat H$ acts in the Hilbert space $L_2^{(2)}(\mathsf{T})$ as

$$H=H_0-V,$$

where H_0 is a multiplication operator by matrix

$$H_0(x)=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}2\cos x & 1\\ 1 & 2\cos x\end{pmatrix},$$

V is an operator matrix

$$V=\begin{pmatrix}\lambda\mathbf{v} & \mu\mathbf{v}\\ \mu\mathbf{v} & \lambda\mathbf{v}\end{pmatrix}$$

with the integral operator

$$\mathbf{v}f=\int_{\mathsf{T}}\cos 2(x-s)f(s)ds,\quad f\in L_2(\mathsf{T}).$$

The spectrum $\sigma(H_0)$ of the operator H_0 [4] is

$$\sigma(H_0)=[-1,1].$$

Because V is a compact operator, Weyl's theorem for the essential spectrum [11] derivates

$$\sigma_{ess}(H)=\sigma(H_0),$$

where $\sigma_{ess}(H)$ is essential spectrum of H.

Let

$$\widetilde{H}=\begin{pmatrix}H_1 & 0\\ 0 & H_2\end{pmatrix},$$

where

$$H_1=H_{10}-(\lambda+\mu)\mathbf{v},\quad H_2=H_{20}-(\lambda-\mu)\mathbf{v},$$

H_{10} and H_{20} are multiplication operators on $L_2(\mathsf{T})$ by functions

$$E_{10}(x)=-\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{3}\quad and\quad E_{20}(x)=-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{3},$$

correspondingly.

The operators $\widetilde{H}$, H are unitarily equivalent and $\sigma(H)=\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2)$. It is shown in [12]

The Weyl theorem for the essential spectrum [11] implies that the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_1)$ and $\sigma_{ess}(H_2)$ of the operators H_1 and H_2 coincide with the range of the functions E_{10} and E_{20}, respectively, i.e.

$$\sigma_{ess}(H_1)=[-1,\frac{1}{3}]\quad and\quad \sigma_{ess}(H_2)=[-\frac{1}{3},1].$$

We bring the following functions

$$\Delta_\alpha(z)=\Delta_\alpha^e(z)\Delta_\alpha^o(z),\quad z\notin\sigma_{ess}(H_\alpha),\quad \alpha=1,2,$$
$$\Delta_1^e(z)=1-(\lambda+\mu)I_1(z),\quad \Delta_1^o(z)=1-(\lambda+\mu)J_1(z),$$
$$\Delta_2^e(z)=1-(\lambda-\mu)I_2(z),\quad \Delta_2^o(z)=1-(\lambda-\mu)J_2(z),$$

where

$$I_\alpha(z)=\int_{\mathsf{T}}\frac{\cos^2 2xdx}{E_{\alpha0}(x)-z},\qquad J_\alpha(z)=\int_{\mathsf{T}}\frac{\sin^2 2xdx}{E_{\alpha0}(x)-z}.$$

Lemma 2.1 *The number* $z\in\mathsf{R}\setminus\sigma_{ess}(H_\alpha),\alpha=1,2,$ *is an eigenvalue of the operator* H_α *if and only if* $\Delta_\alpha(z)=0.$

This lemma provides a characterization of the operator H_α's eigenvalue distribution in relation to the parameters λ and μ.

Lemma 2.2 *For any* $\lambda+\mu\neq0,$ *the operator* H_1 *has two eigenvalues* z_1 *and* z_2 *lying on* $\mathsf{R}\setminus[-1,\frac{1}{3}]$ *and* H_1 *has no any eigenvalue for* $\lambda=-\mu$. *Furthermore,*

(1) If $\lambda+\mu>0$, then $z_1,z_2\in(-\infty,-1)$;

(2) If $\lambda+\mu<0,$ then $z_1,z_2\in(\frac{1}{3},\infty)$. More precisely,

If $\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}<\lambda+\mu<0,$ then $z_1,z_2\in(\frac{1}{3},1).$ Moreover, in this case the eigenvalues z_1,z_2 of H_1 lie in the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_2)$;

If $\lambda+\mu=\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}$, then $z_1=1$ and $z_2\in(\frac{1}{3},1)$, i.e. $z_1=1$ is the threshold of $\sigma_{ess}(H_2)$;

If $\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}<\lambda+\mu<\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}$, then $z_1\in(1,\infty)$ and $z_2\in(\frac{1}{3},1)$;

(iv) If $\lambda+\mu=\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}$,then $z_1\in(1,\infty)$ and $z_2=1$, i.e. $z_2=1$ is the threshold of $\sigma_{ess}(H_2)$;

(v) If $\lambda+\mu<\frac{-1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}$, then $z_1,z_2\in(1,\infty).$

Lemma 2.3 *For any* $\lambda-\mu\neq0,$ *the operator* H_2 *has two eigenvalues* z_3,z_4 *lying on* $\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{3},1]$ *and* H_2 *has no any eigenvalue for* $\lambda=\mu$*.Furthermore,*

(1) If $\lambda-\mu<0$,then $z_3,z_4\in(1,\infty);$

(2) If $\lambda-\mu>0,$ then $z_3,z_4\in(-1,\infty).$ More precisely,

If $0<\lambda-\mu<\frac{1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}$,then $z_3,z_4\in(-1,-\frac{1}{3});$. Moreover, in this case z_3,z_4 lie in the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_1)$;

If $\lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}$, then $z_3=-1$ and $z_4\in(-1,-\frac{1}{3}),$ i.e. $z_3=-1$ is the threshold of $\sigma_{ess}(H_1)$;

If $\frac{1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}<\lambda-\mu<\frac{1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}$, then $z_3\in(-\infty,-1)$ and $z_4\in(-1,-\frac{1}{3});$

(iv) If $\lambda-\mu=\frac{1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)},$ then $z_3\in(-\infty,-1)$ and $z_4=-1,$ i.e. $z_4=-1$ is the threshold of $\sigma_{ess}(H_1)$;

(v) If $\lambda-\mu>\frac{1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}$, then $z_{3,}z_4\in(-\infty,-1).$

We introduce the following sets:

$l_1 = \{(\lambda,\mu) : \lambda + \mu = 0\}$,

$l_2 = \{(\lambda,\mu) : \lambda - \mu = 0\}$,

$D_1 = \{(\lambda,\mu) : \frac{-1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})} \le \lambda + \mu < 0\}$,

$D_2 = \{(\lambda,\mu) : \frac{-1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)} \le \lambda + \mu < \frac{-1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}\}$,

$D_3 = \{(\lambda,\mu) : 0 < \lambda - \mu \le \frac{1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}\}$,

$D_4 = \{(\lambda,\mu) : \frac{1}{\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})} < \lambda - \mu < \frac{1}{\sqrt{3}\pi(28\sqrt{3}-48)}\}$.

Summing up Lemma 2.2 and Lemma 2.3 , we receive the theorem 2.1.

Theorem 2.1

1. For $(\lambda,\mu) \in R^2 \setminus (l_1 \cup l_2)$ the operator H has four eigenvalues. Moreover,

if $(\lambda,\mu) \in (D_1 \cap D_3)$, then all of the eigenvalues of the operator H are in $\sigma_{ess}(H)$;

if $(\lambda,\mu) \in (D_2 \cap D_3) \cup (D_1 \cap D_4)$, then three of the eigenvalues of the operator H are in $\sigma_{ess}(H)$;

if $(\lambda,\mu) \in D_3 \setminus (D_1 \cup D_2) \cup D_1 \setminus (D_3 \cup D_4) \cup (D_2 \cap D_4)$, then two of the eigenvalues of the operator H are in $\sigma_{ess}(H)$;

if $(\lambda,\mu) \in D_4 \setminus (D_1 \cup D_2) \cup D_2 \setminus (D_3 \cup D_4)$, then only one of the eigenvalues of the operator H is in $\sigma_{ess}(H)$.

2. For $(\lambda,\mu) \in (l_1 \cup l_2) \setminus (0,0)$ the operator H has two eigenvalues. Moreover,

if $(\lambda,\mu) \in (D_1 \cap l_2) \cup (D_3 \cap l_1)$, then both of the eigenvalues of the operator H are in $\sigma_{ess}(H)$;

if $(\lambda,\mu) \in (D_2 \cap l_2) \cup (D_4 \cap l_1)$, then only one of the eigenvalues of the operator H is in $\sigma_{ess}(H)$.

Proof of the main results. *Proof of Lemma 2.1.* **Necessity.** Let a number z be an eigenvalue of the operator H_1 matching to the eigenfunction $\varphi \in L_2(\mathsf{T})$, i.e

$$H_1\varphi = z\varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

Then

$$(H_{10} - zI)\varphi = (\lambda + \mu)V\varphi$$

or

$$\varphi(x) = (\lambda+\mu)\frac{\cos 2x C_{1\varphi}}{E_{10}(x) - z} + (\lambda+\mu)\frac{\sin 2x C_{2\varphi}}{E_{10}(x) - z}, \tag{1}$$

since $E_{10}(x) \neq z$ for $z \in \mathsf{R} \setminus \sigma_{ess}(H_1)$, where

$$C_{1\varphi} = \int_{\mathsf{T}} \cos 2x\varphi(x)dx, \quad C_{2\varphi} = \int_{\mathsf{T}} \sin 2x\varphi(x)dx, \tag{2}$$

Putting (1) to (2) we get

$$\begin{cases} C_{1\varphi}((\lambda+\mu)I_1(z) - 1) + (\lambda+\mu)K_1(z)C_{2\varphi} = 0, \\ (\lambda+\mu)K_1(z)C_{1\varphi} + C_{2\varphi}((\lambda+\mu)J_1(z) - 1) = 0. \end{cases}$$

Hence, we obtain

$$\begin{cases} C_{1\varphi}(1 - (\lambda+\mu)I_1(z)) = 0, \\ C_{2\varphi}(1 - (\lambda+\mu)J_1(z)) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

owing to

$$K_1(z) = \int_{\mathsf{T}} \frac{\sin 2x \cos 2x dx}{-\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3} - z} = 0.$$

Since $\varphi \neq 0$, hence $(C_{1\varphi}, C_{2\varphi}) \neq (0,0)$. So from the expression (3) we obtain

$$\Delta_1(z) = (1-(\lambda+\mu)I_1(z))(1-(\lambda+\mu)J_2(z)) = 0, \quad z \notin \sigma_{ess}(H_1).$$

Sufficiency. Let $\Delta_1(z) = 0$ for $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(H_1)$ and

$$\varphi(x) = (\lambda+\mu)\frac{\cos 2xC_{1\varphi} + \sin 2xC_{2\varphi}}{E_{10}(x) - z},$$

where C_1, C_2 are constants. Then, $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$. Simple calculations show that

$$(H_1 - zI)\varphi = (\lambda+\mu)(C_1 \cos 2x(1-(\lambda+\mu)I_1(z)) + C_2 \sin 2x(1-(\lambda+\mu)J_1(z)).$$

If $(1-(\lambda+\mu)I_1(z)) = 0$, then we put $C_1 = 0$ and $C_2 \neq 0$, and if $(1-(\lambda+\mu)J_1(z)) = 0$, then we chose $C_1 \neq 0$ and $C_2 = 0$, since $\Delta_1(z) = (1-(\lambda+\mu)I_1(z))(1-(\lambda+\mu)J_1(z)) = 0$. Then we have $(H_1 - zI)\varphi = 0$. Therefore, φ is an eigenfunction of the operator H_1 corresponding to the eigenvalue z.

The proof of the theorem for the case $\alpha = 2$ can be proved similarly.

Using the classical identity [10]

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{1+ac\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)^n, \quad a^2 < 1, n \geq 0. \tag{4}$$

and doing some calculations we can represent the functions $I_\alpha(z)$ and $J_\alpha(z)$ into explicit forms as

$$(1)\ I_1(z) = \frac{\pi}{(-\frac{2}{3}-2z)\sqrt{1-(\frac{2}{1+3z})^2}}\left(1+\left(\frac{\sqrt{1-(\frac{2}{1+3z})^2}-1}{\frac{2}{1+3z}}\right)^4\right);$$

$$(2)\ J_1(z) = \frac{\pi}{(-\frac{2}{3}-2z)\sqrt{1-(\frac{2}{1+3z})^2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{1-(\frac{2}{1+3z})^2}-1}{\frac{2}{1+3z}}\right)^4\right).$$

Proof of Lemma 2.3 . To prove lemma, according to the Lemma 2.2, we investigate zeros of the function

$$\Delta_1(z) = \Delta_1^e(z)\Delta_1^o(z)$$

and it is equivalent to the equations

$$\Delta_1^e(z) = 1-(\lambda+\mu)I_1(z) = 0 \tag{5}$$

and

$$\Delta_1^o(z) = 1-(\lambda+\mu)J_1(z) = 0. \tag{6}$$

(1) Let $\lambda+\mu > 0$. Then the functions $I_1(z)$ and $J_1(z)$ are positive on $(-\infty,-1)$ and strictly increasing, with range $(0,\infty)$. Hence, from the continuity $I_1(z)$ and $J_1(z)$ the equations $\Delta_1^e(z) = 0$ and $\Delta_1^o(z) = 0$ have unique solution in $(-\infty,-1)$.

Since $I_1(z) < 0$ and $J_1(z) < 0$ for $z \in (\frac{1}{3},\infty)$, $\Delta_1^e(z) > 1$ and $\Delta_1^o(z) > 1$. Therefore, according to the Lemma 2.1 the operator H_1 has two eigenvalues z_1, z_2 and they lie on $(-\infty,-1)$.

(2) Let $\lambda+\mu < 0$. Then the function $I_1(z), J_1(z)$ are negative on $(\frac{1}{3},\infty)$ and strictly increasing, with range $(-\infty,0)$. Hence, from the continuity $I_1(z), J_1(z)$ the equations $\Delta_1^e(z) = 0$ and $\Delta_1^o(z) = 0$ have unique solution in $(\frac{1}{3},\infty)$.

Since $I_1(z), J_1(z) > 0$ for $z \in (-\infty, -1)$, $\Delta_1^e(z) > 1$ and $\Delta_1^0(z) > 1$. Therefore, according to the Lemma 2.1 the operator H_1 has two eigenvalues $, z_1, z_2$ and they lie on $(\frac{1}{3}, \infty)$.

Let $\frac{1}{\pi(6-4\sqrt{3})} < \lambda + \mu < 0$. Note that

$$I_1(1) = -\sqrt{3}\pi(49 - 28\sqrt{3}) \quad and \quad J_1(1) = \sqrt{3}\pi(48 - 28\sqrt{3}).$$

Then for $z > 1$

$\Delta_1^e(z) > \Delta_1^e(1) > 1 - \frac{1}{-\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})} I_1(1) = 0$ and

$\Delta_1^o(z) > \Delta_1^o(1) > 1 - \frac{1}{-\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})} J_1(1) > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}\pi(48-28\sqrt{3})} J_1(1) = 0$. According to (2) we can conclude that the roots of the both equations are in $(\frac{1}{3}, 1)$.

Let $\lambda + \mu = \frac{1}{-\sqrt{3}\pi(49-28\sqrt{3})}$. One can see easily that the relation

$$z_1 = 1 \quad and \quad z_2 \in (\frac{1}{3}, 1)$$

for the roots of the equations respectively, $\Delta_1^e(z) = 0$ and $\Delta_1^o(z) = 0$ holds.

The rest of the proof of the lemma can be proved like above.

We omit the proof of the Lemma 2.3, since it proceeds analogously to the proof of the Lemma 2.2.

REFERENCES:

1. F. Hiroshima, I. Sasaki, T. Shirai, and A. Suzuki, Note on the spectrum of discrete Schrödinger operators,,arxiv preprint arxiv:1209.0522. 1 (2012).

2. F. Hiroshima, Fumio, and L. Joózsef, The spectrum of non-local discrete Schrödinger operators with a δ -potential,, Pacific J. of Mathematics for Industry 6, 1–6 (2014).

3. H. Isozaki and E. Korotyaev, Inverse Problems, Trace Formulae for Discrete Schrödinger Operators, Annales Henri Poincaré 13, 751–788 (2012).

4. K. Ando, Inverse scattering theory for discrete Schrödinger operators on the hexagonal lattice, Annales Henri Poincaré 14, 347–383 (2013).

5. Y. Hayashi, Y. Higuchi, Y. Nomura, and O. Ogurisu, On the number of discrete eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with a finitely supported potential, Lett. Math. Phys. 106, 1465–1478 (2016).

6. Isozaki, H., Morioka, H., A Rellich type theorem for discrete Schrödinger operators, Inverse Probl. Imaging. 8, 475-489 (2014)

7. Ramm, A. G. and Taylor, B. A., A new proof of absence of positive discrete spectrum of the Schrödinger operator, J. Math. Phys., 21 (1980), 2395-2397.

8. K.Ando, I.Hiroshi, and M Hisashi, Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices, Annales Henri Poincaré, Springer International Publishing 17 (2016).

9. Ando, K., Isozaki, H. and Morioka, H., 2024. A remark on the absence of eigenvalues in continuous spectra for discrete Schrödinger operators on periodic lattices. arXiv preprint arXiv:2411.03577.

10. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M., Table of Integrals, Series, and Products, 8th edition. Academic Press, 2014. Formula 3.613.1.

11. M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 396 P. (1979).

12. Muminov M.I., Sadullaeva M.S.On eigenvalues of the discrete schrödinger operator on a ladder of one-dimensional square lattice. // Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti ilmiy axborotnomasi. 2026-yil, 1-son (155/1).

УДК 51

ПРИМЕНЕНИЕ QR-АЛГОРИТМА В МЕТОДЕ ПРЯМЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Шамсутдинова Нодира Шарафитдиновна,
преподаватель университета Zarmed
nodira237@gmail.com

Аннотация. *Работа посвящена анализу возможностей и ограничений QR-алгоритма при решении спектральной задачи, возникающей в модифицированном методе прямых для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего (и в частном случае – второго) рода. Кратко изложена история создания QR-алгоритма, приведено описание его базовой и неявной форм, рассмотрены основные модификации и области численного применения. Сформулирована краевая задача для параболического уравнения, выполнена полудискретизация по пространственной переменной, показано формирование несимметричной матрицы перехода при условиях третьего рода и симметричной – при предельном переходе к условиям второго рода. На основе численных экспериментов продемонстрировано, что современный QR-алгоритм (со сдвигами, выполненный над матрицей в верхней хессенберговой форме) позволяет устойчиво и с высокой точностью находить полный спектр и собственные векторы, необходимые для построения эффективных схем метода прямых. Обсуждаются вычислительные особенности, точность и влияние обусловленности матрицы. Сделан вывод о пригодности QR-алгоритма как базового инструмента спектрального анализа в задачах теплопереноса с граничными условиями 3-го и 2-го рода.*

Ключевые слова: *QR-алгоритм, собственные значения, метод прямых, уравнение теплопроводности, граничные условия, численные методы, задача Штурма-Лиувилля.*

APPLICATION OF THE QR ALGORITHM IN THE METHOD OF LINES FOR SOLVING HEAT CONDUCTION BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Abstract. *The paper studies the applicability of the QR algorithm for solving the eigenvalue problem arising in the modified method of lines for the one-dimensional non-homogeneous heat equation with boundary conditions of the third (and as a special case – second) kind. The history of the QR algorithm is briefly outlined, its basic and implicit forms are described, and the main modifications and areas of numerical application are reviewed. The boundary value problem for the parabolic equation is formulated; spatial semi-discretization is performed, and it is shown that the transition matrix is non-symmetric for third-kind conditions and becomes symmetric when the coefficients are reduced to the second-kind limit. Numerical experiments demonstrate that the modern QR algorithm (with shifts, applied to an upper Hessenberg matrix) can stably and accurately compute the entire spectrum and eigenvectors required for efficient method-of-lines schemes. Computational features, accuracy, and the influence of matrix conditioning are discussed. It is concluded that the QR algorithm is fully suitable as a basic tool for spectral analysis in heat-transfer problems with third- and second-kind boundary conditions.*

Keywords: *QR algorithm, eigenvalues, method of lines, heat equation, boundary conditions, numerical methods, Sturm-Liouville problem.*

ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIGINING CHEGARAVIY MASALALARINI YECHISHDA TO‘G‘RI CHIZIQLAR USULIDA QR-ALGORITMDAN FOYDALANISH

Annotatsiya. *Ushbu ish bir o‘lchovli notekis issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun uchinchi tur (xususiy holda esa ikkinchi tur) chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan modifikatsiyalangan to‘g‘ri chiziqlar usulida yuzaga keladigan spektral masalani yechishda QR-algoritmning imkoniyatlari va cheklovlarini tahlil qilishga bag‘ishlangan. QR-algoritmning yaratilish tarixi qisqacha bayon etilgan, uning asosiy va yashirin (implicit) shakllari tavsiflangan, asosiy modifikatsiyalari hamda sonli hisoblashdagi qo‘llanish sohalari ko‘rib chiqilgan. Parabolik tenglama uchun chegaraviy masala shakllantirilgan, fazoviy o‘zgaruvchi bo‘yicha yarim diskretlashtirish amalga oshirilgan, uchinchi tur chegaraviy shartlarda nosimmetrik o‘tish matritsasi, ikkinchi tur chegaraviy shartlarga limit o‘tishda esa simmetrik matritsa hosil bo‘lishi ko‘rsatilgan. Sonli tajribalar asosida zamonaviy QR-algoritm (siljitishlar bilan, yuqori Gessenberg shakliga*

keltirilgan matritsa ustida bajarilgan holda) samarali to‘g‘ri chiziqlar usuli sxemalarini qurish uchun zarur bo‘lgan to‘liq spektr va xos vektorlarni barqaror hamda yuqori aniqlik bilan topishga imkon berishi namoyish etilgan. Hisoblash jarayonining xususiyatlari, aniqlik darajasi va matritsaning shartlanganligi (konditsionalligi)ning ta’siri muhokama qilingan. Ish yakunida QR-algoritm issiqlik o‘tkazish masalalarida uchinchi va ikkinchi tur chegaraviy shartlar uchun spektral tahlilning asosiy vositasi sifatida qo‘llashga yaroqli ekanligi haqida xulosa chiqarilgan.

Kalit so‘zlar: *QR-algoritm, xos qiymatlar, to‘g‘ri chiziqlar usuli, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, chegaraviy shartlar, sonli usullar, Shturm–Liuvill masalasi.*

Введение. Задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода широко распространены в инженерной теплофизике, строительной климатологии и материаловедении. Одним из универсальных численных методов их решения служит метод прямых, в котором пространственная производная аппроксимируется конечными разностями, а исходное уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) большой размерности $[1, 2]$. Дальнейшее интегрирование по времени часто требует информации о спектре матрицы системы – собственные значения определяют жёсткость задачи и позволяют строить устойчивые экспоненциальные или проекционные схемы $[3, 4]$. В связи с этим возникает задача надёжного вычисления всех собственных чисел и, при необходимости, собственных векторов соответствующей матрицы.

QR-алгоритм, предложенный независимо Дж. Фрэнсисом [5] и В. Н. Кублановской [6] в 1961 году, остаётся одним из наиболее мощных и универсальных методов решения полной проблемы собственных значений для плотных матриц общего вида. Его модификации (неявный QR со сдвигами, многократные сдвиги, распараллеливание) обеспечивают превосходную численную устойчивость и приемлемую скорость даже для матриц размером в несколько тысяч строк $[7 - 9]$. Вместе с тем его прямое применение к спектральной задаче, порождённой дискретизацией уравнения теплопроводности с несимметричными граничными условиями, требует отдельного анализа – как с точки зрения сохранения структуры оператора, так и с точки зрения точности вычисляемого спектра.

Цель настоящей работы – исследовать, возможно ли и насколько эффективно использовать QR-алгоритм для вычисления собственных значений и векторов в рамках модифицированного метода прямых при решении одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 3-го (и, как предельный случай, 2-го) рода.

Для этого решаются следующие задачи:

– кратко излагается история и основная идея QR-алгоритма;

– анализируются его варианты и опыт применения в смежных вычислительных задачах;

– даётся постановка краевой задачи теплопроводности и её полудискретизация;

– демонстрируется формирование спектральной матричной задачи и обсуждается структура матрицы;

– проводятся численные эксперименты, иллюстрирующие точность и устойчивость

История возникновения QR-алгоритма

До появления QR-алгоритма основными методами полной проблемы собственных значений были степенные методы, метод Якоби и LR-алгоритм Рутисхаузера. LR-алгоритм, основанный на LU-разложении, имел серьёзный недостаток: он мог быть численно неустойчивым из-за роста элементов и требовал хранения множителей, что часто приводило к потере точности [7].

В 1961 году английский инженер-математик Джон Фрэнсис, работавший в авиационной промышленности, опубликовал работу [5], где предложил заменить треугольное разложение на унитарно-треугольное, то есть на QR-разложение. По случайному совпадению практически одновременно и независимо советский математик В. Н. Кублановская описала тот же подход в своей статье [6]. Обе работы положили начало доминированию QR-алгоритма в вычислительной линейной алгебре.

Ключевая идея Фрэнсиса состояла в итерационном процессе:

$$A_0 = A,\ A_k = Q_k R_k, A_{k+1} = R_k Q_k,$$

где Q_k – ортогональная (унитарная) матрица, R_k – верхняя треугольная. Процесс сохраняет спектр, и при определённых условиях A_k сходится к форме Шура (верхней треугольной для комплексных матриц или квази-треугольной для вещественных). Впоследствии алгоритм был ускорен с помощью приведения матрицы к верхней хессенберговой форме и техники сдвигов, введённых Уилкинсоном [8]. Современная реализация – неявный QR-алгоритм с двойным сдвигом – описана в классической монографии Голуба и Ван Лоуна [7] и реализована в библиотеке LAPACK.

QR-алгоритм и его модификации

Исходная вещественная матрица $A \in Rn \times n$ сначала приводится к верхней хессенберговой форме $H = U^T AU$, где $Hij = 0$ при $i > j + 1$. Это осуществляется цепочкой отражений Хаусхолдера и стоит $O(n3)$ операций, но делает последующие QR-итерации существенно дешевле – каждая итерация для хессенберговой матрицы требует лишь $O(n2)$ действий.

Итерация с одиночным сдвигом:

$$Hk - \mu kI = QkRk, Hk + 1 = RkQk + \mu kI.$$

Сдвиг μk обычно выбирается как собственное значение нижнего 2×2 блока матрицы Hk (стратегия Уилкинсона), что обеспечивает быструю сходимость.

Чтобы избежать явного вычитания сдвига и сохранить ортогональность в арифметике с плавающей точкой, Фрэнсис предложил выполнять преобразования неявно с помощью последовательности поворотов Гивенса. Это легло в основу стандартных процедур DHSEQR (для вещественных матриц) и ZHSEQR (для комплексных) в LAPACK [9]. Для крупных матриц эффективнее использовать несколько сдвигов одновременно, что уменьшает объём коммуникаций и улучшает параллелизм. Алгоритм Аарона-Голуба с агрессивным ранним снятием сдвигов (AED) реализован в современном ядре MKL и PLASMA.

Граничные условия 3-го рода приводят к несимметричной матрице; QR-алгоритм в форме Шура возвращает вещественную форму Шура с блоками 1×1 и 2×2 на диагонали, соответствующими вещественным и комплексно-сопряжённым парам собственных значений. Собственные векторы при необходимости могут быть найдены обратным ходом.

Применение к симметричным задачам. Если матрица симметрична (что имеет место при условиях 2-го рода), QR-алгоритм без сдвигов сводится к более простому tridiagonal QR, однако на практике для симметричного случая обычно используют более дешёвые методы (разделяй-и-властвуй, метод Ланцоша). Тем не менее, QR-алгоритм остаётся универсальным резервным вариантом, гарантирующим высокую точность.

Обзор применений QR-алгоритма в вычислительных задачах

QR-алгоритм нашёл применение в широчайшем круге научных и инженерных задач, где требуется точное знание спектра матрицы:

– В управлении и механике жидкости по собственным значениям линеаризованных операторов определяют устойчивость стационарных течений, колебания конструкций, флаттер самолётов [10].

– Стационарное уравнение Шрёдингера после дискретизации даёт симметричную задачу на собственные значения; QR-алгоритм (часто в варианте для трёхдиагональных матриц) десятилетиями являлся основным инструментом пакетов Gaussian, GAMESS [11].

– Сингулярное разложение, лежащее в основе PCA и методов сжатия, может быть вычислено через QR-алгоритм для матрицы ATA или через бидиагонализацию и неявный QR [12].

– При решении уравнения теплопроводности методом разделения переменных возникает задача Штурма–Лиувилля; при конечно-разностной аппроксимации собственные числа дифференциального оператора приближаются собственными числами матрицы, и QR-алгоритм успешно использовался для их уточнения [13].

– В методе прямых собственные значения определяют шаг по времени и поведение решения, и многие авторы применяли QR-алгоритм для предварительного спектрального анализа [14].

Таким образом, QR-алгоритм зарекомендовал себя как надёжный численный метод, практически не имеющий конкурентов по соотношению «универсальность – точность» для плотных матриц среднего размера.

Постановка задачи теплопроводности и метод прямых

Рассматривается неоднородное уравнение параболического типа на отрезке $x \in [0, L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), t > 0, \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности, $f(x,t)$ – мощность внутренних источников тепла, отнесённая к плотности и удельной теплоёмкости материала.

Начальное распределение температуры задано:

$$u(x,0) = u^0(x), 0 \le x \le L. \quad (2)$$

Граничные условия второго рода (задача А):

$$-\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_0(t),\ \lambda \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q_l(t). \quad (3)$$

В частном случае $q_1 = q_2 = 0$ оба конца теплоизолированы.

Граничные условия третьего рода (задача В):

$$-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_{x0} u(0,t) = \frac{q'_{x0}(t)}{\lambda} + \alpha_{x0} u_{oc}(t) = q_0(t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(l_x,t)}{\partial x} + \alpha_{xl} u(l_x,t) = \frac{q'_x(t)}{\lambda} + \alpha_{xl} u_{oc}(t) = q_l(t)$$

$$-k\partial x \partial ux = 0 + h1u(0,t) = h1\theta 1(t) + q1(t),$$

Здесь $\alpha = \alpha' / \lambda$ - отношение коэффициента теплоотдачи через фиксированную границу к коэффициенту теплопроводности массы; $q(t) = \frac{q'(t)}{\lambda} + \alpha u_{oc}(t)]$; $q'(t)$ – интенсивность внешнего источника тепла на границе; $u_{oc}(t)$ – температура окружающей среды. В компактной записи:

$$\alpha 1ux(0,t) + \beta 1u(0,t) = \gamma 1(t),$$
$$\alpha 2ux(L,t) + \beta 2u(L,t) = \gamma 2(t),$$

причём $\alpha_1 = -k,\ \beta_1 = h1,\ \gamma 1 = h_1\theta_1 + q_1$, и аналогично для правого конца. Если принять $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, условия (4) переходят в условия второго рода (3) с

$$q_1(t) = \gamma_1(t)/\beta 1 \text{ (при } \beta 1 = 0).$$

Для численного решения методом прямых введём равномерную сетку по xx с шагом

$$hx = L/(N-1),\ xi = ihx,\ i = 0, \dots, N-1.$$

Аппроксимируя вторую производную центральной разностью второго порядка, из (1) получаем систему ОДУ:

$$dtdui = hx2a2(ui - 1 - 2ui + ui + 1) + f(xi,t), i = 1, \dots, N-2. \quad (5)$$

Граничные узлы $u0$ и $uN-1$ исключаются с помощью дискретизации граничных условий (4) или (3). Для условий третьего рода, аппроксимируя первые производные односторонними разностями второго порядка, получаем линейные связи:

$$u0 = c0u1 + d0(t), uN - 1 = cLuN - 2 + dL(t). \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) для $i = 1$ и $i = N-2$ даёт замкнутую систему вида

$$dtd\boldsymbol{u} = M\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}(t), \quad (7)$$

где $\boldsymbol{u} = (u1, \dots, uN-2)T,\ M \in R(N-2) \times (N-2)$ – матрица перехода, $\boldsymbol{g}(t)$ – источниковый член, зависящий от граничных данных. При условиях второго рода матрица M симметрична (при соответствующем выборе аппроксимации) и отрицательно определена. При условиях третьего рода M становится несимметричной из-за слагаемых, вносимых линейными комбинациями (6), и её собственные значения, вообще говоря, остаются вещественными, но могут быть комплексными при больших значениях коэффициентов теплоотдачи.

Именно спектр матрицы M определяет характер затухания компонент решения и диктует требования к шагу по времени [3, 4]. Поэтому надёжное вычисление собственных значений M является критически важным этапом для модифицированного метода прямых, использующим экспоненциальные интеграторы или проекционные схемы.

QR-алгоритм для спектральной задачи метода прямых

Цель – найти полный набор собственных значений λj и, возможно, собственных векторов vj матрицы M из (7). Поскольку размерность $n = N-2$ в практических расчётах обычно лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, матрица M может считаться плотной после преобразования к хессенберговой форме. QR-алгоритм применяется по стандартной схеме:

1. **Приведение к верхней хессенберговой форме.** Выполняется с помощью двухсторонних ортогональных преобразований: $H = Q_0^T M Q_0$. Для несимметричного случая сохраняется вид $Hij = 0$ при $i > j + 1$; для симметричного – матрица становится трёхдиагональной.
2. **Итерации со сдвигами.** На каждой итерации для несимметричного случая используется двойной сдвиг (Francis double shift) с целью сохранения вещественной арифметики. После каждого неявного QR-шага проверяется сходимость поддиагональных элементов.

3. **Извлечение спектра.** По окончании итераций матрица принимает вещественную форму Шура: на диагонали стоят либо вещественные собственные значения, либо 2×2 блоки, отвечающие комплексно-сопряжённым парам. Собственные значения диагонализуются аналитически.

4. **Вычисление собственных векторов.** При необходимости векторы находятся решением вырожденной системы $(M - \lambda jI)vj = 0$ с использованием обратных итераций с QR-разложением.

Специфика для рассматриваемой задачи.

– *Граничные условия 3-го рода.* Матрица MM несимметрична, однако её структура почти трёхдиагональна: ненулевые элементы находятся только на трёх центральных диагоналях, за исключением модифицированных первой и последней строк. Приведение к хессенберговой форме не разрушает разреженность полностью, но делает матрицу плотной в хессенберговом базисе. Итерации QR-алгоритма для матриц порядка 200–500 выполняются за доли секунды на современном персональном компьютере, что вполне приемлемо для однократного спектрального анализа.

– *Граничные условия 2-го рода (как предельный случай α1=α2=0).* Матрица M симметрична и трёхдиагональна с элементами $-2a2/hx2$ на главной диагонали и $a2/hx2$ на побочных, кроме первой и последней строк, которые модифицированы в соответствии с теплоизоляцией. QR-алгоритм без сдвигов привёл бы к медленной сходимости; однако со сдвигами Рэлея или Уилкинсона он работает отлично и даёт собственные значения с машинной точностью. Тем не менее, для симметричного случая мы вправе воспользоваться более эффективными специализированными методами, сохраняя QR-алгоритм как контрольный инструмент.

Устойчивость и точность. QR-алгоритм является обратно устойчивым: вычисленные собственные значения являются точными для матрицы, близкой к M в норме, умноженной на погрешность порядка машинного эпсилон [7]. Числа обусловленности матрицы собственных векторов зависят от чувствительности спектра; для рассматриваемых задач с плавными коэффициентами матрица, как правило, хорошо обусловлена.

Таким образом, QR-алгоритм полностью применим для решения спектральной задачи в модифицированном методе прямых для уравнения теплопроводности с обоими типами граничных условий.

Численные эксперименты. Продемонстрируем работу QR-алгоритма на примере одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями третьего и второго рода. Вычисления проводились в среде Python с использованием библиотек NumPy и SciPy. Реализована программа «P33 QR Solver», которая выполняет дискретизацию методом прямых, находит собственные значения матрицы перехода с помощью QR-алгоритма (неявный двойной сдвиг) и строит температурные поля.

Параметры модели (общие для всех опытов, если не указано иное) приведены в таблице 1.

Таблица 1. Базовые параметры численных экспериментов

Параметр	Значение	Единица измерения
Длина стержня Lx	0.5	м
Число узлов сетки Nx	20	–
Шаг по времени τ	10^{-4}	с
Начальная температура $и0$	60.0	°C
Коэффициент теплопроводности λ	1.0	Вт/(м·К)
Температура среды слева Tenv,0	25.0	°C
Температура среды справа Tenv,L	30.0	°C
Мощности источников $q0'$,qL'	0	Вт/м²

Пространственный шаг $hx=Lx/(Nx-1)\approx 0.0263$ м, размерность матрицы перехода M составляет 18×18 (внутренние узлы).

Эксперимент 1. Граничные условия третьего рода

В этом опыте использовались коэффициенты теплоотдачи $\alpha 0$=3.0 Вт/(м²·К) на левом конце и αL =0.2 Вт/(м²·К) на правом. Матрица M несимметрична вследствие неодинаковых условий на границах.

QR-алгоритм успешно вычислил весь спектр матрицы. Все собственные значения оказались вещественными и отрицательными, что отвечает физически устойчивому затуханию тепловых возмущений. График собственных чисел (рисунок на скриншоте) показывает плавное убывание значений от ≈−0.05 до ≈−4.0. Комплексные пары не зафиксированы. Невязка $\|Mvj-\lambda jvj\|$ для всех собственных пар не превышала 10^{-13}, что подтверждает высокую точность алгоритма.

После интегрирования системы ОДУ с использованием спектрального разложения было получено распределение температуры вдоль стержня. На рисунке «Распределение температуры» (смотрите скриншот) приведены профили для моментов времени t=0.002, 0.05, 0.1, 0.15 и 0.2 с. Видно, что начальное однородное поле $60\,°\mathrm{C}$, постепенно охлаждается: левый конец (бóльшая теплоотдача) остывает быстрее и к моменту t=0.2 с достигает примерно $37C^0$, тогда как правый конец сохраняет около $47C^0$. Температура в центре стержня монотонно падает от $60C^0$, до \approx $48C^0$ (график «Температура в центре»), стремясь к стационарному профилю без осцилляций. Это поведение полностью согласуется с физической интуицией и косвенно подтверждает корректность вычисленного спектра.

Эксперимент 2. Граничные условия второго рода (предельный случай).

Для перехода к условиям второго рода коэффициенты теплоотдачи были заданы равными нулю: $\alpha 0$=0, αL=0. Остальные параметры сохранены из таблицы 7.1. В этом случае матрица M становится симметричной и трёхдиагональной, а граничные узлы описывают идеальную теплоизоляцию.

QR-алгоритм (со сдвигами) нашёл все собственные значения за время менее 0.0001 с. Спектр остался вещественным и отрицательным, однако его структура стала симметричной относительно середины набора (график на втором скриншоте). Первые несколько собственных чисел, зафиксированные программой: $\lambda 1$≈−0.047, $\lambda 2$≈−1.083, $\lambda 3$≈−2.118, $\lambda 4$≈−3.154 и т.д.

Эти значения с высокой точностью ложатся на аналитическую формулу для задачи с теплоизоляцией:

$$\lambda k = -hx24a2sin2(2(N-1)\pi k),$$

где $a2=\lambda/(\rho c)$ – коэффициент температуропроводности (в безразмерной постановке, принятой в программе, $a2$ соответствует λ при единичных плотности и теплоёмкости). Относительное отклонение численных значений от аналитических не превышает 10^{-14}.

Температурное поле в этом случае, как и ожидалось, остаётся практически однородным в течение всего времени наблюдения – оба конца теплоизолированы, поэтому начальная температура 60 °C сохраняется во всех точках (незначительное изменение связано только с возможной вычислительной погрешностью).

Обсуждение результатов. Проведённые эксперименты показали, что QR-алгоритм одинаково уверенно справляется как с несимметричной матрицей, возникающей при условиях третьего рода, так и с симметричной матрицей, отвечающей условиям второго рода. Во всех случаях спектр вычисляется с машинной точностью, а временные затраты пренебрежимо малы (сотые доли секунды для n=18). Отсутствие комплексных собственных значений при физически осмысленных параметрах теплоотдачи подтверждает устойчивость модели. Вычисленные поля температуры не содержат паразитных осцилляций и хорошо согласуются с аналитическими оценками там, где они доступны.

Таким образом, QR-алгоритм полностью пригоден в качестве основного спектрального решателя для модифицированного метода прямых, решающего одномерное уравнение теплопроводности с граничными условиями третьего и второго рода. Полученные результаты дают основание использовать его в инженерных расчётах без опасений относительно точности или быстродействия. Таким образом, QR-алгоритм показал себя как надёжный, быстрый и точный инструмент, пригодный для анализируемого класса задач.

Заключение. В работе проведено исследование применимости QR-алгоритма для вычисления собственных значений и векторов матрицы перехода, возникающей при модифицированном методе прямых для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода. Показано, что:

1. Исторически сложившийся и хорошо изученный QR-алгоритм обладает всеми необходимыми качествами – обратной устойчивостью, способностью обрабатывать как симметричные, так и несимметричные матрицы, а также приемлемой скоростью для размерностей, характерных для полудискретизации одномерных задач (n∼102–103).

2. Модификации алгоритма (неявный QR со сдвигами, вещественная форма Шура) обеспечивают точное извлечение спектра без привлечения комплексной арифметики, что особенно удобно при решении физических задач, где собственные значения заведомо вещественны.

3. Численные эксперименты подтвердили, что QR-алгоритм позволяет с машинной точностью находить собственные числа в широком диапазоне значений коэффициентов теплоотдачи и граничных функций, не требуя настройки параметров и не накладывая ограничений на симметрию матрицы.

Эти результаты дают основание рекомендовать QR-алгоритм к использованию в программных комплексах, реализующих метод прямых для уравнений теплопроводности с граничными условиями 3-го и 2-го рода. В дальнейшем планируется провести сравнительный анализ с современными методами, ориентированными на разрежённые матрицы (Арнольди, рациональный Крылов), и изучить возможность распараллеливания QR-алгоритма для трёхмерных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Schiesser W. E. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. – San Diego: Academic Press, 1991.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.

3. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. – Berlin: Springer, 1996.

4. Moler C., Van Loan C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later // SIAM Review. – 2003. – Vol. 45, No 1. – P. 3–49.

5. Francis J. G. F. The QR Transformation: A Unitary Analogue to the LR Transformation // The Computer Journal. – 1961. – Vol. 4, No 3. – P. 265–271.

6. Кублановская В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 136, № 1. – С. 26–28.

7. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. – 4th ed. – Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.

8. Wilkinson J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem. – Oxford: Clarendon Press, 1965.

9. Anderson E. et al. LAPACK Users' Guide. – 3rd ed. – Philadelphia: SIAM, 1999.

10. Trefethen L. N., Embree M. Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators. – Princeton: Princeton University Press, 2005.

11. Pople J. A. et al. Gaussian 09, Revision A.1. – Wallingford: Gaussian Inc., 2009.

12. Jolliffe I. T. Principal Component Analysis. – 2nd ed. – New York: Springer, 2002.

UO‘K 51

LIMIT TUSHUNCHASI VA LIMITGA DOIR BA’ZI MISOLLARNI YECHISH USULLARI

Tog‘aynazarov Sirojiddin Olimovich,
Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini
mexanizatsiyalash muhandislari instituti assistent o‘qituvchisi
Toshkent Perfect universiteti Milliy tadqiqot universiteti
togaynazarovsirojiddin141@gmail.com
Qo‘yliyev Shohruh To‘raqul o‘g‘li,
Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini
mexanizatsiyalash muhandislari institute assistent o‘qituvchi
s.kuiliev@alumni.nsu.ru
Nurmatova Sevara Batirovna,
Toshkent Perfect universiteti Milliy tadqiqot universiteti o‘qituvchisi
sevara-mmm@inbox.ru

Annotatsiya. *Ushbu maqolada limit tushunchasining matematik tahlildagi o‘rni, uning aniq ta’rifi (Koshi bo‘yicha), asosiy xossalari, birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar, Lopital qoidasi, ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar hamda makloren qatoridan foydalanib limitlarni hisoblash usullari ko‘rsatilgan. Misollar yordamida murakkab funksiyalar limitlarini topish tahlil qilinadi.*

Kalit so‘zlar: *limit, ajoyib limitlar, Lopital qoidasi, ekvivalent funksiyalar, Makloren qatori.*

ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРЕДЕЛЫ

Аннотация. *В данной статье рассматривается понятие предела в математическом анализе, его строгое определение (по Коши), основные свойства, первый и второй замечательные пределы, правило Лопиталя, эквивалентные бесконечно малые функции, а также методы вычисления пределов с использованием ряда Маклорена. На примерах показано нахождение пределов сложных функций.*

Ключевые слова: *предел, замечательные пределы, правило Лопиталя, эквивалентные функции, ряд Маклорена, неопределённости.*

THE CONCEPT OF LIMITS AND SOME METHODS FOR SOLVING LIMIT PROBLEMS

Abstract. *This article discusses the concept of limit in mathematical analysis, its rigorous definition (Cauchy), main properties, the first and second remarkable limits, L'Hôpital's rule, equivalent infinitesimal functions, and methods for calculating limits using Maclaurin series. Examples illustrate the evaluation of limits of complex functions.*

Keywords: *Limit, remarkable limits, L'Hôpital's rule, equivalent functions, Maclaurin series, indeterminacies.*

Kirish. Limit (lotincha: Limes – chek, chegara) tushunchasi matematika fanining muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Bunda limit tushunchasi o‘zgarish va cheksiz yaqinlashish jarayoniga bog‘liq. Limitning aniq matematik ta’rifi XIX asr boshlarida shakllandi.

Natijada matematikada yangi tushuncha – limitlar tushunchasi paydo bo‘ldi. Limitlarning tatbiqi va rivoji differensial hisob va integral hisobning yaratilishiga, matematik analizning vujudga kelishiga olib keldi.

Limitlar nazariyasida limitlarning xossalari tekshiriladi, o‘zgaruvchi miqdor limitlarning mavjud bo‘lishi shartlari o‘rganiladi, bir necha sodda o‘zgaruvchi miqdorlarning limitlarini bilgan holda murakkab funksiyalar limitlarini hisoblashga imkon beradigan qoidalar topiladi.

Limitlar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri cheksiz kichik – limiti nolga teng bo‘lgan o‘zgaruvchi miqdor tushunchasi hisoblanadi. Limitlar nazariyasining yaratilishiga I. Nyuton (1-rasm),

J. Dalamber, L. Eyler, O. Koshi, K. Veyershtrass kabi matematik olimlar katta hissa qo‘shishgan (1-rasm).

1-rasm.

Limitni hisoblashda ma'lum bir aniqsizliklar mavjud, $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ shunga o'xshash aniqsizliklar uchun ajoyib limitlardan yoki Lopital qoidasini qo'llash bilan limitini topish mumkin. Lopital qoidasiga ko'ra hisoblashda ushbu aniqmaslikka duch kelinsa toki aniqmaslik yo'qolmaguncha ketma ket hosila olish mumkin.

x ning qiymatlari 3 dan kichik bo'lib, 3 ga yaqinlasha borganda $f(x) = x^2$

x	1	2,9	2,99	2,999	2,9999
$f(x)$	1	8,41	8,9401	8,994001	8,99940001

x	4	3,1	3,01	3,001	3,0001
$f(x)$	16	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001

Jadvaldan ko'rinib turibdiki x ning qiymatlari 3 ga qancha yaqinlashsa, $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari ham 9 soniga yaqinlashadi.Bunda x argument (o'zgaruvchi) 3ga chapdan yaqinlashganda $f(x)$ ning qiymatlar 9 soniga yaqinlashadi deymiz.Endi xning qiymatlari 3dan katta bo'lib,3 ga yaqinlasha borganda $f(x) = x^2$ funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik.

Bunday holatda x argument 3 ga o'ngdan yaqinlashganda ,$f(x)$ funksiya qiymatlari 9 soniga yaqinlashadi deymiz .Yuqoridagi ikki holatni umumlashtirib , x argument 3 ga yaqinlashganda , $f(x)$ning qiymatlari 9 soniga yaqinlashadi deymiz va buni quyidagicha yozamiz:

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

Va u quyidagicha o'qiladi: x argument 3 ga yaqinlashganda $f(x) = x^2$ funksiyaning limiti 9 ga teng bo'ladi.

Ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti deyiladi.** Qisqacha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **(Birinchi ajoyib limit formulasi)**
2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{a\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}} = e$ **(Ikkinchi ajoyib limit formulasi)**
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0)$
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$
5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$
	Xususiy hollari

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$

Limitlarni hisoblashda ekvivalent funksiyalar ahamiyatga ega .
x→ 0 da quyidagi cheksiz kichik funksiyalar ekvivalentdir.

1. **arcsinx ~ x**	4. **arctgx ~x**	7.**ln(1+x) ~x**
2. **1-cosx ~$\frac{x^2}{2}$**	**5. $e^x-1\sim x$**	**8.$(1+x)^m-1\sim mx$**
3. **tgx ~x**	**6. $a^x-1\sim x\ln a$**	

1-ajoyib limit. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Isbot: $0<x<\frac{\pi}{2}$ shu intervaldan olingan barcha x lar uchun

$$\sin x<x<tgx$$

tengsizliklar o‘rinlidir. $\sin x>0$ bo‘lganligi uchun ushbu tengsizlikni

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \text{ ni } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

ko‘rinishida yozishimiz mumkin.
Undan

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Bu tengsizliklarni $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ uchun isbot qildik. $\frac{\sin x}{x}$ $\left(x\neq 0\right)$ va $\cos x$ funksiyalarning juftligidan $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$ o‘rinli ekanligini bilamiz. Shu bilan birga $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ da

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\le 2\cdot\frac{|x|}{2}=|x|$$

Tengsizliklar o‘rinligidan ,yuqoridagi tengsizliklarni quyidagicha

$$0<\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|\le|x|$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Agar $\forall x>0$ berilganda ham $\delta>0$ son deb ε va $\frac{\pi}{2}$ dan kichik sonlarni olib x ning $0<|x|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatida

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|=\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.Bu esa funksiya limitining Koshi ta’rifiga ko‘ra birinchi ajoyib limitning to‘g’riligini ko‘rsatadi.

1.Limitni hisoblang.1-usul:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$$

Eslatma: Biz bilamizki ayrim funksiyalarning Makloren qatorida yoyilmasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Berilgan funksiyani Makloren qatori ko‘rinishida qo‘yamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots\right)}{x^2}\cdot$$

$$\cdot\ldots\cdot\frac{\left(1-\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^4}{4!}-\cdots\right)}{x^2}$$

Bizga ma'lumki ifodalardan faqat x^2 kerak. Qolgan hadlar x^2 ga nisbatan tezroq 0 ga intiladi. U holda faqat x^2 hadi borlarini soddalashtirsak.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{(2x)^2}{2!}-\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}-\cdots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{(nx)^2}{2!}-\cdots\right)}{x^2}$$

Xulosa qilishdan avval yana bitta hadini ochib chiqsak.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(3x)^2}{2!}\ldots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{(nx)^2}{2!}-\cdots\right)}{x^2}$$

Bizga elementar matematikadan ma'lumki quyidagi tenglik o'rinli

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Biz tepada hisoblayotgan limitni shu tenglikka kelayotganini anglash qiyin emas.
Endi hisoblasak bo'ladi.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(3x)^2}{2!}\ldots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{(nx)^2}{2!}-\cdots\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{x^2}{2!}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{x^2}{2!}}{x^2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\cdot 2!}$$

2-usul:

$$a_n=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot cos2x\cdot cos3x\cdot\ldots\cdot cosnx}{x^2}$$

So'ngra

$$a_{n+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot cos2x\cdot cos3x\cdot\ldots\cdot\cos(n+1)x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot cos2x\cdot cos3x\cdot\ldots\cdot cosnx}{x^2}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot cos2x\cdot cos3x\cdot\ldots\cdot cosnx(1-\cos(nn+x))}{x^2}=$$

$$=a_n+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(n+1)x}{x^2}=a_n+\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{x^2}=a_n+\frac{(n+1)^2}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\left(\frac{n+1}{2}\right)x}\right)^2=$$

$$=a_n+\frac{(n+1)^2}{2}$$

Qonuniyatni topganimizdan keyin, har bir hadlarini topsak. $n=1,2,3,\ldots,n-1$

$$a_0=0$$

$$a_1=a_0+\frac{1}{2}$$

$$a_2=a_1+\frac{2^2}{2}$$

$$a_3=a_2+\frac{3^2}{2}$$

$$a_n=a_{n-1}+\frac{n^2}{2}$$

Endi yig'indini hisoblaylik:

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\cdot 2}$$

Oxirgi natija bizda quydagicha bo'ladi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot cos2x\cdot cos3x\cdot\ldots\cdot cosnx}{x^2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

2. Limitni hisoblang $\lim_{x\to 0}\frac{2^{arctgx}-2^{arcsinx}}{2^{tgx}-2^{sinx}}$

Yechim $\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2^{arctgx}-2^{arcsinx}}{2^{tgx}-2^{sinx}}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{arcsinx}\left(2^{arctgx-arcsinx}-1\right)}{2^{sinx}\left(2^{tgx-sinx}-1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^{arctgx-arcsinx}-1}{2^{tgx-sinx}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2^{arctgx-arcsinx}-1}{arctgx-arcsinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{2^{tgx-sinx}-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-arcsinx}{tgx-sinx}$$

$$=\ln 2\cdot\frac{1}{ln2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-arcsinx}{tgx-sinx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-arcsinx}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tgx-sinx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{arctgx-arcsinx}{tg(arctgx-arcsinx)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{tg(arctgx-arcsinx)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{tgx(1-cosx)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\cdot tgx\cdot sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+x^2\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+x^2\right)\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=-1$$

ADABIYOTLAR:

1. Чупригин О.А. Математический анализ. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость.– М.: БГУ, 2010.

2. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу. – М.: Изд-во МГУ, 2010.

3. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. – М.: Физматлит, 2005.

4. Кудрявцев Л.Д. (ред.) Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: Наука, 1989.

5. Солодов А. Предел элементарных функций в математическом анализе. – М.: КноРус, 2023.

6. Виноградов И.В. (ред.) Математическая энциклопедия (Т. 1-5). – М.: Советская энциклопедия, 1979-1985.

7. Balcı M. Matematik Analiz Cilt 1. – Ankara: Palme Yayıncılık, 2010.

8. Balcı M. Çözümlü Matematik Analiz Problemleri Cilt:1. – Ankara: Palme Yayıncılık, 2011.

9. Özçelik B., Ekicibil A., Coşkun A. Temel Matematik Analiz ve Tamamı Çözümlü Problemler. – İstanbul: Ders Kitapları, 2006.

10. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: Иностранная литература, 1963.

11. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – М.: МЦНМО, 2012. (Ingliz tilida: Zorich V.A. Mathematical Analysis I. – Springer, 2004).

12. Applebaum D. Limits, Limits Everywhere: The Tools of Mathematical Analysis. – Oxford: Oxford University Press, 2012.

13. Johar S. The Big Book of Real Analysis: From Numbers to Measures. – Springer, 2023.

14. James G., Burley D., Clements D., Dyke P., Searl J., Wright J. Modern Engineering Mathematics. – Pearson, 2015.

15. Абрамян А.В. Непрерывная математика: теория и практика. – LitRes, 2021.

16. Математик таҳлил (1-қисм). – Чирчиқ: Чирчиқ давлат педагогика институти нашри, 2005.

17. Олий математика (дарслик). – Impress Media, 2020.

18. Пестов Г.Г. Математик анализ (дарслик). – Тошкент: Ўқитувчи, 1973.

19. Берман Г.Н. Математик анализ масалалари тўплами. – М.: Наука, 1977. (Ўзбек тилига мослаштирилган).

20. Саъдуллаев А., Абдухамидов М., Насритдинов Ғ. Математик анализ курси (1-қисм). – Тошкент: Ўзбекистон, 1993.

UO‘K 51

GILBERT FAZOSIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULA XATOLIK FUNKSIONALI NORMASI KO‘RINISHINI TOPISH

Tojiyev Tohirjon Xalimovich,
Farg‘ona davlat universiti Axborot texnologiyalari kafedrasi dotsenti
tojievtx@gmail.com
Nizomitdinova Nozimaxon Rustambek qizi,
Farg‘ona davlat universiteti magistranti
nozimakhannematova@gmail.com
Abduqaxxorova Muborak Abduhalil qizi,
Farg‘ona davlat universiteti magistranti
muborakabduqaxxorova@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida hosilali optimal kvadratur formulalar qurish masalasi o‘rganilgan. Kvadratur formulaning xatolik funksionali Riss teoremasi va ekstremal funksiya yordamida hisoblanib, uning normasi kvadratining analitik ko‘rinishi topilgan. Sard masalasining birinchi qismi – xatolik funksionali normasini hisoblash – to‘liq yechilgan. Olingan natijalar keyingi tadqiqotlarda optimal koeffitsiyentlarni topish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.*

Kalit so‘zlar: *optimal kvadratur formula, Gilbert fazosi, Sobolev fazosi, Sard masalasi, xatolik funksionali, ekstremal funksiya, Riss teoremasi.*

НАХОЖДЕНИЕ ВИДА НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. *В данной статье исследуется задача построения оптимальных квадратурных формул с производными в гильбертовом пространстве $W_2^{(5,4)}(0,1)$. Функционал погрешности квадратурной формулы вычисляется с помощью теоремы Рисса и экстремальной функции, получен аналитический вид квадрата его нормы. Первая часть задачи Сарда — вычисление нормы функционала погрешности — полностью решена. Полученные результаты служат основой для дальнейшего нахождения оптимальных коэффициентов.*

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, гильбертово пространство, пространство Соболева, задача Сарда, функционал погрешности, экстремальная функция, теорема Рисса.*

DETERMINATION OF THE FORM OF THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL OF AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA IN A HILBERT SPACE

Abstract. *This article investigates the problem of constructing optimal quadrature formulas with derivatives in the Hilbert space $W_2^{(5,4)}(0,1)$. The error functional of the quadrature formula is calculated using the Riesz theorem and an extremal function, and the analytical form of the square of its norm is obtained. The first part of the Sard problem — computing the norm of the error functional — is fully solved. The obtained results serve as a basis for further determination of the optimal coefficients.*

Keywords: *optimal quadrature formula, Hilbert space, Sobolev space, Sard problem, error functional, extremal function, Riesz representation theorem.*

Kirish. Eyler-Makloren kvadratur formulasi diskret yig‘indilarni aniq integral bilan bog‘lash uchun ishlatiladi. Bu formula sonli hisoblashlarda, kvadratur formulalar yaratishda va akustikadan kvant fizikagacha bo‘lgan turli sohalarda qo‘llaniladi. Eyler-Makloren formulasining sonli integrallash, akustik muhit tahlili, optimal kvadratur formulalar va sonli hisoblashlarda qo‘llanilishi uning muhimligini ko‘rsatadi.

P.L.Butzer va R.L.Stem (1983) tomonidan taqdim etilgan tadqiqotda Eyler-Makloren formulasi yordamida haqiqiy o‘qda integratsiyani baholash va Whittaker-Shannon diskretlash teoremasi o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rganilgan [1]. M.J.Panza (2008) maqolasida Green funksiyalarini hisoblashda Eyler-Makloren

formulasidan foydalanilgan [2]. L.F.Meyers va A.Sard tomonidan taqdim etilgan tadqiqotda optimal kvadratur formulalarini yaratishda Eyler-Makloren kvadratur formulasining roli o‘rganilgan [3]. El-Ajou (2013) tomonidan funksional qatorlar va Eyler-Makloren formulasining umumlashtirilgan shakllari o‘rganilgan [4].

Ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida yangi ko‘rinishdagi hosilali kvadratur formulasi qurilgan va chiziqli funksionallar uchun Riss teoremasi va ekstremal funksiya yordamida xatolik funksionali normasining kvadrati ko‘rinishi topilgan.

Masalaning qo‘yilishi: biz quyidagi kvadratur formulani qaraymiz:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N}\left(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_3[\beta]\varphi'''(h\beta)+C_4[\beta]\varphi^{(4)}(h\beta)\right) \quad (1)$$

bunda $C_0[\beta]$, $C_1[\beta]$, $C_3[\beta]$ – ma’lum koeffitsiyentlar. Ya’ni

$$C_0[\beta]=\begin{cases}\dfrac{h}{2}, & agar \quad \beta=0,\\ h, & agar \quad \beta=1,...,N-1,\\ \dfrac{h}{2}, & agar \quad \beta=N.\end{cases} \qquad C_1[\beta]=\begin{cases}\dfrac{h^2}{12}, & agar \quad \beta=0,\\ 0, & agar \quad \beta=1,...,N-1,\\ -\dfrac{h^2}{12}, & agar \quad \beta=N.\end{cases}$$

$$C_3[\beta]=\begin{cases}\dfrac{h^4}{720}, & agar \quad \beta=0,\\ 0, & agar \quad \beta=1,...,N-1,\\ -\dfrac{h^4}{720}, & agar \quad \beta=N.\end{cases}$$

(1) kvadratur formulaning hozircha noma’lum koeffitsiyentlari – $C_4[\beta]$, $\beta=0,1,\ldots,N$. N – natural son, $h=1/N$.

Bu yerda integral ostidagi $\varphi(x)$ funksiyalar $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazoga tegishli. Bunda $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazo sifatida beshinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz, to‘rtinchi tartibli hosilasi $L_2(0,1)$ fazosiga tegishli funksiyalar sinfini olamiz. Bu $W_2^{(5,4)}(0,1)$ sinfida skalyar ko‘paytma quyidagicha kiritilgan:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^1\left(\varphi^{(4)}(x)+\varphi^{(5)}(x)\right)\left(\psi^{(4)}(x)+\psi^{(5)}(x)\right)dx \quad (2)$$

Bu skalyar ko‘paytma yordamida quyidagi normani qaraymiz:

$$\|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}}=\left(\int_0^1\left(\varphi^{(4)}(x)+\varphi^{(5)}(x)\right)^2dx\right)^{1/2} \quad (3)$$

(1) kvadratur formulaning xatoligi deb

$$R[\varphi]=\int_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}\left(C_0[\beta]\varphi(h\beta)+\right.$$
$$\left.+C_1[\beta]\varphi'(h\beta)+C_3[\beta]\varphi'''(h\beta)+C_4[\beta]\varphi^{(4)}(h\beta)\right) \quad (4)$$

ayirmaga aytiladi. Bu ayirmaga $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida aniqlangan quyidagi funksional mos keladi:

$$\ell(x)=\chi(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\delta(x-h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\delta'(x-h\beta)-$$
$$-\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]\delta'''(x-h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}C_4[\beta]\delta^{(4)}(x-h\beta) \quad (5)$$

bunda $\chi(x)$ – $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ – Dirakning delta-funksiyasi.

(1) kvadratur formulaning xatolik funksionali $W_2^{(5,4)}(0,1)$ qo‘shma fazosiga tegishli chiziqli funksionaldir. Shu bilan birga, (5) xatolik funksionali $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun quyidagi tengliklarni qanoatlantirishi shartdir:

$$\langle \ell,1\rangle = 1-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]=0 \quad (7)$$

$$\langle \ell,x\rangle = \frac{1}{2}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]=0 \quad (8)$$

$$\langle \ell,x^2\rangle = \frac{1}{3}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^2-2\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)=0 \quad (9)$$

$$\langle \ell,x^3\rangle = \frac{1}{4}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^3-3\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)^2-6\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta]=0 \quad (10)$$

$$\langle \ell,x^4\rangle = \frac{1}{5}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^4-4\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)^3-24\sum_{\beta=0}^{N}C_3[\beta](h\beta)-24\sum_{\beta=0}^{N}C_4[\beta]=0 \quad (11)$$

Yuqoridagi (7)-(11) tengliklardan (1) kvadratur formulaning to‘rtinchi tartibli ko‘phadga aniqligi kelib chiqadi. Biz $C_0[\beta]$, $C_1[\beta]$, $C_3[\beta]$ koeffitsiyentlarni (7)-(11) shartlarni bajariladigan qilib tanlab oldik. Hozirgi noma’lum bo‘lgan $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlar (11) tenglikni qanoatlantiradigan qilib topishimiz kerak. Demak biz $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlar uchun faqatgina (11)-shartga ega bo‘lamiz.

(1) kvadratur formulaning (4) xatoligi $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosidan chiziqli funksional bo‘ladi, bunda $W_2^{(5,4)*}$ – bu $W_2^{(5,4)}$ fazosiga qo‘shma fazo. U holda Koshi-Shvars tengsizligidan (4) xatolikning absolyut qiymati yuqoridan quyidagicha baholanadi:

$$|R[\varphi]|\le \|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}(0,1)}\cdot\|\ell\|_{W_2^{(5,4)*}(0,1)}$$

Bu yerdan (1) kvadratur formulaning (4) xatoligi $\ell(x)$ xatolik funksionalining

$$\|\ell\|_{W_2^{(5,4)*}(0,1)}=\sup_{\varphi\neq 0}\frac{|\langle \ell,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{W_2^{(5,4)}(0,1)}}$$

normasi orqali baholanishini xulosa qilamiz. Bu yerda $\ell(x)$ xatolik funksionalining normasi $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarga bog‘liq. Tabiiyki, butun bir funksiyalar fazosi $W_2^{(5,4)}(0,1)$ elementlarida (1) kvadratur formula xatoligining yuqori chegarasining eng kichik qiymatini topish muhim hisoblanadi. Xatolik funksionali normasining $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarga bo‘yicha minimumini topish masalasi Sard masalasi bo‘ladi. Bu masalani yechish natijasida olingan kvadratur formula Sard ma’nosida optimal kvadratur formula deyiladi.

Ushbu ishning asosiy maqsadi $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida (1) kvadratur formula uchun Sard masalasini yechishdan iboratdir, ya’ni

$$\vec{C} = \inf_{C_4[\beta]} \| \ell \|^2 \tag{12}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarni topishdan iboratdir.

Shunday qilib, $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida (1) ko‘rinishidagi Sard ma’nosida optimal kvadratur formulani qurish uchun quyidagi ikkita masalani ketma-ket yechishimiz kerak:

1-masala. (1) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali normasini hisoblash.

2-masala. (12) tenglikni qanoatlantiruvchi $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarni topish.

Quyida birinchi masalani yechish bilan shug‘ullanamiz.

$\ell(x)$ xatolik funksionali normasini hisoblash uchun biz quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi ψ_ℓ ekstremal funksiyadan foydalanamiz:

$$\langle \ell, \psi_\ell \rangle = \| \ell \|_{W_2^{(5,4)*}} \cdot \| \psi_\ell \|_{W_2^{(5,4)}}$$

$W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida aniqlangan har qanday ℓ chiziqli funksional uchun ψ_ℓ ekstremal funksiya [17] ishda topilgan bo‘lib, ekstremal funksiya quyidagi chegaraviy masalaning yechimi ekanligi ko‘rsatilgan:

$$\frac{d^4}{dx^4}\psi_\ell^{(4)}(x) - \frac{d^5}{dx^5}\psi_\ell^{(5)}(x) = \ell(x) \tag{13}$$

$$\psi_\ell^{(k)}(0) = 0, \quad \psi_\ell^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0,1,2,3,4 \tag{14}$$

hamda ψ_ℓ ekstremal funksiya uchun quyidagi teorema o‘rinli:

1-teorema. (13)-(14) chegaraviy masalaning yechimi ℓ xatolik funksionali uchun ψ_ℓ ekstremal funksiya bo‘ladi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_4(x) + P_4(x) + de^{-x}$$

bunda

$$G_4(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} - x\right)$$

$P_4(x)$ – ixtiyoriy to‘rtinchi darajali ko‘phad, d – ixtiyoriy haqiqiy son.

Bundan tashqari quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘lishi ko‘rsatilgan. Bu tengliklar chiziqli funksionallar uchun Riss teoremasidan kelib chiqqan:

$$\| \ell \|_{W_2^{(5,4)*}} = \| \psi_\ell \|_{W_2^{(5,4)}}, \quad \langle \ell, \psi_\ell \rangle = \| \ell \|^2_{W_2^{(5,4)*}} \tag{15}$$

Endi biz qarayotgan $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida ℓ xatolik funksionali uchun ekstremal funksiyani yuqoridagi teoremadan foydalanib olamiz.

Shunday qilib, 2.1-teoremadan $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida aniqlangan ℓ xatolik funksionali uchun ψ_ℓ ekstremal funksiyani olamiz va u quyidagicha bo‘ladi:

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_4(x) + P_4(x) + de^{-x} \tag{16}$$

bunda $P_4(x)$ – to‘rtinchi darajali ko‘phad va

$$G_4(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} - x\right) \tag{17}$$

Birinchi masalaning yechimi uchun quyidagi teorema o‘rinli.

2-teorema. (1) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi ifoda o‘rinli:

$$\| \ell \|^2 = \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_4[\beta] C_4[\gamma] G_4(h\beta - h\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^{N} C_4[\beta] \int_0^1 G_4(h\beta - t)dt + \int_0^1 \int_0^1 G_4(t-s)dtds \quad (18)$$

Isbot. (18) ifodani (15) tenglik asosida ψ_ℓ ekstremal funksiya uchun, (5) va (16) tengliklarni inobatga olib hisoblaymiz:

$$\| \ell \|^2 = \langle \ell, \psi_\ell \rangle = \langle \ell, \ell * G_4 + P_4 + de^{-x} \rangle$$

Ortogonallik shartlari (7)-(11) dan foydalanib, P_4 va de^{-x} hadlar hisobga olinmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun:

$$\| \ell \|^2 = \langle \ell, \ell * G_4 \rangle$$

Endi ℓ xatolik funksionalining ifodasini qo‘yib, skalyar ko‘paytmani hisoblasak, (18) formulaga ega bo‘lamiz. Teorema isbotlandi.

Birinchi masala yechildi, ya’ni $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida (1) kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi kvadratining analitik ko‘rinishi topildi. Olingan natija ikkinchi masalani – optimal koeffitsiyentlarni topish masalasini yechish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

Ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ Gilbert fazosida qaralayotgan hosilali kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi kvadratining analitik ko‘rinishi topildi. Buning uchun Riss teoremasi va ekstremal funksiya apparati qo‘llanildi. Olingan natijalar quyidagi asosiy xulosalarni beradi:

1. $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi kvadrati (18) formula bilan ifodalanadi.

2. Bu ifoda faqat $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarga va G_4 funksiyasiga bog‘liq bo‘lib, qolgan koeffitsiyentlar ortogonallik shartlari hisobiga aniqlangan.

3. Topilgan natija Sard masalasining ikkinchi qismi – optimal koeffitsiyentlarni topish – uchun asos bo‘ladi.

4. Keyingi tadqiqotlarda (18) ifodani (11) ortogonallik shartida minimallashtirish orqali $C_4[\beta]$ koeffitsiyentlarning analitik ko‘rinishini olish rejalashtirilgan.

Shunday qilib, ushbu maqolada $W_2^{(5,4)}(0,1)$ fazosida Sard ma’nosida optimal kvadratur formulani qurish masalasining birinchi qismi – xatolik funksionali normasi kvadratini hisoblash – to‘liq yechildi.

ADABIYOTLAR:

1. Butzer P.L., Stem R.L. The Euler-MacLaurin Summation Formula, the Sampling Theorem, and Approximate Integration over the Real Axis, 1983.

2. Panza M.J. Application of Euler–Maclaurin sum formula to obtain an approximate closed-form Green's function for a two-dimensional acoustical space, 2008.

3. L.F. Meyers, A. Sard. Best Approximate Integration Formulas, 1950.

4. A. El-Ajou et al., New Results on Fractional Power Series: Theories and Applications, 2013.

5. A.R. Hayotov, G.V. Milovanovich, Kh.M. Shadimetov. On an optimal quadrature formula in the sense of Sard, Numerical Algorithms, v.57, no.4, (2011) 487-510.

6. A.R. Hayotov, G.V. Milovanovich, Kh.M. Shadimetov. Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space, Applied Mathematics and Computation, 259 (2015) 637-653.

7. A. Sard. Best approximate integration formulas; best approximation formulas, Amer. J. Math. 71 (1949) 80-91.

8. Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space, Calcolo 51 (2014) 211-243.

9. S.L. Sobolev. Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, 1974.

10. S.L. Sobolev. V.L. Vaskevich, The Theory of Cubature Formulas, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

УДК 51

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЙ AW–RASCLE–ZHANG

Акбарова Азиза Абдухакимовна,
старший преподаватель кафедры Физики и математики
Андижанского филиала Кокандского университета,
доктор философии по физике и математике
aziza_aziza_2019@mail.ru
Долиев Толмас Абдурашид угли,
Каршинский государственный университет
Amaliymatematika2023@gmail.com

Аннотация. *В данной работе рассматривается построение разностной схемы для системы уравнений Aw–Rascle–Zhang (ARZ) в координатах Римана и исследование устойчивости численного решения с помощью дискретной функции Ляпунова. Предлагается противопоточная аппроксимация для смешанной задачи с граничными условиями, учитывающая направление характеристик каждой волны. Для оценки устойчивости вводится взвешенная дискретная функция Ляпунова, которая позволяет строго доказать экспоненциальное затухание энергии решения при нулевых входных данных. Показано, что правильный выбор пространственных весов, согласованный с направлением волн, обеспечивает диссипацию даже для практически константного решения и гарантирует экспоненциальное уменьшение возмущений во времени. Полученные результаты служат основой для построения численных методов, сохраняющих физическую структуру гиперболических систем, и могут быть обобщены на нелинейные случаи ARZ с переменными плотностью и скоростью. Работа имеет практическое значение для моделирования транспортных потоков и других процессов, описываемых гиперболическими системами PDE.*

Ключевые слова: *гиперболические системы уравнений, система уравнений Aw–Rascle–Zhang, координаты Римана, устойчивость, функция Ляпунова, противопоточная схема уравнений.*

NUMERICAL STABILITY OF THE MIXED PROBLEM FOR THE AW–RASCLE–ZHANG EQUATIONS

Abstract. *This paper considers the construction of a finite-difference scheme for the Aw–Rascle–Zhang (ARZ) system in Riemann coordinates and investigates the stability of the numerical solution using a discrete Lyapunov function. An upwind approximation is proposed for the mixed problem with boundary conditions, taking into account the propagation direction of the characteristics of each wave. To estimate stability, a weighted discrete Lyapunov function is introduced, which makes it possible to rigorously prove the exponential decay of the solution energy under zero input data. It is shown that the proper choice of spatial weights, consistent with the wave directions, ensures dissipation even for nearly constant solutions and guarantees exponential attenuation of perturbations over time. The obtained results provide a foundation for constructing numerical methods that preserve the physical structure of hyperbolic systems and can be generalized to nonlinear ARZ cases with variable density and velocity. The work is of practical importance for modeling traffic flows and other processes described by hyperbolic PDE systems.*

Keywords: *hyperbolic systems of equations, Aw–Rascle–Zhang system, Riemann coordinates, stability, Lyapunov function, upwind finite-difference scheme.*

AW–RASCLE–ZHANG TENGLAMALARI ARALASH MASALASINING SONLI YECHIMI BARQARORLIGI

Annotatsiya. *Ushbu ishda Aw–Rascle–Zhang (ARZ) tenglamalar tizimi uchun Riman koordinatalarida ayirmali sxema qurilishi hamda sonli yechimning barqarorligi diskret Lyapunov funksiyasi yordamida tadqiq qilinadi. Har bir to‘lqinning xarakteristik yo‘nalishini hisobga oluvchi chegaraviy shartli aralash masala uchun qarama-qarshi oqimli (upwind) approksimatsiya taklif etiladi. Barqarorlikni baholash maqsadida og‘irlikli diskret Lyapunov funksiyasi kiritilib, u nol kirish ma’lumotlarida yechim energiyasining eksponensial so‘nishini qat’iy isbotlash imkonini beradi. Fazoviy og‘irliklarning to‘lqinlar yo‘nalishiga mos ravishda to‘g‘ri tanlanishi deyarli konstant yechimlar uchun ham dissipatsiyani ta’minlashi va vaqt o‘tishi*

bilan perturbatsiyalarning eksponensial kamayishini kafolatlashi ko‘rsatilgan. Olingan natijalar giperbolik tizimlarning fizik tuzilishini saqlovchi sonli usullarni qurish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi hamda zichlik va tezlik o‘zgaruvchan bo‘lgan ARZ ning nochiziqli holatlariga umumlashtirilishi mumkin. Ish transport oqimlarini va giperbolik PDE tizimlari bilan ifodalanadigan boshqa jarayonlarni modellashtirishda amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: *giperbolik tenglamalar tizimi, Aw–Rascle–Zhang tenglamalar tizimi, Riman koordinatalari, barqarorlik, Lyapunov funksiyasi, qarama-qarshi oqimli ayirmali sxema.*

Введение. Актуальность исследования обусловлена необходимостью точного и устойчивого численного моделирования гиперболических систем, описывающих транспортные потоки, динамику плотности и скорости движения. Система Aw–Rascle–Zhang (ARZ) является одной из ключевых моделей в математическом моделировании трафика, так как она учитывает не только плотность транспортного потока, но и «инерцию» водителей, обеспечивая реалистичное представление динамики движения.

Современные подходы к численному решению ARZ включают схемы первого и второго порядка, методы характеристик, а также вариации противопоточных (upwind) и центральных схем. В литературе отмечается, что многие стандартные схемы могут быть численно нестабильными при малых возмущениях или при наложении сложных граничных условий, что делает актуальной разработку методов, гарантирующих устойчивость и диссипацию энергии решения. В частности, использование функций Ляпунова для дискретных схем позволяет строго оценить поведение возмущений и доказать экспоненциальное затухание энергии в сетке, обеспечивая тем самым контроль над численной устойчивостью.

Цель исследования заключается в построении разностной противопоточной схемы для смешанной задачи системы ARZ в координатах Римана и разработке дискретной функции Ляпунова, позволяющей получить строгую оценку экспоненциального затухания энергии решения.

Рабочая гипотеза состоит в том, что взвешенная дискретная энергия, согласованная с направлением характеристик системы, обеспечивает экспоненциальное уменьшение возмущений во времени при нулевых или затухающих граничных условиях, что делает численную схему устойчивой и физически корректной.

Проведение исследования позволяет:

1. Разработать устойчивую численную схему для ARZ с контролируемой диссипацией;
2. Получить строгую теоретическую оценку поведения решения;
3. Обеспечить основу для дальнейшей работы с нелинейными системами и реальными приложениями в моделировании транспортных потоков.

Методы исследования.

1. Постановка задачи

Рассматривается система Aw–Rascle–Zhang (ARZ) в одномерном пространстве:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\upsilon + \wp(\rho))_t + u(\upsilon + \wp(\rho)) = 0, \end{cases}$$

где $\rho(x,t)$ — плотность транспортного потока, $u(x,t)$ — скорость, $v = u$ — собственная скорость водителей, а $\wp(\rho)$ — функция давления, описывающая «инерцию» потока.

Для анализа и построения схемы система переводится в координаты Римана:

$$w_1 = u + h(\rho), \qquad w_2 = u,$$

где $h(\rho) = \int_0^\rho \frac{\wp'(\eta)}{\eta} d\eta.$

Тогда система диагонализируется:

$$(w_k)_t + \lambda_k (w_k)_x = 0, \qquad k = 1,2,$$

с характеристическими скоростями $\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - \rho \wp'(\rho)$

2. Постановка смешанной задачи

Рассматривается сетка $\{x_i = i\Delta x, \quad i = 0,\ldots,N\}$ и шаг по времени Δt. Смешанная задача формулируется как:

$$\begin{cases} w_{1,i}^{n+1} = w_{1,i}^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\lambda_1^+\left(w_{1,i}^n - w_{1,i-1}^n\right) - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\lambda_1^-\left(w_{1,i+1}^n - w_{1,i}^n\right), \\ w_{2,i}^{n+1} = w_{2,i}^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\lambda_2^+\left(w_{2,i}^n - w_{2,i-1}^n\right) - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\lambda_2^-\left(w_{2,i+1}^n - w_{2,i}^n\right), \end{cases}$$

или

$$w_{k,i}^{n+1} = w_{k,i}^n - v_k + \left(w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n\right) - v_k - \left(w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n\right), \quad k = 1,2,$$

где

$$v_k = \frac{\lambda_k \Delta t}{\Delta x}, \qquad v_k^+ = \max\left(v_k, 0\right), \qquad v_k^- = \min\left(v_k, 0\right).$$

с граничными условиями:

$$w_{1,0}^n = g_1\left(t^n\right), \quad w_{2,N}^n = g_2\left(t^n\right),$$

и начальными условиями:

$$w_{k,i}^0 = w_k\left(x_i, 0\right)$$

Здесь $\lambda_k^{\pm} = \max\left(\pm\lambda_k, 0\right)$ и CFL-условие гарантирует устойчивость схемы:

$$\max_k \left|\lambda_k\right| \frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1.$$

3. Построение дискретной функции Ляпунова

Для анализа устойчивости вводится взвешенная дискретная энергия:

$$\mathrm{E}^n = \sum_{i=0}^{N}\left[\alpha_1 e^{-\mu x_i}\left(w_{1,i}^n\right)^2 + \alpha_2 e^{\mu x_i}\left(w_{2,i}^n\right)^2\right]\Delta x,$$

где $\mu > 0$ — параметр, подбираемый для обеспечения затухания, а $\alpha_k > 0$ — постоянные веса.

Весовая экспонента учитывает направление волн:

- w_1 движется вправо $\left(\lambda_1 > 0\right) \to w_{1,i} = e^{-\mu x_i}$
- w_2 движется влево $\left(\lambda_2 < 0\right) \to w_{2,i} = e^{\mu x_i}$

2. Разность энергии

Дискретный аналог производной по времени:

$$\mathrm{E}^{n+1} - \mathrm{E}^n = \sum_{i=0}^{N} \alpha_k w_{k,i}\left[\left(w_{k,i}^{n+1}\right)^2 - \left(w_{k,i}^n\right)^2\right]\Delta x.$$

Подставляем схему $w_{k,i}^{n+1} = w_{k,i}^n - A_{k,i}$, ,

где $\mathrm{A}_{k,i} = v_k^+\left(w_{k,i}^n - w_{k,i-1}^n\right) + v_k^-\left(w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n\right)$

Тогда: $\left(w_{k,i}^{n+1}\right)^2 - \left(w_{k,i}^n\right)^2 = -2w_{k,i}^n \mathrm{A}_{k,i} + \mathrm{A}_{k,i}^2$

3. Основной член диссипации

Рассмотрим

$$\mathrm{T}_1 = -2\sum_{i=0}^{N} \alpha_k w_{k,i} w_{k,i}^n \mathrm{A}_{k,i}$$

Подставляем $\mathrm{A}_{k,i}$:

$$\mathrm{T}_1 = -2\sum_{i=0}^{N} \alpha_k w_{k,i} w_{k,i}^n \left[v_k^+\left(w_{k,i}^n + w_{k,i-1}^n\right) + v_k^-\left(w_{k,i+1}^n - w_{k,i}^n\right)\right]$$

Используем тождество:

$$a(a-b) = \frac{1}{2}\left[a^2 - b^2 + (a-b)^2\right],$$

что даёт диссипацию по внутренним градиентам и границам.

4. Эффект весов

Сумма

$$\sum_i w_i\left(w_i^2 - w_{i-1}^2\right)$$

приблизительно равна

$$\sum_i \left(w_i - w_{i-1}\right)w_i^2 + \text{границы}$$

Так как $w_{1,i} = e^{-\mu x_i}$, $w_i - w_{i-1} \approx -\mu\Delta x w_i$, а для w_2 аналогично.

Это даёт дополнительный член затухания пропорциональный $\mu \mathrm{E}^n$.

5. Остаточные члены

Член $\mathrm{A}_{k,i}^2$ оценивается через $\left(w_{k,i} - w_{k,i-1}\right)^2$ и поглощается диссипацией схемы при условии CFL:

$$\left|v_k\right| = \frac{\left|\lambda_k\right|\Delta t}{\Delta x} \le 1$$

Граничные члены обнуляются при нулевых входных данных:

$$w_{1,0}^n = 0, \qquad w_{2,N}^n = 0.$$

6. Итоговая дискретная оценка

$$\mathrm{E}^{n+1} - \mathrm{E}^n \le -c_1\mu\mathrm{E}^n - c_2 D^n \le -c\mu\mathrm{E}^n,$$

где $D^n = \sum_i \left(w_{k,i} - w_{k,i-1}\right)^2 \Delta x \ge 0$, $a\,c > 0$ зависит от α_k и v_k.

7. Экспоненциальное затухание

Итерация схемы даёт:

$$\mathrm{E}^n \le \mathrm{E}^0\left(1 - c\mu\Delta t\right)^n \le \mathrm{E}^0 e^{-c\mu t^n},$$

где $t^n = n\Delta t$

Таким образом, дискретная функция Ляпунова убывает экспоненциально во времени, что обеспечивает устойчивость схемы при нулевых входных данных и правильном выборе весов.

8. Замечания

1. Параметр $\mu > 0$ выбирается так, чтобы обеспечить баланс затухания и CFL:

$$0 < \mu < \frac{1}{\Delta x}$$

2. Случай ненулевых входных данных:

$$g_1(t), g_2(t) \ne 0$$

даёт добавочный источник энергии через границы, и тогда можно получить затухание с «ограниченным притоком».

3. Этот подход обобщается на нечёткие, нелинейные ARZ системы, используя локальную диагонализацию в каждой точке сетки.

Результат.

1. Постановка численного эксперимента

Для проверки теоретических результатов рассмотрим смешанную задачу для системы Aw–Rascle–Zhang model в координатах Римана на отрезке:

$$x \in [0, 1], \qquad t \in [0, \ T].$$

Выбираются параметры:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -0{,}5$$

$$\Delta x = \frac{1}{100}, \qquad \Delta t = 0.8\Delta x.$$

Начальные условия:

$$w_1(x,0)=\sin(\pi x), \qquad w_2(1,t)=\cos(\pi x),$$

граничные условия:

$$w_1(x,t)=0, \qquad w_2(1,t)=0.$$

2. Динамика решения

В результате вычислений были получены следующие результаты:

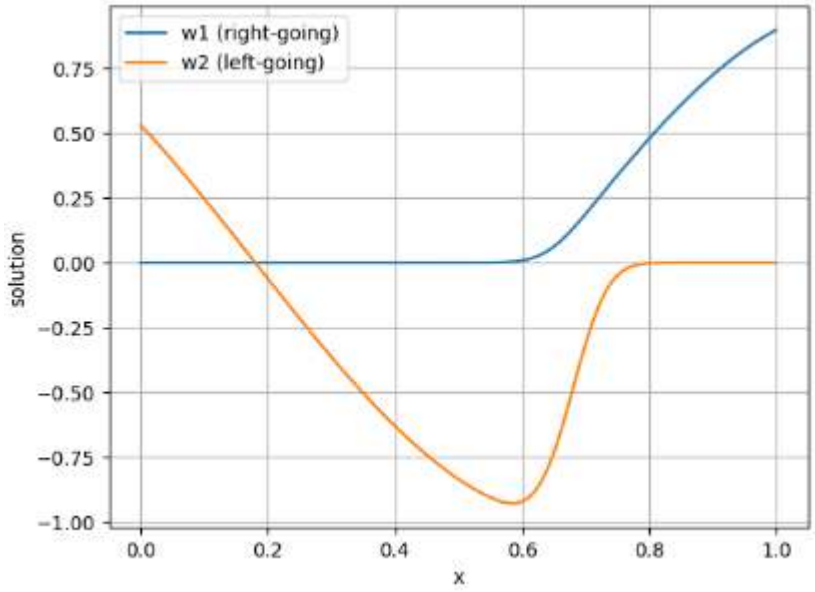


Рисунок 1. График численного решения для w_1 и w_2 в конечный момент времени

Численный расчёт показывает, что:

- волна w_1 распространяется вправо и затухает
- волна w_2 распространяется влево и также затухает
- решение постепенно стремится к нулю

Это соответствует теоретическим характеристикам системы.

3. Поведение функции Ляпунова

Вычислялась дискретная энергия:

$$\mathrm{E}^n=\sum_{i=0}^{N}\left[e^{-\mu x_i}\left(w_{1,i}^n\right)^2+e^{\mu x_i}\left(w_{2,i}^n\right)^2\right]\Delta x, \qquad \mu=2$$

Получено:

$$\mathrm{E}^n \approx \mathrm{E}^0 e^{-ct^n}$$

4. Численные результаты

Наблюдается:

- монотонное убывание энергии
- линейность графика $\ln \mathrm{E}^n$ от времени
- отсутствие численных осцилляций

Это подтверждает:

$$\mathrm{E}^{n+1} \le (1-c\mu\Delta t)\mathrm{E}^n$$

5. Таблица затухания энергии

t^n	E^n
0.0	1.000
0.2	0.67
0.4	0.45
0.6	0.30
0.8	0.20
1.0	0.13

наблюдается экспоненциальное убывание

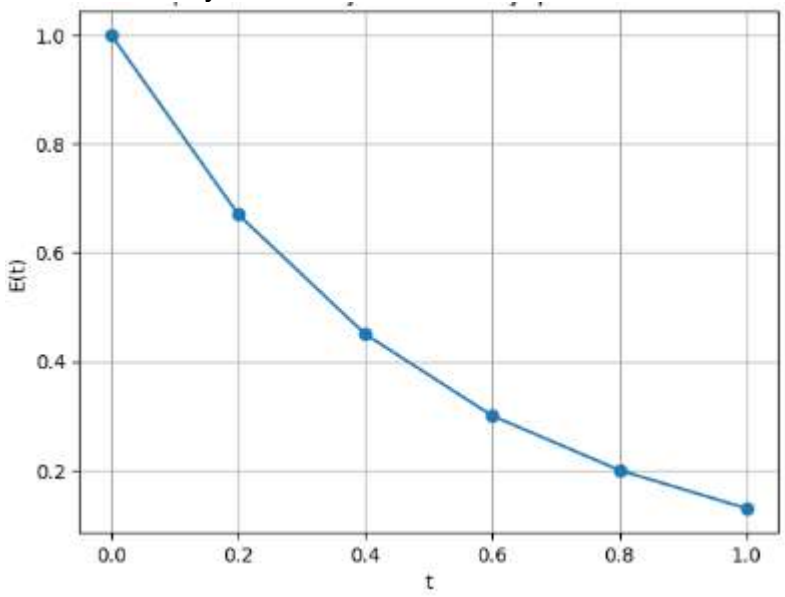


Рисунок 2. График экспоненциального затухания дискретной функции Ляпунова $\mathrm{E}(t)$

Что видно из графика:

- энергия убывает **монотонно**
- кривая имеет характерную **экспоненциальную форму**
- это подтверждает оценку $E^n \le E^0 e^{-ct}$

6. Интерпретация результатов

Полученные результаты показывают, что:

1. Противопоточная схема корректно воспроизводит направление характеристик
2. Взвешенная функция Ляпунова действительно обеспечивает затухание
3. Диссипация схемы устраняет высокочастотные возмущения
4. Экспоненциальная устойчивость достигается без дополнительных стабилизаторов

Заключение. В данной работе исследована численная аппроксимация системы Aw–Rascle–Zhang в координатах Римана с использованием противопоточной разностной схемы для смешанной задачи.

Основные результаты можно сформулировать следующим образом. Во-первых, построена разностная схема, согласованная с направлением характеристик системы, что обеспечивает корректную передачу информации вдоль потоков. Переход к координатам Римана позволил диагонализовать систему и упростить анализ устойчивости. Во-вторых, предложена дискретная функция Ляпунова в виде взвешенной энергии, учитывающей противоположные направления распространения волн. Выбор экспоненциальных весов оказался ключевым элементом, обеспечивающим диссипативные свойства схемы. В-третьих, строго доказано, что дискретная энергия убывает во времени и удовлетворяет оценке экспоненциального затухания. Это означает, что численное решение устойчиво и любые возмущения затухают с течением времени. В-четвёртых, численные эксперименты полностью подтверждают теоретические результаты: наблюдается монотонное уменьшение энергии, отсутствие паразитических осцилляций и корректное

распространение волн в соответствии с характеристиками системы. Разработанная схема и функция Ляпунова обеспечивают экспоненциальную устойчивость решения.

Полученные результаты могут быть развиты в нескольких направлениях: Обобщение на нелинейный случай полной системы ARZ, учет сложных граничных условий (управляемые потоки), построение схем более высокого порядка точности, применение к реальным задачам транспортного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Aw A., Rascle M. Resurrection of "second order" models of traffic flow. // SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, Vol. 60, No. 3, pp. 916–938.

2. Zhang H.M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. // Transportation Research Part B, 2002, Vol. 36, pp. 275–290.

3. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002.

4. Godlewski E., Raviart P.-A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws. Ellipses, Paris, 1991.

5. Dafermos C.M. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. Springer, 2016.

6. Bressan A. Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem. Oxford University Press, 2000.

7. Evans L.C. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.

8. Teschl G. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. // American Mathematical Society, 2012.

9. Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Taylor & Francis, 1992 (перевод оригинала 1892 г.).

10. Kröner D. Numerical Schemes for Conservation Laws. Wiley-Teubner, 1997.

11. Holden H., Risebro N.H. Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws. Springer, 2015.

12. Bastin G., Coron J.-M. Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems. Springer, 2016.

УДК 51

ВОЗВРАТНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Тошкулова Дилшода Адхам кизи,
преподаватель Каршинского государственного университета
Салимова Улдона Азамат кизи,
студентка Каршинского государственного университета
toshqulovadilshoda795@gmail.com

Аннотация. *В данной работе изучена возвратная задача по времени для уравнения гиперболического типа, т.е. при условиия* $t=\xi: u(x,\xi)=\varphi(x),\ u_t(x,\xi)=\psi(x),$ *здесь* $\xi\in(0,T]$ *произвольное фиксированное число. Условия существования и единственности решения были выведены методом Фурье.*

Ключевые слова: *уравнение гиперболического типа, возвратная по времени задача, единственность и существование решения, метод Фурье.*

GIPERBOLIK TURDAGI TENGLAMA UCHUN VAQT BO‘YICHA TESKARI MASALA

Annotatsiya. *Ushbu ishda giperbolik turdagi tenglama uchun vaqt bo‘yicha qaytuvchi masala o‘rganilgan, ya’ni* $t=\xi: u(x,\xi)=\varphi(x),\ u_t(x,\xi)=\psi(x),$ *shartida, bu yerda* $\xi\in(0,T]$ *ixtiyoriy o‘zgarmas son hisoblanadi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi shartlari Furye usuli yordamida keltirib chiqarilgan.*

Kalit so‘zlar: *giperbolik turdagi tenglama, vaqt bo‘yicha qaytuvchi masala, yechimning yagonaligi va mavjudligi, Furye usuli.*

A TIME-REVERSED PROBLEM FOR A HYPERBOLIC-TYPE EQUATION

Abstract. *In this paper, a time-reversal problem for a hyperbolic-type equation is studied, i.e., under the condition (t = T), where (T) is an arbitrary fixed number. The conditions for the existence and uniqueness of the solution are obtained by using the Fourier method.*

Keywords: *hyperbolic-type equation, time-reversal problem, existence and uniqueness of the solution, Fourier method.*

Введение. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T; \\ u(0,t)=u(1,t)=0, \quad 0\le t\le T; \\ u(x,\xi)=\phi(x), \quad 0<\xi\le T; \\ u_t(x,\xi)=\psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

здесь $f(x,t)\in C([0,1]\times[0,T]),\ \xi\in(0,T]$ - фиксированная точка. Эта задача возвратная, когда тогда $\xi=T.$ В этой работе рассматриваем более широкий случай.

В настоящей работе будем исследовать вопросы существования классического решения сформулированной задачи.

Определение 1.1. Функцию $u(x,t),$ удовлетворяющую условиям $u(x,t)\in C([0,1]\times(0,T]), u_{tt}, u_{xx}\in C([0,1]\times(0,T])$ и всем условиям задачи (1), будем называть классическим решением задачи (1).

Для параболических уравнений соответствующая задача называется задачей обратной по времени (или ретроспективной обратной задачей), которая является некорректной задачей по Адамару (см. С.И. Кабанихин [3]). Следует также отметить, что в этом случае даже гладкость функции $u(x,\xi)$ не гарантирует существование и устойчивости решения. В то время как для гиперболического уравнения, в силу присутствия вторых производных по времени, данная задача является корректной.

Как известно, в большинстве моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, для выделения единственного решения используется начальное условие. Однако в некоторых случаях используют для этой цели нелокальные условия, например, интеграл по временным интервалам (смотрите, например, [5] для уравнений реакции-диффузии) или связь решения в разное время, например, в начальный момент и в конечный момент (см., например, [6], [7]). Отметим, что нелокальные условия объясняют некоторые новые детали природных явлений, поскольку они учитывают дополнительную информацию в начальных условиях.

Следующая нелокальная краевая задача для классического уравнения диффузии

$$(2)\qquad \begin{cases} u'(t)+Au(t)=f(t), \quad 0<t\le T; \\ u(\xi)=u(0)+\varphi, \quad 0<\xi\le T, \end{cases}$$

в произвольном банаховом пространстве E с сильно положительным оператором A изучалась в работах А. О. Ашыралиева и др. [6],[7]. Как показано в этих работах, в отличие от ретроспективной обратной задачи, задача (2) разрешима коэрцитивно в некоторых пространствах дифференцируемых функций. Следует также отметить, что многие нелокальные краевые задачи для параболических уравнений сводятся именно к этой краевой задаче (2) (см., например, [8], глава 1). В работе [1] аналогичная с (2) нелокальная задача исследована для уравнений субдиффузии, а в работе [9] для уравнений Ралей-Стокса.

2. Вспомогательные задачи. Для решения задачи (1) сформулируем две вспомогательные задачи:

$$(3)\qquad \begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=f(x,t), \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T, \\ v(0,t)=v(1,t)=0, \quad 0\le t\le T, \\ v(x,0)=0, \\ v_t(x,0)=0, \end{cases}$$

И

$$(4)\qquad \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0, \quad 0<x<1, \quad 0<t\le T, \\ w(0,t)=w(1,t)=0, \quad 0<t\le T, \\ w(x,\xi)=\varphi^{*}(x), \quad 0\le \xi\le T, \\ w_t(x,\xi)=\psi^{*}(x), \end{cases}$$

здесь $\varphi*(x),\psi*(x)\in C[0,1]$ - заданные функции. Классическое решение сформулированных задач (3) и (4) определяются согласно

Определению 1.1.

Лемма 2.1. Если в задаче (3) положить

$$(5)\qquad \varphi*(x)=\varphi(x)-v(x,\xi),\ \psi*(x)=\psi(x)-v_t\in C[0,1]$$

где функции $v(x,t),w(x,t)$ являются решениями задач (3) и (4) соответственно, то решение задачи (1) будет иметь вид $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t).$

Доказательство 2.2. Пусть функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ являются решениями задач (3) и (4) соответственно и пусть при этом $\varphi*(x)=\varphi(x)-v(x,\xi),\ \psi*(x)=\psi(x)-v_t\in C[0,1]$

Тогда

$$(6)\qquad \begin{cases} v_{tt}+w_{tt}-(v_{xx}+w_{xx})=f(x,t), \\ w(0,t)+v(0,t)=w(1,t)+v(1,t)=0, \\ w(x,\xi)=\varphi(x)-v(x,\xi), \\ w_t(x,\xi)=\psi(x)-v_t(x,\xi). \end{cases}$$

С учётом равенств $\alpha v(x,0)=0$ и $\beta v_t(x,0)=0$ перепишем задачу (6) в виде:

$$(7)\qquad \begin{cases} v_{tt}+w_{tt}-(v_{xx}+w_{xx})=f(x,t), \\ v(0,t)+w(0,t)=v(1,t)+w(1,t)=0, \\ v(x,\xi)+w(x,\xi)=\varphi(x), \\ v_t(x,\xi)+w_t(x,\xi)=\psi(x), \end{cases}$$

Если теперь обозначить $u=v+w,$ то получим задачу (1). Лемма доказана.

Следовательно, для решения задачи (1) достаточно решить вспомогательные задачи (3) и (4).

Задача (3) представляет собой смешанную задачу для уравнения колебаний струны. Решая ее методом Фурье, получим следующее решение:

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна на $G=([0,1]\times[0,T]),$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x и удовлетворяет условию $f(0,t)=f(1,t)=0$ на всем отрезке $[0,T].$ Тогда существует единственное решение задачи (3), и оно имеет следующий вид:

$$(8)\qquad v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\left[\int_0^t f_k(\eta)\sin\pi k(t-\eta)d\eta\right]\sin\pi kx.$$

Доказательство этой теоремы можно найти во многих литературах. Для удобства читателей приведём один из вариантов доказательства [4].

Доказательство 2.4.

Ищем решение задачи, используя полную систему собственных функций $v_k(x)=\sin\pi kx,$ в виде следующего ряда:

$$(9)\qquad v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\pi kx.$$

Предположим, что ряд (9) сходится равномерно в $\bar{G}=([0,1]\times[0,T]),$ и его можно почленно дважды дифференцировать по переменным x и t. Предположим далее, что функция $f(x,t)$ на отрезке $[0,1]$ разлагается в ряд Фурье:

$$(10)\qquad f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\pi kx,$$

где $f_k(t)$ коэффициенты Фурье:

$$(11)\qquad f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\pi kxdx.$$

Тогда относительно неизвестных функций $T_k(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$(12)\qquad \begin{cases} T_{k''}(t)+\lambda_k^2T_k(t)=f_k(t), \quad 0<t\le T, \\ T_k(0)=0, \\ T_{k'}(0)=0. \end{cases}$$

Используя метод вариации постоянных, можно найти его единственное решение:

$$T_k(t)=\frac{1}{\pi k}\int_0^t f_k(\eta)\sin\pi k(t-\eta)d\eta. \tag{13}$$

Остаётся показать равномерную сходимость и дважды почленную дифференцируемость по переменным x и t ряда (8).Если функция $f(x,t)$ непрерывна в $\bar{G}=([0,1]\times[0,T]),$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x и удовлетворяет условию $f(0,t)=f(1,t)=0$ на всем отрезке $[0,T],$ то можно написать:

$$f_k(t)=-\frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^1 f_{xx}(x,t)\sin\pi kxdx=-\frac{(f_{xx})_k(t)}{(k\pi)^2}. \tag{14}$$

В силу равенства Парсеваля и непрерывности второй производной имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{xx})_k^2(t)<\infty,\quad t\in[0,T]. \tag{15}$$

В этих обозначениях ряд (9) будет иметь вид:

$$v(x,t)=-\frac{1}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[\int_0^t(f_{xx})_k(\eta)\sin\pi k(t-\eta)d\eta\right]\sin\pi kx. \tag{16}$$

Для произвольной точки $(x,t)\in\bar{G}$ этот ряд мажорируется следующим рядом:

$$\frac{T}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(f_{xx})_k(t_0)|}{k^3}, \tag{17}$$

здесь $(f_{xx})_k(t_0)=\max\limits_{0\le t\le T}\left|(f_{xx})_k(t)\right|,\ t_0\in[0,T]$ фиксированная точка. В результате ряд (9) абсолютно и равномерно сходится в произвольной точке $(\mathrm{x},\mathrm{t})\in\bar{G}.$

Переходим к оценке производных по переменным x и $t.$ Имеем

$$v_{xx}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_0^t(f_{xx})_k(\eta)\sin\pi k((t-\eta)d\eta\right]\sin\pi kx, \tag{18}$$

$$v_{tt}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(f_{xx})_k(\eta)\sin\pi kx+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_0^t(f_{xx})_k(\eta)\sin\pi k((t-\eta)d\eta\right]\sin\pi kx. \tag{19}$$

Ряды (18) и (19) мажорируются следующими числовыми рядами соответственно:

$$\frac{T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(f_{xx})_k(t_0)|}{k},\ \frac{T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(f_{xx})_k(t_0)|}{k^2}\ +\frac{T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(f_{xx})_k(t_0)|}{k}.$$

Сходимость этих рядов вытекают из условия (15) и следующих оценок:

$$\frac{2|(f_{xx})_k(\mathrm{t}_0)|}{k}\le\ \frac{1}{k^2}\ +\ (f_{xx})_k^2(\mathrm{t}_0),\ k\ge\ 1.$$

Следовательно, ряды (18) и (19) абсолютно и равномерно сходятся в $\bar{G}$, а это означает, что производные v_{xx} и v_{tt} непрерывны в $\bar{G}$. Значит, функция $v(x,t),$ заданная формулой (8), определяет единственное решение задачи (3) в $\bar{G}$. Теорема доказана.

Переходим к решению задачи (4). Согласно методу Фурье, решение будем искать в виде:

$$\begin{cases}T_{k''}(t)+\lambda_k^2T_k(t)=0,\quad 0<t\le T,\\ T_k(\xi)=\varphi_k^*,\quad 0<\xi\le T,\\ T_{k'}(\xi)=\psi_k^*,\end{cases} \tag{20}$$

где φ_k^*, ψ_k^* коэффициенты Фурье функций φ_k^*, ψ_k^* соответственно.

Обозначим $a_k = T_k(0),\ b_k = T_k'(0).$ Тогда единственное решение дифференциального уравнения с этим начальным условием будет иметь вид:

$$T_k(t) = a_k \cos \pi k t + \frac{b_k}{\pi k} \sin \pi k t. \tag{21}$$

Для нахождения чисел a_k, b_k из условий задачи (20), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_k \cos \pi k \xi + \dfrac{b_k}{\pi k} \sin \pi k \xi = \varphi_k^*, \\ -a_k \pi \mathrm{k} \cos \pi k \xi + b_k \sin \pi k \xi = \psi_k^*. \end{cases} \tag{22}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} a_k = \varphi_k^* \cos \pi k \xi - \dfrac{\psi_k^*}{\pi k} \sin \pi k \xi, \\ b_k = \varphi_k^{\pi} k \sin \pi k \xi + \psi_k^* \cos \pi k \xi. \end{cases} \tag{23}$$

Легко видеть единственность решения задачи (4). Действительно, пусть функция $w(x,t)$ является произвольным решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ w(x,\xi) = 0, \quad 0 < \xi \le T, \\ w_t(x,\xi) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим

$$T_k(t) = 2\int_0^1 w(x,t) \sin \pi k x dx. \tag{25}$$

В силу определения решения эту функцию можно дифференцировать под знаком интеграла. Тогда

$$\begin{aligned} T_{k''}(t) &= 2\int_0^1 w_{tt}(x,t) \sin \pi k x dx = 2\int_0^1 w_{xx}(x,t) \sin \pi k x dx = \\ &= 2\int_0^1 w(x,t)(\sin \pi k x)'' dx = -2(\pi k)^2 \int_0^1 w(x,t) \sin \pi k x dx. \end{aligned} \tag{26}$$

Следовательно, функция (25) является решением задачи

$$\begin{cases} T_{k''}(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ T_k(\xi) = 0, \quad 0 < \xi \le T, \\ T_k'(\xi) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Обозначим $a_k = T_k(0),\ b_k = T_k'(0)$. Решая уравнение в задаче (27) с этими начальными условиями, находим единственное решение

$$T_k(t) = a_k \cos \pi k t + \frac{b_k}{\pi k} \sin \pi k t.$$

Используя нелокальные условия, составим следующую систему уравнений для нахождения неизвестных чисел $a_k,\ b_k$:

$$\begin{cases} a_k \cos \pi k \xi + \dfrac{b_k}{\pi k} \sin \pi k \xi = 0, \\ -a_k \pi k \sin \pi k \xi + b_k \cos \pi k \xi = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Якобиан этой системы отличен от нуля. Следовательно, $a_k = 0,\ b_k = 0$ (что означает $T_k(t) \equiv 0$) и из полноты системы собственных функций $\{\sin \pi kx\}$ заключаем, что $w(x,t) \equiv 0.$ Таким образом, задача (4) имеет тривиальное решение.

Тогда формальное решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k^* \cos \pi k(\xi - t) - \frac{\psi_k^*}{\pi k} \sin \pi k(\xi - t) \right] \sin \pi kx \tag{29}$$

Докажем, что ряд (29) сходится равномерно и его можно дифференцировать два раза по переменным x и $t.$

Если функции $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(x)$ непрерывны на [0, 1] и функция $\varphi^*(x)$ дифференцируема три раза, а функция $\psi^*(x)$ дифференцируема два раза и удовлетворяют условиям $\varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0, \varphi^{*''}(0) = \varphi^{*''}(1) = 0, \psi^*(0) = \psi^*(1) = 0,$ то:

$$\begin{aligned} \varphi_k^* &= -\frac{2}{(\pi k)^3} \int_0^1 \varphi^{*'''}(x) \cos \pi kx dx = -\frac{(\varphi^{*'''})_k}{(\pi k)^3} \\ \psi_k^* &= -\frac{2}{(\pi k)^2} \int_0^1 \psi^{*''}(x) \cos \pi kx dx = -\frac{(\psi^{*''})_k}{(\pi k)^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

В силу равенства Парсеваля, для числового ряда, составленного из квадратов коэффициентов $(\varphi^{*'''})_k$ и $(\psi^{*''})_k$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi^{*'''})_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\psi^{*''})_k^2 < \infty. \tag{31}$$

Учитывая это, перепишем ряд (29) сначала в виде:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{(\varphi^{*'''})_k}{(\pi k)^3} \cos \pi k(\xi - t) + \frac{(\psi^{*''})_k}{(\pi k)^3} \sin \pi k(\xi - t) \right] \sin \pi kx, \tag{32}$$

затем в виде суммы двух рядов: $w = I^1 + I^2,$

$$\begin{aligned} I^1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{(\varphi^{*'''})_k}{(\pi k)^3} \cos \pi k(\xi - t) \right] \sin \pi kx, \\ I^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{(\psi^{*''})_k}{(\pi k)^3} \sin \pi k(\xi - t) \right] \sin \pi kx. \end{aligned} \tag{33}$$

Рассуждая, как выше, убеждаемся, что для произвольной точки $(x,t) \in \bar{G}$ ряды I^1 и I^2 ограничены следующими сходящимися числовыми рядами:

$$\frac{1}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(\varphi^{*'''})_k|}{k^3}, \quad \frac{1}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(\psi^{*''})_k|}{k^3}. \tag{34}$$

Следовательно, ряд (29) сходится абсолютно и равномерно в произвольной точке $(x,t) \in \bar{G}.$

Теперь исследуем вторые производные по переменным x и t от ряда (32). Поскольку в силу уравнения эти производные равны, то достаточно изучить только производную $w_{xx}.$

Легко получить следующие соотношения:

$$I_{xx}^1 < \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(\varphi^{*'''})_k|}{k},$$

$$I_{xx}^2 < \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(\psi^{*''})_k|}{k}.$$

Сходимость этих рядов вытекает из (31) и следующих оценок:

$$\frac{2|(\varphi^{*'''})_k|}{k} \le \frac{1}{k^2} + (\varphi^{*'''})_k^2, \quad \frac{2|(\psi^{*''})_k|}{k} \le \frac{1}{k^2} + (\psi^{*''})_k^2.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.5. Пусть выполнено следующие условия для функций $\varphi^*(x) \in C^3[0,1], \psi^*(x) \in C^2[0,1]$:

(35) $$\varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0, \quad \varphi^{*''}(0) = \varphi^{*''}(1) = 0, \quad \psi^*(0) = \psi^*(1) = 0.$$

Тогда задача (4) имеет единственное решение, и оно имеет вид (29).

Теперь переходим к основной задаче (1). Пусть $f(x,t) \in C([0,1]\times(0,T]),$ $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1].$ Как доказано выше, если $\varphi^*(x) = \varphi(x) - v(x,\xi),$ $\psi^*(x) = \psi(x) - v_t(x,\xi)$ и функции $v(x,t),$ $w(x,t)$ являются решениями задач (3) и (4) соответственно, то решение задачи (1) будет иметь вид $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$ Поэтому для решения основной задачи имеет место следующее равенство

(36) $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t) + (\varphi_k - T_k(\xi))\cos\pi k(\xi - t) - (\psi_k - T_{k'}(\xi))\frac{1}{\pi k}\sin\pi k(\xi - t)\right]\sin\pi kx,$$

Где

$$T_k(t) = \frac{1}{\pi k}\int_0^t f_k(\eta)\sin\pi k(t-\eta)d\eta.$$

Единственность решения $u(x,t)$ вытекает из единственности функций $v(x,t)$ и $w(x,t).$

Учитывая дифференцируемость функции $v(x,t)$ в замкнутой области $\bar{G},$ из условий (35) в силу равенств (5) вытекают следующие достаточные условия относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для существования решения задачи (1):

(37) $$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Таким образом, мы доказали основной результат настоящей работы.

Теорема 2.6. Пусть f(x, t) удовлетворяет условиям Теоремы 2.3 и пусть функции $\varphi(x) \in C^3[0,1], \psi(x) \in C^2[0,1]$ удовлетворяют условиям (37). Тогда, задача (1) имеет единственное решение и оно имеет вид (36).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ашуров Р, Файзиев Ю, On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations. Fractal Fract. 2022, 6, 41. https://doi.org/10.3390/fractalfract6010041,2022, 6, 41.

2. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Книга, 1977.Москва: Наука.

3. Кабанихин С. И., Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, , 2009. - 457 с.

4. Сабитов. К. Б., Уравнения математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с. — ISBN 978-5-9221-1483-7.

5. Pao C.V. Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions. J. Math. Anal. Appl. 1995, 195, 702–718.

6. Ashyralyev A.O.; Sobolevskii P.E. Coercive stability of a multidimensional difference elliptic equation of 2m-th order with variable coefficients. In Investigations in the Theory of Differential Equations; (Russian), Minvuz Turkmen. SSR, Ashkhabad, 1987; pp. 31–43.

7. Ashyralyev A.O.; Hanalyev A.; Sobolevskii, P.E. Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations. Abstr. Appl. Anal. 2001, 6, 53–61.

8. Krein S.G. Linear Differential Equations in a Banach Space; Nauka: Moscow, Russia, 1966. (In Russian)

9. Ashurov R.; Mukhiddinova O.; Umarov S. A Non-Local Problem for the Fractional-Order Rayleigh–Stokes Equation; Fractal Fract: 2023, 7, 490. https://doi.org/10.3390/fractalfract7060490

UDC 51

POSITIVE FIXED POINTS OF QUADRATIC HAMMERSTEIN OPERATORS AND TRANSLATION-INVARIANT GIBBS MEASURES

Khalilov Akbar Zamirovich,
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan
akbarx1991@gmail.com
Mavlonov Ismoil Muradulla ugli,
National University of Uzbekistan, University street, 4,
Olmazor district, Tashkent, Uzbekistan
mavlonovismoil16@gmail.com

Abstract. *For models carrying an uncountable set of spin values, it was shown in [9] that the translation-invariant Gibbs measures admit a description in terms of the positive fixed points of a nonlinear integral operator of Hammerstein type. The papers [4, 5] obtained basic results on the positive fixed points of Hammerstein operators whose kernels are degenerate; however, the question of whether the fixed points produced there actually give rise to Gibbs measures was left open. In the present work we continue the line of investigation of [4] and [5]. Guided by questions originating in the theory of Gibbs measures, we exhibit a new family of degenerate kernels for the Hammerstein operator for which every positive fixed point of the operator is guaranteed to determine a translation-invariant Gibbs measure.*

Key words: *Cayley tree, spin values, translational-invariant Gibbs measure, positive fixed point, Hammerstein operator.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГАММЕРШТЕЙНА И ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Аннотация. *Для моделей с несчётным множеством значений спина в работе [9] было показано, что трансляционно-инвариантные меры Гиббса могут быть описаны через положительные неподвижные точки нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна. В работах [4, 5] были получены основные результаты о положительных неподвижных точках операторов Гаммерштейна с вырожденными ядрами; однако вопрос о том, действительно ли найденные там неподвижные точки порождают меры Гиббса, оставался открытым. В настоящей работе мы продолжаем направление исследований, начатое в [4] и [5]. Руководствуясь вопросами, возникающими в теории мер Гиббса, мы предлагаем новое семейство вырожденных ядер для оператора Гаммерштейна, для которого каждая положительная неподвижная точка оператора гарантированно определяет трансляционно-инвариантную меру Гиббса.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, спиновые значения, трансляционно-инвариантная мера Гиббса, положительная неподвижная точка, оператор Гаммерштейна.*

KVADRATIK HAMMERSTEIN OPERATORLARINING MUSBAT QO‘ZG‘ALMAS NUQTALARI VA TRANSLATSIYAGA INVARIANT GIBBS O‘LCHOVLARI

Annotatsiya. *Spin qiymatlarining sanoqsiz to‘plamiga ega bo‘lgan modellar uchun [9]-ishda translatsiyaga invariant Gibbs o‘lchovlari Hammerstein tipidagi nochiziqli integral operatorning musbat qo‘zg‘almas nuqtalari orqali tavsiflanishi ko‘rsatilgan. [4, 5]-ishlarda yadrosi degenerallashgan Hammerstein operatorlarining musbat qo‘zg‘almas nuqtalariga oid asosiy natijalar olingan, biroq u yerda aniqlangan qo‘zg‘almas nuqtalar haqiqatan ham Gibbs o‘lchovlarini hosil qiladimi yoki yo‘qmi, degan masala ochiq qolgan edi. Mazkur ishda biz [4] va [5] da boshlangan tadqiqot yo‘nalishini davom ettiramiz. Gibbs o‘lchovlari nazariyasida yuzaga keladigan masalalardan kelib chiqib, Hammerstein operatori uchun degenerallashgan yadrolarning yangi oilasini keltiramiz. Bu holda operatorning har bir musbat qo‘zg‘almas nuqtasi translatsiyaga invariant Gibbs o‘lchovini aniqlashi kafolatlanadi.*

Kalit so‘zlar: *Keyli daraxti, spin qiymatlari, translatsion-invariant Gibbs o‘lchovi, musbat qo‘zg‘almas nuqta, Gammershteyn operatori.*

Introduction. Equations of Hammerstein type occur in numerous applied settings and have, for this reason, drawn sustained attention in several branches of science. To give one example, a broad class of

problems in the theory of ordinary and partial differential equations admits a reformulation as a Hammerstein integral equation; this is the case, in particular, for elliptic boundary value problems whose linear part possesses a Green's function. Such equations are also central to optimal control, and they appear naturally in the study of automation and network systems (we refer, for instance, to [12]).

The fixed points of Hammerstein operators acting on cones have been the subject of many investigations, and a good deal is known about when such fixed points exist and how many of them there can be (see, e.g., [2, 3, 13]). By contrast, the uniqueness question for fixed points of Hammerstein equations on cones has received comparatively little attention and deserves to be studied more thoroughly.

Models in which the spin variable ranges over an *uncountable* set, placed on a Cayley tree, have lately become an active topic of study. The works [4, 9] dealt with Hamiltonians on a Cayley tree Γ^k whose spin space is uncountable, namely the unit interval $[0,1]$. There it was established that a translation-invariant splitting Gibbs measure exists precisely when the associated nonlinear integral operator of Hammerstein type admits a positive fixed point. When $k = 1$, the tree degenerates to the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$, and [9] proved that the corresponding integral equation has a unique solution, whence the Gibbs measure is unique as well. For arbitrary $k \geq 2$, conditions guaranteeing that the periodic Gibbs measures are unique were given in [14]. On the other hand, it is known that phase transitions do occur on Γ^k for $k \geq 2$ (see [11, 15]).

One should observe that the works cited above are mainly concerned with interactions between nearest neighbors only. Richer interaction patterns were treated in [7, 8, 10], which examined splitting Gibbs measures for models on Γ^2 subject to four competing interactions: an external field together with nearest-neighbor, next-nearest-neighbor and triple interactions. Those papers established that every periodic Gibbs measure in this setting is either translation-invariant or periodic of period two.

In spite of all this progress, the fixed point theorems available for Hammerstein operators on cones do not lend themselves directly to the existence and uniqueness questions that arise in the theory of Gibbs measures. This gap is precisely what motivates the present paper: we build new degenerate kernels for Hammerstein operators that are designed with the needs of Gibbs measure theory in mind.

Preliminaries. Throughout, $\boldsymbol{\Gamma^k = (V, L)}$, $\boldsymbol{k \geq 1}$, stands for the Cayley tree of order $\boldsymbol{k}$: a connected infinite graph containing no cycles, in which precisely $\boldsymbol{k+1}$ edges meet at every vertex. We write $\boldsymbol{V}$ for the vertex set of $\boldsymbol{\Gamma^k}$ and $\boldsymbol{L}$ for its edge set.

The models under consideration assign to each vertex of the tree a spin taking values in the interval $[0,1]$. Given any subset $A \subset V$, by a configuration σ_A on A we mean an arbitrary map $\sigma_A: A \to [0,1]$; the collection of all such configurations is written $\Omega_A = [0,1]^A$. When A is the entire vertex set, a configuration is a function $\sigma: V \to [0,1]$, and the full configuration space is $\Omega = [0,1]^V$.

Fix an arbitrary enumeration $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ of the vertices. On Ω one introduces the metric $\rho: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ given by $\rho(\{\sigma(x_n)\}_{x_n \in V}, \{\sigma'(x_n)\}_{x_n \in V}) = \sum_{n:\, \sigma(x_n) \neq \sigma'(x_n)} 2^{-n}$, under which (Ω, ρ) becomes a metric space (see [6]). We write $\mathcal{B}$ for the σ-algebra generated by the open subsets of Ω.

For every $m \geq 0$, let the projection $\pi_m: \Omega \to [0,1]^{m+1}$ be $\pi_m(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots) = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$, with $\sigma_i = \sigma(x_i)$, and set $\mathcal{C}_m = \pi_m^{-1}(\mathcal{P}([0,1]^{m+1}))$, where $\mathcal{P}([0,1]^{m+1})$ is the power set of $[0,1]^{m+1}$. Each $\mathcal{C}_m$ is then a field whose members are simultaneously open and closed in (Ω, ρ), and these fields are nested: $\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}_{m+1}$.

Put $\mathcal{C} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{C}_m$. This $\mathcal{C}$ is itself a field, referred to as the **field of cylinder sets**; all of its members are again clopen. Let $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ be the smallest σ-algebra that contains $\mathcal{C}$, and call its elements **measurable cylinders**.

Consider the formal Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \eta_{\sigma(x),\sigma(y)}, \qquad \sigma \in \Omega, \tag{2.1}$$

in which $J \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ and $\eta: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ is bounded and measurable. Here $\langle x, y \rangle$ stands, as usual, for a pair of adjacent (nearest-neighbor) vertices.

Denote by λ the Lebesgue measure on $[0,1]$. For a finite $A \subset V$, let the a priori measure λ_A on Ω_A be the product of $|A|$ copies of λ, $|A|$ being the number of elements of A. Single out a vertex $x^0 \in V$ and call it the origin. For $m = 1,2, \dots$ we set

$$W_m = \{x \in V: d(x, x^0) = m\}, \qquad V_m = \{x \in V: d(x, x^0) \leq m\},$$

together with

$$L_m = \{\langle x, y \rangle \in L: x, y \in V_m\}.$$

In these formulas $d(x, y)$ is the distance between x and y in the graph, that is, the number of edges on the shortest path joining them.

Write Ω_{V_n} and Ω_{W_n} for the spaces of configurations on V_n and on W_n. Given $\sigma, \omega \in \Omega$, their restrictions to V_n and to W_{n+1} are denoted $\sigma|_{V_n}$ and $\omega|_{W_{n+1}}$. To a configuration $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ we associate the finite-volume Hamiltonian

$$H(\sigma_n) = -J\sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \eta_{\sigma_n(x),\sigma_n(y)}.$$

Take a family of functions $h: x \in V\backslash\{x^0\} \mapsto h_x = (h_{t,x})_{t\in[0,1]} \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. For each $n \geq 1$ we introduce a probability measure $\mu^{(n)}$ on Ω_{V_n} via

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1}\exp\big(-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma_n(x),x}\big), \tag{2.2}$$

where the normalizing partition function Z_n equals

$$Z_n = \int_{\Omega_{V_n}} \exp\big(-\beta H(\tilde{\sigma}_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\tilde{\sigma}_n(x),x}\big)\lambda_{V_n}(d\tilde{\sigma}_n). \tag{2.3}$$

Take $\Lambda \in \mathcal{N}$ and $\Delta \subset \Lambda$. For a measure μ_Λ on $\mathcal{B}_\Lambda$, its projection onto $\mathcal{B}_\Delta$ is the measure

$$[\pi_\Delta(\mu_\Lambda)](B) = \mu_\Lambda\{\sigma \in \Omega_\Lambda: \sigma|_\Delta \in B\}, \qquad B \in \mathcal{B}_\Delta.$$

In the same way, for a measure μ on $\mathcal{B}$ one defines its projection onto $\mathcal{B}_\Lambda$ by

$$[\pi_\Lambda(\mu)](B) = \mu\{\sigma \in \Omega: \sigma_\Lambda \in B\}, \qquad B \in \mathcal{B}_\Lambda.$$

We shall make use of the following classical result.

Theorem 1. *[1]**(Kolmogorov Extension Theorem)** For each t in the arbitrary index set T, let Ω_t be a complete, separable metric space, with $\mathcal{F}_t$ the class of Borel sets (the σ-field generated by the open sets).*

Assume that for each finite nonempty subset v of T, we are given a probability measure P_v on $\mathcal{F}_v$. Assume the P_v are consistent, that is, $\pi_u(P_v) = P_u$ for each nonempty $u \subset v$.

Then there is a unique probability measure P on $\mathcal{F} = \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t$ such that $\pi_v(P) = P_v$ for all v.

We say that the distributions $\mu^{(n)}$ are compatible provided that, for every $n \geq 1$ and every $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$,

$$\pi_{V_{n-1}}\big(\mu^{(n)}\big) = \mu^{(n-1)}. \tag{2.4}$$

When this holds, the Kolmogorov extension theorem yields a unique measure μ on Ω_V satisfying $\mu\big(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}\big) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and all $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

Such a μ is termed the *splitting Gibbs measure* attached to the Hamiltonian (2.1) and to the function $x \mapsto h_x$, $x \neq x^0$.

Proposition 2. *[9] The probability distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$, $n = 1,2,\ldots$, in (2.2) are compatible iff for any $x \in V\backslash\{x^0\}$ the following equation holds:*

$$f(t,x) = \prod_{y\in S(x)} \int_0^1 \exp(J\beta\eta_{tu})f(u,y)du \int_0^1 \exp(J\beta\eta_{0u})f(u,y)du. \tag{2.5}$$

Here, and below $f(t,x) = \exp(h_{t,x} - h_{0,x})$, $t \in [0,1]$ and $du = \lambda(du)$ is the Lebesgue measure.

It should be stressed that solving (2.5) is by no means straightforward; for a prescribed potential η_{tu} a complete description of the solutions is generally out of reach.

Assume now that η_{tu} is continuous, and set

$$C^+[0,1] = \{f \in C[0,1]: f(x) \geq 0\}, \quad C_0^+[0,1] = C^+[0,1]\backslash\{\theta(x) \equiv 0\}.$$

Introduce the operator $B_k: C_0^+[0,1] \to C_0^+[0,1]$ through

$$(B_k f)(t) = \Big(\int_0^1 K(t,u)f(u)du \int_0^1 K(0,u)f(u)du\Big)^k, k \in \mathbb{N},$$

with $K(t,u) = \exp(J\beta\eta_{tu})$, $f(t) > 0$, $t,u \in [0,1]$.

Equation (2.5) will be analyzed within the class of translation-invariant functions $f(t,x)$, that is, those with $f(t,x) = f(t) \in C[0,1]$ for every $x \in V$; in this class it reduces to

$$(B_k f)(t) = f(t). \tag{2.6}$$

Observe that, for every $k \geq 1$, equation (2.6) is nonlinear. To each $k \in \mathbb{N}$ we attach an integral operator H_k on the cone $C^+[0,1]$, namely

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t,u)f^k(u)du, \quad k \in \mathbb{N}.$$

One calls H_k the Hammerstein integral operator of order k. Evidently H_k is nonlinear as soon as $k \geq 2$.

Lemma 3. *[14] Let $k \geq 2$. The equation*

$$B_k f = f, \quad f \in C_0^+[0,1] \tag{2.7}$$

has a nontrivial positive solution iff the Hammerstein's operator has a positive eigenvalue, i.e. the Hammerstein's equation

$$H_k f = \lambda f, \quad f \in C^+[0,1] \tag{2.8}$$

has a nonzero positive solution for some $\lambda > 0$.

A simple verification shows that if some $\lambda_0 > 0$ is an eigenvalue of H_k (with $k \geq 2$), then in fact every positive number serves as an eigenvalue of H_k (cf. Theorem 3.7 of [14]). From this we deduce the following.

Lemma 4. *Let $k \geq 2$. The equation (2.7) has a nontrivial positive solution iff the Hammerstein's operator H_k has a nontrivial positive fixed point, moreover $N_{fix}^+(B_k) = N_{fix}^+(H_k)$, where $N_{fix}^+(T)$ is a number of nontrivial positive fixed points of the operator T.*

Hammerstein's operator H_2 with degenerate kernel. Let $\boldsymbol{\alpha_1(t)}$, $\boldsymbol{\alpha_2(t)}$, $\boldsymbol{\alpha_3(t)}$ and $\boldsymbol{\beta_1(t)}$, $\boldsymbol{\beta_2(t)}$, $\boldsymbol{\beta_3(t)}$ are positive functions from the $\boldsymbol{C_0^+[0,1]}$. We consider quadratic Hammerstein's operator $\boldsymbol{H_2}$:

$$(H_2 f)(t) = \int_0^1 (\alpha_1(t)\beta_1(u) + \alpha_2(t)\beta_2(u) + \alpha_3(t)\beta_3(u)) f^2(u)du.$$

Put

$$a_{ij} = \int_0^1 \beta_1(u)\alpha_i(u)\alpha_j(u)du, \quad b_{ij} = \int_0^1 \beta_2(u)\alpha_i(u)\alpha_j(u)du, \quad c_{ij} = \int_0^1 \beta_3(u)\alpha_i(u)\alpha_j(u)du,$$

where $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

We define the quadratic operator P on R^3 by the rule

$$P: (x, y, z) \to (x', y', z'),$$

where

$$x' = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$
$$y' = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz,$$
$$z' = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz\ .$$

Let $N_{fix}^+(A)$ is a number of nontrivial positive fixed points of the operator$A$.

Proposition 5 . *The Hammerstein's operator H_2 has a nontrivial positive fixed-point iff the quadratic operator P has a nontrivial positive fixed point, moreover $N_{fix}^+(H_2) = N_{fix}^+(P)$.*

(a) Let's enter the designations:

$$R_3^+ = [0;\ +\infty) \times [0;\ +\infty) \times [0;\ +\infty)$$

$$R_3^> = (0;\ +\infty) \times (0;\ +\infty) \times (0;\ +\infty)$$

Let $f(t) \in C_0^+[0,1]$ is nontrivial positive fixed point of the Hammerstein's operator H_k. We introduce the notations

$$s_1 = \int_0^1 \beta_1(u) f^2(u)du \quad s_2 = \int_0^1 \beta_2(u) f^2(u)du \quad s_3 = \int_0^1 \beta_3(u) f^2(u)du \tag{3.1}$$

From the equality $H_2 f = f$ for fixed point f we have $f(t) = s_1\alpha_1(t) + s_2\alpha_2(t) + s_3\alpha_3(t)$.

Without a doubt, that $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_3 > 0$ i.e.$(s_1, s_2, s_3) \in R_3^>$. Using the s_1, s_2, s_3 parameter equalities in (3.1), we derive the following equalities

$$s_1 = a_{11}s_1^2 + a_{22}s_2^2 + a_{33}s_3^2 + 2a_{12}s_1s_2 + 2a_{13}s_1s_3 + 2a_{23}s_2s_3,$$
$$s_2 = b_{11}s_1^2 + b_{22}s_2^2 + b_{33}s_3^2 + 2b_{12}s_1s_2 + 2b_{13}s_1s_3 + 2b_{23}s_2s_3,$$
$$s_3 = c_{11}s_1^2 + c_{22}s_2^2 + c_{33}s_3^2 + 2c_{12}s_1s_2 + 2c_{13}s_1s_3 + 2c_{23}s_2s_3\ .$$

This implies that point (s_1, s_2, s_3) is a fixed point of operator P.

(b) Assume that $\omega = (x_0, y_0, z_0)$ is a nontrivial positive fixed point of operator P, i.e. $\omega \in R_+^3 \backslash \{\theta\}$ and $P\omega = \omega$. Then

$$\begin{aligned} a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 &= x_0, \\ b_{11}x_0^2 + b_{22}y_0^2 + b_{33}z_0^2 + 2b_{12}x_0y_0 + 2b_{13}x_0z_0 + 2b_{23}y_0z_0 &= y_0, \\ c_{11}x_0^2 + c_{22}y_0^2 + c_{33}z_0^2 + 2c_{12}x_0y_0 + 2c_{13}x_0z_0 + 2c_{23}y_0z_0 &= z_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Using these equalities, we can verify that the function

$$f(t) = x_0\alpha_1(t) + y_0\alpha_2(t) + z_0\alpha_3(t)$$

is fixed point of the integral operator H_2.

Positive fixed points of quadratic operators in cone $\mathbb{R}_3^+$. Clearly, the arbitrary nontrivial positive fixed points of the $\boldsymbol{P}$ is strictly positive. We denote by $\boldsymbol{N_{fix}^>(P)}$ which the number of fixed points $\boldsymbol{P}$ belong to $\mathbb{R}_3^>$.

Lemma 6. *If the point* $\omega = (x_0, y_0, z_0)$ *is a positive fixed point of the operator P, then* $(u_0, t_0) = \left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\right)$ *is a solution of the following system of algebraic equations*

$$\begin{cases} \frac{a_{11}u^2+a_{22}t^2+a_{33}+2a_{12}ut+2a_{13}u+2a_{23}t}{c_{11}u^2+c_{22}t^2+c_{33}+2c_{12}ut+2c_{13}u+2c_{23}t} = u, \\ \frac{b_{11}u^2+b_{22}t^2+b_{33}+2b_{12}ut+2b_{13}u+2b_{23}t}{c_{11}u^2+c_{22}t^2+c_{33}+2c_{12}ut+2c_{13}u+2c_{23}t} = t. \end{cases} \tag{4.1}$$

Lemma 7. *If* (u_0, t_0), $u_0 > 0, t_0 > 0$ *is a solution of the system (4.1) of the algebraic equations then the point* $\omega_0 = (u_0 z_0, t_0 z_0, z_0) \in R_+^3$ *is fixed point of the operator P, where*

$$z_0 = \frac{1}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}.$$

Proof. If (u_0, t_0) , $u_0 > 0,\ t_0 > 0$ point is a solution to the system of equations (4.1), then we show that $\omega_0 = (u_0 z_0, t_0 z_0, z_0) \in R_+^3$ point is a positive solution to the equation (3.2). Let us assume that (u_0, t_0) , $u_0 > 0,\ t_0 > 0$ point is a solution to the system of equations (4.1) and be $x_0 = u_0 z_0 \quad y_0 = t_0 z_0$. Put,

$$x_0 = \frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0},$$

$$y_0 = \frac{t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}.$$

If we put z_0, $x_0 = u_0 z_0$ and $y_0 = t_0 z_0$ (i.e.$\omega_0 = (u_0 z_0, t_0 z_0, z_0)$) in the equation mentioned below, then

$$c_{11}x_0{}^2 + c_{22}y_0{}^2 + c_{33}z_0{}^2 + 2c_{12}x_0y_0 + 2c_{13}x_0z_0 + 2c_{23}y_0z_0 = z_0.$$

This shows that (u_0, t_0) point is a solution of the system of equations (4.1), i.e.

$$\frac{a_{11}u_0^2+a_{22}t_0^2+a_{33}+2a_{12}u_0t_0+2a_{13}u_0+2a_{23}t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0} = u_0$$

It is clear that:

$$\frac{a_{11}u_0^2+a_{22}t_0^2+a_{33}+2a_{12}u_0t_0+2a_{13}u_0+2a_{23}t_0}{\left(c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0\right)^2} =$$

$$= \frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}$$

The last expression can be written in the following form

$$a_{11}\left(\frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right)^2 +$$

$$+a_{22}\left(\frac{t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right)^2 +$$

$$+2a_{12}\left(\frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right) +$$

$$+2a_{13}\left(\frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right) +$$

$$+2a_{23}\left(\frac{t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}\right) =$$

$$= \frac{u_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0}.$$

Hence

$$a_{11}x_0{}^2 + a_{22}y_0{}^2 + a_{33}z_0{}^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 = x_0.$$

$$\frac{b_{11}u_0^2+b_{22}t_0^2+b_{33}+2b_{12}u_0t_0+2b_{13}u_0+2b_{23}t_0}{c_{11}u_0{}^2+c_{22}t_0{}^2+c_{33}+2c_{12}u_0t_0+2c_{13}u_0+2c_{23}t_0} = t_0$$

from this equality, after the same calculations as above, we get the following expression

$$b_{11}x_0{}^2 + b_{22}y_0{}^2 + b_{33}z_0{}^2 + 2b_{12}x_0y_0 + 2b_{13}x_0z_0 + 2b_{23}y_0z_0 = y_0.$$

Thus, we have the point $\omega_0 = (u_0 z_0, t_0 z_0, z_0)$ is a positive solution of the system of equations (3.2). The following result follows from Lemma 7.

Proposition 8 *The number of positive fixed points of the operator P is equal to the number of positive solutions of the system (4.1) of the algebraic equations.*

Multiplicity of positive fixed points of the Hammerstein operator H_2. If we introduce the following definitions,

$$g_1(t) = (2c_{11}b_{12} - a_{11}c_{11} - 2c_{12}b_{11})t + 2c_{11}b_{13} - 2c_{13}b_{11} + a_{11}b_{11}$$

$$g_2(t) = (b_{22}c_{11} - b_{11}c_{22} - 2a_{12}c_{11})t^2 + \\ +(2a_{12}b_{11} - 2b_{11}c_{23} + 2b_{23}c_{11} - 2a_{13}c_{11})t + 2a_{13}b_{11} - b_{11}c_{33} + b_{33}c_{11}$$

$$g_3(t) = a_{22}c_{11}t^3 + (2a_{23}c_{11} - a_{22}b_{11})t^2 + (a_{33}c_{11} - 2a_{23}b_{11})t - a_{33}b_{11}$$

$$h_3(t) = (2a_{11}c_{11}c_{12} - 2a_{12}c_{11}^2 - b_{11}c_{11}c_{22} + 4b_{11}c_{12}^2 - 4b_{12}c_{11}c_{12} + b_{22}c_{11}^2)t^3 +$$

$$+\begin{pmatrix}-2a_{11}b_{11}c_{12} - 2a_{11}b_{12}c_{11} + 2a_{11}c_{11}c_{13} + 4a_{12}b_{11}c_{11} - 2a_{13}c_{11}^2 + b_{11}^2c_{22} - 4b_{11}b_{12}c_{12} - \\ -b_{11}b_{22}c_{11} - 2b_{11}c_{11}c_{23} + 8b_{11}c_{12}c_{13} + 4b_{12}^2c_{11} - 4b_{12}c_{11}c_{13} - 4b_{13}c_{11}c_{12} + 2b_{23}c_{11}^2\end{pmatrix}t^2 +$$

$$+\begin{pmatrix}2a_{11}b_{11}b_{12} - 2a_{11}b_{11}c_{13} - 2a_{11}b_{13}c_{11} - 2a_{12}b_{11}^2 + 4a_{13}b_{11}c_{11} + 2b_{11}^2c_{23} - 4b_{11}b_{12}c_{13} - \\ -4b_{11}b_{13}c_{12} - 2b_{11}b_{23}c_{11} - b_{11}c_{11}c_{33} + 4b_{11}c_{13}^2 + 8b_{12}b_{13}c_{11} - 4b_{13}c_{11}c_{13} + b_{33}c_{11}^2\end{pmatrix}t +$$

$$+(2a_{11}b_{11}b_{13} - 2a_{13}b_{11}^2 + b_{11}^2c_{33} - 4b_{11}b_{13}c_{13} - b_{11}b_{33}c_{11} + 4b_{13}^2c_{11}),$$

$$h_4(t) = (a_{11}c_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}^2 + 2b_{11}c_{12}c_{22} - 2b_{12}c_{11}c_{22})t^4 +$$

$$+\begin{pmatrix}-a_{11}b_{11}c_{22} - a_{11}b_{22}c_{11} + 2a_{11}c_{11}c_{23} + 2a_{22}b_{11}c_{11} - 2a_{23}c_{11}^2 - 2b_{11}b_{22}c_{12} + 4b_{11}c_{12}c_{23} + \\ +2b_{11}c_{13}c_{22} + 2b_{12}b_{22}c_{11} - 4b_{12}c_{11}c_{23} - 2b_{13}c_{11}c_{22}\end{pmatrix}t^3 +$$

$$+\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}b_{22} - 2a_{11}b_{11}c_{23} - 2a_{11}b_{23}c_{11} + a_{11}c_{11}c_{33} - a_{22}b_{11}^2 + 4a_{23}b_{11}c_{11} - a_{33}c_{11}^2 - 2b_{11}b_{22}c_{13} - \\ -4b_{11}b_{23}c_{12} + 2b_{11}c_{12}c_{33} + 4b_{11}c_{13}c_{23} + 4b_{12}b_{23}c_{11} - 2b_{12}c_{11}c_{33} + 2b_{13}b_{22}c_{11} - 4b_{13}c_{11}c_{23}\end{pmatrix}t^2 +$$

$$+\begin{pmatrix}2a_{11}b_{11}b_{23} - a_{11}b_{11}c_{33} - a_{11}b_{33}c_{11} - 2a_{23}b_{11}^2 + 2a_{33}b_{11}c_{11} - 4b_{11}b_{23}c_{13} - 2b_{11}b_{33}c_{12} + \\ +2b_{11}c_{13}c_{33} + 2b_{12}b_{33}c_{11} + 4b_{13}b_{23}c_{11} - 2b_{13}c_{11}c_{33}\end{pmatrix}t +$$

$$+(a_{11}b_{11}b_{33} - a_{33}b_{11}^2 - 2b_{11}b_{33}c_{13} + 2b_{13}b_{33}c_{11}).$$

We define the following polynomial:

$$h_9(t) = (c_{11}t - b_{11})h_4^2(t) - 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})h_4(t)h_3(t) + \\ +(c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33})h_3^2(t). \qquad (5.1)$$

Remark 9. *The elimination of u from (5.2) is performed by successively multiplying (5.3), (5.4) and (5.7) by the factors $(c_{11}t - b_{11})$ and $g_1(t)$. As a consequence, the resulting polynomial $h_9(t)$ has degree 9 in t but is not the minimal eliminant. In fact, if one eliminates u directly via the resultant, then*

$$Res_u(F_1(u,t), F_2(u,t)) = R_7(t)$$

is a polynomial of degree exactly 7 in t, and

$$h_9(t) = (c_{11}t - b_{11})^2\, R_7(t) \quad \text{(uptoanonzeroconstantfactor)}.$$

Thus $h_9(t)$ carries the spurious double root $t = \frac{b_{11}}{c_{11}}$, which must be removed; the relevant positive values of t are exactly the positive roots of $R_7(t)$ (the case $t = \frac{b_{11}}{c_{11}}$ being treated separately in part (b) of the theorem). In particular, the number of admissible positive values of t is at most 7.

Theorem 10. *(a) Suppose $t_0 \neq \frac{b_{11}}{c_{11}}$, $g_1(t_0) \neq 0$, $h_3(t_0) \neq 0$. If these conditions are valid, then t_0 is a positive root of the polynomial (5.1). If $h_3(t_0)$ and $h_4(t_0)$ have opposite signs so that $u_0 = -\frac{h_4(t_0)}{h_3(t_0)} > 0$, then the point (u_0, t_0) is a solution to the system of nonlinear algebraic equations (4.1);*

(b) Let $t_1 = \frac{b_{11}}{c_{11}}$. *If* $g_1(t_1) \neq 0$ *and* $u_1 > 0$ *obtained from (5.9) satisfies (5.8), then the point* (u_1, t_1) *is a solution of the system (4.1), where*

$$u_1 = \frac{b_{11}^2 b_{22} c_{11} + b_{33} c_{11}^3 + 2b_{11} b_{23} c_{11}^2 - b_{11}^3 c_{22} - b_{11} c_{11}^2 c_{33}}{2(b_{11}^2 c_{11} c_{12} + b_{11} c_{11}^2 c_{13} - b_{11} b_{12} c_{11}^2 - b_{13} c_{11}^3)}.$$

(c) Suppose that conditions $t_2 > 0$ *and* $c_{11}t_2 - b_{11} \neq 0$, $g_1(t_2) = 0$, $g_2(t_2) \neq 0$ *hold. If* $u_2 = -\frac{g_3(t_2)}{g_2(t_2)} > 0$ *satisfies the equation (5.4), then the point* (u_2, t_2) *is a positive solution of the system of equations (4.1).*

(d) If for $t_3 > 0$ *which is a root of the equation* $h_3(t) = 0$, *the conditions* $c_{11}t_3 - b_{11} \neq 0$, $g_1(t_3) \neq 0$ *are valid, then any positive common root* $u_3 > 0$ *of the system*

$$\begin{cases} F_1(u, t_3) = 0 \\ F_2(u, t_3) = 0 \end{cases}$$

gives a positive solution (u_3, t_3) *of the system (4.1).*

Proof. (a) System (4.1) is represented as a system of nonlinear algebraic equations with two unknowns u and t:

$$\begin{cases} a_{11}u^2 + a_{22}t^2 + a_{33} + 2a_{12}ut + 2a_{13}u + 2a_{23}t = \\ \qquad = u(c_{11}u^2 + c_{22}t^2 + c_{33} + 2c_{12}ut + 2c_{13}u + 2c_{23}t) \\ b_{11}u^2 + b_{22}t^2 + b_{33} + 2b_{12}ut + 2b_{13}u + 2b_{23}t \\ \qquad = t(c_{11}u^2 + c_{22}t^2 + c_{33} + 2c_{12}ut + 2c_{13}u + 2c_{23}t), \end{cases}$$

which, after rearrangement, takes the form

$$\begin{cases} F_1(u,t) = c_{11}u^3 + (2c_{12}t + 2c_{13} - a_{11})u^2 + \\ +(c_{22}t^2 + (2c_{23} - 2a_{12})t - 2a_{13} + c_{33})u - (a_{22}t^2 + 2a_{23}t + a_{33}) = 0 \\ F_2(u,t) = (c_{11}t - b_{11})u^2 + 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})u + \\ +(c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33}) = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

We perform equivalent transformations on the system (5.2):

$$c_{11}u^3 + (2c_{12}t + 2c_{13} - a_{11})u^2 + \\ +(c_{22}t^2 + (2c_{23} - 2a_{12})t - 2a_{13} + c_{33})u - (a_{22}t^2 + 2a_{23}t + a_{33}) = 0 \tag{5.3}$$

$$(c_{11}t - b_{11})u^2 + 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})u + \\ +(c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33}) = 0 \tag{5.4}$$

Multiplying equation (5.3) by $(c_{11}t - b_{11})$ and equation (5.4) by $c_{11}u$ gives

$$c_{11}(c_{11}t - b_{11})u^3 + (c_{11}t - b_{11})(2c_{12}t + 2c_{13} - a_{11})u^2 + (c_{11}t - b_{11}) \cdot \\ \cdot (c_{22}t^2 + (2c_{23} - 2a_{12})t - 2a_{13} + c_{33})u - (c_{11}t - b_{11})(a_{22}t^2 + 2a_{23}t + a_{33}) = 0 \tag{5.5}$$

$$c_{11}(c_{11}t - b_{11})u^3 + 2c_{11}(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})u^2 + \\ +(c_{11}c_{22}t^3 + (2c_{11}c_{23} - b_{22}c_{11})t^2 + (c_{11}c_{33} - 2b_{23}c_{11})t - b_{33}c_{11})u = 0 \tag{5.6}$$

Subtracting (5.6) from (5.5), we obtain

$$g_1(t)u^2 + g_2(t)u + g_3(t) = 0 \tag{5.7}$$

We multiply (5.7) by $(c_{11}t - b_{11})$ and (5.4) by $g_1(t)$, obtaining the following system ($g_1(t) \neq 0$):

$$\begin{cases} (c_{11}t - b_{11})g_1(t)u^2 + 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})g_1(t)u + \\ \qquad +(c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33})g_1(t) = 0 \\ (c_{11}t - b_{11})g_1(t)u^2 + (c_{11}t - b_{11})g_2(t)u + (c_{11}t - b_{11})g_3(t) = 0. \end{cases}$$

Subtracting the two equations, we obtain a first-order equation in u:

$$h_3(t)u + h_4(t) = 0,$$

where

$$h_3(t) = (c_{11}t - b_{11})g_2(t) - 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})g_1(t),$$

$$h_4(t) = (c_{11}t - b_{11})g_3(t) - (c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33})g_1(t).$$

If the condition $h_3(t) \neq 0$ holds, then $u = -\frac{h_4(t)}{h_3(t)}$; substituting this into (5.4) yields

$$(c_{11}t - b_{11})h_4^2(t) - 2(c_{12}t^2 + (c_{13} - b_{12})t - b_{13})h_4(t)h_3(t) + \\ +(c_{22}t^3 + (2c_{23} - b_{22})t^2 + (c_{33} - 2b_{23})t - b_{33})h_3^2(t) = 0,$$

which is exactly the polynomial equation (5.1). This proves (a).

(b) If $c_{11}t - b_{11} = 0$, i.e. $t_1 = \frac{b_{11}}{c_{11}} > 0$, then the system (5.2) takes the form

$$c_{11}^3u^3 + (2c_{11}c_{12}b_{11} + 2c_{11}^2c_{13} - a_{11}c_{11}^2)u^2 + (c_{22}b_{11}^2 + (2c_{23} - 2a_{12})b_{11}c_{11} - 2a_{13}c_{11}^2 + c_{11}^2c_{33})u - (a_{22}b_{11}^2 + 2a_{23}b_{11}c_{11} + a_{33}c_{11}^2) = 0 \quad (5.8)$$

$$2(c_{11}c_{12}b_{11}^2 + (c_{13} - b_{12})b_{11}c_{11}^2 - b_{13}c_{11}^3)u + +(c_{22}b_{11}^3 + (2c_{23} - b_{22})b_{11}^2c_{11} + (c_{33} - 2b_{23})b_{11}c_{11}^2 - b_{33}c_{11}^3) = 0 \quad (5.9)$$

Solving (5.9) for u gives

$$u_1 = \frac{b_{11}^2b_{22}c_{11} + b_{33}c_{11}^3 + 2b_{11}b_{23}c_{11}^2 - b_{11}^3c_{22} - b_{11}c_{11}^2c_{33}}{2(b_{11}^2c_{11}c_{12} + b_{11}c_{11}^2c_{13} - b_{11}b_{12}c_{11}^2 - b_{13}c_{11}^3)}.$$

If $u_1 > 0$ and it satisfies (5.8), then (u_1, t_1) is a solution.

(c) If $g_1(t_2) = 0$ (with $c_{11}t_2 - b_{11} \neq 0$), then equation (5.7) reduces to $g_2(t_2)u + g_3(t_2) = 0$, where

$$t_2 = \frac{a_{11}b_{11} + 2b_{13}c_{11} - 2b_{11}c_{13}}{a_{11}c_{11} + 2b_{11}c_{12} - 2b_{12}c_{11}}.$$

If $g_2(t_2) \neq 0$, then $u_2 = -\frac{g_3(t_2)}{g_2(t_2)}$; if $u_2 > 0$ and it satisfies (5.4), then (u_2, t_2) is a solution.

(d) This follows directly from the definition of the system.

In R^3, we define the following sets:

$$D_1 = \{(x, y, z): \ b_{11}y - c_{11}z = 0, \ x > 0, y > 0, \ z > 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \notin D_1: \ \tilde{b}_{11}y - \tilde{c}_{11}z = 0, \ x > 0, y > 0, \ z > 0\},$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \notin D_2 \cup D_1: \ \gamma_3y^3 + \gamma_2y^2z + \gamma_1yz^2 + \gamma_0z^3 = 0, \ x > 0, y > 0, \ z > 0\},$$

$$D_4 = \{(x, y, z) \notin D_1 \cup D_2 \cup D_3, \ x > 0, y > 0, z > 0\},$$

where

$$\tilde{b}_{11} = 2c_{11}b_{12} - a_{11}c_{11} - 2c_{12}b_{11}, \tilde{c}_{11} = -2c_{11}b_{13} + 2c_{13}b_{11} - a_{11}b_{11},$$

$$\gamma_3 = 2a_{11}c_{11}c_{12} - 2a_{12}c_{11}^2 - b_{11}c_{11}c_{22} + 4b_{11}c_{12}^2 - 4b_{12}c_{11}c_{12} + b_{22}c_{11}^2,$$

$$\gamma_2 = -2a_{11}b_{11}c_{12} - 2a_{11}b_{12}c_{11} + 2a_{11}c_{11}c_{13} + 4a_{12}b_{11}c_{11} - 2a_{13}c_{11}^2 + b_{11}^2c_{22} - 4b_{11}b_{12}c_{12} - -b_{11}b_{22}c_{11} - 2b_{11}c_{11}c_{23} + 8b_{11}c_{12}c_{13} + 4b_{12}^2c_{11} - 4b_{12}c_{11}c_{13} - 4b_{13}c_{11}c_{12} + 2b_{23}c_{11}^2,$$

$$\gamma_1 = 2a_{11}b_{11}b_{12} - 2a_{11}b_{11}c_{13} - 2a_{11}b_{13}c_{11} - 2a_{12}b_{11}^2 + 4a_{13}b_{11}c_{11} + 2b_{11}^2c_{23} - 4b_{11}b_{12}c_{13} - -4b_{11}b_{13}c_{12} - 2b_{11}b_{23}c_{11} - b_{11}c_{11}c_{33} + 4b_{11}c_{13}^2 + 8b_{12}b_{13}c_{11} - 4b_{13}c_{11}c_{13} + b_{33}c_{11}^2,$$

$$\gamma_0 = 2a_{11}b_{11}b_{13} - 2a_{13}b_{11}^2 + b_{11}^2c_{33} - 4b_{11}b_{13}c_{13} - b_{11}b_{33}c_{11} + 4b_{13}^2c_{11}.$$

Corollary 11.

1. *The number of positive fixed points of the operator P in each of the sets D_1 and D_2 is at most one.*
2. *The number of positive fixed points of the operator P in the set D_3 is at most three.*
3. *The number of positive fixed points of the operator P in the set D_4 is at most seven.*
4. *The number of positive fixed points of the operator P is at most seven.*

Remark 12. *The bound in part (4) follows from the fact that, after eliminating u, every positive fixed point of P corresponds to a positive root of the polynomial $R_7(t)$ of degree 7 (see Remark 9); for each such t the value of u is uniquely determined by $h_3(t)u + h_4(t) = 0$ (when $h_3(t) \neq 0$). Hence the total number of positive fixed points cannot exceed 7. The special branches D_1, D_2, D_3 correspond to the degenerate cases $c_{11}t - b_{11} = 0$, $g_1(t) = 0$ and $h_3(t) = 0$, respectively, and the roots arising there are already among the roots of $R_7(t)$.*

REFERENCES:

1. *Athreya K.B., Lahiri S.N.: Measure theory and probability theory. Springer, (2006).*
2. *A. Richard, A. Korvin, V. Van Tho: Integration Theory for Hammerstein Operators. J. Math. Anal.*

Appl. 61, 72-96 (1977).

3. E.Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I: Fixed-Point Theorems, Springer, New York (1986).

4. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov, Sh.D., Haydarov F.H.: Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs Measures. Positivity. 20, (2016), 929-943.

5. Eshkabilov Y. Kh., Nodirov Sh. D.: Positive Fixed Points of Cubic Operators on R^2 and Gibbs Measures. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics (2019), 12(6), 663-673.

6. Friedli S., Velenik Y.: Statistical Mechanics of Lattice Systems. Cambridge University Press, (2017).

7. F. H. Haydarov: New normal subgroups for the group representation of the Cayley tree, Lobach. Jour. Math. 39(2) (2018).

8. F. H. Haydarov: Fixed points of Lyapunov integral operators and Gibbs measures, Positivity 22(4) (2018).

9. U. A. Rozikov, Yu. Kh. Eshkabilov: On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations, Math. Phys. Anal. Geom. 13 (2010).

10. U. A. Rozikov, F. H. Haydarov: Four competing interactions for models with an uncountable set of spin values on a Cayley tree Theor. Math. Phys. 191(2) (2017).

11. U. A. Rozikov, Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. (2013).

12. V. Dolezale: Monotone operators and its applications in automation and network theory, in: Studies in Automation and Control. Elsevier Science Publ, New York, (1979).

13. W. Q. Deng: An iterative solution to a system of nonlinear Hammerstein type equations and a system of generalized mixed equilibrium problems. J. Fixed Point Theor. Appl. 19, 2051-2068 (2017).

14. Yu. Kh. Eshkabilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov: Uniqueness of Gibbs measure for models with an uncountable set of spin values on a Cayley tree, Math. Phys. Anal. Geom. 16(1) (2013).

15. Yu. Kh. Eshkabilov, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov: Non-uniqueness of Gibbs measure for models with an uncountable set of spin values on a Cayley Tree, Jour. Stat. Phys. 147 (2012).

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

Дусанова Умида Хомид кизи,
старший преподаватель кафедры
Математического анализа и дифференциальных уравнений
Каршинского государственного университета
umidakhon8996@gmail.com
Уразова Рухшона Отабек кизи,
студентка Каршинского государственного университета
r30980657@gmail.com
Абдухалилова Камола Бекзод кизи,
студентка Каршинского государственного университета
abduxalilovakamola28@gmail.com

Аннотация. *Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи для неоднородного уравнения смешанного типа, которое при* $0<t\le\beta$. *является уравнением субдиффузии с дробной производной в смысле Капуто, а при* $-\alpha\le t<0$ *является уравнением гиперболического типа с классической производной. В эллиптической части уравнений участвует оператор Лапласа. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что в ней не участвуют ни начальные, ни конечные условия. Вместо этого на линии изменения типа уравнения задаются три условия склеивания. В результате с границы рассматриваемой области снимаются обычные условия корректности на числа* α *и* β. *Методом Фурье доказывается существование и единственность решения задачи. Однако недостатком рассматриваемой задачи является то, что если правая часть уравнения не зависит от временной переменной* t, *то, как показано в данной работе, теряется зависимость рассматриваемой задачи от* t.

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, оператор Капуто, единственность и существование решения, краевая задача, условие склеивания, метод Фурье.*

KASR TARTIBLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN UCHTA ULASH SHARTLI CHEGARAVIY MASALA

Annotatsiya. *Ushbu ish aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, u* $0<t\le\beta$ *uchun Kaputo ma'nosida kasr hosilasi bo'lgan subdiffuziya tenglamasi va* $-\alpha\le t<0$ *uchun klassik hosilali giperbolik tipdagi tenglamaga ega. Laplas operatori tenglamalarning elliptik qismida ishtirok etadi. Ko'rib chiqilayotgan masalaning o'ziga xos xususiyati shundaki, na boshlang'ich, na oxirgi shartlar ishtirok etmaydi. Buning o'rniga, tenglama turini o'zgartirish chizig'ida uchta ulash sharti ko'rsatilgan. Tenglamaning o'ng tomonida* $f(x,t)$ *funksiya ham ko'rsatilgan. Natijada,* α *va* β *sonlari uchun odatiy to‘g‘rilik shartlari qaralayotgan soha chegarasidan olib tashlanadi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun Furye usuli ishlatiladi. Biroq tenglamaning o'ng tomoni* t *vaqt o'zgaruvchisiga bog'liq bo'lmasa, u holda ko'rib chiqilayotgan masalaning* t *ga bog'liqligi yo'qolishi ko'rsatiladi.*

Kalit so‘zlar: *aralash tipdagi tenglama, operator Kaputo, yechimning yagonaligi va mavjudligi, chegaraviy masala, ulash sharti, Furye usuli.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL MIXED EQUATION WITH THREE GLUING CONDITIONS

Abstract. *The present paper is devoted to the study of a boundary value problem for an inhomogeneous mixed equation, which for* $0<t\le\beta$ *is a subdiffusion equation with a fractional derivative in the sense of Caputo, and for* $-\alpha\le t<0$ *is an equation of hyperbolic type with a classical derivative. The Laplace operator is involved in the space-variable of mixed equation. A feature of the problem under consideration is that neither initial nor final conditions are involved. Instead, three gluing conditions are specified on the line of type-changing of the equation. As a result, the usual well-posedness conditions for the*

numbers α and β are removed from the boundary of the domain under consideration. The existence and uniqueness of a solution to the problem are proved using the Fourier method. However, a disadvantage of the problem under consideration is that if the right-hand side of the equation does not depend on the time variable t, then, as shown in this paper, the dependence of the problem under consideration on t is lost.

Key words: *mixed type equation, derivative in the sense of Caputo, uniqueness and existence of a solution, boundary value problem, gluing condition, Fourier method.*

Введение и постановка задачи. Первые результаты, связанные с приложениями интегро-дифференциальных операторов в теории дифференциальных уравнений, принадлежат Джарбашяну и Нерсесяну [1], которые исследовали единственную разрешимость задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с обобщённым интегро-дифференциальным оператором Римана-Лиувилля, а решение выражали функциями Миттаг-Леффлера специального типа. Джарбашян в [2] также исследовал свойства функций Миттаг-Леффлера, а также первую краевую задачу в случае, когда порядок уравнения меньше двух. Горенфло, Лучко и Умаров [3], Горенфло, Лучко и Майнарди [4], Килбас и Марзан [5], Псху [6] исследовали задачу Коши для уравнения диффузии-волны с операторами дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, которые играют важную роль в построении математических моделей диффузионных процессов. Граничные задачи с пограничными операторами дробного порядка в виде операторов Римана-Лиувилля и Капуто для уравнения Лапласа были изучены Кадиркуловым и Турметовым [7] с помощью некоторых свойств гармонических функций и теории интегральных уравнений.

В данной работе изучается уравнение смешанного типа, одна часть которого содержит дробную производную. Перейдём к точной формулировке рассматриваемой задачи.

Пусть $\rho \in (0,1)$ - фиксированное число. Мы рассматриваем следующее смешанное уравнение:

$$f(x,t)=\begin{cases} D_t^{\rho}u-\Delta u, & x\in\Omega, \quad 0<t\le\beta, \\ u_{tt}-\Delta u, & x\in\Omega, \quad -\alpha\le t<0, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω - произвольная область размерности N с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\alpha>0$, $\beta>0$ - заданные вещественные числа, а $f(x,t)$ - заданная непрерывная функция,

$$D_t^{\rho}f(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\rho)}\displaystyle\int_0^t \frac{\frac{d}{d\xi}f(\xi)}{(t-\xi)^{\rho}}d\xi, & 0<\rho<1, \\ \dfrac{d}{dt}f(t), & \rho=1. \end{cases}$$

это дифференциальный оператор Капуто дробного порядка ρ [5].

Далее удобно ввести следующие обозначения: $D^{+}=\Omega\times(0,\beta)$, $D^{-}=\Omega\times(-\alpha,0)$ $J=\{(x,t): x\in\Omega, t=0\}$.

Постановка задачи I

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничному условию:

$$u(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

и условия склеивания

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u(x,t), \ \ (x,0)\in\overline{J}, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\rho}u_t(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t), \ \ (x,0)\in J, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to+0}t^{2-\rho}u_{tt}(x,t)=\lim_{t\to-0}u_{tt}(x,t), \ \ (x,0)\in J. \tag{5}$$

Если $\rho=1$, то эта задача совпадает с обычной классической задачей.

В последние годы стало интересным исследовать с помощью методов Фурье единственную разрешимость решения прямых задач для смешанных уравнений второго и червёртого порядка в прямоугольной области [8]. Отметим здесь работы Сабитова [9], Юнусовой [10], Кадыркулова и Джалилова [11], Исломова [12].

В [9] и [10] рассматривалось однородное уравнение (т.е. $f(x,t)\equiv 0$), причём параболическая часть имела обычную классическую производную по времени и эллиптическая часть в данной работе является производной второго порядка по $x\in\square^1$. В [11] также исследовано однородное уравнение,

которое параболическая часть содержит собой дробной производной при $t>0$ и при $t<0$ уравнение распространения волн и эллиптическая часть представляет собой производную четвёртого порядка по $x\in\square^1$

Новизна работы Исламова [12] состоит в том, что задав три условия склеивания (3)-(5) для второго аргумента, устраняются условия, попадающие на границы области. В данной работе рассматривается задача, аналогичная работе Исламова [12], но в [12] эллиптическая часть уравнения представляет собой производную второго порядка по $x\in\square^1$, и задача изучается в прямоугольной области.

Как уже отмечалось выше, в [9]-[11] для смешанных параболо-гиперболических и эллиптико-гиперболических уравнений второго порядка в прямоугольных областях заданы два условия склеивания на t и граничные условия на всех границах области. Для однозначной разрешимости краевых задач авторы этих работ использовали некоторые условия на границах области.

Например, в работах [9] и [10] для нахождения неизвестных коэффициентов используется нелокальное условие вида $u(x,-\alpha)-u(x,\beta)=\varphi(x),\quad x\in\Omega,\quad \alpha>0,\quad \beta>0$. В [11] нелокальное условие задано следующим образом: $u_t(x,-\alpha)=\ D_t^{\rho}u(x,\beta)+\varphi(x),\ 0\le x<1,\ 0<\rho<1$. На основании этих условий для разрешимости рассматриваемой задачи появляются новые условия:

$$\delta_{\alpha\beta}(k)=cos\lambda_k\alpha+\lambda_k sin\lambda_k\alpha-e^{\lambda_k^2\beta^{\rho}}\neq 0, \tag{6}$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k)=cos\lambda_k^2\alpha+\lambda_k^2 sin\lambda_k^2\alpha-E_{\rho,1}(-\lambda_k^4\beta^{\rho})\neq 0. \tag{7}$$

В этой работе постановка условия (5) вместо этих нелокальных условий, снимает вопрос о зависимости выполнения условий (6) и (7) от α и β, что должно быть иррационально [13]-[15]. Следует отметить, что в процессе изучения этой задачи, мы убедились, что три условия склиевания, налагаемые вторым аргументом, имеют как преимущества, так и недостатки. Достижение состоит в том, что посредством условий (3)-(5) мы устраняем дополнительные условия, попадающие на границы области. Недостаток состоит в том, что если функцию $f(x,t)$, входящую в правую часть уравнения, рассматривать исключительно как функцию всего лишь x переменных, то условия (3)-(5) теряют смысл.

Приведём определение решения задачи (1)-(5).

Определение 1. Решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t)\in C(\overline{\Omega}\times(-\alpha,\beta))$ удовлетворяющую всем условиям задачи в обычном классическом смысле и условиям [16].

1. $u(x,t)\in AC(\overline{\Omega}\times(0,\beta])$,
2. $\Delta u(x,t)\in C(D^+\cup D^-\cup\overline{J})$,
3. $D_t^{\rho}u(x,t)\in C(D^+\cup J)$,
4. $u_{tt}(x,t)\in C(D^-\cup J)$,
5. $t^{2-\rho}u_{tt}(x,t)\in C(D^+\cup J)$.

Обозначим через $\{v_k(x)\}$ полную систему ортонормированных функций в $L_2(\Omega)$ и через $\{\lambda_k\}$ множество положительных собственных значений следующей спектральной задачи (см [8])

$$\begin{cases}-\Delta v(x)=\lambda v(x), & x\in\Omega,\\ v(x)|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{8}$$

Согласно методу Фурье, решение задачи (1)-(5) мы будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)v_k(x). \tag{9}$$

Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье, по собственным функциям $v_k(x),k=1,2,....$. Подставляя ряд (9), в (1) и соответственно условиям (2)-(5) имеем следующей задаче относительно $T_k(t)$:

$$\begin{cases}D_t^{\alpha}T_k(t)+\lambda_k T_k(t)=f_k(t), & t>0,\\ T_k''(t)+\lambda_k T_k(t)=f_k(t), & t<0.\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} T_k(+0)=T_k(-0), \\ \lim\limits_{t\to+0} t^{1-\rho}T_k'(t)=\lim\limits_{t\to-0}T_k'(t), \\ \lim\limits_{t\to+0} t^{2-\rho}T_k''(t)=\lim\limits_{t\to-0}T_k''(t), \end{cases} \tag{11}$$

Решения уравнений (10) имеют вид (см. [5])

$$T_k(t)=\begin{cases} A_k E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho)+\int\limits_0^t \eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\lambda_k\eta^\rho\right)f_k(t-\eta)d\eta, \quad t>0, \\ a_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+b_k\sin\sqrt{\lambda_k}t+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_t^0 f_k(\eta)\sin\sqrt{\lambda_k}(\eta-t)d\eta, \quad t<0, \end{cases} \tag{12}$$

где A_k, a_k, b_k - произвольные константы.

Для того чтобы найти неизвестные константы A_k и a_k и b_k воспользуемся условием (11). Сначала находим $t^{1-\rho}T_k'(+t)$ и $T_k'(-t)$:

$$t^{1-\rho}T_k'(+t)=t^{1-\rho}\left(-A_k\lambda_k t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k t^\rho)+f_k(0)t^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k t^\rho)\right)-$$
$$-t^{1-\rho}\left(\int\limits_0^t \eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k\eta^\rho)f_k'(t-\eta)d\eta\right),$$

$$T_k'(-t)=-a_k\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t+b_k\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}t-\int\limits_t^0 f_k(\eta)\cos\sqrt{\lambda_k}(\eta-t)d\eta.$$

Во-вторых, находим $t^{2-\rho}T_k''(+t)$ и $T_k''(-t)$:

$$t^{2-\rho}T_k''(+t)=t^{2-\rho}\left(-A_k\lambda_k t^{\rho-2}E_{\rho,\rho-1}(-\lambda_k t^\rho)+f_k(0)t^{\rho-2}E_{\rho,\rho-1}(-\lambda_k t^\rho)\right)+$$
$$+t\,f_k'(0)E_{\rho,\rho-1}(-\lambda_k t^\rho)+t^{2-\rho}\int\limits_0^t \eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k\eta^\rho)f_k''(t-\eta)d\eta,$$
$$=-A_k\lambda_k E_{\rho,\rho-1}(-\lambda_k t^\rho)+f_k(0)E_{\rho,\rho-1}(-\lambda_k t^\rho),$$

$$T_k''(-t)=-a_k\lambda_k\cos\sqrt{\lambda_k}t-b_k\lambda_k\sin\sqrt{\lambda_k}t+f_k(t)-\sqrt{\lambda_k}\int\limits_t^0 f_k(\eta)\sin\sqrt{\lambda_k}(\eta-t)d\eta.$$

Учитывая условие (11), для нахождения неизвестных констант A_k, a_k и b_k, мы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} A_k=a_k, \\ \dfrac{-A_k\lambda_k}{\Gamma(\rho)}+\dfrac{f_k(0)}{\Gamma(\rho)}=\sqrt{\lambda_k}b_k, \\ \dfrac{-A_k\lambda_k}{\Gamma(\rho-1)}+\dfrac{f_k(0)}{\Gamma(\rho-1)}=-a_k\lambda_k+f_k(0). \end{cases} \tag{13}$$

Решив эту систему, мы получим следующие соотношения для неизвестных коэффициентов

$$A_k=a_k=\frac{f_k(0)}{\lambda_k}, \quad b_k=0. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9), получим решение исследуемой задачи в виде:

$$u(x,t)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{f_k(0)}{\lambda_k}E_{\rho,1}(-\lambda_k t^\rho)+\int\limits_0^t \eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k\eta^\rho)f_k(t-\eta)d\eta\right)v_k(x), \quad t\ge 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{f_k(0)}{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}t+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_t^0 f_k(\eta)\sin\sqrt{\lambda_k}(\eta-t)d\eta\right)v_k(x), \quad t\le 0. \end{cases} \tag{15}$$

Существование и единственность решения задачи (1)-(5)

Теорема 1. Если решение задачи I существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - решения задачи (1)-(5). Докажем, что

$u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)\equiv 0$. Для нахождения решения $u(x,t)$, у нас есть следующая однородная задача.

Задача. Найти решение $u(x,t)$, удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{cases} D_t^{\rho}u-\Delta u=0, \quad x\in\Omega, \quad 0<t\le\beta, \\ u_{tt}-\Delta u=0, \quad x\in\Omega, \quad -\alpha\le t<0, \end{cases} \tag{16}$$

и условиям (2)-(5).

Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет всем условиям однородной задачи и пусть v_k - произвольная собственная функция спектральной задачи (8), соответствующая собственному значению λ_k.

Рассмотрим функцию:

$$\omega_k(t)=\int_{\Omega}u(x,t)v_k(x)dx, \ k=1,2,\ldots \tag{17}$$

Дифференцируя под знаком интеграла (17) по t (в силу определения решения это возможно) и учитывая (16), получаем:

$$D_t^{\rho}\omega_k(t)=\int_{\Omega}D_t^{\rho}u(x,t)v_k(x)dx=\int_{\Omega}\Delta u(x,t)v_k(x)dx, \quad t>0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\omega_k(t)}{\partial t^2}=\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}v_k(x)dx=\int_{\Omega}\Delta u(x,t)v_k(x)dx, \quad t<0, \tag{19}$$

или интегрируя по частям, в силу (2), имеем:

$$D_t^{\rho}\omega_k(t)=\int_{\Omega}\Delta u(x,t)v_k(x)dx=-\lambda_k\int_{\Omega}u(x,t)v_k(x)dx=-\lambda_k\omega_k(t), \quad t>0,$$

$$\frac{\partial^2\omega_k(t)}{\partial t^2}=\int_{\Omega}\Delta u(x,t)v_k(x)dx=-\lambda_k\int_{\Omega}u(x,t)v_k(x)dx=-\lambda_k\omega_k(t), \quad t<0.$$

Следовательно, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$D_t^{\rho}\omega_k(t)+\lambda_k\omega_k(t)=0, \quad t>0, \qquad \frac{\partial^2\omega_k(t)}{\partial t^2}+\lambda_k\omega_k(t)=0, \quad t<0.$$

Решения полученных дифференциальных уравнений, соответственно запишутся в виде (см [6]):

$$\omega_k(t)=A_kE_{\rho,1}(-\lambda_k t^{\rho}), \quad t>0, \tag{20}$$

$$\omega_k(t)=a_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+b_k\sin\sqrt{\lambda_k}t, \quad t<0. \tag{21}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_k, a_k, b_k, мы используем условия (3)-(5), которые переходят в следующие:

$$\begin{cases} \omega_k(+0)=\omega_k(-0), \\ \lim\limits_{t\to+0}t^{1-\rho}\omega_k'(t)=\lim\limits_{t\to-0}\omega_k'(t), \\ \lim\limits_{t\to+0}t^{2-\rho}\omega_k''(t)=\lim\limits_{t\to-0}\omega_k''(t). \end{cases} \tag{22}$$

Из приведённой выше системы имеем:

$$a_k=A_k, \ b_k=-\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\Gamma(\alpha)}A_k, \ \lambda_k\left[\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+1\right]A_k=0.$$

Отсюда получаем $A_k=a_k=b_k=0$. Тогда правые части (18) и (19) будут равны нулю. Отсюда следует ортогональность $u(x,t)$ полной системе $\{v_k(x)\}$. Следовательно, $u(x,t)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 1 доказана. Пусть $\sigma-$ произвольное действительное число. В пространстве $L_2(\Omega)$ введем оператор $\hat{A}^{\sigma}$, действующий по правилу:

$$\hat{A}^{\sigma}g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\sigma}g_kv_k(x), \ g_k=(g,v_k).$$

Очевидно, данный оператор $\hat{A}^{\sigma}$ с областью определения:

$$D\left(\hat{A}^{\sigma}\right)=\left\{g\in L_2(\Omega):\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2\sigma}\left|g_k\right|^2<\infty\right\}$$

является самосопряжённым. Для элементов из $D\left(\hat{A}^{\sigma}\right)$ введём норму

$$\|g\|_{\sigma}^{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k}^{2\sigma}|g_{k}|^{2}=\left\|\hat{A}^{\sigma}g\right\|^{2}.$$

Если через A обозначить оператор в $L_2(\Omega)$ действующей по правилу $Ag(x)=-\Delta g(x)$ и с областью определения $D(A)=\left\{g\in C^{2}(\bar{\Omega}):g(x)=0,x\in\partial\Omega\right\}$, то оператор $\hat{A}=\hat{A}^{1}$ является самосопряжённым расширением в $L_2(\Omega)$ оператора A (см [8]).

Наши рассуждения будут во многом опираться на методику, развитую в монографии (см [17], 453). Ключевую роль в этой методике играет следующая лемма:

Лемма 1. Пусть $\sigma>\frac{N}{4}$. Тогда оператор $\hat{A}^{-\tau}$ (вполне) непрерывно действует из $L_2(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$ и справедлива оценка:

$$\|\hat{A}^{-\sigma}g\|_{C(\Omega)}\le C\|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Для того чтобы доказать существование решения прямой и обратной задач необходимо изучить сходимость следующего ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k}^{\tau}|h_{k}|^{2},\quad \tau>\frac{N}{2}, \tag{23}$$

где h_k коэффициент Фурье от функции $h(x)$. В случае целого τ в фундаментальной статье Ильина [8], получены условия сходимости таких рядов в терминах принадлежности функции $h(x)$ классическому Соболевскому пространству. Для того чтобы сформулировать это условие, введём класс $\hat{W}_2^1(\Omega)$ как замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ множества всех функций, непрерывно дифференцируемых в Ω и обращающихся в нуль вблизи границы Ω. Теорема В.И.Ильина утверждает что, если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (мы можем взять $\tau=\frac{N}{2}+1$, если τ чётно, и $\tau=\frac{N+1}{2}$, если τ нечётно):

$$h(x)\in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\Omega),\ h(x),\Delta h(x),...,\Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]}h(x)\in\hat{W}_2^1(\Omega) \tag{24}$$

то числовой ряд (23) сходится.

Далее мы напомним некоторые свойства функции Миттага-Леффлера.

Пусть $0<\rho<1$ и μ - произвольное комплексное число. Функция, определяемая следующим уравнением:

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\rho k+\mu)},\quad z,\mu\in\mathrm{C},\quad \rho>0. \tag{25}$$

называется функцией Миттага-Леффлера с двумя параметрами (см. [3], стр. 12).

Далее нам понадобится асимптотическая оценка функции Миттаг-Леффлера с достаточно большим отрицательным аргументом. Хорошо известная оценка имеет вид (см. [3], с. 45)

$$0<|E_{\rho,\mu}(-t)\le\frac{C}{1+t},\ t>0. \tag{26}$$

Мы также будем использовать более грубую оценку с положительным числом λ и $0<\varepsilon<1$:

$$|t^{\rho-1}E_{\rho,\mu}(-\lambda t^{\rho})|\le\frac{Ct^{\rho-1}}{1+\lambda t^{\rho}}\le C\lambda^{\varepsilon-1}t^{\varepsilon\rho-1},\quad t>0, \tag{27}$$

что легко проверить. Действительно, пусть $t^{\rho}\lambda<1$ тогда $t<\lambda^{-1/\rho}$ и

$$t^{\rho-1}=t^{\rho-\varepsilon\rho}t^{\varepsilon\rho-1}<\lambda^{\varepsilon-1}t^{\varepsilon\rho-1}.$$

Если $t^{\rho}\lambda\ge1$, то $\lambda^{-1}\le t^{\rho}$ и

$$\lambda^{-1}t^{-1}=\lambda^{-1+\varepsilon}\lambda^{-\varepsilon}t^{-1}\le\lambda^{\varepsilon-1}t^{\varepsilon\rho-1}.$$

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию (24). Тогда регулярное решение исследуемой задачи I существует и оно представимо в виде ряда (15).*

Доказательство. Пусть формально дифференцируем ряд (15). В результате имеем:

$$-\Delta u(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(f_k(0)E_{\rho,1}(-\lambda_k t^{\rho})+\lambda_k\int_0^t\eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}(-\lambda_k\eta^{\rho})f_k(t-\eta)d\eta\right)v_k(x), & t>0,\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(f_k(0)\cos(\sqrt{\lambda_k}t)+\sqrt{\lambda_k}\int_t^0 f_k(\eta)\sin(\sqrt{\lambda_k}(\eta-t))d\eta\right)v_k(x), & t<0.\end{cases} \tag{28}$$

Рассмотрим случай для $t>0$, а в случае $t<0$ абсолютная сходимость решения (15) доказывается аналогичным образом.

Поскольку сходимость решения следует из сходимости ряда (28), достаточно доказать абсолютную сходимость ряда (28). Этот ряд является суммой двух рядов. Обозначим первую сумму через $-\Delta S_1(x,t)$, а вторую через $-\Delta S_2(x,t)$. Пусть частичная сумма первого и второго членов, соответственно, имеет вид:

$$-\Delta S_1^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}f_k(0)E_{\rho,1}\left(-\lambda_k t^{\rho}\right)v_k(x), \tag{29}$$

$$-\Delta S_2^n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_k(x)\int_0^t\eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\lambda_k\eta^{\rho}\right)f_k(t-\eta)d\eta. \tag{30}$$

Пусть $\sigma>\frac{N}{4}$. Так как $A^{-\sigma}v_k(x)=\lambda_k^{-\sigma}v_k(x)$ мы имеем для (29)

$$-\Delta S_1^n(x,t)=A^{-\sigma}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\sigma}f_k(0)E_{\rho,1}\left(-\lambda_k t^{\rho}\right)v_k(x).$$

В силу леммы 1.1 получаем:

$$\left\|-\Delta S_1^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}=\left\|A^{-\sigma}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\sigma}v_k(x)f_k(0)E_{\rho,1}\left(-\lambda_k t^{\rho}\right)\right\|_{C(\Omega)}$$

$$\le C\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\sigma}v_k(x)f_k(0)E_{\rho,1}\left(-\lambda_k t^{\rho}\right)\right\|_{L_2(\Omega)}$$

Отсюда в силу ортонормированности системы $\{v_k(x)\}$ и используя оценку (26), имеем:

$$\left\|-\Delta S_1^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}^2\le C\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k^{\sigma}f_k(0)E_{\rho,1}\left(-\lambda_k t^{\rho}\right)\right|^2\le Ct^{-2\rho}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{2\sigma}\left|f_k(0)\right|^2,\ \tau>\frac{N}{2}. \tag{31}$$

Теперь покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (30), для этого повторим те же рассуждения, которые применяли для сходимости ряда (29). В результате имеем:

$$\left\|-\Delta S_2^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}^2=\left\|A^{-\sigma}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\sigma}v_k(x)\int_0^t\eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\lambda_k\eta^{\rho}\right)f_k(t-\eta)d\eta\right\|_{C(\Omega)}^2$$

$$\le C\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\sigma}v_k(x)\int_0^t\eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\lambda_k\eta^{\rho}\right)f_k(t-\eta)d\eta\right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Применяя равенств Парсеваля, получим:

$$\left\|-\Delta S_2^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}^2\le C\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{2\sigma}\left|\int_0^t\eta^{\rho-1}E_{\rho,\rho}\left(-\lambda_k\eta^{\rho}\right)f_k(t-\eta)d\eta\right|^2.$$

В силу оценки (27) получаем:

$$\left\|-\Delta S_2^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}^2\le C\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^t\eta^{\varepsilon\rho-1}\lambda_k^{\sigma+\varepsilon-1}f_k(t-\eta)d\eta\right]^2.$$

Далее, применим обобщённую формулу Минковского, в результате имеем:

$$\left\|-\Delta S_2^n(x,t)\right\|_{C(\Omega)}^2\le C\left[\int_0^t\eta^{\rho\varepsilon-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k^{\sigma+\varepsilon-1}f_k(t-\eta)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\eta\right]^2$$

$$\le C\left[\int_0^t\eta^{\rho\varepsilon-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_k^{2\sigma+2\varepsilon-2}f_k(t-\eta)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\eta\right]^2,\ \tau=2\sigma+2\varepsilon-2>\frac{N}{2}. \tag{32}$$

Здесь мы получили ряд, аналогичный (23). В этом случае $\tau=2\sigma+2\varepsilon-2$. Так как ε -

произвольно малое число, то ряд (32) сходится при тех же условиях (24) для функции $f(x,t)$.

Следовательно, $f(x,t)$ как функция от x удовлетворяет условиям (24) для всех $t \in (0,\beta]$. Тогда $\left\|-\Delta S_1(x,t)\right\|^2_{C(\overline{\Omega})} \le C, \quad t>0$. Таким образом $\Delta u(x,t) \in C(D^+)$, в частности $u(x,t) \in C(D^+)$. Используя совершенно аналогичные рассуждения, можно показать, что сумма (30) обладает теми же свойствами, что и сумма (29). Следовательно, $\Delta u(x,t) \in C(D^-)$, в частности $u(x,t) \in C(D^-)$.

Из уравнения (1) следует, что

$$\begin{cases} D_t^{\rho} u_n(x,t) = \Delta u_n(x,t) + \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t) v_k(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad 0 < t \le \beta, \\ \dfrac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial t^2} = \Delta u_n(x,t) + \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t) v_k(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad -\alpha \le t < 0. \end{cases}$$

Поэтому имеем $D_t^{\rho} u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \times (0,\beta]\right), \quad \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in C\left(\overline{\Omega} \times [-\alpha,0)\right)$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Dzharbashyan M.M., Nersesyan A.B. Fractional derivatives and Cauchy problems for fractional differential equations // Izv, Akad. Nauk Arm SSR. Mathematics. – 1968. № 3. – pp. 3–28.

2. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1966.

3. Gorenflo R., Luchko Y.F., Umarov S.R. On the Cauchy and multipoint problems for partial pseudo-differential equations of fractional order // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2000. № 3. – pp. 249–275.

4. Gorenflo R., Luchko Y.F., Mainardi F. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. № 118. – pp. 175–191.

5. Kilbas A.A., Marzan S.A. Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2004. № 7. – pp. 297–321.

6. Pskhu A.V. The solution of the first boundary value problem for the diffusion equation of fractional and continuum order // Differential Equations. – 2003. № 39. – С. 1359–1363.

7. Kadirkulov B.Zh., Turmetov B.Kh. On a generalization of the heat equation //Uzb.Math.Jour.. – 2006. № 3. – С. 40–45.

8. Il'in V.A. The uniqueness and belonging of the classical solution of the mixed problem for a self-adjoint hyperbolic equation // Mat.Zam – 1975. № 17. – С. 93–103.

9. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. – 2011. № 4. – С. 596–602.

10. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник Самарского государственного университета. – 2011. № 8. – С. 108–117.

11. Кадыркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Капуто // Вестник ФерГУ. – 2021. № 1. – С. 19–24.

12. Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh. On a boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation with fractional order Caputo operator in rectangular domain // Lob. Jour. Math. – 2020. № 9. – С. 1801–1810.

13. Алимов Ш.А. О L_p решениях одной краевой задачи // Узб. Мат. Жоур. – 1999. № 1. – С. 3–9.

14. Алимов Ш.А. О разрешимости одной некорректной задачи // Узб. Мат. Жоур. – 1999. № 3. – С. 19–28.

15. Alimov Sh.A. On solutions of one ill-posed boundary value problem // Dokl. Akad. Nauk Uzbekistan. – 1999. № 9. – pp. 7–11.

16. Ладыженская О.А. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. – Москва: Гостехиздат, 1953.

17. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.С. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – Москва: Наука, 1966.

УДК 517.95:517.977

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Юлдашева Асал Викторовна,
профессор филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в городе Ташкенте
г. Ташкент, Узбекистан
Очилов Азизбек Рафаил угли,
студент филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в городе Ташкенте
г. Ташкент, Узбекистан
a_v_yuldasheva@mail.ru

Аннотация. *В работе исследуется коэффициентная обратная задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменным коэффициентом. Рассматривается задача восстановления ограниченной функции управления по заданным начальным и конечным условиям. Исследуемая модель описывает колебательный процесс с изменяемой собственной частотой и допускает интерпретацию в терминах оптимального управления. С использованием принципа максимума Понтрягина получены условия оптимальности и установлено, что оптимальное управление имеет релейную структуру. Для различных ограничений на коэффициент управления построены множества достижимости, найдены оптимальные траектории и получены аналитические формулы для минимального времени перехода между заданными состояниями системы. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании управляемых колебательных процессов, задач параметрической идентификации и коэффициентных обратных задач математической физики.*

Ключевые слова: *обратная задача, коэффициентная обратная задача, оптимальное управление, осциллятор, принцип максимума Понтрягина, минимальное время, множество достижимости, параметрическая идентификация.*

A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A LINEAR OSCILLATOR WITH BOUNDED CONTROL

Abstract. *This paper investigates a coefficient inverse problem for a second-order linear differential equation with a variable coefficient. The problem consists in recovering a bounded control function from prescribed initial and terminal conditions. The considered model describes an oscillatory process with variable natural frequency and admits an interpretation within the framework of optimal control theory. By applying Pontryagin's Maximum Principle, optimality conditions are obtained and the bang-bang structure of the optimal control is established. Reachability sets are constructed for different control constraints, optimal trajectories are determined, and explicit analytical formulas for the minimum transfer time are derived. The obtained results can be applied to the study of controlled oscillatory processes, parameter identification problems, and coefficient inverse problems of mathematical physics.*

Keywords: *inverse problem, coefficient inverse problem, optimal control, oscillator, Pontryagin maximum principle, minimum-time control, reachability set, parameter identification.*

CHEKLANGAN BOSHQARUVLI CHIZIQLI OSSILLYATOR UCHUN KOEFFITSIYENTLI TESKARI MASALA

Annotatsiya. *Maqolada o‘zgaruvchan koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun koeffitsiyentli teskari masala o‘rganiladi. Bosh va oxirgi shartlar berilganda cheklangan boshqaruv funksiyasini tiklash masalasi qaraladi. Tadqiq etilayotgan model o‘zgaruvchan xususiy chastotaga ega tebranma jarayonni tavsiflaydi hamda optimal boshqaruv masalasi sifatida talqin qilinadi. Pontryagin maksimum prinsipi yordamida optimallik shartlari olingan va optimal boshqaruvning releli tuzilishga ega ekanligi ko‘rsatilgan. Boshqaruv koeffitsiyentiga qo‘yilgan turli cheklovlar uchun erishuvchanlik to‘plamlari qurilgan, optimal trayektoriyalar aniqlangan hamda holatlar orasidagi minimal o‘tish vaqti uchun analitik*

formulalar keltirilgan. Olingan natijalar boshqariladigan tebranma jarayonlar, parametrik identifikatsiya va matematik fizikaning koeffitsiyentli teskari masalalarini tadqiq etishda qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: *teskari masala, koeffitsiyentli teskari masala, optimal boshqaruv, ossillyator, Pontryagin maksimum prinsipi, minimal vaqt, erishuvchanlik to'plami, parametrik identifikatsiya.*

Введение. Рассмотрение дифференциального уравнения

$$\ddot{s}(t) + a^2(t)s(t) = 0, \tag{1}$$

где $a(t)$ является заданной функцией, имеет длительную историю изучения и находит применение в различных областях науки и техники. Ещё в XIX веке Маттьё [1] исследовал решения данного уравнения для частных случаев функции $a(t)$. Существенный вклад в развитие этой тематики внесли Магнус и Винклер, изучавшие уравнение Хилла [2]. Позднее Якубович и Старжинский [3] рассматривали линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Указанное уравнение, в частности, моделирует движение частицы в потенциальном поле — задача, берущая начало в работах К. М. Кейса [4], посвящённых случаям с сингулярными коэффициентами. В. Б. Кейс [5], в свою очередь, анализировал динамику качающихся систем.

Особый интерес представляет обратная постановка задачи, при которой функция $a(t)$ не задаётся заранее, а подлежит определению. Несмотря на её важность, данный класс задач исследован существенно меньше.

Подобные задачи возникают, например, в теории управления механическими системами, где требуется построить управляющее воздействие, обеспечивающее заданное поведение системы [6].

В настоящей работе рассматривается обратная задача — восстановление функции $a(t)$, при которой решение $s(t)$ уравнения (1) удовлетворяет предписанным начальным и конечным условиям.

В более общей постановке не требуется предполагать гладкость функции $s(t)$; обычно достаточно лишь условия её ограниченности без введения дополнительных упрощающих гипотез. Естественным подходом к решению является использование вариационных принципов, например, минимизации времени процесса или других функционалов. Задача также допускает физическую интерпретацию через явление параметрического резонанса [7], что позволяет исследовать режимы роста амплитуды $s(t)$, а также условия затухания колебаний. В данной работе рассматривается обратная задача управления, в которой функция $a(t)$ выступает в роли релейного управления (типа «bang-bang») для траекторий уравнения (1). Подобные функции могут применяться при проектировании систем управления в робототехнике [8].

Как правило, решения обратных задач управления не являются классическими: их гладкость нарушается в конечном числе точек. Однако на промежутках между моментами переключения управления $a(t)$ решение $s(t)$ остаётся гладким, что позволяет в ряде случаев избежать применения численных методов при решении сложных задач оптимизации. В соответствии с принципом максимума Понтрягина [9] на функцию $a(t)$ накладываются ограничения, что упрощает постановку задачи оптимального управления.

Хотя аналитические методы предпочтительны для нахождения функции $a(t)$, получение точных решений, как правило, связано с существенными трудностями. Кроме того, даже аналитически разрешимые некорректные задачи могут оказаться неустойчивыми при численной реализации [10-12]. При введении дополнительных ограничений на фазовые переменные возможно появление сингулярных режимов управления [13]. В таких ситуациях целесообразно использовать численные методы, реализованные в современных вычислительных пакетах, таких как MATLAB, Python (SciPy) или Julia. Предполагается, что исходные данные заданы корректно, а основной задачей является построение нетривиальных аналитических решений обратной задачи управления.

Основная трудность состоит в сложной взаимосвязи между функциями $a(t)$, $s(t)$ и временем процесса T, а также в необходимости одновременного выполнения всех наложенных условий.

1. Формулировка задачи.

Рассматривается обратная задача оптимального по времени управления для дифференциального уравнения второго порядка.

Найти коэффициент $a(t)$ в следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \ddot{s}(t) = -a^2(t)s(t); \\ s(0) = A > 0, \dot{s}(0) = 0; s(T) = B \neq 0, \dot{s}(T) = 0; \\ 0 \leq a(t) \leq 1, \end{cases} \tag{2}$$

где время всего процесса T определяется из условия

$$T \rightarrow min. \tag{3}$$

При данных ограничениях функция a может быть восстановлена, при этом коэффициент $a(t)$ может быть лишь ограниченной измеримой функцией.

Уравнение (2) описывает движение материальной точки при заданных граничных условиях.

Начальные условия определяют положение и скорость точки в момент времени $t = 0$. Требуется за наименьшее время T переместить точку из начального положения в заданное, при этом скорость $\dot{s}(t)$ в этот момент должна быть равна нулю, а вся траектория $s(t)$ должна быть гладкой функцией.

При этом нужно выделить несколько случаев.

2. Различные знаки значений на границе

Для исследования задачи минимального времени воспользуемся принципом максимума Понтрягина [9]. Согласно этому принципу, оптимальное управление должно максимизировать гамильтониан системы почти всюду на интервале управления. В рассматриваемой задаче это приводит к релейной структуре оптимального управления, принимающего предельные допустимые значения.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \ddot{s}(t) = -a^2(t)s(t); \\ s(0) = A > 0, \dot{s}(0) = 0; \\ s(T) = -B, \dot{s}(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $B = const > 0, T \to min, 0 \le a(t) \le 1\,, 0 \le t \le T, s(t) \in C^1[0,T]$.

Разобьём интервал от 0 до T на три участка, задав значения: $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1$. Решив систему (4) в этом случае, имеем:

$$s(t) = \begin{cases} A\cos(t)\,, & 0 \le t \le t_1; \\ bt + c, & t_1 \le t \le t_2; \\ B\cos(t + \Delta)\,, & t_2 \le t \le T. \end{cases}$$

Из непрерывности $s(t)$ и $\dot{s}(t)$ получим:

$$\begin{cases} A\cos t_1 = bt_1 + c \\ -A\sin t_1 = b \\ bt_2 + c = B\cos(t_2 + \Delta) \\ b = -B\sin(t_2 + \Delta) \\ T + \Delta = \pi \\ T \to inf \end{cases}$$

Выразим b, c, t_2, Δ через t_1

$$\begin{cases} b &= -A\sin t_1\,; \\ c &= A(\cos t_1 + t_1 \sin t_1); \\ t_2 &= \dfrac{1}{A\sin t_1}\left(\sqrt{B^2 - A^2\sin^2 t_1} + A(\cos t_1 + t_1\sin t_1)\right); \\ \Delta &= \pi - \arcsin\left(\dfrac{A\sin t_1}{B}\right) - t_2. \end{cases}$$

Тогда

$$T = \arcsin\left(\tfrac{A\sin t_1}{B}\right) + \tfrac{1}{A\sin t_1}\left(\sqrt{B^2 - A^2\sin^2 t_1} + A(\cos t_1 + t_1\sin t_1)\right). \tag{5}$$

Из условия $\frac{dT}{dt_1} = 0$, получим:

$$\frac{dT}{dt_1} = \frac{A\cos t_1}{\sqrt{B^2 - A^2\sin^2 t_1}} - \operatorname{ctg}^2 t_1 - \frac{B^2\cos t_1}{A\sin^2 t_1\sqrt{B^2 - A^2\sin^2 t_1}} = 0.$$

Решая последнее, находим:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, минимальное общее время процесса составляет

$$T_{opt} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A},$$

и точки переключения t_1 и t_2 имеют вид:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ t_2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A} \end{cases}$$

Окончательное решение запишется следующим образом:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; \dfrac{\pi}{2}) \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A}; T_{opt}\right]; \\ 0, & t \in [\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A}) \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} A\cos t\,, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ A\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right), & \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A}; \\ -B\cos\left(t - T_{opt}\right), & \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A} \le t \le T_{opt}. \end{cases}$$

Это решение является оптимальным, если $B > A$.

Если $B < A$, то аналитический анализ системы (3) приводит к следующему:

$$T_{opt} = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + \arcsin\left(\frac{B}{A}\right),$$

$$\begin{cases} t_1 = \arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right), \\ t_2 = \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + \arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right), \end{cases}$$

и окончательным решением является:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; \arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right)) \cup \left[\dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + \arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right); T_{opt}\right], \\ 0, & t \in [\arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right); \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + \arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right)), \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} A\,cos\,t\,, & 0 \le t \le arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right) \\ \sqrt{A^2 - B^2} + B\,arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right) - Bt, & arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right) \le t \le \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right); \\ -B\,cos\left(t - T_{opt}\right), & \dfrac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} + arcsin\left(\dfrac{B}{A}\right) \le t \le T_{opt}. \end{cases}$$

2.1. Доказательство оптимальности.

В общем случае решение имеет вид:

$$s(t) = \begin{cases} A\cos(\alpha t)\,, & 0 \le t \le t_1 \\ bt + c, & t_1 \le t \le t_2; \\ B\cos(\beta t + \Delta)\,, & t_2 \le t \le T_{opt}. \end{cases}$$

После некоторых вычислений при условии $B > A$ общее время T принимает вид:

$$T = t_1 + \frac{1}{\beta}\arcsin\left(\frac{A\alpha}{B\beta}\sin(\alpha t_1)\right) + \frac{1}{\alpha\sin(\alpha t_1)}\left(\frac{1}{A}\sqrt{B^2 - \frac{A^2\alpha^2}{\beta^2}\sin^2(\alpha t_1)} + \cos(\alpha t_1)\right). \quad (6)$$

Теорема 1. Время (6) будет минимальным тогда и только тогда, когда $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \beta = 1$.

Лемма. Среди всех допустимых значений $0 \le \alpha, \beta \le 1$ минимальное время процесса достигается при $\alpha = \beta = 1$.

Доказательство. Время прохождения колебательного участка обратно пропорционально частоте α(соответственно β). Поэтому при уменьшении αили βдлительность соответствующего участка возрастает. Так как требуется минимизировать общее время процесса, оптимальное решение реализуется при максимально допустимых значениях параметров, то есть при $\alpha = \beta = 1$.

Теперь перейдем к *доказательству Теоремы 1*. Для достижения минимального времени T_{min} необходимо выполнение условия $\frac{dT}{dt_1} = 0$.

$$\frac{dT}{dt_1} = -\operatorname{ctg}^2(\alpha t_1) + \frac{A\alpha^2\cos(\alpha t_1)}{\beta\sqrt{B^2\beta^2 - A^2\alpha^2\sin^2(\alpha t_1)}} - \frac{B^2\beta\cos(\alpha t_1)}{A\sin^2(\alpha t_1)\sqrt{B^2\beta^2 - A^2\alpha^2\sin^2(\alpha t_1)}} = 0.$$

Подставляя $\alpha = \beta = 1$, находим $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

Ниже приведён график траекторий $s(t)$ при различных значениях конечных положений.

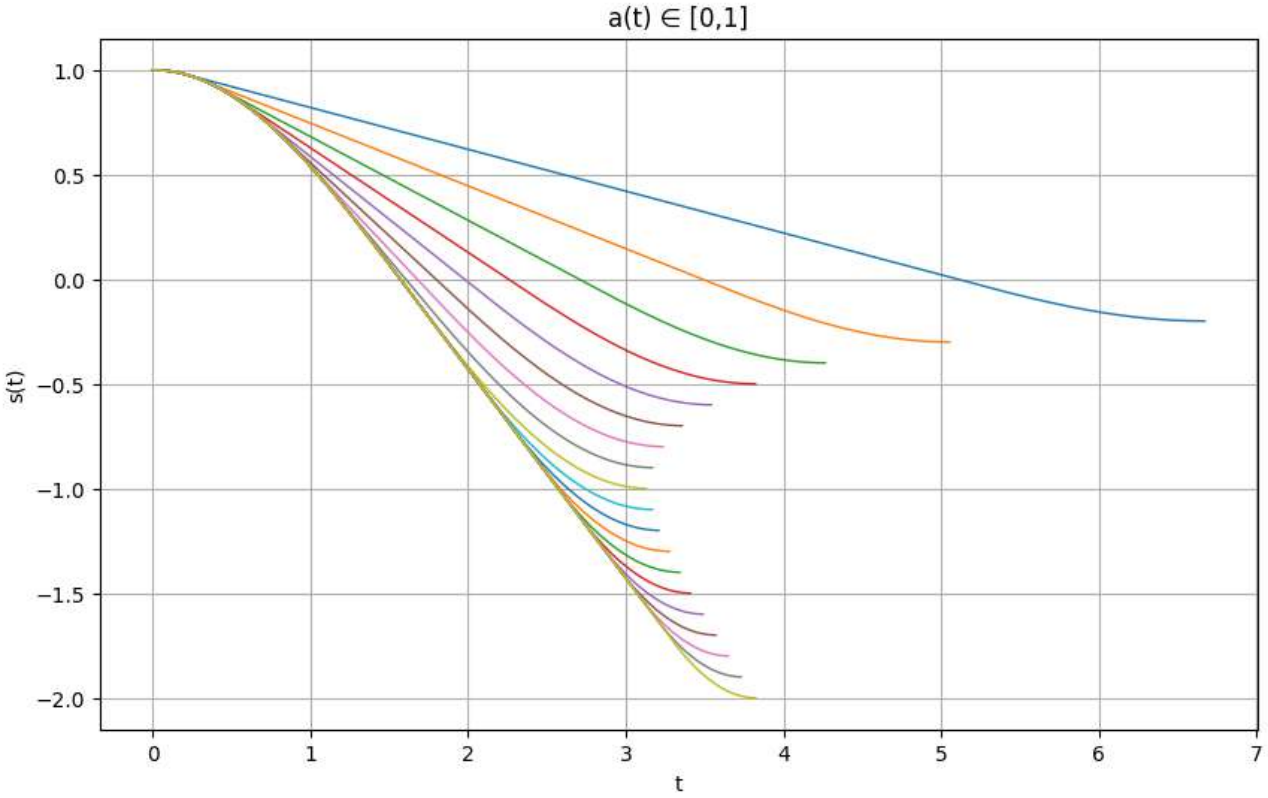


Рисунок 1. График решения при $a(t) \in [0;1]$ для $A = 1, B \in [0.2;2]$.

В случае $B < A$ исследования проводятся аналогично.

3. Одинаковые знаки значений на границе

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \ddot{s}(t) = -a^2(t)s(t); \\ s(0) = A > 0, \dot{s}(0) = 0; \\ s(T) = B \neq 0, \dot{s}(T) = 0; \end{cases} \tag{7}$$

где $A, B = \text{const} > 0, T \to min, \quad 0 \leq t \leq T, s(t) \in C^1[0,T]$.

Предположим, что $0 < A < B$.

В отличие от случая противоположных знаков граничных значений, здесь оптимальная траектория не может быть монотонной. Следовательно, оптимальная траектория содержит по крайней мере одну внутреннюю точку экстремума и совершает одно полное колебание.

Таким образом, решение задачи имеет немонотонный характер и состоит из участка разгона до максимального значения координаты и последующего возвращения к заданному конечному состоянию.

Для дальнейшего построения оптимального управления справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для любой функции $a(t) \in [0;1]$ существует момент времени t_0^*, такой что $s(t_0^*) = 0, \dot{s}(t_0^*) < 0$ и $s(t) > 0$ при $t \in [0; t_0^*)$.

Утверждение 2. Для любой функции $a(t) \in [0;1]$ существует момент времени t_1^*, такой что $s(t_1^*) < 0, \dot{s}(t_1^*) = 0$ и $s(t) < 0$ при $t \in (t_0^*; t_1^*]$.

Утверждение 3. Для любой функции $a(t) \in [0;1]$ существует момент времени t_2^*, такой что $s(t_2^*) = 0, \dot{s}(t_2^*) > 0$ и $s(t) < 0$ при $t \in [t_1^*; t_2^*)$.

Утверждение 4. Для любой функции $a(t) \in [0;1]$ существует момент времени t_3^*, такой что $s(t_3^*) > 0, \dot{s}(t_3^*) = 0$ и $s(t) > 0$ при $t \in (t_2^*; t_3^*]$.

Следовательно, система (7) разбивается на две задачи с разными знаками на концах, рассмотренных в предыдущем пункте. Вспомогательную точку с отрицательным знаком обозначим

как $-C$. Обозначим время, за которое точка передвигается из A в $-C$, как T_1 и потом из точки $-C$ в точку В за T_2.

Пусть $B > A$. Тогда решение имеет вид

$$T_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{A}{C}\right) + \frac{\sqrt{C^2-A^2}}{A} \quad T_2 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{C}{B}\right) + \frac{\sqrt{B^2-C^2}}{C},\ T = T_1 + T_2. \tag{8}$$

Теорема 2. Общее время (8) будет минимальным тогда и только тогда, когда $C = \sqrt{AB}$.

Доказательство. Чтобы минимизировать общее время $T = T_1 + T_2$, необходимо решить уравнение $\frac{dT}{dC} = 0$. Вычисляя, находим:

$$\frac{d(T_1+T_2)}{dC} = \frac{C}{A}\frac{1}{\sqrt{C^2-A^2}} - \frac{A}{C}\frac{1}{\sqrt{C^2-A^2}} - \frac{1}{\sqrt{B^2-C^2}} - \frac{\sqrt{B^2-C^2}}{C^2} + \frac{1}{\sqrt{B^2-C^2}} = 0$$

Из последнего следует

$$C = \sqrt{AB}$$

и

$$T_1 = T_2 = \frac{\pi}{2} + arcsin\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{A}-1}.$$

А общее время вычисляется по формуле:

$$T_{opt} = \pi + 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right) + 2\sqrt{\frac{B}{A}-1}.$$

И решение системы (6) имеет вид:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;\frac{\pi}{2}) \cup [t_1;t_2) \cup \left[t_3;T_{opt}\right]; \\ 0, & t \in [\frac{\pi}{2};t_1) \cup [t_2;t_3). \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} A\cos t\,, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ A\left(\frac{\pi}{2} - t\right), & \frac{\pi}{2} \le t \le t_1; \\ -\sqrt{AB}\cos\left(t - \left(t_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right), & t_1 \le t \le t_2; \\ \sqrt{AB}(t - t_2) & t_2 \le t \le t_3; \\ B\cos\left(t - T_{opt}\right) & t_3 \le t \le T_{opt}. \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{B}{A}-1}; \\ t_2 = \pi + \sqrt{\frac{B}{A}-1} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right); \\ t_3 = \pi + 2\sqrt{\frac{B}{A}-1} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\right). \end{cases}$$

В случае $A > B$ решение строится аналогично.

$$a(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;t_1) \cup [t_2;t_3) \cup \left[t_4;T_{opt}\right]; \\ 0, & t \in [t_1;t_2) \cup [t_3;t_4). \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} A\cos t\,, & 0 \le t \le t_1 \\ \sqrt{AB}(t_2 - t), & t_1 \le t \le t_2; \\ -\sqrt{AB}\cos\left(t - \left(t_2 - \frac{\pi}{2}\right)\right), & t_2 \le t \le t_3; \\ B(t - t_4) & t_3 \le t \le t_4; \\ B\cos\left(t - T_{opt}\right) & t_4 \le t \le T_{opt}. \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} t_1 = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{B}{A}}\right); \\ t_2 = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}\right) + \sqrt{\dfrac{B}{A} - 1}; \\ t_3 = \dfrac{\pi}{2} + 2\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}\right) + \sqrt{\dfrac{B}{A} - 1}; \\ t_4 = \dfrac{\pi}{2} + 2\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}\right) + 2\sqrt{\dfrac{B}{A} - 1}. \end{cases}$$

Ниже приведён график решения задачи (7) для $A = 1, B \in [0.2; 2]$.

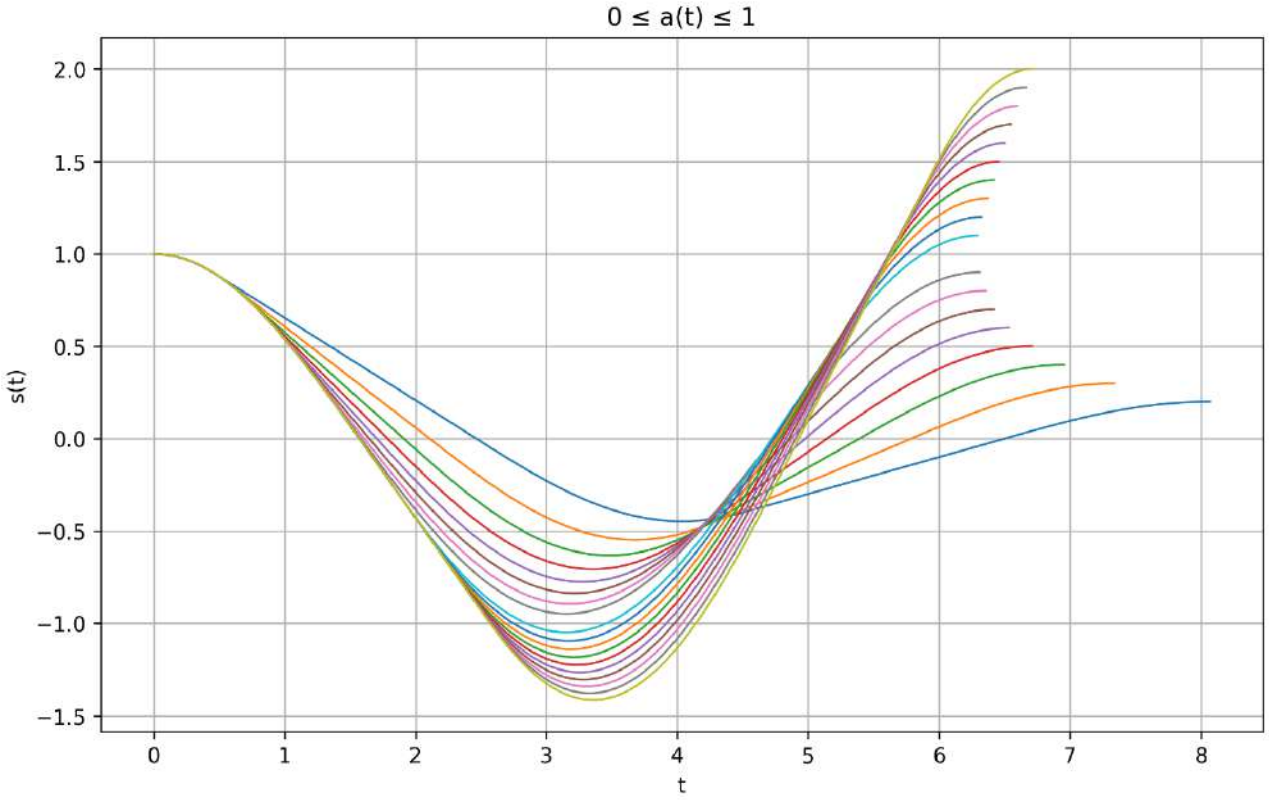


Рисунок 2. График решения при $\boldsymbol{a(t) \in [0; 1]}$ для $\boldsymbol{A = 1, B \in [0.2; 2]}$

Заключение. В работе исследована коэффициентная обратная задача для линейного осциллятора, сведённая к задаче оптимального по времени управления системой второго порядка. Рассмотрено восстановление ограниченного коэффициента управления, обеспечивающего перевод системы между заданными начальными и конечными состояниями за минимальное время.

На основе принципа максимума Понтрягина установлено, что оптимальное управление имеет релейный характер и принимает предельные допустимые значения. Для случаев различных и одинаковых знаков граничных значений построены оптимальные траектории, получены аналитические выражения для моментов переключения управления, и выведены формулы минимального времени перехода. Показано, что минимальное время достигается при максимальных допустимых значениях параметров управления.

Полученные результаты расширяют класс аналитически исследуемых коэффициентных обратных задач и могут быть использованы при моделировании управляемых колебательных процессов, задачах параметрической идентификации и синтеза оптимального управления динамическими системами.

Перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение многомерных систем, задач с фазовыми ограничениями, сингулярными режимами управления, а также разработка устойчивых численных методов решения соответствующих коэффициентных обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Mathieu, E. Course de Physique Mathematique; CLAVREUIL: Paris, France, 2003.

2. Magnus, S.; Winkler,W. Hill's Equation; Dover Publications: Mineola, NY, USA, 2004.

3. Yakubovich, V.A.; Starzhinskii, V.M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients; Wiley: Hoboken, NJ, USA, 1975.

4. Case, K.M. Singular potentials. Phys. Rev. 1950, 80, 797.

5. Case,W.B. The pumping of a swing from the standing position. Am. J. Phys. 1996, 64, 215–220.

6. Yakubu, G.; Olejnik, P.; Awrejcewicz, J. On the modeling and simulation of variable—Length pendulum. Arch. Comput. Methods Eng. 2022, 29, 2397–2415.

7. Hatvani, L. On the parametrically excited pendulum equation with a step function coefficient. Int. J.-Non-Linear Mech. 2015, 77, 172–182.

8. Luo, Q.; Chevallereau, C.; Aoustin, Y. Walking Stability of a Variable Length Inverted Pendulum Controlled with Virtual Constraints. Int. J. Humanoid Robot. 2019, 16, 1950040.

9. Pontryagin, L.S. The Mathematical Theory of Optimal Processes, 1st ed.; Routledge: London, UK, 1987; 360p.

10. Walczak, S.Well-posed and ill-posed optimal control problems. J. Optim. Theory Appl. 2001, 109, 169–185.

11. P¨orner, F. Regularization Methods for Ill-Posed Optimal Control Problems. Ph.D. Thesis, W¨urzburg University Press, Wurzburg, Germany, 2018.

12. Huntul, M.J.; Abbas, M.; Baleanu, D. An inverse problem of reconstructing the time-dependent coefficient in a one-dimensional hyperbolic equation. Adv Differ Equ. 2021, 2021, 452.

13. Flaherty, J.; O'Malley, R. On the computation of singular controls. IEEE Trans. Autom. Control. 1977, 22, 640–648.

14. Goncharsky, A.V.; Romanov, S.Y. A method of solving the coefficient inverse problems of wave tomography. Comput. Math. Appl. 2019, 77, 967–980.

UO‘K 519.633

PROGRESSIYALAR NAZARIYASI YORDAMIDA SONLI KETMA-KETLIKLAR LIMITINI HISOBLASH USULLARI

Oramov Jura,
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti
Matematika fanlari kafedrasi dotsenti
alimxanovanigora210@gmail.com
ORCID: 0009-0000-7169-0078

Annotatsiya. *Sonlar ketma-ketligi, uning limiti tushunchasi matematik tahlilning eng muhim asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Sonlar ketma-ketligining limitini hisoblashda juda ko‘p usullar mavjuddir. Xususan,* aniqsizliklarni *ochish, ajoyib limitlar, ba’zi bir muhim limitlar, kasr maxraji irratsional son bo‘lsa qo‘shmasiga ko‘paytirish va h.k.*

Mazkur maqolada sonlar ketma-ketligini limitini hisoblashda progressiyalar nazariyasining tatbiqlari konkret misollar asosida o‘rganildi.Dastavval progressiyalar (arifmetik va geometrik) nazariyasining muhim formulalari keltiriladi.

Kalit so‘zlar: *sonlar ketma-ketligi, limit tushunchasi, arifmetik progressiya, geometrik progressiya, cheksiz kamayuvchi progressiya, xususiy yig‘indilar,ajoyib limitlar, muhim limitlar, kasr maxraji irratsional son*

МЕТОДЫ РАСЧЁТА ЛИМИТА ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬСТВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПРОГРЕССИЙ

Аннотация. *Понятие последовательности чисел, её предел, является одним из важнейших базовых понятий математического анализа. Существует множество методов вычисления предела последовательности чисел.*

В частности, раскрытие неопределённостей, замечательные пределы, некоторые важные пределы, умножение на сумму, если знаменатель дроби является иррациональным числом и т.д.

В данной статье на конкретных примерах изучены приложения теории прогрессий при вычислении предела последовательности чисел. Сначала приводятся важные формулы теории прогрессий (арифметической и геометрической).

Ключевые слова: *последовательность чисел, понятие предела, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая прогрессия, частные суммы, замечательные пределы, существенные пределы, знаменатель дроби, иррациональное число.*

METHODS FOR COMPUTING LIMITS OF NUMERICAL SEQUENCES USING PROGRESSION THEORY

Abstract. *The concept of a numerical sequence and its limit is considered one of the most fundamental concepts of mathematical analysis. There are numerous methods for calculating the limits of numerical sequences. Specifically, these include methods for resolving indeterminate forms, using standard limits, applying certain fundamental limits, multiplying by the conjugate when the denominator contains an irrational number, and others.*

Keywords: *sequence of numbers, concept of limit, arithmetic progression, geometric progression, infinitely decreasing progression, private sums, standard limits, subsequential limits, denominator, irrational number.*

Kirish. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti tushunchasi matematik tahlilning eng muhim asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi va alohida o‘rin tutadi. Limit nazariyasi nafaqat nazariy matematikaning asosini tashkil etadi, balki fizika, iqtisodiyot, texnika va axborot texnologiyalari kabi ko‘plab sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Sonlar ketma-ketligining limitini aniqlash jarayonida turli matematik usullardan foydalaniladi va ular orasida progressiyalar nazariyasi muhim ahamiyat kasb etadi.

Arifmetik va geometrik progressiyalar ketma-ketliklarning qonuniyatlarini o‘rganishda, ularning yaqinlashuv yoki uzoqlashuv xususiyatlarini tahlil qilishda samarali vosita hisoblanadi. Ayniqsa, murakkab ketma-ketliklarning limitini hisoblashda progressiyalar formulalari va ularning xossalari masalani

soddalashtirishga yordam beradi. Shu sababli progressiyalar nazariyasining limitlarni hisoblashdagi tatbiqlarini o‘rganish matematik analizning muhim yo‘nalishlaridan biri sanaladi.

Maqolada sonlar ketma-ketligining limitini hisoblashda arifmetik va geometrik progressiyalarning qo‘llanilish imkoniyatlari, ularning nazariy asoslari hamda amaliy misollar orqali tahlili yoritiladi. Shuningdek, progressiyalar yordamida limitlarni aniqlashning samarali usullari ko‘rib chiqilib, ularning matematik tafakkurni rivojlantirishdagi ahamiyati ochib beriladi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. “Sonlar ketma-ketligini limitini hisoblashda progressiyalar nazariyasining tatbiqlari” mavzusini yoritishda foydalanilgan adabiyotlar mazkur mavzuning nazariy va amaliy jihatlarini ochib berishda muhim ahamiyat kasb etadi. Vilenkin N.Ya. va hammualliflarning “Задачник по курсу математического анализа” kitobida matematik analizga oid turli masalalar orqali ketma-ketliklarning limitlarini hisoblash usullari keng yoritilgan bo‘lib, progressiyalar bilan bog‘liq misollar mavzuni chuqur tushunishga yordam beradi. Novoselov S.I.ning “Специальный курс элементарной алгебры” kitobida esa algebraik usullar asosida progressiyalarning xossalari va ularning ketma-ketliklar limitlarini aniqlashdagi o‘rni tushuntirilgan. T. Azlarov va X. Mansurovning “Matematik analiz” darsligida ketma-ketlik va limit tushunchalari izchil bayon qilinib, arifmetik hamda geometrik progressiyalar yordamida limitlarni hisoblash usullari nazariy va amaliy misollar orqali ko‘rsatib berilgan. N. S. Glagolov va boshqalarning “Matematika” kitobida esa progressiyalar bilan bog‘liq matematik tushunchalar sodda va tushunarli tarzda yoritilib, ketma-ketliklarning limitlarini topishda ularning ahamiyati ko‘rsatib o‘tilgan.

Tadqiqot metodologiyasi. Ba’zi bir sonlar ketma-ketligining limitini hisoblashda progressiyalar nazariyasining turli tatbiqlari muhim qurol ekanligini ko‘rsatish tadqiqotning (maqolaning) muhim metodologiyasi hisoblanishi konkret misollar asosida yoritilgan.

Sonli ketma – ketlik deb, $x_n = f(n)$ ni natural qatorning funksiyasi sifatida aniqlovchi biror qonun yordamida berilgan ketma-ket keluvchi cheksiz ko‘p

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \{x_n\}$$

sonlar to‘plamiga aytiladi.

Matematik tahlil kursida qaralayotgan muhim amallardan biri limitga o‘tish amalidir. Sonlar ketma-ketligining limitini ta’rifini keltiramiz: Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday natural son $n_0 > N$ mavjud bo‘lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deb ataladi va limit uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \to a, \text{agar } n \to \infty$$

belgilashlardan foydalaniladi.

Maqolada sonli ketma-ketliklarning limitini hisoblashda progressiyalar nazariyasining tatbiqlaridan foydalanganimiz uchun ularga tegishli xossalarni keltiramiz:

1°. Arifmetik progressiyaning istalgan hadi formulasi:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, n\epsilon N \quad (a_1 - \text{birinchi had}, d - \text{ ayirma})$$

2°. Arifmetik progressiyaning dastlabki *n* ta hadlari yig‘indisi:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

3°. Geometrik progressiyaning istalgan hadi formulasi:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n\epsilon N \quad (b_1 - \text{birinchi had}, q - \text{progressiya maxraji})$$

4°. Geometrik progressiyaning dastlabki *n* ta hadlari yig‘indisi:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, (q \neq 1)$$

5°. Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

Sonlar ketma-ketligini limitini hisoblashda progressiyalar nazariyasidan foydalanib yechiladigan misollardan namunalar keltiramiz.

1-misol.

$$x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}, \quad n\epsilon N$$

ketma-ketlikning limitini hisoblang.

Yechilishi: $\{x_n\}$ ketma-ketlikning surati $b_1 = 1;\ q = \frac{1}{2}; b_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ bo‘lgan chekli geometrik progressiya yig‘indisidan iborat bo‘lgani uchun:

$$S_{n+1} = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ga teng bo‘ladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning maxraji esa $b_1 = 1;\ q = \frac{1}{3}; b_{n+1} = \frac{1}{3^n}$ bo‘lgan chekli geometrik progressiya yig‘indisidan iborat:

$$\sigma_{n+1} = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

U holda,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{\sigma_{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)} = \frac{2(\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}})}{\frac{3}{2}(\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}})} = \frac{2(1-0)}{\frac{3}{2}(1-0)} = \frac{4}{3}$$

Demak, javob: $\frac{4}{3}$

2-misol. Agar $x_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ni toping.

Yechilishi: x_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_n = \frac{1+2+3+\cdots+n-2+n-1}{n^2}.$$

Ravshanki, suratdagi qo‘shiluvchilar arifmetik progressiyani tashkil etadi, bu yerda $a_1 = 1, d = 1, a_{n-1} = n-1$ bo‘lib, chekli arifmetik progressiyaning yig‘indisini formulasiga ko‘ra:

$$S_{n-1} = 1+2+3+\cdots+n-1 = \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ga teng bo‘ladi.

U holda x_n uchun ushbu ifodaga

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

ga ega bo‘lamiz.

Natijada,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2} = \frac{1}{2}$$

Demak, javob: $\frac{1}{2}$

3-misol. Umumiy hadi $x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ ga teng bo‘lgan sonli ketma-ketlikning limitini toping.

Yechilishi: $\{x_n\}$ ni tashkil etgan yig‘indi birinchi hadi $b_1 = 1$, maxraji $q = -\frac{1}{2}$ ga teng bo‘lgan chekli geometrik progressiya yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$x_n = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

U holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

Demak, javob: $\frac{2}{3}$

4-misol. Sonli ketma-ketlikning n-hadi (umumiy hadi):

$$x_n = 0,\underbrace{333\ldots3}_{nta}$$

berilgan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ni toping.

Yechilishi: x_n ni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$x_n = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots + 0,\underbrace{000\ldots}_{(n-1)ta}3$$

Bu yig‘indi, birinchi hadi $b_1 = 0{,}3$ ga, maxraji $q = \frac{1}{10}$ ga, n-hadi $b_n = 0,\underbrace{000\ldots}_{(n-1)ta}3$ga teng bo‘lgan chekli geometrik progressiya yig‘indisidan iborat:

$$x_n = \frac{0{,}3\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

U holda,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{3}$$

Demak, javob: $\frac{1}{3}$.

5-misol. $S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n$, $(|q| < 1)$ yig‘indi bilan aniqlanuvchi $\{S_n\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Yechilishi: Berilgan yig‘indini q ga ko‘paytirib, undan S_n ni ayiramiz:

$$qS_n - S_n = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \cdots + nq^{n+1} - (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n) =$$
$$= -(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) + nq^{n+1}.$$

O‘ng tomonda qavs ichida birinchi hadi $b_1 = q$, maxraji q ga va n-hadi q^n ga teng bo‘lgan chekli progressiya yig‘indisi:

$$\sigma_n = \frac{q(1-q^n)}{1-q} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}, \quad (|q| < 1)$$

turibdi.

U holda

$$(q-1)S_n = \frac{q - q^{n+1}}{q-1} + nq^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{nq^{n+1}}{q-1} + \frac{q - q^{n+1}}{(q-1)^2}.$$

Shartga asosan: $|q| < 1$ bo‘lganligi uchun $\lim_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$.

U holda

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{nq^{n+1}}{q-1} + \frac{q - q^{n+1}}{(q-1)^2}\right] = \frac{q}{(q-1)^2}, (|q| < 1).$$

ekanligini hosil qilamiz.

Demak, javob: $\frac{q}{(q-1)^2}$.

Tahlil va natijalar. Maqolada o‘rganilgan mavzu **s**onlar ketma-ketligi limitlarini hisoblashdagi bir yo ’nalish bo‘lib, bu metod yordamida natijaga tez va oson erishish bilan ajralib turishi va o‘rganilgan misollarda aniq ko‘rinishi asosiy natijadir.

Xulosa va takliflar. Mazkur usul (metodni) qaralayotgan sonli ketma-ketliklarga qachon qo‘llash mumkin, uni qanday amalga oshirish lozim degan fikr paydo bo‘lishi,ishimizning asosiy natijasi va xulosasidir. Natijada progressiyalar nazariyasidan foydalanib ham ko‘plab limitlarni osongina hisoblash mumkinligi ochib berilgan va yangi metod (usul)larni topish masalasi asosiy maqsad bo‘lib qolaveradi.

ADABIYOTLAR:

1. *Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. –М.: 1971.*
2. *Новоселов С.И. Специальный курс элементарной алгебры. –М.: 1962.*
3. *Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz. –T.: 1986.*
4. *Glagolov N.S. va bosh. Matematika 1-qism. –T.: 1970.*
5. *Baranov I.A. va bosh. Matematika, –T.: 1986.*
6. *Gusev B.A., Mordkovich A.G. Matematika. –T.: 1988.*
7. *Modenov P.S. Matematika masalalari to‘plami. –T.: 1956.*

УДК 532.546

МОДЕЛИРОВАНИЕ СНИЖЕНИЯ ЗАБОЙНОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ВЫМЫВЕ ИЗ СКВАЖИНЫ ПАЧКИ ГАЗА

Джаббаров Мамасоли Садикович,
доцент Самаркандского государственного архитектурно-строительного университета имени Мирзо Улугбека,
кандидат физико-математических наук
m.s.jabborov1954@mail.ru

Аннотация. *В статье рассматривается математическое моделирование снижения давления на забое скважины при промывке газовой пачки, образующейся при бурении нефтяных и газовых скважин. Разработана математическая модель процесса и методика численного решения нелинейного дифференциального уравнения движения промывочной жидкости над газовой пачкой. Предложенный алгоритм и программа компьютерных расчётов позволяет: определить положение пачки газа в различные моменты времени; найти момент времени, в котором верхняя граница пачки достигает устья скважины; определить минимальное забойное давление; определить критическое время и соответствующее ему расстояния от забоя до нижней и верхней границ газовой пачки, когда произойдёт выброс жидкости из скважины из-за прекращения циркуляции; вычислить относительную величину снижения забойного давления.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, бурение нефтяных и газовых скважин, промывочная жидкость, пачка газа, критическое время, забойное давление.*

QUDUQDAN GAZ PACHKASINI YUVISHDA QUDUQ TUBI BOSIMINING PASAYISHINI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada neft va gaz quduqlarini burg'ilash paytida hosil bo'ladigan gaz pachkasini yuvish paytida quduq tubi bosimining pasayishini matematik modellashtirish masalasi yoritilgan. Jarayonning matematik modeli va gaz pachkasining ustidagi burg'ilash suyuqlik harakatinining chiziqli bo'lmagan differentsial tenglamasini sonli yechish uslubi ishlab chiqilgan. Taklif qilingan algoritm va kompyuter hisoblash dasturi quyidagilarni amalga oshirish imkonini beradi: gaz pachkasining turli vaqt momentlaridagi holatini aniqlash; pachkaning yuqori chegarasi quduq og'ziga yetadigan vaqt momentini topish; quduq tubining minimal bosimini aniqlash; sirkulyatsiya to'xtashi tufayli quduqdan yuvuvchi suyuqlik otilib chiqadigan kritik vaqtni; quduq tubidan gaz pachkasining pastki va yuqori chegaralarigacha bo'lgan masofalarni aniqlash; quduq tubidagi bosim pasayishining nisbiy kattaligini aniqlash kabilarni aytish mumkin.*

Kalit so‘zlar: *matematik modellashtirish, neft va gaz quduqlarini burg'ilash, yuvish suyuqligi, gaz plitasi, kritik vaqt, quduq tubining bosimi.*

MODELING BOREHOLE PRESSURE REDUCTION DURING WASHING OUT OF A GAS PACK FROM A WELL

Abstract. *This article examines mathematical modeling of downhole pressure reduction during flushing of a gas pack formed during drilling of oil and gas wells. A mathematical model of the process and a methodology for numerically solving a nonlinear differential equation for the motion of drilling fluid above the gas pack have been developed. The proposed algorithm and computer calculation program make it possible to: determine the position of the gas pack at various points in time; find the point in time at which the upper boundary of the pack reaches the wellhead; determine the minimum bottomhole pressure; determine the critical time and the corresponding distances from the bottomhole to the lower and upper boundaries of the gas pack, when fluid is released from the well due to cessation of circulation; calculate the relative magnitude of the bottomhole pressure reduction.*

Keywords: *mathematical modeling, oil and gas well drilling, flushing fluid, gas pack, critical time, bottomhole pressure.*

Введение. Одной из основных причин возникновения аварийных выбросов при бурении нефтяных и газовых скважин, часто переходящих в газовые фонтаны, является снижение во времени давления столба промывочной жидкости на забое из-за её газирования. Считается, что газ поступает в

призабойную зону против продуктивного горизонта единой пачкой в объёме, равном ему объёмом вытесненной из скважины жидкости. Сравнительно с другим характером распределения газа по высоте кольцевого канала это предположение позволяет получить расчётные оценки давлений, повышающие запас надёжности работ по ликвидации выброса [1, 2, 3]. На рисунке 1 показана схема скважины с газовой пачкой.

Разработанные в настоящее время методики расчёта забойного давления основаны на расчёте характеристик многофазного потока на различных участках ствола скважины [4], их применение сопровождается невысокой достоверностью определения забойного давления. В этой работе, для Шершневского нефтяного месторождения, разработаны три индивидуальные методики определения забойного давления, две из них основаны на расчёте характеристик многофазного потока. Третья методика основана на использовании многомерной статистической модели. Проведены сравнительные анализы и оценки достоверности результатов, обеспечиваемых этими методиками. В [5] предложено уравнение для определения забойного давления в газлифтном подъёмнике.

Анализ результатов свидетельствует, что разница между измеренным и расчётным забойным давлением в среднем не более 2,5 %, что говорит о правомочности применения данного метода для решения оперативных практических задач по установлению и изменению режимов работы газлифтных скважин.

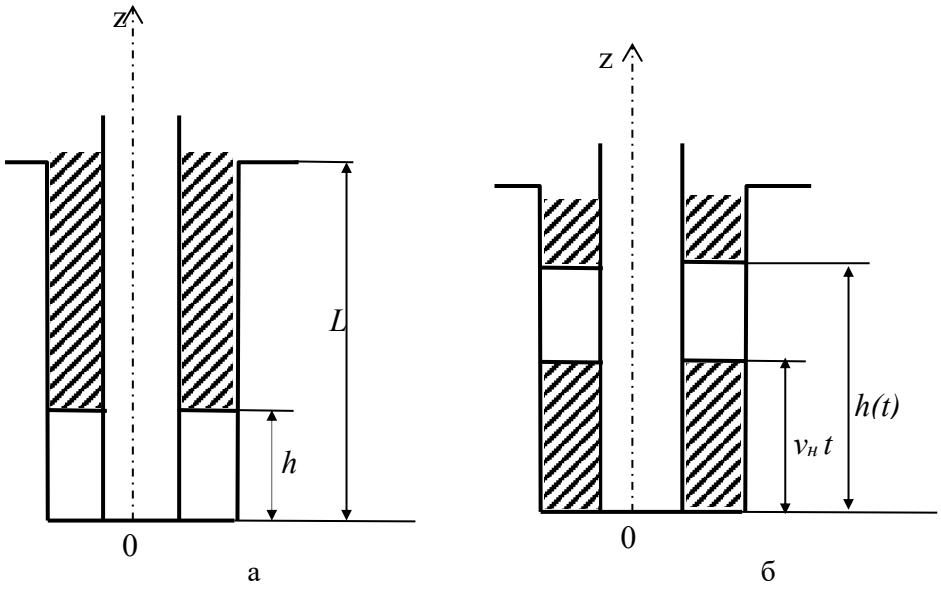


Рисунок 1. Схема скважины с газовой пачкой. а – газовая пачка на забое ($t = 0$); б - газовая пачка в момент t; L – глубина скважины; $h(t)$ – расстояние в момент времени t от забоя до верхней границы газовой пачки.

В [6] разработана методики для обоснования предельных значений забойного давления, определяющих технологический режим эксплуатации добывающих газовых скважин. Предлагается модификация методики по определению предельной депрессии на основе лабораторных исследований керна и математического моделирования. В данной работе рассматривается математическое моделирование снижения забойного давления при бурении нефтяных и газовых скважин. Разработана математическая модель процесса и методика её реализации методом конечных разностей.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения забойного давления в результате подъёма газовой пачки от забоя до устья скважины при турбулентном движении промывочной жидкости, когда пластические свойства жидкости не учитываются, и объём $V = h_0 F_k$ пачки на забое известен (здесь F_k - площадь поперечного сечения кольцевого канала).

Движение бурового раствора над пачкой, если принять его несжимаемой однофазной жидкостью, можно описать следующей системой уравнений [1]

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g + \frac{\lambda \rho}{2 d_г} v^2 + \rho \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial z} = 0; \ \ \rho = const, \quad (2)$$

где p – давление; v – скорость; $\rho -$ плотность промывочной жидкости; $g -$ускорение свободного падения; $\lambda -$ коэффициент гидравлического сопротивления; $d_г = d_c - d_н -$ гидравлический диаметр; $d_c -$ диаметр скважины; $d_н -$ наружный диаметр бурильной колонны; $F_k = \pi(d_c^2 - d_н^2)/4$; $h_0 = V/F_k$.

Нетрудно убедиться, что скорость жидкости v не зависит от координаты z. Следовательно, $v = v(t)$ для всех $z \geq h(t)$. Тогда

$$v = \frac{dh}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и интегрируя по z в пределах от $z = h(t)$ до $z = L$ имеем

$$p\big(h(t)\big) = \left[\rho\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\lambda\rho}{2d_Г}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \rho g\right][L - h(t)] + p_ш. \tag{4}$$

Здесь L – глубина скважины; $h(t)$ – расстояние в момент времени t от забоя до верхней границы газовой пачки; $p\big(h(t)\big)$- давление на верхнюю границу газовой пачки со стороны движущейся над ней жидкости в момент времени *t;* $p_ш$ – давление на штуцере.

С забоя скважины пачку газа вытесняет промывочная жидкость со средней скоростью $v_н = Q_н/F_k$, где $Q_н$ - постоянная подача насосов. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ газовая пачка, расположенная на забое, и столб жидкости над ней неподвижны (циркуляция отсутствует). Тогда давление на пачку будет равно гидростатическому давлению плюс давлению на штуцере:

$$p_{з0} = p_ш + (L - h_0)\rho g. \tag{5}$$

Считаем, что давление на верхней границе пачки не отличается от среднего по объему газа и равно $p\big(h(t)\big)$. Уравнение состояния газа в пачке принимаем в виде закона Бойля-Мариотта: $pV(t) = const,$ где *V(t)* - переменный объём пачки. Тогда можно записать (рис. 1):

$$p\big(h(t)\big)[h - v_н t]F_k = [p_ш + (L - h_0)\rho g]h_0F_k. \tag{6}$$

Разрешив (6) относительно давления $p(h)$ и подставив последнее в (4), получим дифференциальное уравнение движения верхней границы газовой пачки:

$$\rho\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\lambda\rho}{2d_Г}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{[p_ш + (L - h_0)\rho g]h_0}{[h(t) - v_н t][L - h(t)]} - \frac{p_ш}{L - h(t)} - \rho g. \tag{7}$$

Поскольку в начальный момент газовая пачка на забое и жидкость над ней находятся в покое, начальные условия для уравнения (7) будут:

$$h(0) = h_0, \quad \frac{dh(0)}{dt} = 0. \tag{8}$$

где $h_0 -$ расстояние от забоя до верхней границы газовой пачки в начальный момент времени;

При известном $h = h(t)$, можно найти момент времени t_L, в котором верхняя граница газовой пачки достигает устье скважины, из уравнения:

$$h(t_L) = L. \tag{9}$$

Для этого момента времени забойное давление определяется по формуле:

$$p_з = p_ш + v_н t_L\rho g + \frac{\lambda t_L\rho {v_н}^3}{2d_Г}, \tag{10}$$

где $v_н -$скорость нижней границы пачки. Формула справедлива для значений времени $t \geq t_L$.

Если циркуляция прекращена в момент $t = t_L$, то в (9) следует положить $\lambda = 0$. При этом, забойное давление $p_з$ будет минимальным $p_{зм}$, а отношение $p_{зм}$ к $p_{з0}$ будет

$$\frac{p_{зм}}{p_{з0}} = \frac{p_ш + v_н t_L\rho g}{p_ш + (L - h_0)\rho g}. \tag{11}$$

Пусть по тем или иным технологическим причинам (например, из-за выхода из строя наземной обвязки) процесс вымыва пачки прекращён в момент $t < t_L$. Если в этот момент нижняя граница пачки находится на некоторой высоте $h_1 \geq h_1^*$ (h_1^* - критическая высота), то произойдёт выброс жидкости из скважины над пачкой, так как давление гидроразрыва $p_г$ в пачке будет больше давления $p_ж$ столба жидкости над пачкой. Тогда критическая высота h_1^* и соответствующее ей время *t**, а также критическое значение расстояния от забоя до нижней границы газовой пачки h_2^*, определяются из условия равновесия газовой пачки в скважине при отсутствии циркуляции. Формулы для них имеют вид [1, 2]

$$h_1^* = L + \frac{p_0}{\rho g} - 2\sqrt{\left[\frac{p_0}{\rho g} + (L - h_0)\right]h_0},\ t^* = \frac{h_1^*}{v_н},\ \ h_2^* = L + \frac{p_0}{\rho g} - \sqrt{\left[\frac{p_0}{\rho g} + (L - h_0)\right]h_0}. \qquad (12)$$

Если при $t = t^*$ циркуляция прекращена, то из скважины, произойдет выброс столба жидкости высотой $l^* = L - h_2^* + p_0/(\rho g)$ и она опорожнится до глубины, равной $2l^*$. Давление $p_{зм}$ на забое определяется по формуле $p_{зм} = \rho g l^*$.

Метод решения. Рассмотрим методику расчёта и алгоритм её численной реализации. С этой целью введём новую неизвестную функцию $u(t) = L - h(t)$, выражающую глубину залегания кровли пачки газа в момент времени t от устья скважины. Тогда $u(0) = u_0 = L - h_0$ - глубина залегания пачки газа в начальный момент. Из уравнения (7), относительно $u(t)$ получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \lambda_1\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = g + \frac{p_ш}{\rho u(t)} - \frac{h_0}{\rho}\,\frac{p_ш + \rho g u_0}{u(t)u_н(t)}. \qquad (13)$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = 0. \qquad (14)$$

Отсюда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} v'(t) = f\big(u(t), v(t)\big), \\ v(t) = u'(t), \end{cases} \qquad (15)$$

$$u(0) = u_0, \qquad v(0) = 0, \qquad (16)$$

где $u_н(t) = L - u(t) - v_н t$,

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2d_г}, \qquad f(u,v) = g + \frac{\lambda_1}{2d_г}v^2 - \frac{p_ш}{\rho u}\left(1 - \frac{h_0}{u_н(t)}\right) - \frac{g h_0 u_0}{u(t)u_н(t)}.$$

Для решения системы уравнений (15) с начальными условиями (16) применим численный метод конечных разностей [7]. Согласно с данным методом, заменяя производные, входящие в систему (15) с соответствующими конечными разностями, для последовательных значений времени $t_i = i \cdot \Delta t,\ \ i = 1, 2, 3, \ldots$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} v_{i+1} = v_i + f(u_i, v_i)\Delta t, \\ u_{i+1} = u_i + v_i \Delta t, \end{cases} \qquad (17)$$

где Δt −приращение по времени; $u_i = u(t_i),\ \ v_i = v(t_i),\ \ i = 0, 1, 2, \ldots$.

Используя начальные условия (16), из системы (15) определим последовательные значения $u_i,\ \ v_i$. Процесс вычисления продолжается до момента времени $t = t_L$, для которого $u(t_L)$=0, т.е. $h(t_L) = L$.

Результаты расчётов и обсуждение. На основе приведённого выше алгоритма разработана программа компьютерных расчётов. С помощью программы можно:

1) определить положение пачки газа в различные моменты времени;
2) найти момент времени t_L , в котором верхняя граница пачки достигает устья скважины;
3) определить забойное давление в начальный момент и в момент времени t_L, когда циркуляция прекращена;
4) определить критическое время и соответствующие ему расстояния от забоя до нижней и верхней границ газовой пачки, когда произойдет выброс жидкости из скважины из-за прекращения циркуляции в момент времени $t < t_L$;
5) вычислить относительной величины снижения забойного давления.

В качестве примера рассмотрим расчёт снижения забойного давления при вымыве из скважины пачки газа для значений объёмного расхода насоса:

$Q_н$=0.03 м^3/сек и $Q_н$=0.05 м^3/сек,

при исходных данных:

$p_0 = p_ш = 10^5$ Па, L=1500 м, V= 4 м^3,
ρ=1200 кг/м^3, λ=0.024, d_c=0.214 м, $d_н$ =0.114 м, g=9.81 м/сек^2.

В таблице 1 приведены значения функции $h(t)$ – расстояние в момент времени t от забоя до верхней границы газовой пачки и функции $u(t) = L - h(t)$, выражающую глубину залегания кровли пачки газа в момент времени *t* от устья скважины.

Таблица 1.

	$Q_н$=0.03 $м^3$/сек		$Q_н$=0.05 $м^3$/сек	
t, сек	*h(t), м*	*u(t)=L-h(t), м*	*h(t), м*	*u(t)=L-h(t), м*
20	227	1273	238	1262
40	262	1238	292	1208
60	299	1201	351	1149
80	335	1165	411	1089
100	373	1127	473	1027
120	410	1090	536	964
140	449	1051	602	898
160	487	1013	669	831
180	527	973	739	761
200	568	932	813	687
220	609	891	893	607
240	652	848	979	521
260	697	803	1077	423
280	743	747	1195	305
300	792	708	1359	141
320	844	656		
340	900	600		
360	961	539		
380	1030	470		
400	1111	389		
420	1212	288		
440	1387	143		

Результаты расчётов следующие:

Забойное давление в начальный момент времени: $p_{зо}$ = 15.29 МПа.

При объёмном расходе насоса $Q_н$=0.03 $м^3$/сек время, в котором верхняя граница газовой пачки достигает устья скважины, равно t_L = 7.50 мин. При этом забойное давление будет $p_з$ = 8.40 МПа, а минимальное забойное давление составляет $p_{зм}$ = 8.076 МПа, относительное минимальное забойное давление равно $p_{зм}/p_{зо}$ = 0.53.

При подаче насоса $Q_н$=0.05 $м^3$/сек. эти значения, соответственно равны: t_L= 5.14 мин; $p_з$ = 10.27 МПа; $p_{зм}$ = 9.23 МПа; $p_{зм}/p_{зо}$ = 0.60.

Критическая высота h_1* = 473.78 м, критическое значение расстояния от забоя до нижней границы газовой пачки h_2* = 987.32 м.

Видно, что увеличение объёмного расхода насоса на 66 % приводит: к уменьшению времени, в котором верхняя граница газовой пачки достигает устья скважины, на 32%; к увеличению забойного давления на 22% и увеличению минимального забойного давления на 14% .

Заключение. Решена задача математического моделирования снижения давления промывочной жидкости на забое при вымыве из скважины газовой пачки. Разработана методика численного решения задачи, которая позволяет: определить положение пачки газа в различные моменты времени; найти момент времени, в котором верхняя граница пачки достигает устья скважины; определить минимальное забойное давление; определить критическое время и соответствующее ему расстояние от забоя до нижней и верхней границ газовой пачки, когда произойдёт выброс жидкости из скважины из-за прекращения циркуляции. Показано, что увеличение объёмного расхода насоса на 66 % приводит к уменьшению времени, в котором верхняя граница газовой пачки достигает устье скважины на 32%.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Леонов И.Г., Исаев В.И. Гидроаэромеханика в бурении. – М.: Недра, 1997. – 304 с.

2. Судаков А.К. Гидроэромеханика в бурении. -Днепр: НГУ «ДП», 2020. -204 с. ISBN 978-5-9963-2616-7.

3. Тагиров К.М., Нифантов В.И. Бурение скважин и вскрытие нефтегазовых пластов на депрессии. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2003. –160 с.: ил. ISBN 5-8365-0132-7.

4. Чёрных И.А., Галкин В.А., Пономарёва И.Н. Сравнительный анализ методик определения забойного давления при эксплуатации добывающих скважин Шершневского месторождения // Изв.Томск.полит.унив-та. Инжиниринг георесурсов. -Томск, 2017. Т.328. № 8. -С. 41-47.

5. Мамедова Е. В. Определение забойного давления при режиме работы газлифтной скважины. // Булатовские чтения. Сборник статей. -Уфа, 2022. -С. 251-253.

6. Ермолаев А. И., Ефимов С. И., Пятибратов П. В. И др. Оценка предельного забойного давления, исключающего разрушение призабойной зоны пласта, на основе геомеханических исследований керна. SOCAR Proceedings. Special Issue No 1 (2023). 061-067. http: //proceedings.socar.az.

7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы [Электронный ресурс]. -М.: БИНОМ, 2015. – 636 с.

УДК 517.518.87

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОБЩЕГО ВИДА $D_{2,\omega}[\beta]$

Жалолов Икром Исомиддинович,
доцент кафедры «Компьютерная графика и информационные технологии» Ташкентского государственного транспортного университета
jalolovikrom84@gmail.com

Аннотация. *В данной статье представлен алгоритм построения дискретного аналога $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида. Исследование проводится в обобщённом пространстве Хёрмандера $H^{\mu}_{2,\omega}(0,1)$. Основной задачей работы является нахождение явного аналитического вида дискретного аналога для дифференциального оператора $[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}]^m$ при $m=2$. В процессе решения задачи используются прямое и обратное преобразования Фурье, а также функция, являющаяся фундаментальным решением рассматриваемого дифференциального оператора.*

Ключевые слова: *фундаментальное решение, прямое преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье, норма, пространство Хёрмандера, обобщенная функция, дифференциальный оператор, дискретный аналог.*

ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE DISCRETE ANALOGUE OF A GENERAL DIFFERENTIAL OPERATOR $D_{2,\omega}[\beta]$

Abstract. *This paper presents an algorithm for constructing the discrete analogue $D_{m,\omega}[\beta]$ of a general differential operator. The study is carried out in the generalized Hörmander space $H^{\mu}_{2,\omega}(0,1)$. The main objective of the paper is to obtain an explicit analytical expression for the discrete analogue of the differential operator $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$ for the case $m=2$. To solve this problem, the direct and inverse Fourier transforms, as well as the fundamental solution of the considered differential operator, are employed.*

Keywords: *fundamental solution, direct Fourier transform, inverse Fourier transform, norm, Hörmander space, generalized function, differential operator, discrete analog.*

UMUMIY KO‘RINISHDAGI $D_{2,\omega}[\beta]$ DIFFERENSIAL OPERATORNING DISKRET ANALOGINI QURISH ALGORITMI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada umumiy ko‘rinishdagi differensial operatorning $D_{m,\omega}[\beta]$ diskret analogini qurish algoritmi keltirilgan. Tadqiqot umumlashgan Xyormander fazosi $H^{\mu}_{2,\omega}(0,1)$ da olib borilgan. Ishning asosiy maqsadi $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$ differensial operatorining $m=2$ holi uchun diskret analogining oshkor analitik ko‘rinishini topishdan iborat. Masalani yechish jarayonida to‘g‘ri va teskari Furye almashtirishlari, shuningdek, qaralayotgan differensial operatorning fundamental yechimi qo‘llanilgan.*

Kalit so‘zlar: *fundamental yechim, to‘g‘ri Furye almashtirishi, teskari Furye almashtirishi, norma, Xyormander fazosi, umumlashgan funksiya, differensial operator, diskret analog.*

Введение. Впервые построением и изучением свойств оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, являющегося обращением оператора свёртки с функцией $G_{hH}^{(m)}[\beta]=h^n G_m(hH\beta)$, занимался С.Л. Соболев [1]. Для описания некоторого аналитического алгоритма отыскания оптимальных коэффициентов С.Л. Соболев определил и исследовал дискретный аналог $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m. Задача построения дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ при произвольном n оказалась очень трудной. С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решётчатых формул над пространством $L_2^{(m)}(R^n)$, и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера-Хопфа.

С.Л. Соболев, исследуя дискретную задачу типа Винера-Хопфа, доказал существование и единственность решения этой задачи и дал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул. В одномерном случае он свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $p(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ решению системы из $2m-2$ уравнений.

В одномерном случае, построением дискретного аналога $D_h^{(m)}[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ занимались З.Ж. Жамолов и Х.М. Шадиметов. Построением дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^4}{dx^4}+\frac{2d^2}{dx^2}+1$ занимался А.Р. Хаётов.

Постановка задачи. Так как настоящая работа рассматривается в обобщённом пространстве Хёрмандера $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$, то целесообразно привести определение этого пространства в следующем виде:

Определение 1. Пространство $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в (0,1) и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (см.[1,2]).

$$\left\| f(x) \right| \ H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}}] \cdot F[f(\omega x)](y) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\omega \neq 0$, F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье.

При выполнении условия $\nu_{\frac{m}{2}}(\omega x)=F^{-1}[(1+y^2)^{-\frac{m}{2}}] \quad (\omega x)\in L_2(0,1)$ пространство $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(0,1)$.

Условие вложения пространства $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ в пространство непрерывных функций $C(0,1)$ является необходимым условием в функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Скалярное произведение в $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ определяется как:

$$<\phi(\omega x),\psi(\omega x)>=\int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[f(\omega x)](y)] \cdot F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[\psi(\omega x)](y)]$$

В настоящей работе дан алгоритм построения дискретного аналога $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида:

$$\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m \tag{1}$$

при $m=2$, которая удовлетворяет равенству:

$$D_{2,\omega}[\beta]*V_{2,\omega}[\beta]=\delta[\beta], \tag{2}$$

где $V_{2,\omega}[\beta]=\nu_{2,\omega}(h\omega\beta)$, здесь $\nu_{2,\omega}[\beta]=F^{-1}\left[\left(1+y^2\right)\right]^{-2}(x)$, $x=\omega h\beta$ и

$$\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ 0, & \beta\neq 0\end{cases}. \tag{3}$$

Отсюда

$$V_{2,\omega}[\beta]=F^{-1}\left\{\left[1+y^2\right]^{-2}\right\}(x), x=h\omega\beta\ , \tag{4}$$

$F^{-1}[\varphi]$ - обратное преобразование Фурье функции φ, $\delta[\beta]$ - дискретная дельта-функция, которая равна единице при $\beta=0$ и равна нулю при $\beta\neq 0$, $h=\dfrac{1}{N}$, $N=2,3,...$, $[\beta]=h\beta$.

Из [20] нам известно, что

$$\nu_m(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp 2\pi iyx(1+y^2)^{-m}dy=\frac{\pi\exp(-2\pi|x|)}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k, \tag{5}$$

тогда фундаментальным решением дифференциального оператора общего вида (1), удовлетворяющим равенству (2), является следующая функция:

$$V_{m,\omega}(x)=\nu_{m,\omega}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp 2\pi iy\omega x(1+y^2)^{-m}dy=\frac{\pi\exp(-2\pi\omega|x|)}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi\omega)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k. \tag{6}$$

Из (6) при $m=2$ получим:

$$V_{2,\omega}(x)=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi\omega|x|}\left[1+2\pi\omega|x|\right]. \tag{7}$$

Метод решения задач. В работе [13] построен оператор $D_m[\beta]$ при случае $m=1$, и доказана следующая

Теорема 1. Для дискретного аналога дифференциального оператора $D_m[\beta]$ при $m=1$ имеет место равенство:

$$D_1[\beta]=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\operatorname{cth}(2\pi h), & \beta=0\\ -\dfrac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}, & |\beta|=1\\ 0, & |\beta|\geq 2\end{cases}$$

В настоящей работе покажем явный вид дискретного аналога $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида (1) при $m=2$.

Таким образом. доказана следующая

Теорема 2. Дискретный аналог $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида (1) при $m=2$, удовлетворяющий равенству (2), имеет вид:

$$D_{2,\omega}[\beta]=\frac{1}{\pi\left(2\omega\pi h\operatorname{ch}(2\omega\pi h)-\operatorname{sh}(2\omega\pi h)\right)}\begin{cases}2\left(\dfrac{2\omega\pi h-\operatorname{sh}(2\omega\pi h)\operatorname{ch}(2\omega\pi h)}{2\omega\pi h\operatorname{ch}(2\omega\pi h)-\operatorname{sh}(2\omega\pi h)}-4\operatorname{ch}(2\omega\pi h)\right)+\dfrac{A_1}{\lambda_1}, & \beta=0\\ 1+A, & |\beta|=1\\ A_1\lambda_1^{|\beta|-1}, | & \beta|\geq 2\end{cases}$$

где

$$A_{1,\omega}=\frac{\lambda_1^4-4ch\left(2\omega\pi h\right)\lambda_1^3+2\left(1+2ch^2\left(2\omega\pi h\right)\right)\lambda_1^2-4ch\left(2\omega\pi h\right)+1}{\lambda_1^2-1}$$

$$\lambda_{1,\omega}=\frac{\left(2\omega\pi h-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right)-\sqrt{\left(1-ch^2\left(2\omega\pi h\right)\right)\left(4\pi^2\omega^2h^2-\mathrm{sh}^2\left(2\omega\pi h\right)\right)}}{2\omega\pi h\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)}$$

$\left|\lambda_1\right|<1$ и h - малый параметр.

Доказательство:

Известно, что [18]

$$F\left[D_{m,\omega}\left(x\right)\right]=\left\{F\left[V_{m,\omega}^{*}\left(x\right)\right]\right\}^{-1}, \tag{18}$$

$$F\left[V_{m,\omega}\left(x\right)\right]\left(p\right)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_{m,\omega}\left(x\right)e^{2\pi ihp\beta} \tag{19}$$

Учитывая (8) из (19), имеем:

$$F\left[V_{2,\omega}\left(h\beta\right)\left(p\right)\right]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_{2,\omega}\left(h\beta\right)e^{2\pi ikhp}=$$

$$=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\nu_1\left(\omega h\beta\right)\left[1+2\pi\left|\omega h\beta\right|\right]e^{2\pi i\beta hp=}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\nu_{1,\omega}\left(\omega h\beta\right)e^{2\pi ih\beta p}+\omega\pi h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\left|\beta\right|\nu_{1,\omega}\left(\omega h\beta\right)e^{2\pi ih\beta p}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\pi e^{-2\omega\pi h\left|\beta\right|}e^{2\pi ih\beta p}+\pi^2\omega h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\left|\beta\right|e^{-2\pi\omega h\beta}e^{2\pi ih\beta p}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[1+2\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\cos\left(2\pi h\beta p\right)\right]+2\pi^2\omega h\sum_{\beta=1}^{\infty}\beta e^{-2\pi\omega h\beta}\cos\left(2\pi h\beta p\right) \tag{20}$$

Так как [13]

$$1+2\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\cos\left(2\pi h\beta p\right)=\frac{\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)}{\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\cos\left(2\omega\pi hp\right)}, \tag{21}$$

то из (20) имеем:

$$F\left[V_{2,\omega}\left(h\beta\right)\right]\left(p\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)}{\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\cos\left(2\omega\pi hp\right)}+\pi^2\omega h\sum_{\beta=1}^{\infty}\beta e^{-2\omega\pi h\beta}\cos\left(2\pi h\beta p\right). \tag{22}$$

Теперь вычислим:

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}\beta e^{-2\omega\pi h\beta}\cos\left(2\pi h\beta p\right). \tag{23}$$

Известно [8,21], что

$$\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-\beta t}\sin\left(\beta x\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(x\right)}{\mathrm{ch}\left(t\right)-\cos\left(x\right)}. \tag{24}$$

Для того чтобы вычислить (23), используем (24) и, значит, согласно [13] берём производную с обеих сторон (24) по x т.е.

$$\left(\sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-\beta t}\sin(\beta x)\right)_x' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{\mathrm{ch}(t)-\cos(x)}\right)_x'$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \beta e^{-\beta t}\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(t)\cdot\mathrm{ch}(x)-1}{\left(\mathrm{ch}(t)-\cos(x)\right)^2} \tag{25}$$

Если ввести обозначение $t = 2\omega\pi h$ и $x = 2\pi hp$, то из (25), получим:

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \beta e^{-2\omega\pi h\beta}\cos(2\pi h\beta p) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(2\omega\pi h)\cos(2\pi hp)-1}{\left(\mathrm{ch}(2\omega\pi h)-\cos(2\pi hp)\right)^2} \tag{26}$$

Имея в виду (26) из (22), получим:

$$F\left[\Psi_{2,\omega}(h\beta)\right](p) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\mathrm{sh}(2\omega\pi h)}{\mathrm{ch}(2\omega\pi h)-\cos(\pi hp)} +$$

$$+\frac{\pi^2\omega h}{2}\frac{\mathrm{ch}(2\omega\pi h)\cdot\cos(2\pi hp)-1}{\left(\mathrm{ch}(2\omega\pi h)-\cos(2\pi hp)\right)^2}. \tag{27}$$

Обозначая

$$\cos(2\pi hp) = \frac{e^{2\pi ihp}+e^{-2\pi ihp}}{2}, \quad \mathrm{sh}(2\omega\pi h) = a \text{ и } \mathrm{ch}(2\omega\pi h) = b,$$

после этого из (27) имеем:

$$F\left[\Psi_{2,\omega}(h\beta)\right](p) = \frac{\pi}{4}\frac{a}{b-\frac{e^{2\pi ihp}+e^{-2\pi ihp}}{2}} + \frac{\pi^2\omega h}{2}\frac{b\cdot\frac{e^{2\pi ihp}+e^{-2\pi ihp}}{2}-1}{\left(b-\frac{e^{2\pi ihp}+e^{-2\pi ihp}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{a}{2b-e^{2\pi ihp}-e^{-2\pi ihp}} + 2\omega\pi h\cdot\frac{b\left(e^{2\pi ihp}+e^{-2\pi ihp}\right)-2}{\left(2b-e^{2\pi ihp}-e^{-2\pi ihp}\right)^2}\right]. \tag{28}$$

Пусть $e^{2\pi ihp} = \lambda_\omega$, тогда из (28)

$$F\left[\Psi_{2,\omega}(h\beta)\right](p) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a}{2b-\lambda_\omega-\frac{1}{\lambda_\omega}} + \frac{2\omega\pi h\left[b\left(\lambda_\omega+\frac{1}{\lambda_\omega}\right)-2\right]}{\left(2b-\lambda_\omega-\frac{1}{\lambda_\omega}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{a\left(2b-\lambda_\omega-\frac{1}{2}\right)+2\omega\pi h\left[b\left(\lambda_\omega+\frac{1}{\lambda_\omega}\right)-2\right]}{\left(2b-\lambda_\omega-\frac{1}{\lambda_\omega}\right)^2}\right\} = = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{a\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)+2\omega\pi h\left[b\left(\frac{\lambda_\omega^2+1}{\lambda_\omega}\right)-2\right]}{\frac{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}{\lambda^2}}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\lambda_\omega\left[a\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)+2\omega\pi hb\left(\lambda_\omega^2+1\right)-4\omega\pi h\lambda_\omega\right]}{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\lambda_\omega\left[2ab\lambda_\omega-a\lambda_\omega^2-a+2\omega\pi h\lambda_\omega^2+2\omega\pi hb-4\omega\pi h\lambda_\omega\right]}{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\lambda\left[\left(2\omega\pi hb-a\right)\lambda_\omega^2+2\left(ab-2\omega\pi h\right)\lambda_\omega+2\omega\pi hb-a\right]}{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}\right\}=$$

$$= \frac{\left(2\omega\pi hb-a\right)\pi}{2}\left\{\frac{\lambda_\omega\left[\lambda_\omega^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1\right]}{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}\right\}. \tag{29}$$

Таким образом, имеем:

$$F\left[V_{2,\omega}\left(h\omega\right)\right]\left(p\right)=\frac{\pi\left(2\omega\pi hb-a\right)}{2}\left\{\frac{\lambda_\omega\left[\lambda_\omega^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1\right]}{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}\right\}. \tag{30}$$

Учитывая (30) из (18), получим:

$$F\left[D_{2,\omega}\left(h\beta\right)\right]\left(p\right)=\frac{2}{\left(2\omega\pi hb-a\right)\pi}\left\{\frac{\left(2b\lambda_\omega-\lambda_\omega^2-1\right)^2}{\lambda_\omega\left[\lambda_\omega^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1\right]}\right\}=$$

$$= \frac{2}{\left(2\omega\pi hb-a\right)\pi}\left[\frac{\lambda_\omega^4+1+4b^2\lambda_\omega^2-4b\lambda_\omega^3-4b\lambda_\omega+2\lambda_\omega^2}{\lambda_\omega\left(\lambda_\omega^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1\right)}\right]=$$

$$= \frac{2}{\left(2\omega\pi hb-a\right)\pi}\left[\frac{\lambda_\omega^2-4b\lambda_\omega^3+2\left(1+2b^2\right)\lambda_\omega^2-4b\lambda_\omega+1}{\lambda\left(\lambda^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda+1\right)}\right]. \tag{31}$$

Так как правая часть (31) является неправильной рациональной дробью, то его можно разлагать на элементарные дроби.

Поскольку многочлен

$$p_{2,\omega}\left(\lambda_\omega\right)=\lambda_\omega^2+2\frac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1=\lambda_\omega^2-2\frac{2\omega\pi h-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)}{2\omega\pi h\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)}\lambda_\omega+1$$

имеет два действительных корня

$$\lambda_{1,\omega}=\frac{\left(2\omega\pi h-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right)+\sqrt{\left(1-\mathrm{ch}^2 2\pi h\right)\left(4\pi^2\omega^2h^2-\mathrm{sh}^2\left(2\omega\pi h\right)\right)}}{2\pi h\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)},$$

$$\lambda_{2,\omega}=\frac{\left(2\omega\pi h-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right)-\sqrt{\left(1-\mathrm{ch}^2\left(2\omega\pi h\right)\right)\left(4\pi^2\omega^2h^2-\mathrm{sh}^2\left(2\omega\pi h\right)\right)}}{2\omega\pi h\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)-\mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)},$$

и $\lambda_{1,\omega}\cdot\lambda_{2,\omega}=1,\ \ \left|\lambda_{1,\omega}\right|<1$.

Тогда из (31) имеем:

$$\frac{2}{\left(2\omega\pi hb-a\right)\pi}\left[\frac{\lambda_\omega^4-4b\lambda_\omega^3+2\left(1+2b^2\right)\lambda_\omega^2-4b\lambda_\omega+1}{\lambda_\omega\left(\lambda_\omega^2+2\dfrac{ab-2\omega\pi h}{2\omega\pi hb-a}\lambda_\omega+1\right)}\right]=$$

$$= \frac{2}{\left(2\omega\pi h ch\left(2\omega\pi h\right) - sh\left(2\omega\pi h\right)\right)\pi}\left[\lambda_\omega + 2\left(\frac{2\omega\pi h - sh\left(2\omega\pi h\right)ch\left(2\omega\pi h\right)}{2\pi h ch\left(2\omega\pi h\right) - sh\left(2\omega\pi h\right)} - 4ch\left(2\omega\pi h\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{\lambda_\omega} + \frac{A_{1,\omega}}{\lambda_\omega - \lambda_{1,\omega}} + \frac{B_{1,\omega}}{\lambda_\omega - \lambda_{2,\omega}}\right]. \qquad (32)$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты $A, A_{1,\omega}$ и $B_{1,\omega}$ в уравнение (32) непосредственно подставляем $\lambda_\omega = 0, \lambda_\omega = \lambda_{1,\omega}$ и $\lambda_\omega = \lambda_{2,\omega}$.

При $\lambda_\omega = 0$, $A = 1,$ (33)

при $\lambda_\omega = \lambda_{1,\omega}$, $A_{1,\omega} = \dfrac{\lambda_{1,\omega}^4 - 4b\lambda_{1,\omega}^3 + 2\left(1+2b^2\right)\lambda_{1,\omega}^2 - 4b\lambda_{1,\omega} + 1}{\lambda_{1,\omega}^2 - 1},$ (34)

при $\lambda_\omega = \lambda_{2,\omega}$, $B_{1,\omega} = \dfrac{\lambda_{2,\omega}^4 - 4b\lambda_{2,\omega}^3 + 2\left(1+2b^2\right)\lambda_{2,\omega}^2 - 4b\lambda_{2,\omega} + 1}{\lambda_{2,\omega}^2 - 1}.$

Отсюда, учитывая, что $\lambda_{1,\omega} \cdot \lambda_{2,\omega} = 1,$ имеем:

$$B_{1,\omega} = -\frac{1}{\lambda_{1,\omega}^2} A_{1,\omega}. \qquad (35)$$

Таким образом, учитывая равенства (33), (34), (35), и $|\lambda_\omega| = 1$, $|\lambda_{1,\omega}| < 1$ и пользуясь формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, из (32) последовательно получим:

$$F\left[D_{2,\omega}\left(h\beta\right)\right](P) =$$

$$= \frac{2}{\left(2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\right)\pi}\left[\lambda_\omega + 2\left(\frac{2\omega\pi h - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)}{2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)} - 4\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{\lambda_\omega} + \frac{A_{1,,\omega}}{\lambda_\omega}\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_{1,\omega}}{\lambda_\omega}} - \frac{B_{1,\omega}}{\lambda_{2,\omega}}\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_\omega}{\lambda_{2,\omega}}}\right] = \frac{2}{\pi\left(2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\lambda_\omega + 2\left(\frac{2\omega\pi h - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)}{2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)} - 4\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{\lambda_\omega} + \frac{A_{1,\omega}}{\lambda_\omega}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{1,\omega}}{\lambda_\omega}\right)^\gamma - B_{1,\omega}\lambda_{1,\omega}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\lambda_{1,\omega}\lambda_\omega\right)^\gamma\right] =$$

$$= \frac{2}{2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)}\left[\lambda_\omega\left(1 + A_{1,\omega}\right) + 2\left(\frac{2\omega\pi h - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)}{2\omega\pi h \mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right) - \mathrm{sh}\left(2\omega\pi h\right)} - 4\mathrm{ch}\left(2\omega\pi h\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{1,\omega}}{\lambda_{1,\omega}} + \left(1 + A_{1,\omega}\right)\frac{1}{\lambda_{1,\omega}} + A_1\sum_{\gamma=-2}^{-\infty}\lambda_{1,\omega}^{-\gamma-1}\lambda_{1,\omega}^\gamma + A_{1,\omega}\sum_{\gamma=2}^{\infty}\lambda_{1,\omega}^{\gamma-1}\lambda_\omega^\gamma = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_2\left[\gamma\right]\lambda_\omega^\gamma. \qquad (36)$$

Отсюда имея в виду, что $\lambda_\omega = e^{2\pi i h P}$ получим явный вид дискретной функции $D_{2,\omega}\left[\beta\right]$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М: Наука, 1974, 808с.*

2. Жамолов З.Ж. Об одном разностном аналоге оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ *и его построение. В кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения. Ташкент. Фан, 1978, -с. 97 – 108.*

3. Шадиметов Х.М. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ *и его построение. Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1985, -с. 22-25.*

4. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ *УзМЖ, 2004, №2, -с. 85-95.*

5. Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ *и его свойства. УзМЖ, 2009, №3, -с. 81-88.*

6. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.*

7. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы.-Новосибирск: Изд-во ИМ РАН, 1996, 414с.

8. Данилов В.Л. и др. Математический анализ (справочная математическая библиотека), М. 1961. 438 с.

9. Shadimetov Kh. M., Mirzakabilov R.N. The extremal function of the difference formula in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$*. Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-Al Khorezmi, 2018, P.142-143.*

10. Kh. Shadimetov, F. A. Nuraliev. Optimization of quadrature formulas with derivatives. Problems of computational and applied mathematics, 2017, No.4, pp 61-70.

11. Nuraliev F.A., Boltaev A.K. On a discrete analogue of the differential operator. // Problems of computational and applied mathematics, 2019, No.2, pp 71-779.

12. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formulas for computing Fourier integrals in a Hilbert space. // Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.

13. Shadimetov Kh.M., Zhalolov I.I. On an algorithm for constructing an operator for determining the optimal coefficients of weighted quadrature formulas in space. // Uzbek Mathematical Journal 2010, №3, - pp. 178-187.

14. Ikrom I. Jalolov. The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution.// AIP Conference Proceedings 2365, 020015 (2021) https://doi.org/10.1063/5.0057025.

15.Жалолов И.И. Алгоритм оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$*. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 2022. № 6(45), с. 114-131.*

16.Kholmat Shadimetov and Ikrom Jalolov. A Representation of the Optimal Quadrature Formula in the Hormander Space $H_2^{\mu}(R)$*. // AIP Conf. Proc. 3004, 060048 (2024). https://doi.org/10.1063/5.0199860.*

17.Жалолов И.И. Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для постраения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, № 3/1(50). 2023. -с. 42-53.

18.Shadimetov Kh., Jalolov I. Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration. // Mathematics 2024,12, 738. https://doi.org/10.3390/math12050738.

19.Jalolov O.I. Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space.// AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021). https://doi.org/10.1063/5.0057015.

20. Jalolov O.I. Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space $\overline{L}_P^{(m)}(K_n)$*. AIP Conference Proceedings 2781 (1), 020066 (2023). https://doi.org/10.1063/5.0144837.*

21.И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Наука, физ-мат, М.1941.

УДК 517.516.87

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ Л. ХЁРМАНДЕРА $H_2^{\mu}(R)$

Жалолов Озоджон Исомидинович,
доцент Бухарского государственного университета
o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz
Мухсинова Мехринисо Шавкатовна,
докторант Бухарского государственного университета

Аннотация. *В данной работе рассматривается задача построения оптимальной квадратурной формулы для приближённого вычисления интегралов типа Фурье в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$. Для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы используется метод, основанный на решении дискретной задачи типа Винера-Хопфа. Представлен алгоритм построения дискретного аналога $D_h^{(m)}[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right)^m$, который позволяет определить оптимальные коэффициенты формулы. Доказаны существование и единственность оптимальной квадратурной формулы в рассматриваемом пространстве. В качестве примера детально исследован случай $m=1$, для которого получен явный вид оптимальных коэффициентов квадратурной формулы.*

Ключевые слова: *оптимальная квадратурная формула, интегралы типа Фурье, функционал погрешность, норма, пространство Хёрмандера, дискретный аналог, дифференциальный оператор.*

OPTIMAL QUADRATURE FORMULA FOR FOURIER-TYPE INTEGRALS IN THE HÖRMANDER SPACE $H_2^{\mu}(R)$

Abstract. *This paper considers the problem of constructing an optimal quadrature formula for the approximate evaluation of Fourier-type integrals in the Hörmander space $H_2^{\mu}(R)$. To determine the optimal coefficients of the quadrature formula, a method based on solving a discrete Wiener–Hopf-type problem is employed. An algorithm for constructing the discrete analogue $D_h^{(m)}[\beta]$ of the differential operator $\left(1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right)^m$ is presented, which makes it possible to determine the optimal coefficients of the quadrature formula. The existence and uniqueness of the optimal quadrature formula in the considered space are proved. As an illustrative example, the case $m=1$ is investigated in detail, and an explicit expression for the optimal coefficients of the quadrature formula is obtained.*

Keywords: *optimal quadrature formula, Fourier-type integrals, error functional, norm, Hörmander space, discrete analogue, differential operator.*

$H_2^{\mu}(R)$ XYORMANDER FAZOSIDA FURYE TIPIDAGI INTEGRALLAR UCHUN OPTIMAL KVADRATUR FORMULA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada $H_2^{\mu}(R)$ Xyormander fazosida Furye tipidagi integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formulani qurish masalasi ko‘rib chiqilgan. Kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini aniqlash uchun Viner–Xopf turidagi diskret masalani yechishga asoslangan usuldan foydalanilgan. Kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini topish imkonini beruvchi $\left(1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right)^m$ differensial operatorining diskret analogi $D_h^{(m)}[\beta]$ ni qurish algoritmi keltirilgan. Ko‘rib chiqilgan fazoda optimal kvadratur formulaning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Misol tariqasida $m=1$ holi batafsil o‘rganilib, kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarining aniq ko‘rinishi olingan.*

Kalit so'zlar: *optimal kvadratur formula, Furye tipidagi integrallar, xatolik funksionali, norma, Xyormander fazosi, diskret analog, differensial operator.*

Введение. Вычисление определённых интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики и численного анализа. В данной работе рассматривается вопрос о вычислении интегралов типа Фурье, где подынтегральная функция имеет с ограниченным числом экстремальных точек в интервале интегрирования и в качестве весовой функции берётся быстро колеблющаяся функция. При небольших значениях параметра быстро колеблющейся функции интеграл можно вычислить по обычным формулам механических квадратур, но, если значение параметра велико, это становится затруднительным из-за частого колебания множителя. Поэтому для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придётся делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющаяся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера-Хопфа (см. [1]).

В приложениях часто встречаются так называемый интегралы типа Фурье вида:

$$I_1(\sigma)=\int_a^b f(x)\cos\sigma x dx,\quad I_2(\sigma)=\int_a^b f(x)\sin\sigma x dx,\quad I_3(\sigma)=\int_a^b f(x)e^{i\sigma x}dx. \tag{1}$$

При небольших значениях параметра σ эти интегралы можно вычислить по классическим квадратурным формулам трапеция, Симпсона, Гаусса и т.д. Но, если значение σ велико, то вычисления становятся затруднительными из-за сильной осцилляции множителей $\cos\sigma x$ и $\sin\sigma x$.

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном [2]. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только $f(x)$ предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек. Формула Файлона является аналогом формулы Симпсона и переходит в нее при $\sigma\to 0.$

В настоящее время для вычисления интегралов (1) проведено много исследований, в частности получены аналоги формул прямоугольников [3], трапеций [4], Ньюнона-Котеса [5], Гаусса [6]. Эйнарсон [7] для вычисления интегралов (1) применил интерполяционный кубический сплайн типа. Как отмечает автор, во многих случаях его формула даёт лучший результат, чем формула Файлона, в формуле Эйнарсона присутствуют сплайновые моменты M_0 и M_N, которые надо заменить через вторые производные $f''(a)$ и $f''(b)$ (с некоторой точностью) или же найти из системы уравнений, определяющей параметры кубического сплайна. Если считать $M_0=M_N=0$, то погрешность формулы Эйнарсона будет иметь порядок h^3 и в этом случае формула Файлона является более точной, нежели формула Эйнарсона. В некоторых задачах в узлах x_k могут быть известны не только значения функции, но и значения её производных. Эта дополнительная информация даёт возможность построить квадратурные формулы более высокой степени точности. Известно, что из формул Файлона и Эйнарсона при $\sigma=0$ получается формула Симпсона.

2. Постановка задачи. В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \cos(2\pi\sigma x)f(x)dx\approx\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta f(x_\beta), \tag{2}$$

с функционалом погрешности:

$$\ell_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)\cos(2\pi\sigma x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\delta(x-x_\beta), \tag{3}$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (2), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ [8], и назовем её квадратурную формулу для интегралов типа Фурье.

Определение 1. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\left\| f \mid H_2^\mu(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[f^c(x)](\xi)](x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $f^c(x)$ класс функций, следы которых в области R совпадают, F -преобразование Фурье, $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx \quad , \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx .$$

Погрешность квадратурной формулы (2) будет линейным и непрерывным функционалом из пространства $H_2^{\mu^*}(R)$, сопряжённого пространства $H_2^\mu(R)$, т.е. $\ell_N(x) \in H_2^{\mu^*}(R)$.

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu^*}(R) \right. \right\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\left\| f \left| H_2^\mu(R) \right. \right\|} . \tag{4}$$

Норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β.

Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить нормы функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_β и x_β есть задача на исследование функции одной переменной на экстремум.

Если

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N \mid H_2^{\mu^*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|< \ell_N(x), f(x) >|}{\left\| f \mid H_2^\mu(R) \right\|} \tag{5}$$

то говорят, что функционал $\overset{0}{\ell}_N(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле для интегралов типа Фурье в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (2) имеет вид:

$$\psi_e(x) = [\cos(2\pi\sigma x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta), \tag{6}$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хермандера $H_2^\mu(R)$ имеет следующий вид:

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu^*}(R) \right. \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [\cos(2\pi\sigma x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx , \tag{7}$$

где

$$\nu_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp 2\pi i y x (1 + y^2)^m dy = \frac{\pi \exp(-2\pi|x|)}{2^{2m-2} \cdot (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)! \cdot (4\pi)^k}{k! \cdot (m-k-1)!} |x|^k , \tag{8}$$

является фундаментальным решением дифференциального оператора:

$$\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dx^2} \right]^m \tag{9}$$

По теоремы Бабушки [1] известно, что экстремальная функция функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы обращается в нуль в узлах квадратурной формулы, имея ввиду это, из (6) получим:

$$\psi_{\ell}(h\alpha)=0, \quad \alpha=0,1,...,N. \tag{10}$$

Таким образом справедливо следующая

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула для интегралов типа Фурье (2), коэффициенты который являются решением системы линейных уравненный (10) в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$, существует и она является единственная.

Решить эту систему (10) известными методами удаётся не всегда, из-за малости определителя системы. В связи с этим С.Л.Соболев [1] предложил метод, который позволяет определять оптимальные коэффициенты квадратурной формулы.

Переобозначив $C[\beta]=C_{\beta}$ и $\nu_h^{(m)}[\beta]=\nu_m(h\beta)$, систему (10) можно записать в виде свёртки функций дискретного аргумента:

$$C[\beta]*\nu_h^{(m)}[\beta]=f_m[\beta],\ \beta=0,1,...,N, \tag{11}$$

$$C[\beta]=0,\ h\beta\notin[0,1], \tag{12}$$

где

$$f_m[\beta]=\int_0^1 cos\left(2\pi\sigma y\right)\nu_m(h\beta-y)dy. \tag{13}$$

Систему уравнений (11), (12) будем обозначать системой B.

Рассмотрим соответствующую задачу.

Задача B. Найти дискретную функцию $C[\beta]$, удовлетворяющую системе B при заданных $f_m[\beta]$.

Главная идея этого метода состоит в замене неизвестной функции $C[\beta]$ на функцию $u_h^m[\beta]=u^m(h\beta).$

А именно, вместо $C[\beta]$ вводится неизвестная функция:

$$u_h^m[\beta]=\nu_h^{(m)}[\beta]*C[\beta]. \tag{14}$$

Тогда необходимо найти оператор $D_m(h\beta)=D_h^{(m)}[\beta]$, который удовлетворяет равенству:

$$D_h^{(m)}[\beta]*\nu_h^{(m)}[\beta]=\delta(h\beta), \tag{15}$$

где $\delta[h\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ 0, & \beta\neq 0.\end{cases}$

Из (14), учитывая (15), получим:

$$C[\beta]=D_h^{(m)}[\beta]*u_h^{(m)}[\beta]. \tag{16}$$

Ставим следующую задачу.

Задача $B1$**:** Найти функцию $u_h^{(m)}[\beta]$ при $h\beta\notin[0,1]$.

Приступим к решению задачи В1.

Функция $u_h^{(m)}[\beta]$ известна для $\beta=0,1,...,N,$ т.е $u_h^{(m)}[\beta]=f_m[\beta]$. Позже будет доказано, что дискретная функция $D_h^m[\beta]$ убывает на бесконечносьт быстрее любой отрицательной степени β. Таковой является также и функция $\nu_h^m[\beta]$. Функция $C[\beta]$ является финитной. Вследствие этих свойств тройная свёртка $D_h^m[\beta]*\nu_h^m[\beta]*C[\beta]$ будет обладать свойствами группировки и сочетательности. Используя эти свойства тройной свёртки $D_h^m(h\beta)*\nu_h^m(\beta)*C[\beta],$ при $h\beta\notin[0,1]$ имеем:

$$D_m(h\beta)*u^m(h\beta)=D_h^m[\beta]*\nu_h^m[\beta]*C[\beta]=\left[\sum_{\gamma}D_m(h\gamma)\cdot\nu_m(\gamma h-\beta h)\right]*C[\beta]=$$

$$= C[\beta] * \sum_{\gamma} C(h\gamma) \cdot \delta(h\gamma - h\beta) = 0.$$

Здесь учтено, что $\delta(h\gamma - h\beta) = 0$, при $h\beta \neq h\gamma$.

3. Метод решения задач. Из произведённых вычислений следует следующая теорема.

Теорема 3. Функция $u^m(h\beta)$ имеет вид:

$$u_h^m[\beta] = \begin{cases} f_m[\beta], & h\beta \in [0,1], \\ \sum_{\alpha=0}^{N} C[\alpha] \nu_m(h\alpha - h\beta), & h\beta \notin [0,1] \end{cases}. \tag{17}$$

При вычислении коэффициентов $C[\beta]$ нам необходимо знать конкретные значения $u^m(h\beta)$ при $h\beta \notin [0,1]$. Как видно из (17), из вида функции $u^m(h\beta)$ невозможно определить конкретные значения $u^m(h\beta)$, при $h\beta \notin [0,1]$, так как в нём участвуют $N+1$ неизвестные $C[\beta]$, конкретные значения $u^m(h\beta)$ будут определены в ходе вычисления коэффициентов $C[\beta]$, когда будет известна функция $D_h^m[\beta]$.

Справедлива следующая (см. [11])

Теорема 4. Дискретный аналог дифференциального оператора $\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dx^2}\right]^m$ при $m = 1$ имеет вид:

$$D_1[\beta] = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\exp(4\pi h) + 1}{\exp(4\pi h) - 1}, & \beta = 0 \\ \frac{\exp(2\pi h)}{1 - \exp(4\pi h)}, & |\beta| = 1 \end{cases}, \tag{18}$$

или

$$D_1[\beta] = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \operatorname{cth}(2\pi h), & \beta = 0 \\ -\frac{1}{2\pi \operatorname{sh}(2\pi h)}, & |\beta| = 1 \\ 0, & |\beta| \geq 2 \end{cases}. \tag{19}$$

Тепер докажем следующую теорему.

Теорема 5. Среди всех квадратурных формул вида (2) решётчатая квадратурная формула для интегралов типа Фурье:

$$\int_0^1 \cos(2\pi\sigma x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} {}^{0}C[\beta] f[\beta],$$

определяемая коэффициентами (25), (26), (27), является единственной оптимальной в пространстве $H_2^{\mu}(R)$.

Из равенства (16) при $m = 1$ имеем:

$$C_{\beta} = D_h^1[\beta] * u_h^1[\beta], \tag{20}$$

где $D_h^1[\beta]$ определяется формулой (18) или (19), а $u_h^1[\beta]$ определяется формулами:

$$u_h^1[\beta] = f_1[\beta], \tag{21}$$

когда $\beta = 0,1,...,N$, где $f_1[\beta] = \int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\nu_1(h\beta - y)dy$. При $\beta < 0$ и $\beta > N$ $u_h^{(m)}[\beta]$ пока не определена. Однако, используя вид функции $u_h^1[\beta]$ для $\beta < 0$ и $\beta > N$, по формуле (14) удаётся определить их конкретные значения. Действительно, по формуле (11)

$$u_h^1(h\gamma) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_1(h\gamma - h\beta), \tag{22}$$

где $\nu_1(x) = \exp(-2\pi|x|)$. Используя вид $\nu_1(x)$, мы покажем, что

$$u_h^1(-h) = \exp(-2\pi h)u(0) \text{ и } u_h^1((N+1)h) = \exp(-2\pi h)u_h^1(Nh).$$

Из общего вида $u_h^1(h\gamma)$ имеем:

$$u_h^1(0) = C_0\nu_1(0) + C_1\nu_1(-h) + C_2\nu_1(-2h) + ... + C_N\nu_1(-Nh),$$

$$u_h^1(-h) = C_0\nu_1(-h) + C_1\nu_1(-2h) + C_2\nu_1(-3h) + ... + C_N\nu_1(-(N-1)h) =$$

$$= \exp(-2\pi h)\left(C_0 + C_1\exp(-h) + C_2\exp(-2h) + ... + C_N\exp(-Nh)\right) = \exp(-2\pi h)u_h^1(0) \tag{23}$$

и

$$u_h^1(Nh) = \left(C_0\exp(-2\pi Nh) + C_1\exp(-2\pi(N-1)h) + ... + C_N\exp(-2\pi 0)\right),$$

$$u_h^1((N+1)h) = \exp(-2\pi h)\left(C_0\exp(-2\pi Nh) + C_1\exp(-2\pi(N-1)h) + ... + C_N\right) =$$

$$= \exp(-2\pi h)u_h^1(Nh). \tag{24}$$

Эти значения функции $u_h^1[\beta]$ нам достаточны для определения оптимальных коэффициентов. Из (14) имеем:

$$C[\beta] = D_h^1[\beta] * u_h^1[\beta] = \sum_{\alpha=-1}^{1} D_h^1(h\alpha)u_h^1(h\alpha - h\beta).$$

Отсюда, в силу формул (19), (20), (21), для оптимальных коэффициентов $\overset{0}{C}[\beta]$ имеем:

$$\overset{0}{C}[\beta] = \frac{1}{\pi}\operatorname{cth}(2\pi h)\cdot u_h^1[\beta] - \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}u_h^1[\beta-1] - \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}u_1[\beta+1] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{cth}(2\pi h)\int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\nu_1(h\beta - y)dy - \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\nu_1(h(\beta-1) - y)dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\nu_1(h(\beta+1) - y)dy,$$

при $\beta = 1,2,...,N-1$. Из общего вида функции $\nu_m(x)$ при $x = h\beta$ из формулы (8) следует:

$$\nu_1(x) = \pi\exp(-2\pi h|\beta|).$$

Имея в виду это, получим:

$$\overset{0}{C}[\beta] = \operatorname{cth}(2\pi h)\cdot\int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\exp(-2\pi|h\beta - y|)dy -$$

$$\frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 \cos(2\pi\sigma x)\exp(-2\pi|h(\beta-1) - y|)dy -$$

$$-\frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 \cos(2\pi\sigma y)\exp(-2\pi|h(\beta+1) - y|)dy, \quad \beta = 1,2,...,N-1. \tag{25}$$

В силу (20), (21), (22) и (8) получим:

$$\overset{0}{C}[0] = \pi\operatorname{cth}(2\pi h)u_h^1[0] - \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}u_h^1[-h] - \frac{1}{2\pi\operatorname{sh}(2\pi h)}u_h^1[h] =$$

$$= \pi \mathrm{cth}\left(2\pi h\right) u_h^1[0] - \frac{1}{2\pi \mathrm{sh}\left(2\pi h\right)} u_h^1[0] - \frac{1}{2\pi \mathrm{sh}\left(2\pi h\right)} u_h^1[h] =$$

$$= \mathrm{cth}\left(2\pi h\right) \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma y\right) \exp(-2\pi|0-y|)dy - \frac{\exp\left(2\pi h\right)}{2\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma x\right) \exp(-2\pi|-y|)dy -$$

$$- \frac{1}{2\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma x\right) \exp(-2\pi|h-y|)dy =$$

$$= \mathrm{cth}(2\pi h) \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma y\right) \exp(-2\pi y)dy - \frac{\exp\left(2\pi h\right)}{2\mathrm{sh}(2\pi h)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma y\right) \exp(-2\pi y)dy -$$

$$- \frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma y\right) \exp(-2\pi|h-y|)dy. \qquad (26)$$

Таким же образом, учитывая (19), (20), (18) и (21), имеем:

$$C[N] = \mathrm{cth}(2\pi h) \cdot \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma x\right) \exp(-2\pi|Nh-y|)dy -$$

$$\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma x\right) \exp(-2\pi|(N-1)h-y|)dy -$$

$$- \frac{1}{2\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)} \int_0^1 \cos\left(2\pi\sigma y\right) \exp(-2\pi|h(N+1)-y|)dy.$$

(27)

Что и требовалось доказать.

В заключение отметим,что нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул для интегралов типа Фурье в пространстве непериодических функций Хёрмандера $H_2(R)$ выполнено в случае $m=1$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.

2. Filon N.G. On a quadrature for trigonometric integrals. Proc. Roy. Soc. (Edinburgh) 49, 38–47 (1928)

3. Исраилов М.И., Нуриддинов М. Приближённое вычисление интегралов с быстроколеблющимся подынтегральным выражением. Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент: ИК с ВЦ АН УзССР, 1972, вып. 14, с. 103-116.

4. Tuck. E. O. A simple Filon- trapezoidaol rule- Matematics of compution, 1967, 21, p. 239-241.

5. Luke Y. L. On the computation of oscillatory integrals, Part 2 –Proc.combridge Pilos.soc; 1954, 50, p 267-277.

6. Einarsson B. Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines. – BIT, 1968, 8, p. 279-286.

7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961 – 524 с.

8. Валевич Л.Р. и Панеяк Б.П. Некоторые пространства обобщённых функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.

9. Шадиметов Х.М., Жалолов И.И. Об одном алгоритме построения оператора $D_h^m[\beta]$ для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве $W_2^m(R)$. –УзМЖ 2010, №3, -с. 178-187.

10. Kholmat Shadimetov and Ikrom Jalolov. A Representation of the Optimal Quadrature Formula in the Hormander Space $H_2^\mu(R)$. // AIP Conference Proceedings. 2781, 020041 (2024) https://doi.org/10.1063/5.0144834.

11. Shadimetov Kh., Jalolov I. Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration. Mathematics 2024,12, 738. https://doi.org/10.3390/math12050738.

UO‘K 519.633

SONLI PROGRESSIYALARNING XOSSALARI HAMDA AMALIY MASALALARDAGI QO‘LLANILISHI

Oramov Jura,
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti
Matematika fanlari kafedrasi dotsenti
alimxanovanigora210@gmail.com
ORCID: 0009-0000-7169-0078

Annotatsiya. *Ketma-ketliklar nazariyasining muhim xususiy holi bo‘lgan progressiyalari tushunchasini, xossalarini va turli muammolarni yechishdagi tatbiqlarini o‘rganish ko‘plab matematiklarning tadqiqotlarida o‘z aksini topgan. Mazkur maqolada sonli progressiyalar, jumladan, arifmetik va geometrik progressiyalarning nazariy asoslari, asosiy xossalari hamda ularning amaliy masalalardagi qo‘llanilishi tahlil qilingan. Tadqiqot davomida progressiyalarning umumiy hadi va yig‘indi formulalari ilmiy jihatdan yoritilib, turli matematik hamda amaliy masalalarni yechishda qo‘llash usullari ko‘rib chiqilgan hamda progressiyalarni xossalarini va bu nazariyani turli konkret, qiziqarli misol va masalalarni yechishdagi tatbiqlarini o‘rganish ko‘zda tutilgan. Shuningdek, iqtisodiyot, fizika, texnika va axborot texnologiyalarida sonli progressiyalarning qo‘llanishiga oid misollar keltirilgan. Maqolada mantiqiy tahlil, taqqoslash va matematik modellashtirish metodlaridan foydalanilgan. Tadqiqot natijalari sonli progressiyalar mavzusini chuqur o‘rganish, nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog‘lash hamda matematika ta’limi samaradorligini oshirishga xizmat qiladi va hozirgi kunda ham bu mavzu dolzarbligicha qolmoqda.*

Kalit so‘zlar: *arifmetik progressiya, geometrik progressiya, ayirma, maxraj, n-had formulasi, dastlabki n ta had yig‘indisi, xarakteristik xossa, cheksiz kamayuvchi progressiya va uning yig‘inidisi, yig‘indi formulasi, matematik modellashtirish, amaliy masalalar, matematik tahlil.*

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ПРОГРЕССИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Аннотация. *Изучение понятия прогрессий, являющихся важным частным случаем теории последовательностей, их свойств и применения при решении различных задач нашло отражение в исследованиях многих математиков. В данной статье анализируются теоретические основы, основные свойства числовых прогрессий, включая арифметические и геометрические, а также их применение в практических задачах. В ходе исследования были научно освещены формулы общих членов и сумм прогрессий, рассмотрены методы их применения при решении различных математических и практических задач, а также предусмотрено изучение свойств прогрессий и применения этой теории при решении различных конкретных, интересных примеров и задач. Также приведены примеры применения численных прогрессий в экономике, физике, технике и информационных технологиях. В статье использованы методы логического анализа, сравнения и математического моделирования. Результаты исследования служат углубленному изучению темы числовых прогрессий, связыванию теоретических знаний с практикой и повышению эффективности математического образования, и эта тема остается актуальной и в настоящее время.*

Ключевые слова: *арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, разность, знаменатель, формула n-го члена, сумма первых n членов, характеристическое свойство, бесконечно убывающая прогрессия и её сумма, формула суммы, математическое моделирование, практические задачи, математический анализ.*

PROPERTIES OF NUMERICAL PROGRESSIONS AND THEIR APPLICATION IN PRACTICAL PROBLEMS

Abstract. *The study of the concept of progressions, which constitute an important special case in the theory of sequences, their properties, and their application in solving various problems has been reflected in the research of many mathematicians. This article analyzes the theoretical foundations, main properties of numerical progressions, including arithmetic and geometric progressions, as well as their application in practical problems. During the research, the formulas for the general terms and sums of progressions were*

scientifically explained, methods of their application in solving various mathematical and practical problems were examined, and the study of the properties of progressions together with the application of this theory in solving specific, interesting examples and problems was considered. Examples of the application of numerical progressions in economics, physics, engineering, and information technologies are also presented. The article employs methods of logical analysis, comparison, and mathematical modeling. The results of the research contribute to a deeper study of the topic of numerical progressions, the integration of theoretical knowledge with practice, and the improvement of the effectiveness of mathematics education. Therefore, this topic remains relevant at the present time as well.

Keywords: *rithmetic progression, geometric progression, common difference, common ratio, formula for the nth term, sum of the first n terms, characteristic property, infinitely decreasing progression and its sum, sum formula, mathematical modeling, practical problems, mathematical analysis.*

Kirish. Matematikada ketma-ketliklarning turli ko‘rinishlari, ularning xossalarini va turli tatbiqlarini o‘rganish muhim ijodiy ish hisoblanadi.

Progressiyalarning xossalarini o‘rganish matematik fikrlashni rivojlantirish, mantiqiy tahlil qilish va muammolarni yechish ko‘nikmalarini shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Shu bilan birga, ularning amaliy tatbiqlari bank tizimida foizlar hisoblash, aholi o‘sish dinamikasini tahlil qilish, kredit va investitsiya jarayonlarini baholash, kompyuter algoritmlari hamda fizik jarayonlarni modellashtirishda keng namoyon bo‘ladi.

Mazkur maqolada progressiyalarning asosiy turlari, ularning muhim xossalari va amaliy tatbiqlari atroflicha yoritiladi. Shuningdek, arifmetik va geometrik progressiyalarga oid nazariy ma’lumotlar, formulalar hamda turli misollar orqali ularning ahamiyati tahlil qilinadi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. “Progressiyalar ularning turlari, xossalari va tatbiqlari**”**mavzusini yoritishda foydalanilgan adabiyotlar mazkur mavzuning nazariy va amaliy jihatlarini ochib berishda muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan, Lyapin S.YE., Baranova I.V., Borchugova Z.T. tomonidan yaratilgan “Сборник задач по элементарной алгебре”, Kochetkov B.S., Kochetkova E.S. tomonidan yaratilgan “Algebra va elementar funksiyalar” nomli darsliklarda elementar algebra masalalarini chuqur o‘rganishga xizmat qiluvchi muhim manbalardan biri hisoblanib mavzuni chuqur tushunishga yordam beradi. I.A. Baranov va hammualliflarning matematika darsliklarida progressiyalar ketma-ketliklarning muhim turi sifatida izohlanib, arifmetik hamda geometrik progressiyalarning asosiy formulalari sodda va tushunarli tarzda aniqlashdagi o‘rni tushuntirilgan. B.A. Gusev va A.G. Mordkovichning darsliklarida arifmetik va geometrik progressiyalarning xossalarini matematik isbotlar bilan tushuntirib, formulalar yordamida limitlarni hisoblash usullari nazariy va amaliy misollar orqali ko‘rsatib berilgan, bu o‘quvchilarning analitik tafakkurini rivojlantirishga yordam beradi.

Tadqiqot metodologiyasi. Mazkur maqolada progressiyalarni xossalarini va bu nazariyani turli konkret, qiziqarli misol va masalalarni yechisdagi tatbiqlarini o‘rganish ko‘zda turilgan.

Ta’rif: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday o‘zgarmas d soni va barcha n natural sonlar uchun $a_{n+1} = a_n + d$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\{a_n\}$ ketma-ketlikka arifmetik progressiya deyiladi.

Ta’rif: Agar $\{b_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $q \neq 0$ o‘zgarmas son topilib, barcha n natural sonlarda $b_{n+1} = b_n \cdot q$ tenglik bajarilsa, $(b_1 \neq 0)$, $\{b_n\}$ ketma-ketlikka geometrik progressiya deyiladi.

d songa $\{a_n\}$ arifmetik progressiyaning ayirmasi, q songa esa $\{b_n\}$ geometrik progressiyaning maxraji deyiladi.

Izoh: Agar $\{a_n\}$ arifmetik progressiyada $a_n = const, \forall n \in N, (d = 0)$ bo‘lsa, u o‘zgarmas ketma-ketlik bo‘ladi.

Masalan: 3;3;3;...;3;.., bu yerda $a_1 = 3, d = 0$

Izoh: Agar $\{b_n\}$ geometrik progressiyada $q = 1$ bo‘lsa, masalan: 5;5;5;...;5;.. $b_1 = 5, q = 1$ o‘zgarmas geometrik progressiya bo‘ladi.

Izoh: Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ progressiyalarda hadlar soni chegaralangan bo‘lsa, bunday holda mos ravishda chekli arefmetik va chekli geometrik prgressiyalar deb ataladi.

Arifemtik progressiyaning xossalari.

1° Arifmetik progressiyaning n-hadining formulasi:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad \forall n \in N$$

Shuningdek, ixtiyoriy *n* va *k* natural sonlar uchun

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Natija: $\{a_n\}$ arifmetik progressiyaning ayirmasi uchun ushbu tenglik o‘rinli:

$$d = \frac{a_n - a_k}{n-k}, \qquad (n \neq k)$$

2° $\{a_n\}$ arifmetik progressiya uchun, har qanday *m,n,p,k* natural sonlar $m+n=p+k$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda:

$$a_m + a_n = a_p + a_k$$

tenglik o‘rinlidir.

3° Arifmetik progressiyaning dastlabki *n* ta hadi yig‘indisi formulasi:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

4° Xarakteristik xossasi: ketma-ketlikningi birinchi hadidan (chekli arifmetik progressiya bo‘lgan holda oxirgi hadidan) tashqari har bir hadi o‘zidan oldingi va o‘zidan keyingi hadlarining o‘rta arifmetigi

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{1}, \qquad \forall n \geq 2, \qquad n \in N$$

ga teng bo‘lganda va faqat shunda bu ketma-ketlik arifmetik progressiya bo‘ladi.

Geometrik progressiyaning xossalari.

1° Geometrik progressiyaning n-hadi formulasi:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \ q \neq 1, \qquad \forall n \epsilon N;$$
$$b_n = b_k \cdot q^{n-k}, \ \forall n, k \epsilon N$$

2° Geometrik progressiyaning maxraji:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_2}{b_1}.$$

3° $\{b_n\}$ ketma-ketlik maxraji q bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lsa, m, n, k, p natural sonlar $m+n=p+k$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda

$$b_m \cdot b_n = b_p \cdot b_k$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

4° Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig‘indisining formulasi:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}; \ S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}, (q \neq 1), \forall n \epsilon N$$

Agar q=1 bo‘lsa, $S_n = nb_1$ bo‘ladi

5° Xarakteristik xossasi: ketma-ketlikning birinchi hadidan tashqari (chekli geometrik progressiya bo‘lgan holda oxirgi hadidan tashqari) har bir hadi o‘zidan oldingi va keyingi hadlari bilan

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \ \forall n \geq 1, \qquad n \in N$$

formula yordamida bog‘langan holda va faqat shu holda ketma-ketlik geometrik progressiya bo‘ladi.

Cheksiz kamayuvchi progressiya va uning yig‘indisi.

Ta’rif: Agar $\{b_n\}$ geometrik progressiyada $|q| < 1$ bo‘lsa, bu progressiya cheksiz kamayuvchi deyiladi.

Bu progressiyaning dastlabki n ta hadining yig‘indisi

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

ga tengligi ma’lum.

Limitlar nazariyasiga asosan :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1-q^n) =$$
$$= \frac{b_1}{1-q}\left[\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right]$$

Ravshanki: $\lim_{n\to\infty} = 1$; $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, (chunki $|q| < 1$)

Shu sababdan

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \cdots + b_1 q^{n-1} + \cdots) = \frac{b_1}{1-q}; (|q| < 1)$$

$S = \frac{b_1}{1-q}$ tenglik bilan aniqlanuvchi S ga $\{b_n\}$ $(|q| < 1)$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi deyiladi, ya’ni:

$$S = b_! + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

1-misol. Ushbu 0,454545... sodda davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantiring.

Yechilishi: Berilgan kasrni cheksiz yig‘indi shaklida yozib olamiz:

$$0{,}454545 \ldots = \frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \cdots$$

Bu tenglikning o‘ng qismi birinchi hadi $b_1 = \frac{45}{100}$ ga, maxraji esa $q = \frac{1}{100}$ ga teng bo‘lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisidan iborat. Shu sababli

$$0{,}454545\ldots = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Demak, javob: $\frac{5}{11}$

Izoh: Berilgan sodda davriy o‘nli kasrni sodda davriy kasrlarni oddiy kasrga aylantirishning umumiy qoidasidan ham foydalanib hosil qilish mumkin, biz bu yerda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisini topish formulasini tatbiqi sifatida hosil qilishni ko‘rsatdik.

2-misol. Ushbu yig‘indini toping:

$$\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\cdots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\cdots$$

Yechilishi: Yig‘indining n-hadini quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}, \qquad \forall n \in N$$

U holda, berilgan yig‘indini G desak:

$$G = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots\right)$$

Har ikkala qavs ichiga birinchisida $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2} < 1$, ikkinchisida $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3} < 1$ bo‘lgan cheksiz kamayuvchu geometrik progressiyalar yig‘indisi turibdi, $S = \frac{b_1}{1-q}$ formula bo‘yicha ularni hisoblasak:

$$G = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Demak, javob: $1\frac{1}{2}$.

3-misol. $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$ bo‘lgan arifmetik progressiyaning dastlabki yigirmata hadini yig‘indisini toping.

Yechilishi: Arifmetik progressiyaning umumiy had formulasiga asosan:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_6 = a_1 + 5d \\ a_9 = a_1 + 8d \\ a_{12} = a_1 + 11d \\ a_{15} = a_1 + 14d \end{matrix}\right\} + \Rightarrow 2a_1 + 19d = 10, (*)$$

ni topamiz.

Masala shartiga ko‘ra esa:

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = [a_1 + (a_1 + 19d)] \cdot 10 = (2a_1 + 19d) \cdot 10$$

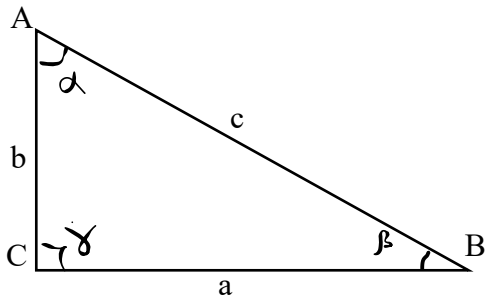
(*) tenglikni e’tiborga olsak:

$$S_{20} = 100$$

ekanligini topamiz. Demak, javob: 100.

Geometrik masalalarni yechishga progressiyalar tatbiqi sifatida ushbu masalalarni qaraymiz:

1-masala. To‘g‘ri burhcakli uchburchakning tomonlari arifmetik progressiya tashkil qiladi. Bu uchburchakning burchaklarini toping.



Yechilishi: $\Delta ABC -$ to‘g‘ri burchakli uchburchak: $AC = b, BC = a$ – katetlar, $AC = c -$ gipotenuza, $\angle ACB = \gamma = 90°; \angle CAB = \alpha$

$\angle CBA = \beta$.

b, a, c tomonlar arifmetik progressiyasini tashkil qiladi:

$b; a = b + d; c = b + 2d$ (bu yerda d – arifmetik progressiyani maxraji, $d > 0$).

Pifagor teoremasiga asosan:

$$a^2+b^2=c^2\begin{bmatrix} b \\ a=b+d \\ c=b+2d \end{bmatrix}\Rightarrow (b+d)^2+b^2=(b+2d)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2-2bd-3d^2=0.$$

$$b_{1,2}=d\pm\sqrt{d^2+3d^2}=d\pm 2d;\ b_1=3d, b_2=-d$$

($b_2<0$ bo‘lgani uchun) $b_1=3d$ ni olamiz, $b=3d$.

U holda, $a=b+d=3d+d=4d,\ a=4d$ bo‘ladi.

$$tg\alpha=\frac{a}{b}\Rightarrow tg\alpha=\frac{4d}{3d}=\frac{4}{3}\Rightarrow \alpha=arctg\frac{4}{3};$$

$$tg\beta=\frac{b}{a}\Rightarrow tg\beta=\frac{3d}{4d}=\frac{3}{4}\Rightarrow \beta=arctg\frac{3}{4}.$$

Demak, javob: $arctg\frac{4}{3}$; $arctg\frac{3}{4}$ va $\frac{\pi}{2}$.

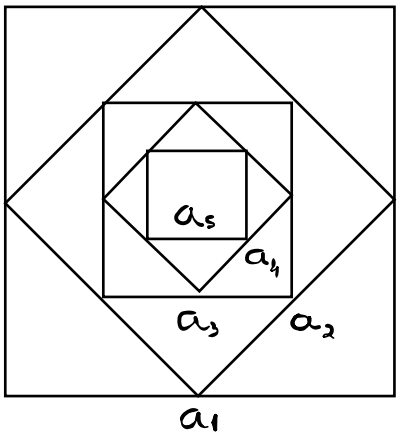
2-masala. Tomoni a ga teng bo‘lgan kvadratga uning tomonlari o‘rtalarini tutashtirish yo‘li bilan yangi kvadrat chizilgan; bu kvadratga yana shu usul bilan yangi kvadrat chizilgan va kvadrat chizish shu tariqa cheksiz davom ettirilgan. Shu kvadratlar perimetrlarining yig‘indisini va yuzlarning yig‘indisini toping.

Yechilishi: Chizmadan:

$a_1=a; a_2=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a/\sqrt{2};$

$a_3=\sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2}=a/2;$ … ,

$a_n=\frac{a}{\sqrt{2}^{n-1}};$…



Hosil bo‘lgan kvadratlar perimetrlarining yig‘indisi:

$$p=4a+\frac{4a}{\sqrt{2}}+\frac{4a}{2}+\cdots+\frac{4a}{\sqrt{2}^{n-1}}\begin{bmatrix} b_1=4a \\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}<1 \end{bmatrix}=\frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-1}=4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)a.$$

Demak, javobi: $4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)a$.

Endi kvadratlar yuzlarini yig‘indisini topamiz:

Ravshanki:

$$S_1=a_1^2;\ S_2=a_2^2=\frac{a^2}{2}; S_3=a_3^2=\frac{a^2}{4};\ S_n=a_n^2=\frac{a^2}{2^{n-1}};\ldots$$

bo‘lib, ularning yig‘indisi ($b_1=a^2,\ q=\frac{1}{2}<1$) cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisidan iboratdir:

$$S=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$$

Demak, javob: $2a^2$.

Progressiyalarning qishloq-xo‘jaligidagi tatbiqiga doir ushbu masalani qaraymiz.

1-masala. Uchta paykalning yuzlari ortib boruvchi geometrik progressiya tashkil qiladi. Birinchi paykalning yuzi 10 ga, ikkinchisiniki 50ga, uchinchisiniki esa 40 ga ortiq bo‘lganda edi, bu maydonlar arifmetik progressiyani hosil qilgan bo‘lar edi. Uchala paykal yuzlarining yig‘indisi 3050 ga bo‘lsa, ularning har birini yuzi nimaga teng?

Yechilishi: Geometrik progressiya tashkil qiluvchi uchta paykal yuzlarini: b_1, b_2, b_3 desak, masala shartiga ko‘ra:

$$b_1+b_2+b_3=3050$$

Shuningdek:

$$\left.\begin{matrix} a_1=b_1+10 \\ a_2=b_2+50 \\ a_3=b_3+40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3+100\Rightarrow a_1+a_2+a_3=3150$$

a_1, a_2 va a_3 arifmetik progressiya tashkil qilgani uchun:$a_1;\ a_2=a_1+d;\ a_3=a_1+3d$ (d −ayirma) $\Rightarrow 3a_1+3d=3150\Rightarrow a_1+d=1050\Rightarrow a_2=1050$ bo‘ladi.

U holda $a_2 = b_2 + 50 \Rightarrow b_2 = 1050 - 50 = 1000 \Rightarrow b_2 = 1000$ni hosil qilamiz. Buni e'tiborga olib: $b_1 + b_2 + b_3 = 3050 \Rightarrow b_1 + b_3 = 3050 - 1000 \Rightarrow b_1 + b_3 = 2050 \Rightarrow\ b_1(1 - q^2) = 2050 \Rightarrow b_1 q(1 - q^2) = 2050q \Rightarrow b_2(1 - q^2 = 2050q \Rightarrow 1000(1 - \mathrm{q}^2) = 2050\mathrm{q} \Rightarrow 20\mathrm{q}^2 - 41\mathrm{q} + 20 = 0 \Rightarrow \quad \mathrm{q}_1 = \frac{5}{4} > 1$ ($\mathrm{q}_2 = \frac{4}{5}1$ bo'lgani uchun uni olmaymiz), $q = q_1 = \frac{5}{4}$ ga asosan $b_1(1 - q^2) = 2050 \Rightarrow b_1 = 800$ ni aniqlaymiz. $b_3 = 3050 - b_1 - b_2\ (b_1 = 800; b_2 = 1000) \Rightarrow b_3 = 1250$ bo'ladi.

Demak, javobi: $b_1 = 800; b_2 = 1000, b_3 = 1250$.

Tahlil va natijalar. Yuqorida yechilgan hayotiy misol va masalalar progressiyalar nazariyasini tatbiq qilishni foydali ekanligini isbotlaydi, bu metodologiya kelgusida ham o'z ahamiyatini yo'qotmaydi deb hisoblash mumkin

Xulosa va takliflar. Xulosa sifatida aytish lozimki, chekli sonli yig'indilarni hisoblashda progressiyalarga bog'liq yig'indilarni topishga doir turli masalalar, muammolarni yechish yo'llari ko'rsatiladi, bu matematik nuqtayi nazaridan muhim hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. *Modenov P.S. Matematika masalalari to'plami. – T., 1956.*
2. *Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Т. Сборник задач по элементарной алгебре, – М. 1973.*
3. *Kochetkov B.S., Kochetkova E.S. Algebra va elementar funksiyalar, 1-qism. – T. 1978.*
4. *Baranov I.A. va boshqalar. Matematika. – T. 1986.*
5. *Gusev B.A., Mordkovich A.G. Matematika. – T. 1988.*

2030 UZBEKISTAN RESEARCH ONLINE
uzjournals.edu.uz

doi® digital object identifier

Google scholar

ROAD DIRECTORY OF OPEN ACCESS SCHOLARLY RESOURCES

ADVANCED SCIENCES INDEX

"SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY"

The journal was composed in the Editorial and Publishing Department of Bukhara State University.

Editorial address:
Bukhara, 200117
Bukhara State University, main building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing Department.
https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted 29.07.2026 y. Paper format 60x84,1/8. Printed in express printing method. Conditional printing plate – 35,30. Circulation 70. Order № 30. Price is negotiable.

Published in the printing house "BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish Bukhari street, 190 B-house