



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz



E-ISSN 2181-1466

9 772181 146004



ISSN 2181-6875

9 772181 687004

6(1)/2026

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University



BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



6(1)/2026

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2026, № 6, iyun

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Bezudnaya A. G., Sankt-Peterburg davlat iqtisodiyot universiteti professori, iqtisodiyot fanlari doktori

Razumovskiy V. M., Sankt-Peterburg davlat iqtisodiyot universiteti professori, iqtisodiyot fanlari doktori

Zahidov A. A., Texas universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori

Kovalev I. V., Sibir Federal universiteti professori, texnika fanlari doktori

Ibrayeva K. T., Tyumen davlat universiteti, Ekologiya va qishloq xo'jaligi biologiyasi instituti, texnika fanlari nomzodi

Tursunjon M., Shinjon Uyg'ur Avtonom Rayoni Qishloq xo'jaligi fanlari akademiyasi, Paxta ilmiy-tadqiqot instituti professori, qishloq xo'jalik fanlari doktori

Ai Syan Tao, Shinjon Universiteti Aqlli qishloq xo'jaligi instituti direktori, qishloq xo'jalik fanlari doktori, professor

Tursunov D.A., O'sh davlat universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori

Zagdkhorol Bayasgalan, Mongolian University of Science and Technology professori, fizika-matematika fanlari doktori

Gumerov Renat, Qozon federal universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori

Babayeva F. Sh., Ozarbayjon milliy fanlar akademiyasi professori, falsafa fanlari doktori

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To'lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Qahhorov Otabek Siddiqovich, iqtisodiyot fanlari doktori (DSc), professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoirra Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Jamilova Bashorat Sattorovna, filologiya fanlari doktori, professor

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Yuldosheva Dilorom Nigmatovna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Sharipov M. Z., fizika-matematika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor

Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, professor

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybullayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

O'rinova Bozorgul Zokirovna, tarix fanlari doktori, dotsent

SERIYA: M A T E M A T I K A

MUNDARIJA *** CONTENTS *** СОДЕРЖАНИЕ		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
Rasulov T.H.	Uchinchi tartibli blok operatorli matritsalarining nisbiy chegaralanganligi	3
Qo'shaqov X.Sh., To'ychiboyeva G.Sh.	Uchtalik cheksiz differensial tenglamalar sistemasi yechimining mavjud va yagonaligi	9
Akramov I.I., Primqulov A.A.	Derivation of the linearized BGK equation using an orthogonal polynomial basis	16
Asqaraliyeva M.A.	Ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun Bitsadze – Samarskiy sharti bilan qo'yilgan masala tahlili	24
Begimkulov F.Kh.	Spectral analysis of nonlocal degenerate elliptic equations with singular coefficients	34
Shodiyev M.U., Beshimova Sh.X.	Jordan canonical forms for matrices over finite fields and nilpotent matrices over residue class rings	47
Mansurov D.R., Bozorov S.B., Oltiyev A.B.	Proporsional intensivlik modeli bahosi uchun muvofiqlik mezoni	53
Davronov J.R., Elmurodova S.S., Ko'klamova M.U.	$W_2^{(2,1)}(0,t)$ Fazosida ikki nuqtali vaznli kvadratur formulalar qurish	62
Kuliyev K.D., Tilavov R.A., Ergashev Sh.Q.	Birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi	67
Husenova J.T., Ahrorova H.H.	Matematik olimpiada masalalarini yechishda kesmada uzluksiz funksiyalar xossalariidan foydalanish	73
Khamidov Sh.I., Niyozkhonov L.L., Sharipova S.F.	Discrete spectrum of the even part of a lattice Schrödinger operator with on-site and nearest-neighbour interactions	81
Qushaqov Kh.Sh., Fazliddinova M.D.	Elementary methods for finding optimal solutions to economic problems	89
Rasulova G.A.	Modulli tenglamalar sistemalari va tengsizliklarni yechish usullari	94
Durdiyev U.D., Raxmatova N.J.	On the Cauchy problem for a time-dependent equation with a fractional power of the Bessel operator	102
Daminova M.S., Safarov R.Ch.	Laplas tenglamasiga qo'yilgan Dirixle masalasini Furiye usuli bilan yechish	110
Usmonov D.A., Tukhtasinova S.N.	Dirichlet-Neumann problem for a second-order nonlinear ordinary differential equation degenerating at the boundary of the domain	114
Turdiyev X.X., Shodiyev M.U., Hakimova B.B.	Nolokal chegaraviy shartlarga ega bo'lgan balka tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masalasi	120
Durdiyev U.D., Turdiyev H.H., Ibrohimov A.A.	Chegarada egilish momenti nolga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak plastinkaning tebranish tenglamasi uchun boshlang'ich chegaraviy masala	129
Ummatova M.A., Gofurova M.A.	Simmetrik ko'phadlar va ularning elementar matematikaga ayrim tatbiqlari	141
Xalilov Q.S., Xolmatova R.X.	Parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun 3-tur integral shartli masala haqida	146
Косимова М.У.	Смешанная задача для уравнения, составленного из комбинаций нелинейных уравнений $m\kappa\Phi(+1)$ и $m\kappa\Phi(-1)$	153

Мухиддинова А.Т., Вохидов К.Х., Мирсабурова Г.М., Режаматов Х.Ф.	Применение дробных производных для прогнозирования временных рядов и аномалий	159
Саидова Н.М.	Исследование прямой задачи для интегро-дифференциального псевдогиперболического уравнения	163
Чай З.С., Мухиддинова А.Т., Вохидов К.Х., Хамроева З.К.	Вычисление интегралов дробного порядка: алгоритмы и методы	171
Тожиев Т.Х., Исмоилова Д.С.	Несмещённая и ε - смещённая оценки для решения задачи Коши для обобщённого уравнения неизотропной диффузии	176
Мухиддинова А.Т., Вохидов К.Х., Рахмонова Д.Ш., Режаматов Х.Ф.	Математическое моделирование экономических задач	186
Умматова М.А.	Методика изучения сложных высказываний	191
Хайитова Х.Г.	Метод вычисления интегральных уравнений Фредгольма посредством определителей	196
Juraev R.M.	Functional Alexandroff topology on exponential space	201
Soleev A.S., Kurdashov Sh.M.	Finding the local parametric expansion of a three-dimensional nonlinear algebraic system around small singularities	206
Xolikov S.X., Keldiyorova M.N.	Bo'lakli uzluksiz argumentli nochiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasi	212
Yodgarov S.J., Abdurahmatova M.O., Omonov O.I.	Haqiqiy ko'rsatkichli Bernulli tengsizligining kvadratik kuchaytirilgan variantlari va ularning ko'p o'zgaruvchili umumlashmalari	217
Эрмаматова З.Э., Ахмадова М.Т., Эрмаматова Б.Э.	Интегральное представление решения векторного уравнения Гельмгольца в ограниченной области	223
Madirimov M., Nurillayev M.E., Rizayev R.K., Jabborov M.M.	Turli sanoq sistemalarida bo'linish belgilari	231
Nurillaev M.E., Rizaev R.K., Fayziev A.S.	Tensor product of vector spaces and some properties	237
Madirimov M., Koshnazarov R.A., Rajabov U.T., Omonov O.I., Xayrullayev D.B.	Matematik analiz elementlarini o'qitishda harakatning mo'ljalli asosini shakllantirish	241
Juraqulov A.J., Juraqulov U.J.	Microlocal analysis of the wave front set for distributions with compact support	248
Boltayev A.A., Samadova F.M.	Uch nuqtali chegaraviy masalalar uchun Grin funksiyasi	253
Нуралиева Н.Ш., Гийосова Ф.У.	Многоточечные нелокальные задачи с параметром для дифференциальных уравнений второго порядка	257
Нуриддинов Б.З.	Математическая постановка задачи распространения собственных волн в многослойных цилиндрических телах	269

UCHINCHI TARTIBLI BLOK OPERATORLI MATRITSALARNING NISBIY CHEGARALANGANLIGI

Rasulov To'lg'in Husenovich,
Buxoro davlat universiteti professori,
fizika-matematika fanlari doktori (DSc), Buxoro, O'zbekiston
rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada uch diagonalli 3×3 o'lchamli blok operatorli matritsalar sinfi o'rganilgan bo'lib, ular uchun nisbiy chegaralanganlik hamda tartib tushunchalari kiritilgan va asoslab berilgan. Xususan, o'rganilayotgan operatorli matritsaning diagonal hamda diagonal bo'lmagan (ya'ni, yuqori va quyi diagonallarni tashkil etuvchi) bloklari orasidagi o'zaro bog'liqlik va ularning funksional tahlildagi o'rni chuqur tahlil qilingan. Olingan natijalar uch diagonalli blok operatorli matritsalar nazariyasini yanada rivojlantirishga xizmat qiladi hamda ularni turli amaliy va nazariy masalalarda qo'llash imkoniyatlarini kengaytiradi.

Kalit so'zlar: uch diagonalli operatorli matritsa, Banach fazosi, nisbiy chegaralanganlik, tartib.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. В данной статье исследуется класс трёхдиагональных блочных операторных матриц размерности 3×3 , для которых вводятся и обосновываются понятия относительной ограниченности и порядка. В частности, анализируется взаимосвязь между диагональными и внедиагональными (то есть образующими верхнюю и нижнюю диагонали) блоками рассматриваемой операторной матрицы, а также их роль в функциональном анализе. Полученные результаты способствуют дальнейшему развитию теории трёхдиагональных блочных операторных матриц и расширяют возможности их применения в различных теоретических и прикладных задачах.

Ключевые слова: трёхдиагональная блочно-операторная матрица, банахово пространство, относительная ограниченность, порядок.

ON THE RELATIVE BOUNDEDNESS OF THIRD-ORDER BLOCK OPERATOR MATRICES

Abstract. The article provides a study of the class of tridiagonal block operator matrices of size 3×3 , for which the notions of relative boundedness and order are introduced and justified. In particular, the interplay between the diagonal and off-diagonal (i.e., forming the upper and lower diagonals) blocks of the considered operator matrix is analyzed, along with their role in Functional Analysis. The obtained results contribute to the further development of the theory of tridiagonal block operator matrices and expand the possibilities of their application in various theoretical and applied problems.

Key words: tridiagonal block operator matrix, Banach space, relatively boundedness, order.

Kirish. Chiziqli operatorlarning spektrlari matematikaning ko'plab sohalarida hamda turli amaliy masalalarda muhim rol o'ynaydi. Spektr haqidagi analitik ma'lumotlarni olish murakkab bo'lib, sonli yaqinlashuvlar har doim ham samarali natija beravermaydi, ayniqsa operator o'z-o'ziga qo'shma yoki normal bo'lmagan hollarda.

So'nggi yillarda chiziqli operatorlar nazariyasi, xususan, operatorli matritsalar spektral tahlili matematikaning dolzarb yo'nalishlaridan biriga aylandi [1, 2]. Bunday operatorlar funksional analiz, kvant mexanikasi, matematik fizika hamda differensial tenglamalar nazariyasida keng qo'llaniladi [3, 4, 5]. Ayniqsa, blok operatorli matritsalar murakkab tizimlarni modellashtirishda qulay vosita bo'lib xizmat qiladi, chunki ular ko'p komponentli sistemalarning ichki tuzilishini aniq ifodalash imkonini beradi.

Uchinchi tartibli blok operatorli matritsalar alohida qiziqish uyg'otadi, chunki ular uch komponentli tizimlarga mos keladi va amaliy masalalarda tez-tez uchraydi. Bunday matritsalar ko'pincha uch diagonalli ko'rinishga ega bo'lib, bu esa ularning spektral xossalarini o'rganishda muhim soddalashtirishlar kiritadi.

Shu bilan birga, ushbu operatorlarning chegaralanganlik xossalari, xususan, nisbiy chegaralanganlik masalasi ularning spektrini, yopiq ekanligini hamda turli funksional xossalari aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Nisbiy chegaralanganlik tushunchasi operatorlar orasidagi bog'liqlikni tavsiflashda muhim vosita hisoblanadi. Agar bir operator boshqa bir operatorga nisbatan chegaralangan bo'lsa, u holda ushbu operatorning spektral va analitik xossalari o'rganish ancha osonlashadi [6]. Ayniqsa, cheksiz o'lchamli fazolarda aniqlangan operatorlar uchun bu tushuncha fundamental ahamiyat kasb etadi. Shu sababli, uchinchi tartibli blok operatorli matritsalar komponentlari orasidagi nisbiy chegaralanganlik shartlarini aniqlash va tahlil qilish muhim ilmiy masalalardan biri hisoblanadi.

Mazkur maqolada uchinchi tartibli blok operatorli matritsalar uchun nisbiy chegaralanganlik shartlari batafsil o'rganilgan. Xususan, matritsaning diagonal va diagonal bo'lmagan elementlari orasidagi bog'liqliklar tahlil qilingan hamda ularning operator sifatidagi xossalari ta'siri aniqlangan. Shuningdek, olingan natijalar asosida ushbu turdagi operatorlarning spektral xususiyatlarini tadqiq etish imkoniyatlari ko'rib chiqiladi.

Tadqiqot natijalari nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki matematik fizika, kvant tizimlari hamda murakkab dinamik jarayonlarni modellashtirishda ham qo'llanilishi mumkin. Shu jihatdan, uchinchi tartibli blok operatorli matritsalarining nisbiy chegaralanganligini o'rganish zamonaviy matematik tahlilning muhim va istiqbolli yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

1. Uch diagonalli 3×3 o'lchamli blok operatorli matritsalar va ularning nisbiy chegaralanganligi. Uch diagonalli blok operatorli matritsalar - bu maxsus turdagi blok operatorli matritsalar bo'lib, unda nolga teng bo'lmagan elementlar faqat pastki diagonalda, asosiy diagonalda va yuqori diagonalda joylashadi, qolgan barcha elementlar esa nolga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\mathcal{H}_i, i = 1, 2, 3$ Banax fazolari bo'lsin. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ Banax fazosida

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

uch diagonalli blok operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda $A_{ij}: \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \rightarrow \mathcal{H}_i, i, j = 1, 2, 3, |i - j| \leq 1$ matritsaviy elementlar zich aniqlangan yopiq chiziqli operatorlar bo'lib, $D(A_{ij})$ orqali A_{ij} operatorning aniqlanish sohasi belgilangan. Agar barcha

$$D(A_{11}) \cap D(A_{21}), \quad D(A_{12}) \cap D(A_{22}) \cap D(A_{32}), \quad D(A_{23}) \cap D(A_{33})$$

kesishmalar mos ravishda $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ Banax fazolarda zich bo'lsa, u holda $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa o'zining

$$D(\mathcal{A}) := (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22}) \cap D(A_{32})) \oplus (D(A_{23}) \cap D(A_{33}))$$

aniqlanish sohasida zich aniqlangan ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Biroq bu operator yopiq yoki yopiluvchan bo'lishi shart emas.

Quyida biz diagonal bo'yicha dominantlanuvchi bo'lgan blok operatorli matritsalar sinfini ko'rib chiqamiz. Shu maqsadda, o'quvchiga qulaylik uchun nisbiy chegaralanganlik tushunchasini eslatib o'tamiz.

Faraz qilaylik, $(E_i, \|\cdot\|_i), i = 1, 2, 3$ Banax fazolari va $A: E_1 \supset D(A) \rightarrow E_2, S: E_1 \supset D(S) \rightarrow E_3$ chiziqli operatorlar bo'lsin.

Agar $D(A) \subset D(S)$ va shunday $a_s, b_s \geq 0$ o'zgarimas sonlar topilib,

$$\|Sx\|_3 \leq a_s \|x\|_1 + b_s \|Ax\|_2, \quad x \in D(A) \quad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda S operator A -chegaralangan (yoki A operatorga nisbatan chegaralangan) deyiladi. Biror $a_s \geq 0$ uchun (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi b_s sonlarning eng kichigiga S operatorning A -chegarasi (yoki S operatorning A operatorga nisbatan chegarasi) deyiladi va δ_s kabi belgilanadi.

Agar $D(A) \subset D(S)$ va har qanday $(x_n)_1^\infty$ chegaralangan ketma-ketlik uchun $(Ax_n)_1^\infty \subset E_2$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, ushbu $(Sx_n)_1^\infty \subset E_3$ ketma-ketlik o'zida yaqinlashuvchi ketma-ketlikni saqlasa, u holda S operator A -kompakt (yoki A operatorga nisbatan kompakt) deyiladi.

Ta'kidlash joizki, agar A yopiq operator, S esa yopiluvchan operator bo'lib, $R(A), R(S) \subset E_3$ munosabat bajarilsa, u holda $D(A) \subset D(S)$ ekanligidan S operatorning A -chegaralangan bo'lishi kelib chiqadi

([6], IV.1.5 izohga qarang). Ushbu

$$\|Sx\|_3 \leq a_s \|x\|_1 + b_s \|Ax\|_2 \leq a_s \|x\|_1 + b_s \|(A + S)x\|_3 + b_s \|Sx\|_3, \quad x \in D(A) \quad (3)$$

tengsizlikga ko'ra, agar S operator A -chegaralangan bo'lib, uning A –chegarasi uchun $\delta_S < 1$ shart bajarilsa, u holda S operator $(A + S)$ –chegaralangan bo'lib, uning $(A + S)$ –chegarasi $\leq \delta_S / (1 - \delta_S)$ tengsizlikni qanoatlantirishini oson ko'rish mumkin ([6], IV-bob, 1, Masala 1.2).

Shuningdek ([6], V.4.1-bo'lim, (4.1), (4.2)), ushbu (2) tengsizlik biror $a'_S, b'_S \geq 0$ o'zgarmlar uchun

$$\|Sx\|_3^2 \leq a'^2_S \|x\|_1^2 + b'^2_S \|Ax\|_2^2, \quad x \in D(A) \quad (4)$$

tengsizlikning bajarilishiga ekvivalent ekanligini oson ko'rsatish mumkinki; shuningdek, biror $\delta > 0$ uchun (2) va $b_S < \delta$ munosabatlar bajarilishi uchun biror $b'_S < \delta$ uchun (4) munosabatning bajarilishi zarur va yetarlidir. Demak S operatorning A –chegarasi bo'lgan δ_S soni biror $a'_S \geq 0$ soni uchun (4) munosabat bajariladigan

$b'_S \geq 0$ sonlarning eng kichik qiymati sifatida ham aniqlanishi mumkin.

Agar A yopiq operator bo'lsa, u holda $D_A = (D(A), \|\cdot\|_A)$ qism fazo $\|x\|_A = \|x\|_1 + \|Ax\|_2$, $x \in D(A)$ grafik normaga nisbatan Banach fazosi bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, S operator A –chegaralangan operator bo'lishi uchun S operator D_A qism fazoni E_3 fazoga o'tkazuvchi chegaralangan operator bo'lishi zarur va yetarlidir; S operator A –kompakt bo'lishi uchun S operator D_A qism fazoni E_3 fazoga o'tkazuvchi kompakt operator bo'lishi zarur va yetarlidir. Shu sababli, A –kompakt operator hamisha A –chegaralangan bo'ladi.

1-tasdiq. Faraz qilaylik, $(E_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ Banach fazolari va $A: E_1 \supset D(A) \rightarrow E_2$, $S: E_1 \supset D(S) \rightarrow E_3$, $T: E_1 \supset D(T) \rightarrow E_4$ chiziqli operatorlar bo'lsin. U holda S va T operatorlarning har ikkalasi A –chegaralangan bo'lishi uchun shunday $a', b' \geq 0$ o'zgarmlar topilib,

$$\|Sx\|_3^2 + \|Tx\|_4^2 \leq a'^2 \|x\|_1^2 + b'^2 \|Ax\|_2^2, \quad x \in D(A)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Tasdiqning zaruriylik qismi oson isbotlanadi. Yetarlilik qismi esa $\|Sx\|_3 \leq \|Sx\|_3 + \|Tx\|_4$, $x \in D(A)$ tengsizlikdan to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadi.

Endi diagonal bo'yicha dominantlanuvchi uch diagonalli blok operatorli matritsa ta'rifini keltiramiz.

1-ta'rif. Agar

i) A_{21} operator A_{11} –chegaralangan,

ii) A_{12} va A_{32} operatorlarning har biri A_{22} –chegaralangan,

iii) A_{32} operator A_{33} –chegaralangan bo'lsa, u holda (1) tenglik bilan aniqlanuvchi A blok operatorli matritsa diagonal bo'yicha dominantlanuvchi uch diagonalli blok operatorli matritsa deyiladi.

Izoh. $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa elementlari yopiq deb faraz qilingani sababli dominantlik turi aniqlanish sohasi orasidagi munosabatlar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$\mathcal{A}$ diagonal bo'yicha dominantlanuvchi bo'lishi uchun

$$\begin{cases} \text{i)} & D(A_{11}) \subset D(A_{21}), \\ \text{ii)} & D(A_{22}) \subset D(A_{12}) \cap D(A_{32}), \\ \text{iii)} & D(A_{33}) \subset D(A_{23}), \end{cases}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir; mazkur holda $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa

$$D(A) = D(A_{11}) \oplus \dots \oplus D(A_{nn}) \quad (5)$$

aniqlanish sohasida zich aniqlangan bo'ladi.

$\mathcal{A}$ blok operator matritsa yopiq operator bo'lishini ta'minlash uchun matritsaviy elementlarga bir-biriga nisbatan aniqroq farazlar kiritish zarurati mavjud.

2-ta'rif. Faraz qilaylik,

i) A_{21} operator A_{11} –chegaralangan bo'lib, A_{11} –chegarasi δ_{21} ga teng,

ii) A_{12} (mos ravishda A_{32}) operator A_{22} –chegaralangan operator bo'lib, A_{22} –chegarasi δ_{12} (mos ravishda δ_{32}) ga teng,

iii) A_{23} operator A_{33} –chegaralangan operator bo'lib, A_{33} –chegarasi δ_{23} ga teng bo'lsin.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\delta := \max \left\{ \sqrt{2}\delta_{21}, \sqrt{2}\delta_{23}, \sqrt{\delta_{12}^2 + 2\delta_{32}^2}, \sqrt{\delta_{32}^2 + 2\delta_{12}^2} \right\}. \quad (6)$$

U holda (1) tenglik bilan aniqlangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa δ tartib bilan diagonal bo'yicha dominantlanuvchi deyiladi.

Faraz qilaylik, $\text{diag}\{A_{11}, A_{22}, A_{33}\}$ diagonal blok operatorli matritsa bo'lib, A_{11}, A_{22}, A_{33} uning diagonal elementlari bo'lsin.

Endi ikki turdagi $\mathcal{T}$ va $\mathcal{S}$ blok operatorli matritsani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mathcal{T} := \text{diag}\{A_{11}, \dots, A_{nn}\}, \quad \mathcal{S} := \mathcal{A} - \mathcal{T}.$$

$\mathcal{T}$ va $\mathcal{S}$ blok operatorli matritsalar $\mathcal{H}$ fazoda aniqlanib, ularning aniqlanish sohalari

$$D(\mathcal{T}) = D(A_{11}) \oplus D(A_{22}) \oplus D(A_{33})$$

va

$$D(\mathcal{S}) = D(A_{21}) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{32})) \oplus D(A_{23}),$$

kabi bo'ladi.

Asosiy natija va uning isboti. Mazkur bo'limda ishning asosiy natijasini bayon qilamiz va isbotlaymiz.

1-teorema. Agar (1) tenglik bilan aniqlangan $\mathcal{A}$ operator δ tartibli diagonal bo'yicha dominantlanuvchi blok operatorli matritsa bo'lsa, u holda $\mathcal{S}$ operator $\mathcal{T}$ — chegaralangan bo'lib, $\mathcal{T}$ — chegara δ dan kichik yoki teng bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\mathcal{A}$ operatorli matritsa δ tartibli diagonal bo'yicha dominantlanuvchi bo'lsin. U holda 2-ta'rifga ko'ra A_{21} operator A_{11} — chegaralangan bo'lib, uning A_{11} — chegarasi δ_{21} soniga, A_{23} operator A_{33} — chegaralangan bo'lib, uning A_{33} — chegarasi δ_{23} soniga va A_{12} (mos ravishda A_{32}) operator A_{22} — chegaralangan bo'lib, uning A_{22} — chegarasi δ_{12} (mos ravishda δ_{32}) soniga hamda δ soni (6) tenglik orqali aniqlangan bo'lsin.

$\mathcal{H}_j, j = 1, 2, 3$ Banax fazolari bo'lgani bois $\mathcal{H}$ fazodagi tabiiy norma

$$\|f\| = \sqrt{\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2 + \|f_3\|_3^2}, \quad f = (f_1, f_2, f_3)^t \in \mathcal{H},$$

yoki

$$\|f\|' = \|f_1\|_1 + \|f_2\|_2 + \|f_3\|_3, \quad f = (f_1, f_2, f_3)^t \in \mathcal{H}$$

tengliklar yordamida aniqlanishi mumkin, bu yerda $\|\cdot\|_j$ orqali $\mathcal{H}_j, j = 1, 2, 3$ fazodagi norma va t orqali matritsa yoki vektorning transponirlangani belgilangan.

Ta'kidlash joizki, agar $\mathcal{H}_j, j = 1, 2, 3$ Hilbert fazolari bo'lsa, u holda $\|f\|$ birinchi norma $\mathcal{H}$ Hilbert fazosidagi normani anglatadi. Banax fazosi holida har ikkala norma ekvivalent ekanligini oson ko'rsatish mumkin. Aniqlik uchun $\|f\|$ normani qaraymiz.

Faraz qilaylik, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Agar $\mathcal{A}$ operator diagonal bo'yicha dominantlanuvchi bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $D(A_{11}) \subset D(A_{21}), D(A_{33}) \subset D(A_{23}), D(A_{22}) \subset D(A_{12}) \cap D(A_{32})$ va shunday

$$a'_{ij}, b'_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad |i - j| = 1$$

o'zgaras sonlar topilib,

$$\delta_{21} \leq b'_{21} < \delta_{21} + \varepsilon, \quad \delta_{23} \leq b'_{23} < \delta_{23} + \varepsilon, \quad (7)$$

$$\delta_{12} \leq b'_{12} < \delta_{12} + \varepsilon, \quad \delta_{32} \leq b'_{32} < \delta_{32} + \varepsilon, \quad (8)$$

va

$$\|A_{21}f_1\|_2^2 \leq a'_{21} \|f_1\|_1^2 + b'_{21} \|A_{11}f_1\|_1^2, \quad f_1 \in D(A_{11}),$$

$$\|A_{23}f_3\|_2^2 \leq a'_{23} \|f_3\|_3^2 + b'_{23} \|A_{33}f_3\|_3^2, \quad f_3 \in D(A_{33}),$$

$$\|A_{23}f_3\|_2^2 + \|A_{32}f_2\|_3^2 \leq (a'_{23} + a'_{32}) \|f_2\|_2^2 + (b'_{12} + b'_{32}) \|A_{22}f_2\|_2^2, \quad f_2 \in D(A_{22})$$

munosabatlar bajariladi.

Shu sababli, $D(\mathcal{T}) \subset D(\mathcal{S})$ munosabatdan va oxirgi tengsizliklardan ixtiyoriy

$$f = (f_1, f_2, f_3)^t \in D(A_{11}) \oplus D(A_{22}) \oplus D(A_{33})$$

uchun

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &\leq 2a'_{21} \|f_1\|_1^2 + 2b'_{21} \|A_{11}f_1\|_1^2 + (a'_{12} + 2a'_{32}) \|f_2\|_2^2 + (b'_{12} + 2b'_{32}) \|A_{22}f_2\|_2^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=3}^{n-2} ((a'_{j-1j} + a'_{j+1j}) \|f_j\|_j^2 + (b'_{j-1j} + b'_{j+1j}) \|A_{jj}f_j\|_j^2) \end{aligned}$$

$$+ (2a'_{n-2n-1} + a'_{nn-1}) \|f_{n-1}\|_{n-1}^2 + (2b'_{n-2n-1} + b'_{nn-1}) \|A_{n-1n-1}f_{n-1}\|_{n-1}^2 + 2a'_{n-1n} \|f_n\|_n^2 + 2b'_{n-1n} \|A_{nn}f_n\|_n^2 \leq a'_S \|f\|^2 + b'_S \|\mathcal{T}f\|^2$$

baholashlarni hosil qilamiz, bu yerda

$$a'_S = \max\{\sqrt{2}a'_{21}, \sqrt{2}a'_{n-1n}, \sqrt{a'^2_{12} + 2a'^2_{32}}, \sqrt{a'^2_{nn-1} + 2a'^2_{n-2n-1}}, \sqrt{2} \max_{3 \leq j \leq n-2} (a'^2_{j-1j} + a'^2_{j+1j})\},$$

$$b'_S = \max\{\sqrt{2}b'_{21}, \sqrt{2}b'_{n-1n}, \sqrt{b'^2_{12} + 2b'^2_{32}}, \sqrt{b'^2_{nn-1} + 2b'^2_{n-2n-1}}, \sqrt{2} \max_{3 \leq j \leq n-2} (b'^2_{j-1j} + b'^2_{j+1j})\}.$$

$\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lgani bois, (7) va (8) tengsizliklardan foydalanib, $b'_S \leq \delta$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, S operator $\mathcal{T}$ –chegaralangan bo'lib, $\mathcal{T}$ –chegara δ sonidan kichik yoki teng bo'ladi. 1-teorema to'liq isbot bo'ldi.

Izoh. Umuman olganda S operatorning $\mathcal{T}$ –chegarasi bo'lgan δ_S soni δ sonidan qat'iy kichik bo'lishi mumkin.

Bu izohda keltirilgan tasdiqqa ishonch hosil qilish maqsadida quyidagi ko'rinishdagi

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

operatorli matritsani qaraymiz.

Agar A_{12} va A_{32} operatorlarning har biri A_{22} –chegaralangan bo'lib, A_{22} –chegaralari δ_{12} soniga teng bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $\mathcal{A}$ operator diagonal bo'yicha integrallanuvchi $\delta = \sqrt{3}\delta_{12}$ tartibli operator bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_2^{(1)} \oplus \mathcal{H}_2^{(2)}$ bo'lsin. Ixtiyoriy $f_2 \in \mathcal{H}_2$ element $f_2 = f_{21} + f_{22}$ kabi yozilib $f_{2j} \in \mathcal{H}_2^{(j)}$ $j = 1, 2$ bo'ladi va $\mathcal{H}_2$ fazodagi elementning normasi

$$\|f_2\|_2 := \sqrt{\|f_{21}\|_{21}^2 + \|f_{22}\|_{22}^2}$$

tenglik yordamida aniqlanadi, bu yerda $\|\cdot\|_{2j}$ orqali $\mathcal{H}_2^{(j)}$, $j = 1, 2$ fazodagi norma belgilangan.

Faraz qilaylik, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$ va $A_{12} := \delta_{12}A_{22}P_{12}$, $A_{32} := \delta_{12}A_{22}P_{32}$ bo'lsin, bu yerda P_{12} va P_{32} operatorlar $\mathcal{H}_2$ fazoda $P_{12}f_2 := f_{21}$ va $P_{32}f_2 := f_{22}$ kabi aniqlangan.

Aytaylik,

$$A_{22}f_2 = A_{22}f_{21} + A_{22}f_{22}$$

va

$$\|A_{22}f_{21} + A_{22}f_{22}\|_2^2 = \|A_{22}f_{21}\|_2^2 + \|A_{22}f_{22}\|_2^2$$

bo'lsin. Masalan $\mathcal{H}_2^{(1)}$ va $\mathcal{H}_2^{(2)}$ fazolar A_{22} operator uchun invariant fazolar bo'lsa, oxirgi tenglik o'rinli bo'ladi.

U holda A_{12} va A_{32} operatorlarning har biri A_{22} –chegaralangan bo'lib, A_{22} –chegarasi δ_{12} soniga teng bo'lishini oson ko'rish mumkin. Shu sababli, ta'rifga ko'ra $\mathcal{A}$ operator $\sqrt{3}\delta_{12}$ tartibli diagonal bo'yicha dominantlanuvchi operator bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$S := \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bo'lsin.

Istalgan $f \in \mathcal{H}$ uchun

$$Sf := \begin{pmatrix} \delta_{12}A_{22}f_{21} \\ 0 \\ \delta_{12}A_{22}f_{22} \end{pmatrix}$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Shunday qilib,

$$\|Sf\|^2 = \delta_{12}^2 \|A_{22}f_{21}\|_2^2 + \delta_{12}^2 \|A_{22}f_{22}\|_2^2 = \delta_{12}^2 \|A_{22}f_{21} + A_{22}f_{22}\|_2^2 = \delta_{12}^2 \|\mathcal{T}f\|^2.$$

Bu esa S operator $\mathcal{T}$ –chegaralangan bo'lib, uning $\mathcal{T}$ –chegarasi δ_{12} soniga teng bo'lishini anglatadi. Natijada $\mathcal{A}$ operator $\sqrt{3}\delta_{12}$ tartibli diagonal bo'yicha dominantlanuvchi operator bo'ladi.

Xuddi shunday mulohazalarga ko'ra agar yangi norma $\|\cdot\|'_2 = \sqrt{\|\cdot\|_{21}^2 + \|\cdot\|_{22}^2}$ kabi aniqlansa, u holda $\mathcal{A}$ operator $2\delta_{12}$ tartib bilan diagonal bo'yicha dominantlanuvchi bo'ladi.

Ta'kidlash joizki, [7] maqolada $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa uchun diagonal bo'yicha dominanlik va tartib tushunchalari $\mathcal{T}$ va $\mathcal{S}$ operatorlar yordamida kiritilgan. [7] maqolada esa Fok fazosining qirg'ilgan qism fazosida ta'sir qiluvchi uchunchi tartibli operatorli matritsa spektrining quyi va yuqori chegaralari uchun uch turdagi baholashlar olingan.

Xulosa. Ushbu maqolada uch diagonalli 3×3 o'lehamli blok operatorli matritsalar sinfi chuqur va tizimli ravishda tadqiq etildi. Tadqiqot davomida ushbu sinf uchun muhim bo'lgan nisbiy chegaralanganlik va tartib tushunchalari qat'iy aniqlanib, ularning asosiy xossalari yoritib berildi. Ayniqsa, operatorli matritsaning diagonal va diagonal bo'lmagan bloklari o'rtasidagi o'zaro bog'liqlikni aniqlash orqali ularning funksional tahlildagi roliga sezilarli ta'siri mavjudligi ko'rsatildi.

Olingan natijalar nafaqat nazariy jihatdan muhim bo'lib, balki uch diagonalli blok operatorli matritsalar bilan bog'liq murakkab masalalarni yechishda ham samarali vosita bo'lib xizmat qilishi mumkin. Shuningdek, ushbu ish kelgusida spektral nazariya, operatorlar nazariyasi hamda matematik fizikaning turli yo'nalishlarida yangi tadqiqotlar olib borish uchun mustahkam asos yaratadi. Natijada, mazkur yondashuv uch diagonalli blok operatorli matritsalar nazariyasini yanada boyitadi va ularning amaliy hamda nazariy qo'llanilish doirasini sezilarli darajada kengaytiradi.

Minnatdorchilik. Muallif O'zbekiston Respublikasi Fundamental tadqiqotlar jamg'armasi tomonidan ko'rsatilgan qo'llab-quvvatlash uchun (FL-9524115052 raqamli loyiha) o'zining samimiy minnatdorchiligini bildiradi.

REFERENCES:

1. C. Tretter. *Spectral theory of block operator matrices and applications*. Imperial College Press, 2008.
2. A. Jeribi. *Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices*. Springer-Verlag, New-York, 2015.
3. A.I. Mogilner. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results*. *Advances in Sov. Math.* 5 (1991), 139–194.
4. K.O. Friedrichs. *Perturbation of spectra in Hilbert space*. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1965.
5. V.A. Malishev, R.A. Minlos. *Linear infinite-particle operators*. *Translations of Mathematical Monographs*. 143, AMS, Providence, RI, 1995.
6. T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, *Classics Math.*, Springer, Berlin, 1995, reprint of the 1980 edition.
7. T.H. Rasulov, C. Tretter. *Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices*. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1 (2018), pp. 279–324.
8. T.H. Rasulov, M.Sh. Sharipova. *Spectral estimates for the bounds of an operator matrix of order three*. *Russian Mathematics*, 69:6 (2025), pp. 88–93.

UCHTALIK CHEKSIZ DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI YECHIMINING
MAVJUD VA YAGONALIGI

Qo'shaqov Xolmurodjon Shermamatovich,

Andijon davlat universiteti o'qituvchisi, f.m.f.b.f.d. (PhD)

xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com

To'ychiboyeva Gavharoy Shuxratjon qizi,

Farg'ona davlat universiteti magistranti

gavharoytoychiboyeva@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada uchtalik cheksiz differensial tenglamalar sistemasining yechimi o'rganilgan. Sistema l_2 Gilbert fazosida tadqiq etilgan. Maqolaning asosiy qismida berilgan sistemaning l_2 Gilbert fazosida yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan

Kalit so'zlar: differensial tenglamalar, cheksiz sistema, yechimning mavjud va yagonaligi, Gilbert fazosi.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ
ТЕРНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В данной статье исследуется решение бесконечной системы тернарных дифференциальных уравнений. Система рассматривается в гильбертовом пространстве l_2 . В основной части статьи доказана теорема о существовании и единственности решения данной системы в гильбертовом пространстве l_2 .

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, бесконечная система, существование и единственность решения, гильбертово пространство.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF AN INFINITE SYSTEM OF
TERNARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. In this paper, a solution of an infinite system of ternary differential equations is studied. The system is investigated in the l_2 Hilbert space. In the main part of the paper, a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the given system in the l_2 Hilbert space is proved.

Keywords: differential equations, infinite system, existence and uniqueness of solution, Hilbert space.

Kirish. Cheksiz o'lchamli differensial tenglamalar sistemalarini o'rganish zamonaviy matematik analiz, xususan funksional analiz va dinamik tizimlar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Bunday sistemalar ko'pincha xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadigan jarayonlarni dekompozitsiya qilish natijasida yuzaga keladi hamda optimal boshqaruv, evolyutsion jarayonlar va differensial o'yinlar nazariyasida keng qo'llaniladi. Shu sababli, cheksiz o'lchamli fazolarda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalarining asosiy xossalari, xususan ularning yechimining mavjudligi va yagonaligini tadqiq etish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi.

Ma'lumki, Hilbert fazolari, xususan l_2 fazosi, cheksiz o'lchamli sistemalarni tadqiq qilishda qulay matematik apparatni taqdim etadi. Ushbu fazoda normaning mavjudligi, skalyar ko'paytma va to'liqlik xossalari differensial tenglamalar sistemalarining yechimlarini qat'iy asoslash imkonini beradi. Ayniqsa, matritsa eksponentasi va uning xossalari chiziqli sistemalar yechimlarini konstruktiv ifodalashda muhim rol o'ynaydi.

Uchtalik (ternar) tuzilishga ega bo'lgan cheksiz differensial tenglamalar sistemalari alohida e'tiborga loyiq bo'lib, ular murakkab o'zaro bog'langan dinamik jarayonlarni tavsiflaydi. Bunday sistemalarni o'rganishda ularning yechimlari mavjudligi va yagonaligini ta'minlovchi yetarli shartlarni aniqlash muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar tahlili. Xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan bog'liq boshqaruv masalalariga bag'ishlangan ko'plab ishlar mavjud (masalan, [1, 4, 7]). Bunday masalalarni yechishning eng mashhur usullaridan biri dekompozitsiya usuli hisoblanadi. Masalan, [6, 18] ishlarda differensial o'yinlar va boshqaruv masalalari quyidagi cheksiz differensial tenglamalar sistemasi orqali keltirilgan:

$$z_i + \lambda_i z_i = w_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

bu yerda $w_i, i = 1, 2, \dots$, boshqaruv parametrlaridir, $z_i, w_i \in \mathbb{R}$, hamda $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$, koeffitsientlar elliptik operatorning umumlashgan xos qiymatlari hisoblanadi:

$$Az = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

bu yerda $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ va $a_{ij}(x)$ - chegaralangan o'lchovli funksiyalar.

[24, 25, 28] ishlarda differensial o'yinlar masalalarini yagona nazariy doirada, ya'ni $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$, ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lgan holatda, cheksiz differensial tenglamalar sistemasi orqali o'rganish taklif etilgan. Keyinchalik [16, 11, 17, 12, 13, 14] ishlarda turli differensial o'yinlar masalalari aynan cheksiz differensial tenglamalar sistemalari yordamida tadqiq etilgan.

Shunday qilib, xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalangan boshqaruv masalalari bilan cheksiz differensial tenglamalar sistemalari orqali ifodalangan masalalar o'rtasida muhim bog'liqlik mavjud.

Tadqiqot metodologiyasi. Haqiqiy sonlarda tuzilgan va .

$$l_2 = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty \right\}$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha ketma-ketliklar fazosini l_2 bilan belgilaymiz. Unda skalyar ko'paytma va norma mos ravishda quyidagicha aniqlanadi:

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n, \quad \|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}.$$

Bu fazo odatda l_2 Gilbert fazosi deb ataladi.

Ushbu ishning asosiy maqsadi differensial tenglamalarning quyidagi cheksiz sistemasini l_2 Gilbert fazosida tadqiq qilishdan iborat:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\lambda_i x_i + y_i + w_{i1}(t), & x_i(0) &= x_{i0}, \\ \dot{y}_i &= -\mu_i y_i + z_i + w_{i2}(t), & y_i(0) &= y_{i0}, \\ \dot{z}_i &= -\mu_i z_i + w_{i3}(t), & z_i(0) &= z_{i0}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

bu yerda λ_i va μ_i lar berilgan manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlardir,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots), \quad y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots), \quad z_0 = (z_{10}, z_{20}, \dots) \in l_2.$$

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots), \quad (w: [0, T] \rightarrow l_2, \text{ funksiyalar sinfi}, \quad w_i(t) = (w_{i1}(t), w_{i2}(t), w_{i3}(t)))$$

($0 \leq t \leq T, i = 1, 2, \dots$) o'lchovli koordinatalari bilan quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T (w_{i1}^2(s) + w_{i2}^2(s) + w_{i3}^2(s)) ds \leq \rho_0^2$$

uni $S(\rho_0)$ bilan belgilaymiz, bu yerda ρ_0 musbat son.

Masala shundaki, l_2 Gilbert fazosida (2) sistemaning yagona yechimi bor yoki yo'qligini aniqlash.

Natijalar va ularning tahlili

Aytaylik

$$\eta_i(t) = ((x_i(t), y_i(t), z_i(t)),$$

$$|\eta_i(t)| = \sqrt{x_i^2(t) + y_i^2(t) + z_i^2(t)},$$

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots),$$

$$\eta_0 = (\eta_{10}, \eta_{20}, \dots) = (x_{10}, y_{10}, z_{10}, x_{20}, y_{20}, z_{20}, \dots),$$

$$\|\eta(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2(t) + y_i^2(t) + z_i^2(t)) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\eta_0\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_{i0}^2 + y_{i0}^2 + z_{i0}^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

bo'lsin.

1-ta'rif. Aytaylik $w(\cdot) \in S(\rho_0)$ bo'lsin. Agar $\eta_i(t) - [0, T]$ ning deyarli hamma joyida differensiallanuvchi va $[0, T]$ da (2) sistemani to'liq qanoatlantiruvchi bo'lsa, $\eta_i(t)$ uzluksiz koordinatalari bilan, $\eta_i(0) = \eta_{i0}$, $i = 1, 2, \dots$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots)$ funksiya (2) sistemaning yechimi bo'ladi

Quyidagi matritsa uchun

$$A_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_i & 1 \\ 0 & 0 & -\mu_i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0, \lambda_i \neq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \in [0; T]$$

shuni ko'rsatishimiz mumkinki

$$e^{A_i t} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_i t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu_i t} & t e^{-\mu_i t} \\ 0 & 0 & e^{-\mu_i t} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Quyidagi ifodalarning to'g'ri ekanligini isbotlash qiyin emas.

1-xossa. $e^{A_i t}$ matritsa uchun quyidagi munosabatlar o'rinli.

$$e^{A_i(t+h)} = e^{A_i t} \cdot e^{A_i h},$$

$$|e^{A_i t} \eta_i| \leq e^{-\alpha_i t} a(t) |\eta_i|, \quad \alpha_i = \min(\lambda_i, \mu_i)$$

$$\|e^{A_i t}\| \leq a(t), \quad a(t) = 1 + t,$$

$$\|e^{A_i t} - E_3\| \leq 1 - e^{-\alpha_i t} + t,$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

bu yerda $\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$.

Biz $e^{A_i t}$ matritsaning yuqoridagi berilgan xossalardan foydalanib, ushbu maqolaning asosiy teoremasini isbotlaymiz.

$\eta(t) \in l_2$, $(0 \leq t \leq T)$ uzluksiz funksiyalar fazosini $C(0, T; l_2)$ bilan belgilaymiz. Quyidagi teorema ushbu maqolaning asosiy natijasidir.

1-Teorema. Agar $w(\cdot) \in S(\rho_0)$ va $\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $(i = 1, 2, \dots)$ bo'lsa, u holda $C(0, T; l_2)$ fazoda (2) cheksiz differensial tenglamalar sistemasining yagona yechimi mavjud bo'ladi.

Isbot. Aniqli, har bir (2) uchtalik cheksiz differensial tenglamalar sistemasi yagona $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots)$ yechimga ega

$$\eta_i(t) = e^{A_i t} \eta_{i0} + \int_0^t e^{A_i(t-s)} w_i(s) ds, \quad (3)$$

bu yerda $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3})$, $\eta_{i0} = (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$. Demak, (2) cheksiz sistema l_2 fazoda bittadan ortiq yechimga ega bo'lishi mumkin emas.

Endi $\eta(\cdot) = (\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot), \dots) \in C(0, T; l_2)$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun har bir t ($0 \leq t \leq T$) uchun $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots) \in l_2$ ekanligini va bu $\eta(t) - l_2$ fazoning normasida uzluksiz ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Avval har bir $t \in [0, T]$ uchun $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots) \in l_2$ ekanligini isbotlaymiz. Darhaqiqat (3) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|\eta_i(t)|^2 \leq 2 \left(|e^{A_i t} \eta_{i0}|^2 + \left(\int_0^t |e^{A_i(t-s)} w_i(s)| ds \right)^2 \right) \quad (4)$$

1-xossadan

$|e^{A_i(t-s)} w_i(s)| \leq e^{-\alpha_i(t-s)} (1 + (t-s)) |w_i(s)| \leq a(t) |w_i(s)|$, $t \geq s$,
tengsizlikka va Koshi-Shvarts tengsizligidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t 1 \cdot |w_i(s)| ds \right)^2 &\leq t \int_0^t |w_i(s)|^2 ds \\ |\eta_i(t)|^2 &\leq 2 \left(|e^{-2\alpha_i t} a^2(t) \eta_{i0}|^2 + t a^2(t) \int_0^t |w_i(s)|^2 ds \right) \leq \\ &\leq 2a^2(T) \left(|\eta_{i0}|^2 + T \int_0^T |w_i(s)|^2 ds \right). \end{aligned}$$

Shuning uchun,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i(t)|^2 &\leq 2a^2(T) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\eta_{i0}|^2 + T \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^T |w_i(s)|^2 ds \right) \leq \\ &\leq 2a^2(T) (\|\eta_0\|^2 + T\rho_0^2) \end{aligned}$$

Demak, har bir $t \in [0, T]$ uchun $\eta(t) \in l_2$. Endi $\eta(t)$ ($0 \leq t \leq T$) funksiyaning l_2 . Hilbert fazosida uzluksiz ekanligini isbotlaymiz. Funksiyanig uzluksizligi ta'rifi orqali biz ayta olamizki, har qanday ε musbat son uchun, shunday $\delta > 0$ soni topiladiki $|h| < \delta$ da $\|\eta(t+h) - \eta(t)\| < \varepsilon$ bo'ladi.

Aytaylik $h > 0$ uchun, 1-xossadan foydalansak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \eta_i(t+h) - \eta_i(t) &= e^{A_i(t+h)} \eta_{i0} + \int_0^{t+h} e^{A_i(t+h-s)} w_i(s) ds - \int_0^t e^{A_i(t-s)} w_i(s) ds \\ &- e^{A_i t} \eta_{i0} = (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i t} \eta_{i0} + \int_0^t (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i(t-s)} w_i(s) ds \\ &+ \int_t^{t+h} e^{A_i(t+h-s)} w_i(s) ds \end{aligned}$$

$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ tengsizlikdan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
 |\eta_i(t+h) - \eta_i(t)|^2 &\leq 3 \left| (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i t} \eta_{i0} \right|^2 \\
 &\quad + 3 \left| \int_0^t (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i(t-s)} w_i(s) ds \right|^2 \\
 &\quad + 3 \left| \int_t^{t+h} e^{A_i(t+h-s)} w_i(s) ds \right|^2 \leq 3 \|e^{A_i h} - E_3\|^2 a^2(T) |\eta_{i0}|^2 \\
 &\quad + 3 \|e^{A_i h} - E_3\|^2 a^2(T) \left(\int_0^t |w_i(s)| ds \right)^2 \\
 &\quad + 3 a^2(T) \left(\int_t^{t+h} |w_i(s)| ds \right)^2
 \end{aligned}$$

U holda

$$\|\eta(t+h) - \eta(t)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\eta_i(t+h) - \eta_i(t)|^2 \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

Bu yerda

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3a^2(T) \sum_{i=1}^N \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \left(|\eta_{i0}|^2 + \left(\int_0^t |w_i(s)| ds \right)^2 \right), \\
 I_2 &= 3a^2(T) \sum_{i=N+1}^{\infty} \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \left(|\eta_{i0}|^2 + \left(\int_0^t |w_i(s)| ds \right)^2 \right), \\
 I_3 &= 3a^2(T) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_t^{t+h} |w_i(s)| ds \right)^2.
 \end{aligned}$$

bu yerda N quyida tanlanadigan musbat butun son.

$$\alpha_i \geq 0 \text{ ekanligidan va } 1\text{-xossadan } \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \leq (1+h)^2,$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 3a^2(T) \sum_{i=N+1}^{\infty} \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \left(|\eta_{i0}|^2 + \left(\int_0^t |w_i(s)| ds \right)^2 \right) \leq \\
 &\leq 3a^2(T) (1+h)^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(|\eta_{i0}|^2 + T \int_0^T |w_i(s)|^2 ds \right).
 \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz.

Quyidagi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_{i0}|^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T |w_i(s)|^2 ds$$

qatorlar yaqinlashuvchi ekanligidan, har qanday ε musbat son uchun, $I_2 < \varepsilon/3$ bo'lganda musbat N butun sonni tanlashimiz mumkin.

Endi esa I_1 ni baholaymiz. $\alpha_i \geq 0$ ekanligidan:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3a^2(T) \sum_{i=1}^N \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \left(|\eta_{i0}|^2 + \left(\int_0^t |w_i(s)| ds \right)^2 \right) \\
 &\leq 3a^2(T) \sum_{i=1}^N \|e^{A_i h} - E_3\|^2 \left(|\eta_{i0}|^2 + T \int_0^T |w_i(s)|^2 ds \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

bo'ladi.

1-xossadan $\|e^{A_i h} - E_3\|^2 \leq (1+h)^2 \rightarrow 0$ bo'ladi, chunki har bir i uchun $h \rightarrow 0$. (5) ning o'ng tomonidagi ifoda chekli sondagi hadlarga ega bo'lgani uchun δ_1 ni tanlashimiz mumkinki, har qanday $|h| < \delta_1$ uchun $I_1 < \varepsilon/3$ bo'ladi.

I_3 ni baholash uchun, Koshi-Shvarts tengsizligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq 3a^2(T) \sum_{i=1}^{\infty} h \int_0^{t+h} |w_i(s)|^2 ds \leq \\ &\leq 3ha^2(T) \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T |w_i(s)|^2 ds \leq 3ha^2(T) \rho_0^2. \end{aligned}$$

Darhaqiqat, har qanday $|h| < \delta_2$ uchun $I_3 < \varepsilon/3$ bo'lganda δ_2 ni tanlashimiz mumkin. Demak, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ni tanlash orqali berilgan ixtiyoriy musbat ε sonidan $\|\eta(t+h) - \eta(t)\|^2$ ifoda kichik bo'lishi mumkin.

Endi, $\|\eta(t) - \eta(t-h)\|$, $h > 0$ ni ko'rib chiqamiz.

$$\begin{aligned} \eta_i(t) - \eta_i(t-h) &= \\ &= e^{A_i(t)} \eta_{i0} + \int_0^t e^{A_i(t-s)} w_i(s) ds - e^{A_i(t-h)} \eta_{i0} - \int_0^{t-h} e^{A_i(t-h-s)} w_i(s) ds = \\ &= (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i(t-h)} \eta_{i0} + \int_0^{t-h} (e^{A_i h} - E_3) e^{A_i(t-h-s)} w_i(s) ds + \\ &+ \int_{t-h}^t e^{A_i(t-h-s)} w_i(s) ds. \end{aligned}$$

Yuqoridagi ifoda $\|\eta(t+h) - \eta(t)\|^2$ ning baholanishiga o'xshashligi uchun biz har qanday musbat $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ soni mavjudligini aniqlashimiz mumkinki, har qanday $|h| < \delta$ da $\|\eta(t) - \eta(t-h)\|^2 < \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\eta(\cdot) \in C(0, T; l_2)$. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Ushbu maqolada biz (2) ko'rinishdagi cheksiz uchlik differensial tenglamalar sistemasini ko'rib chiqdik. Asosiy natija sifatida, ushbu sistemaning yechimi l_2 Hilbert fazosida mavjud va yagona ekanligini isbotladik.

Olingan natija bunday cheksiz differensial tenglamalar sistemalari uchun integral va geometrik cheklavlarga ega boshqaruv masalalari hamda differensial o'yinlarni o'rganishga imkon beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Albeverio S., Alimov Sh. A. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process. *Applied mathematics and optimization*. 57(1):(2008) 58-68.
2. Avdonin S.A., Ivanov S.A. *Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.(1995).
3. Azamov A.A., Ruziboev M.B. The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 77(2): (2013) 220-224.
4. Butkovskiy A.G. *Theory of Optimal Control of Distributed Parameter Systems*. New York: Elsevier.(1969)
5. Chernous'ko F.L. Bounded controls in distributed-parameter systems, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 56(5): (1992) 707-723.
6. Chernousko F.L., Ogranichennoye upravleniya v sistemax v raspredelennimi parametrami. *Prikl. matem. i mex.* 56(5), pp.810-856, 1992
7. Fursikov A.V. *Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications*, *Translations of Math. Monographs*, 187, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.(2000).
8. Ibragimov G.I., Azamov A. A., Risman Mat Hasim. Existence and Uniqueness of the Solution for an Infinite System of Differential Equations. *Journal KALAM, International Journal of Mathematics and Statistics*. 1(2):(2008) 9-14.

9. Ibragimov G. I., Qushaqov X. Sh. Infinite system of 2-systems of differential equations in Hilbert space 12. *Uzbek Mathematic Journal*, Vol 66, №2, 98-106. 2022.
10. Ibragimov G.I. A Problem of Optimal Pursuit in Systems with Distributed Parameters. *J. Appl. Math. Mech.* 66(5): 719-724. (*Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 66(5): (2002) 753-759.
11. Ibragimov G.I. Optimal pursuit time for a differential game in the Hilbert space l_2 . *ScienceAsia*. 39S: (2013) 25-30.
12. Ibragimov G.I., Allahabi F., Kuchkarov A.Sh. A pursuit problem in an infinite system of second-order differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 65(8): (2014) 1203-1216.
13. Idham A.A., Ibragimov G., Rakhmanov A. Evasion Differential Game of Infinitely Many Evaders from Infinitely Many Pursuers in Hilbert Space. *Dynamic Games and Applications*. 10.1007/s13235-016-0196-0, 7: (2017). 347-359.
14. Ibragimov G.I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader, *Differential Equations*, 41(5): (2005) 627-635.
15. Ibragimov G.I. On possibility of evasion in a differential game, described by countable number differential equations. *Uzbek Math. Journal*, 1: (2004) 50-55
16. Ibragimov G.I., Risman M.H. Pursuit and Evasion Differential game in Hilbert space. *International Game Theory Review*. 12(3): (2010) 239-251.
17. Ibragimov G.I., Rasid N., Kuchkarov A.Sh., Ismail F. Multi Pursuer Differential Game of Optimal Approach with Integral Constraints on Controls of Players. *Taiwanese Journal of Mathematics* 2015, 19(3), 963-976.
18. Ibragimov G.I. A Problem of Optimal Pursuit in Systems with Distributed Parameters. *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, Vol. 66, No 5, pp.719-724.
19. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki. (Boundary value problems of mathematical physics)* Moscow, (1973).
20. Tukhtasinov M., Mamadaliyev N. (2011) On the problems of pursuit and deviation from meeting in the class of the distributed control systems. *ROMAI J.* 7(2): 161-168.
21. Satimov N.Y., Tukhtasinov M. Game problems on a fixed interval in controlled first-order evolution equations, *Mathematical notes*, 80(3-4), (2006) 578-589.
22. Satimov N.Y., Tukhtasinov M. On Some Game Problems for First-Order Controlled Evolution Equations, *Differential Equations*, 41(8), (2005) 1169-1177.
23. Satimov N.Y., Tukhtasinov M. On Game Problems for Second-Order Evolution Equations. *Russian Mathematics*. 51(1): (2007) 49-57.
24. Tukhtasinov M. Some problems in the theory of differential pursuit games in systems with distributed parameters. *J Appl Math Mech.* 59(6): (1995) 979-984.
25. Tukhtasinov M., Mamatov M.Sh. On Pursuit Problems in Controlled Distributed Parameters Systems. *Mathematical Notes*. 84(2): (2008) 256-262.

DERIVATION OF THE LINEARIZED BGK EQUATION USING AN ORTHOGONAL POLYNOMIAL BASIS

Akramov Ikrom Isroil ugli,

Assistant professor at Bukhara State University

ikrom960623@gmail.com

Primqulov Adkham Akramovich,

Master student at Bukhara State University

primqulovadham434@gmail.com

Abstract. This paper presents a derivation of the linearized BGK (Bhatnagar–Gross–Krook) equation based on an orthogonal polynomial approximation of the Maxwellian distribution. The method preserves the first three macroscopic moments: density, momentum, and energy. By projecting the distribution function onto a finite-dimensional basis, we obtain an explicit form of the equilibrium function. The macroscopic equations are then derived by taking moments of the kinetic equation, followed by an analysis of the resulting system in matrix form. Eigenvalues and eigenvectors are computed to study the characteristic structure of the system.

Keywords: BGK equation, linearization, orthogonal polynomials, Maxwellian distribution, macroscopic equations, eigenvalues.

ORTOGONAL POLINOMLAR BAZASI YORDAMIDA CHIZIQLASHTIRILGAN BGK TENGLAMASINI CHIQARISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada BGK (Bhatnagar – Gross – Krook) tenglamasining chiziqlashtirilgan ko‘rinishi ortogonal polinomlar yordamida chiqariladi. Maksvel taqsimoti yaqinlashuvi orqali zichlik, impuls va energiya kabi asosiy makroskopik momentlar saqlab qolinadi. Taqsimot funksiyasi chekli o‘lchamli fazoga proyeksiya qilinib, muvozanat funksiyaning aniq ifodasi olinadi. Keyinchalik kinetik tenglamadan momentlar olish orqali makroskopik tenglamalar hosil qilinadi va tizim matritsa ko‘rinishida tahlil qilinadi. Xos qiymatlar va xos vektorlar orqali tizimning xossalari o‘rganiladi.

Kalit so‘zlar: BGK tenglamasi, chiziqlashtirish, ortogonal polinomlar, Maksvel taqsimoti, makroskopik tenglamalar, xos qiymatlar.

ВЫВОД ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БГК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО БАЗИСА

Аннотация. В данной работе выводится линеаризованное уравнение БГК (Бхатнагар–Гросс–Крук) с использованием ортогонального полиномиального базиса. Аппроксимация максвелловского распределения сохраняет первые три макроскопических момента: плотность, импульс и энергию. Функция распределения проецируется на конечномерное пространство, что позволяет получить явное выражение равновесной функции. Далее выводятся макроскопические уравнения, и проводится анализ системы в матричной форме с вычислением собственных значений и векторов.

Ключевые слова: БГК, линеаризация, ортогональные полиномы, распределение Максвелла, макроскопические уравнения, собственные значения.

Introduction. The BGK (Bhatnagar–Gross–Krook) model is a simplified kinetic equation used to describe the evolution of a particle distribution function in gas dynamics [1-3]. It replaces the complex collision operator of the Boltzmann equation with a relaxation term toward a local Maxwellian equilibrium.

The classical BGK equation is given by

$$\partial_t f + \vartheta \partial_x f = -\frac{1}{\varepsilon} (f - M[f]),$$

where $f = (x, t, \vartheta)$ is the distribution function, ϑ is the velocity variable, and ε is a small relaxation parameter. The function M denotes the Maxwellian equilibrium distribution [4-6].

Macroscopic quantities are defined as moments of the distribution function:

$$\rho = \int M[f] d\vartheta, \quad q = \int \vartheta M[f] d\vartheta, \quad s = \int \vartheta^2 M[f] d\vartheta$$

representing density, momentum, and energy, respectively. The objective of this work is to derive a linearized form of the BGK equation by approximating the Maxwellian distribution using a finite-dimensional orthogonal polynomial basis. Specifically, we consider an approximation of the form

$$M[f](\vartheta) = a_0 + a_1\vartheta + a_2\varphi(\vartheta).$$

where the basis functions are chosen to satisfy orthogonality conditions.

This approximation allows us to preserve the main macroscopic moments while simplifying the structure of the kinetic equation. By projecting the distribution function onto this basis, we obtain an explicit representation of the equilibrium function [7,8].

Furthermore, by taking moments of the BGK equation, we derive a system of macroscopic equations governing the evolution of density, momentum, and energy. The resulting system is then expressed in matrix form and analyzed through its eigenvalues and eigenvectors, which characterize the propagation of waves in the system.

The derivation of BGK Model. We start from the classical BGK equation

$$\partial_t f + \vartheta \partial_x f = -\frac{1}{\varepsilon}(f - M[f]).$$

Where $f(x, \vartheta, t)$ is the distribution function, ϑ is the velocity and ε is a small relaxation parameter.

$M[f]$ is the Maxwellian equilibrium

We define the macroscopic moments as follows

$$\rho = \int M[f] d\vartheta, \quad q = \int \vartheta M[f] d\vartheta, \quad s = \int \vartheta^2 M[f] d\vartheta$$

These quantities represent density, momentum, and energy respectively.

We begin by approximating the equilibrium distribution function $M[f]$ using a finite-dimensional polynomial expansion in velocity.

$$M[f](\vartheta) = a_0 + a_1\vartheta + a_2\varphi(\vartheta)$$

where $\varphi(\vartheta)$ is a function and a_0, a_1, a_2 are constants.

The goal is to construct $M[f]$ such that it preserves the first three macroscopic moments. To obtain this, we choose basis functions that are mutually orthogonal over the interval $\vartheta \in [-1, 1]$.

We take the following basis

$$\{1, \vartheta, \varphi(\vartheta)\}.$$

The function $\varphi(\vartheta)$ must satisfy orthogonality conditions

$$\int_{-1}^1 \varphi(\vartheta) d\vartheta = 0, \quad \int_{-1}^1 \vartheta \varphi(\vartheta) d\vartheta = 0.$$

We start from ϑ^2 , but it is not orthogonal to 1 since:

$$\int_{-1}^1 \vartheta^2 d\vartheta = \frac{\vartheta^3}{3} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Therefore, we modify it by subtracting a constant:

$$\varphi(\vartheta) = \vartheta^2 - C.$$

To enforce orthogonality with 1, we impose:

$$\int_{-1}^1 (\vartheta^2 - C) d\vartheta = \int_{-1}^1 \vartheta^2 d\vartheta - \int_{-1}^1 C d\vartheta.$$

Compute each term:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \vartheta^2 d\vartheta &= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 C d\vartheta &= C\vartheta = C - (-C) = 2C, \\ \frac{2}{3} - 2C &= 0, & 2C &= \frac{2}{3}, & C &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Hence, $\varphi(\vartheta) = \vartheta^2 - \frac{1}{3}$.

We now verify that the chosen basis is orthogonal. Indeed,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \vartheta d\vartheta &= \frac{\vartheta^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad (\text{between } 1 \text{ and } \vartheta). \\ \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3}) d\vartheta &= \int_{-1}^1 \vartheta^2 d\vartheta - \int_{-1}^1 \frac{1}{3} d\vartheta = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0, \quad (\text{between } 1 \text{ and } \varphi(\vartheta)). \\ \int_{-1}^1 \vartheta (\vartheta^2 - \frac{1}{3}) d\vartheta &= \int_{-1}^1 \vartheta^3 d\vartheta - \int_{-1}^1 \frac{\vartheta}{3} d\vartheta = \frac{\vartheta^4}{4} - \frac{\vartheta^2}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0, \quad (\text{between } \vartheta \\ &\quad \text{and } \varphi(\vartheta)). \end{aligned}$$

Thus, the set:

$$\left\{1, \vartheta, \left(\vartheta^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

and we have this

$$M[f](\vartheta) = a_0 + a_1\vartheta + a_2(\vartheta^2 - \frac{1}{3}).$$

We now determine a_0, a_1, a_2 using moment conditions.

$$\rho = \int_{-1}^1 M(f)d\vartheta = a_0 \int_{-1}^1 1d\vartheta + a_1 \int_{-1}^1 \vartheta d\vartheta + a_2 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta$$

$$\rho = a_0\vartheta + a_1\frac{\vartheta^2}{2} + a_2(\frac{\vartheta^3}{3} - \frac{\vartheta}{3})$$

We evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(1) - \rho(-1), \\ \rho &= (a_0 \cdot 1 + a_1 \frac{1}{2} + a_2(\frac{1}{3} - \frac{1}{3})) - (a_0(-1) + a_1 \frac{1}{2} + a_2(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3})), \end{aligned}$$

And we take this:

$$\begin{aligned} \rho &= a_0 + a_1 \frac{1}{2} + a_2 \cdot 0 + a_0 - a_1 \frac{1}{2} - a_2 \cdot 0, \\ \rho &= 2a_0 \text{ and } a_0 = \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

For momentum:

$$q = \int_{-1}^1 \vartheta M[f]d\vartheta = a_0 \int_{-1}^1 \vartheta d\vartheta + a_1 \int_{-1}^1 \vartheta^2 d\vartheta + a_2 \int_{-1}^1 (\vartheta^3 - \frac{\vartheta}{3})d\vartheta.$$

Next, we simplify the obtained expression.

$$q = a_0 \frac{\vartheta^2}{2} + a_1 \frac{\vartheta^3}{3} + a_2(\frac{\vartheta^4}{4} - \frac{\vartheta^2}{6}),$$

We evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

Firstly, we evaluate $\vartheta = 1$

$$\begin{aligned} q(1) &= a_0 \frac{1}{2} + a_1 \frac{1}{3} + a_2(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}), \\ q(1) &= a_0 \frac{1}{2} + a_1 \frac{1}{3} + a_2 \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Now, $\vartheta = -1$

$$\begin{aligned} q(-1) &= a_0 \frac{1}{2} + a_1(\frac{-1}{3}) + a_2(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}), \\ q(-1) &= a_0 \frac{1}{2} - a_1 \frac{1}{3} + a_2 \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

And subtract the results:

$$q = q(1) - q(-1)$$

$$q = (a_0 \frac{1}{2} + a_1 \frac{1}{3} + a_2 \frac{1}{12}) - (a_0 \frac{1}{2} - a_1 \frac{1}{3} + a_2 \frac{1}{12}),$$

$$q = a_1 \frac{2}{3} \text{ and we find } a_1, a_1 = \frac{3q}{2}.$$

For energy:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})M[f]d\vartheta, \\ s &= a_0 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta + a_1 \int_{-1}^1 \vartheta(\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta + a_2 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})(\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta, \end{aligned}$$

We make this expression a bit simpler:

$$\begin{aligned} s &= a_0 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta + a_1 \int_{-1}^1 (\vartheta^3 - \frac{\vartheta}{3})d\vartheta + a_2 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})^2 d\vartheta, \\ s &= a_0 \int_{-1}^1 (\vartheta^2 - \frac{1}{3})d\vartheta + a_1 \int_{-1}^1 (\vartheta^3 - \frac{\vartheta}{3})d\vartheta + a_2 \int_{-1}^1 (\vartheta^4 - \frac{2\vartheta^2}{3} + \frac{1}{9})d\vartheta. \end{aligned}$$

We compute the integrals with respect to ϑ .

$$s = a_0(\frac{\vartheta^3}{3} - \frac{\vartheta}{3}) + a_1(\frac{\vartheta^4}{4} - \frac{\vartheta^2}{6}) + a_2(\frac{\vartheta^5}{5} - \frac{2\vartheta^3}{9} + \frac{\vartheta}{9}).$$

Now, we evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

Firstly, we evaluate $\vartheta = 1$

$$\begin{aligned} s(1) &= a_0(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + a_1(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + a_2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}), \\ s(1) &= a_0 \cdot 0 + a_1 \frac{1}{12} + a_2 \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

Now, $\vartheta = -1$

$$s(-1) = a_0\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3}\right) + a_1\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + a_2\left(\frac{-1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right),$$

$$s(-1) = a_0 0 + a_1 \frac{1}{12} - a_2 \frac{4}{45}.$$

And subtract the results:

$$s = s(1) - s(-1),$$

$$s = \left(a_1 \frac{1}{12} + a_2 \frac{4}{45}\right) - \left(a_1 \frac{1}{12} - a_2 \frac{4}{45}\right),$$

$$s = a_2 \frac{8}{45} \quad \text{and we find } a_2, a_2 = \frac{45s}{8}.$$

Final form of the Maxwellian:

$$M[f](\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2}q\vartheta + \frac{45}{8}(\vartheta^2 - \frac{1}{3})s.$$

Substitution into the BGK equation, starting from this:

$$\partial_t f + \vartheta \partial_x f = -\frac{1}{\varepsilon}(f - M[f]).$$

Substituting the expression of $M[f]$, we obtain:

$$\partial_t f + \vartheta \partial_x f = -\frac{1}{\varepsilon}\left(f - \left(\frac{\rho}{2} + \frac{3}{2}q\vartheta + \frac{45}{8}(\vartheta^2 - \frac{1}{3})s\right)\right).$$

Derivation of Macroscopic Equations. This derivation shows that the linearized BGK model is obtained by projecting the distribution function onto an orthogonal polynomial basis that preserves the first three macroscopic moments.

Having determined the explicit form of the Maxwellian distribution, we now derive the macroscopic equations governing the evolution of the moments. This is achieved by taking successive moments of the BGK equation and passing to the limit as the relaxation parameter tends to zero. ($\varepsilon \rightarrow 0$)

We start from the kinetic BGK equation.

$$\partial_t f + \vartheta \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}Q(f).$$

To derive the first macroscopic equation, we integrate this equation with respect to the velocity variable ϑ over the interval $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 (\partial_t f + \vartheta \partial_x f) d\vartheta = \int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} Q(f) d\vartheta.$$

To prevent the right-hand side from becoming unbounded as ε , the distribution function f , must approach the $\frac{\rho}{2} + \frac{3}{2}q\vartheta + \frac{45}{8}(\vartheta^2 - \frac{1}{3})$.

Using the linearity of the integral and exchanging differentiation and integration, we obtain,

$$\partial_t \int_{-1}^1 f d\vartheta + \partial_x \int_{-1}^1 \vartheta f d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 Q(f) d\vartheta.$$

The collision operator satisfies the conservation of mass property,

$$\int_{-1}^1 Q(f) d\vartheta = 0.$$

Therefore, the right-hand side vanishes and we obtain,

$$\partial_t \int_{-1}^1 f d\vartheta + \partial_x \int_{-1}^1 \vartheta f d\vartheta = 0.$$

Using the definitions of the macroscopic quantities,

$$\rho = \int_{-1}^1 f d\vartheta, \quad q = \int_{-1}^1 \vartheta f d\vartheta,$$

we finally obtain,

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0.$$

Next, we multiply the kinetic equation by ϑ and integrate over velocity:

$$\int_{-1}^1 \vartheta (\partial_t f + \vartheta \partial_x f) d\vartheta = 0,$$

$$\int_{-1}^1 (\vartheta \partial_t f + \vartheta^2 \partial_x f) d\vartheta = 0.$$

This gives,

$$\partial_t \int_{-1}^1 \vartheta f d\vartheta + \partial_x \int_{-1}^1 \vartheta^2 f d\vartheta = 0.$$

Using the definitions,

$$q = \int_{-1}^1 \vartheta f d\vartheta, \quad s = \int_{-1}^1 \vartheta^2 f d\vartheta.$$

we obtain the second macroscopic equation:

$$\partial_t q + \partial_x s = 0.$$

Now we multiply the hole equation by ϑ^2 and integrate,

$$\int_{-1}^1 \vartheta^2 \partial_t f d\vartheta + \int_{-1}^1 \vartheta^3 \partial_x f d\vartheta = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \vartheta^2 Q(f) d\vartheta,$$

$$\int_{-1}^1 \vartheta^2 \partial_t f d\vartheta + \int_{-1}^1 \vartheta^3 \partial_x f d\vartheta = 0.$$

Using the definition,

$$s = \int_{-1}^1 \vartheta^2 f d\vartheta.$$

And we have this,

$$\partial_t s + \partial_x \left(\int_{-1}^1 \vartheta^3 f(\vartheta) d\vartheta \right) = 0.$$

The remaining task is to compute the flux term $\int_{-1}^1 \vartheta^3 f(\vartheta) d\vartheta$.

In the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, the distribution function f is given by the equilibrium expression,

$$f(\vartheta) = \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2} q \vartheta + \frac{45}{8} \left(\vartheta^2 - \frac{1}{3} \right) s.$$

We now compute the integral,

$$\int_{-1}^1 \vartheta^3 \left(\frac{\rho}{2} + \frac{3}{2} q \vartheta + \frac{45}{8} \left(\vartheta^2 - \frac{1}{3} \right) s \right) d\vartheta,$$

We can write like this:

$$\int_{-1}^1 \vartheta^3 \frac{\rho}{2} d\vartheta + \int_{-1}^1 \vartheta^3 \frac{3}{2} q \vartheta d\vartheta + \int_{-1}^1 \vartheta^3 \frac{45}{8} \left(\vartheta^2 - \frac{1}{3} \right) s d\vartheta.$$

The quantities ρ, q, s are independent of the integration variable ϑ ,

$$\frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \vartheta^3 d\vartheta + \frac{3q}{2} \int_{-1}^1 \vartheta^4 d\vartheta + \frac{45s}{8} \int_{-1}^1 \left(\vartheta^5 - \frac{\vartheta^3}{3} \right) d\vartheta.$$

We substitute the expression for into the integral and compute each term separately.

First integral:

$$\frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \vartheta^3 d\vartheta = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\vartheta^4}{4} \right),$$

Now, we evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

$$\frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{4} \right) = 0.$$

Second integral:

$$\frac{3q}{2} \int_{-1}^1 \vartheta^4 d\vartheta = \frac{3q}{2} \left(\frac{\vartheta^5}{5} \right),$$

Now, we evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

$$\frac{3q}{2} \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{3q}{2} \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{3q}{5}.$$

Now the third integral:

$$\frac{45s}{8} \int_{-1}^1 \left(\vartheta^5 - \frac{\vartheta^3}{3} \right) d\vartheta = \frac{45s}{8} \left(\frac{\vartheta^6}{6} - \frac{\vartheta^4}{12} \right),$$

Now, we evaluate the expression at $\vartheta = 1$ and $\vartheta = -1$, and then take their difference.

$$\frac{45s}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) - \frac{45s}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) = 0.$$

Therefore, the result is:

$$\partial_t s + \frac{3}{5} \partial_x q = 0.$$

Thus, the macroscopic system takes its final form as follows:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x s = 0 \\ \partial_t s + \frac{3}{5} \partial_x q = 0 \end{cases}.$$

Eigenvalue and Eigenvector Analysis.

The system can be written in a compact matrix form. Let us introduce the vector of macroscopic variables. $U = (\rho, q, s)^T$.

The entries of the matrix A are obtained directly from the coefficients of the spatial derivatives in system.

It is given by the following form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

The system can be written in matrix form:

$$\partial_t U + A \partial_x U = 0.$$

In order to analyze the wave propagation properties of the system, we compute the eigenvalues of the matrix A .

These eigenvalues are obtained from the characteristic equation: $\det(A - \lambda I) = 0$.

We compute,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{5} \right) - 1(0 - 0) + 0(0 - 1),$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{5} \right).$$

Setting the determinant equal to zero yields:

$$-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{3}{5} \right) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

These eigenvalues represent the characteristic speeds of the system. In particular, the system has three characteristic fields corresponding to left-going, right-going, and stationary waves.

Eigenvector computations.

We compute the corresponding eigenvectors $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)^T$ by solving:

$$(A - \lambda I)\vartheta = 0.$$

Eigenvector for $\lambda = 0$

$$A\vartheta = 0.$$

This gives the matrix system:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_3 = 0.$$

Therefore, the eigenvector is:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenvector for $\lambda = \sqrt{\frac{3}{5}}$,

$$\left(A - \sqrt{\frac{3}{5}} I \right) \vartheta = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{5}} & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{5}} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_2 + \vartheta_3 = 0 \\ \frac{3}{5}\vartheta_2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_1, \quad \vartheta_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_2 \rightarrow \vartheta_3 = \frac{3}{5}\vartheta_1.$$

Hence, the eigenvector is: $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Eigenvector for $\lambda = -\sqrt{\frac{3}{5}}$,

$$\left(A + \sqrt{\frac{3}{5}}I\right) = 0.$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0 \\ \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_2 + \vartheta_3 = 0 \\ \frac{3}{5}\vartheta_2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

From this: $\vartheta_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_1$, $\vartheta_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}\vartheta_2 \rightarrow \vartheta_3 = \frac{3}{5}\vartheta_1$.

Final result:

$$\lambda_1 = 0 : v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} : v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \lambda_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}} : v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Conclusion. In this work, we presented a systematic derivation of the linearized BGK equation based on an orthogonal polynomial approximation of the Maxwellian distribution. The proposed approach ensures that the fundamental macroscopic quantities—density, momentum, and energy—are preserved while reducing the complexity of the kinetic model.

By projecting the distribution function onto a finite-dimensional space, we obtained an explicit and tractable representation of the equilibrium function. This allowed us to derive a closed system of macroscopic equations that captures the essential behavior of the original kinetic model.

Furthermore, the resulting system was analyzed in terms of its characteristic structure. The eigenvalue analysis demonstrated that the model possesses well-defined propagation speeds and exhibits wave-like behavior, confirming its hyperbolic nature.

Overall, the presented framework provides a clear connection between microscopic kinetic descriptions and macroscopic models. It highlights the effectiveness of orthogonal polynomial methods in simplifying complex systems while preserving their key physical properties. The results obtained in this work can serve as a foundation for further research, including extensions to higher-dimensional problems, more accurate approximations, and applications to more complex kinetic models.

REFERENCES:

1. A. Bellouquid, *On the asymptotic analysis of kinetic models towards the compressible Euler and acoustic equations*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* Vol. 14, No. 6 (2004) 853–882.
2. P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, and M. Krook, *A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems*, *Physical Review* Vol. 94, No. 3 (1954) 511-525.
3. R. Borsche, R. Colombo, M. Garavello, *On the coupling of systems of hyperbolic conservation laws with ordinary differential equations*, *Nonlinearity* 23, 11, 2749, 2010.
4. F. Coron, *Computation of the Asymptotic States for Linear Halfspace Problems*, *TTSP* 19(2), 89, 1990.
5. R. Colombo, M. Herty, V. Sachers, *On 2x2 conservation laws at a junction* *SIAM J. Math. Anal.* 40, 2, 2008.
6. R. Colombo, M. Herty, V. Sachers, *On 2x2 conservation laws at a junction* *SIAM J. Math. Anal.* 40, 2, 2008.

MATHEMATICS

7. F. Golse, A. Klar, *Numerical Method for Computing Asymptotic States and Outgoing Distributions for a Kinetic Linear Half Space Problem*, *J. Stat. Phys.* 80 (5-6), 1033-1061, 1995
8. A. Jeffrey, *Quasilinear hyperbolic systems and waves*, *Research Notes in Mathematics*, Pitman Publishing, 1976.

IKKINCHI TUR PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN BITSADZE – SAMARSKIY SHARTI BILAN QO'YILGAN MASALA TAHLILI

Asqaraliyeva Muxtasar Azizjon qizi,
Qo'qon davlat universiteti o'qituvchisi, PhD
asqaraliyevamuxtasar@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada (1) ko'rinishdagi buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun BC_p masalasini qo'yilishi, BC_p masala yechimining yagonaligi, parallel xarakteristikalarda Bitsadze –SamarSKIY sharti bilan qo'yilgan masala yechimining bir qiymatli yechilishi tenglamalar orqali ko'rsatilgan, lemma va uning isbotlari keltirilgan.

Kalit so'zlar: tenglama, parabolik, giperbolik, parallel, buzilish chizig'i, isbot, masala, yechim.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ПАРАБОЛИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

Аннотация. В данной статье поставлена задача параболического-гиперболического уравнения второго порядка с разрывом в линии разлома вида (1), показана единственность решения задачи, показано однозначное решение задачи, поставленной с условием Бицадзе–Самарского в параллельных характеристиках, посредством уравнений, представлена лемма и ее доказательство.

Ключевые слова: уравнение, параболическая, гиперболическая, параллельная, линия разлома, доказательство, проблема, решение.

ANALYSIS OF A PROBLEM WITH THE BITSADZE–SAMARSKII CONDITION FOR A SECOND-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Abstract. In this article, the problem of the second-order parabolic-hyperbolic equation with a discontinuity in the fault line of the form (1) is posed, the uniqueness of the solution of the problem is shown, the single-valued solution of the problem posed with the Bitsadze-Samarsky condition in parallel characteristics is shown through equations, the lemma and its proof are presented.

Key words: equation, parabolic, hyperbolic, parallel, line resolution, proof, problem, solution

Kirish. Aralash tipdagi differensial tenglamalar ko'plab muhim: gaz dinamikasi nazariyasi, magnitli gidrodinamika, elektronlarning tarqalish nazariyasi, sirlarning cheksiz kichik egilishlari nazariyalari va yer osti suvlari darajasini bashorat qilish kabi amaliy masalalarni yechishda qo'llanilishi tufayli, o'tgan asrning 50-yillaridan boshlab jadal suratda rivojlanayotgan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Matematik fizika tenglamalar nazariyasining muhim masalalaridan biri nostandart chegaraviy shartli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechilishini o'rganishdir. Shu sababli, ikkinchi turdagi aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni qo'yilishi va ularni o'rganish ilmiy tadqiqotning ustuvor yo'nalishlaridan biri bo'lib hisoblanadi.

Buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar yechish hozirgi paytda xususiy hosilali differensial tenglamalardagi asosiy rivojlangan yo'nalishlardan biridir. Buning sabablaridan bir tomoni bu tenglamalarni amaliyotga qo'llanilishi bo'lsa, ikkinchi tomondan esa nazariy jihatdan bu tenglamalarga qo'yilgan masalalarni yechilishidir.

Manba va usullar. Chegaraviy masalalar yechimining bir qiymatli yechilishini isbotlashda ikkinchi turdagi Volterra va Fredholm integral tenglamalari nazariyasidan, oddiy differensial tenglamalarni yechish usullaridan, R_2 sinfdagi umumlashgan yechim xossalaridan, maxsus funksiyalar xossalaridan, kasr tartibli integro–differensial operatorlarning xossalaridan foydalaniladi.

Bog'liq adabiyotlar yoki muammoning o'rganilganlik darajasi. Chet el, MDH va respublikamiz olimlari tomonidan chop etilgan va chop etilayotgan ilmiy maqolalarga nazar solsak, unda asosan bu tenglamalar uchun Triкоми, Gellerstedt, Bitsadze, nolokal masalalar o'rganilgan bo'lib, bundan tashqari bu tenglamalar uchun yangi korrekt bo'lgan masalalar qo'yilmoqda va o'rganilmoqda. Bular haqidagi to'liq ma'lumotni A.V Bitsadze, M.S.Saloxitdinov tomonidan chiqarilgan monografiyalarning adabiyotlar ro'yxatidan topish mumkin. Bizga ma'lumki, buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik

- giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalarni taxlil etish kamroq o'rganilgan. Shuning uchun ushbu maqolada buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal va parallel xarakteristikalarda Bitsadze – Samarskiy sharti bilan qo'yilgan masalalarni bir qiymatli yechilishi o'rganilgan.

Natija va topilmalar. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$0 = \begin{cases} xu_{xx} + \alpha_0 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & x > 0, \quad y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda

$$0 < \alpha_0 < 1 + 2\beta < 1, \quad 2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad 0 < m < 1, \quad -1 < 2\beta < 0. \quad (2)$$

(1) tenglama uchun BC_p masalasini qo'yilishi

Ω orqali $x > 0, y > 0$ bo'lganda $x=0, x=1, y=1$ mos ravishda to'g'ri chiziqlarda yotgan AA_0, BB_0, A_0B_0 kesmalar va $x > 0, y < 0$ bo'lganda esa (3.1) tenglamaning

$$AB: y=0,$$

$$AC: x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0,$$

$$BC: x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$$

xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: $J = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}$,

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad \Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J,$$

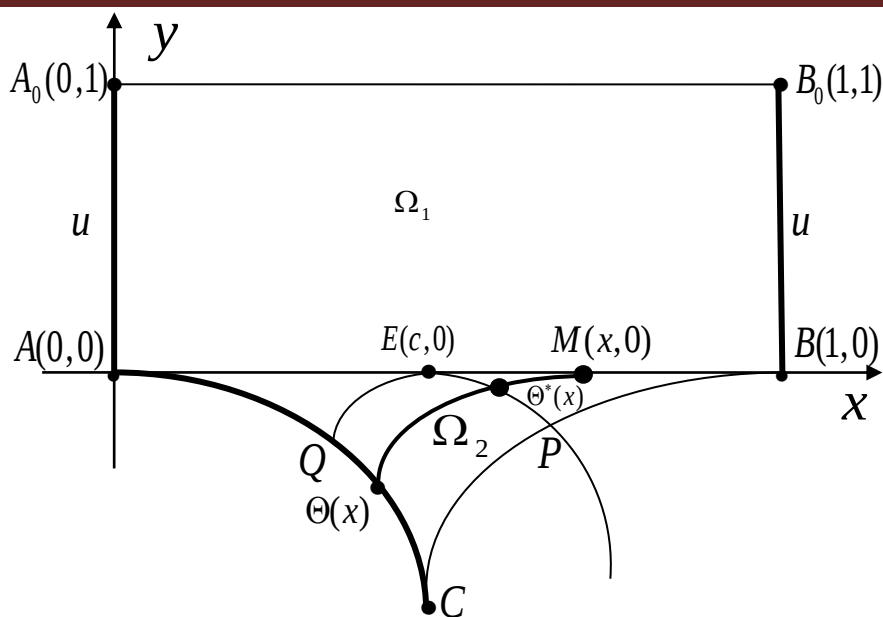
$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} u(x, y) = \tau^\pm(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} u_y(x, y) = \nu^\pm(x), \quad (x, 0) \in J_1 \cup J_2. \quad (3)$$

$E(c, 0) \in J$ nuqtasidan chiqib, (1) tenglamaning AC va BC xarakteristikalariga parallel bo'lgan xarakteristikalarini mos ravishda $EP: x - (1 - 2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c$ va $EQ: x + (1 - 2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)} = c$ belgilaymiz.

(1) tenglamaning $M(x, 0) \in J_2$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikalari bilan mos ravishda AC va EP xarakteristikasi kesishish nuqtasining koordinatalarini

$$\Theta(x) = \left(\frac{x}{2}; - \left[\frac{x}{2(1-2\beta)} \right]^{1-2\beta} \right), \quad \Theta^*(x) = \left(\frac{x+c}{2}; - \left[\frac{x-c}{2(1-2\beta)} \right]^{1-2\beta} \right) \quad (4)$$

orqali belgilaymiz (**1-chizma**).



1-chizma.

BC_p – masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

$$1) u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2) \cap C^1(\Omega);$$

$$2) u(x, y) \in C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1) \text{ bo'lib, } \Omega_1 \text{ sohada (3.1) tenglamani qanoatlantirsin;}$$

3) $u(x, y) \in R_2$ [1-bob, 1.3-§ ga qarang] bo'lib, $\Omega_2 \setminus \{EP \cup EQ\}$ sohada (3.1) tenglamani umumlashgan yechimi bo'lsin;

4) $u(x, y)$ - funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

$$u(x, y)|_{AQ} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{c}{2}, \quad (6)$$

$$u[\Theta(x)] = \mu u[\Theta^*(x)] + \psi_2(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}_2; \quad (7)$$

5) J_1 va J_2 buzilish chizig'ida quyidagi

$$\lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) = p_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) + q_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = p_2(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) + q_2(x), \quad (x, 0) \in J_1 \cup J_2, \quad (9)$$

ulash sharti bajarilsin, bu yerda $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $p_j(x)$, $q_j(x)$ ($j=1,2$) berilgan funksiyalar bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0) = 0, \quad \psi_1\left(\frac{c}{2}\right) = \psi_2(c), \quad (10)$$

$$\varphi_j(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \quad (j=1,2), \quad (11)$$

$$\psi_1(x) \in C^2\left[0; \frac{c}{2}\right], \quad \psi_2(x) \in C^2[c;1], \quad (12)$$

$$p_1(x), q_j(x) \in C^2(\bar{J}), \quad p_2(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J), \quad (j=1,2), \quad (13)$$

$$\mu = \text{const} \leq 0, \quad p_j(x) > 0, \quad (j=1,2) \quad \forall x \in \bar{J}, \quad (14)$$

$\Theta(x)$ va $\Theta^*(x)$ funksiyalar (4) formula orqali aniqlanadi.

Ω_1 va Ω_2 sohalardan $y=0$ buzilish chizig'ida olingan $\tau^\pm(x)$ va $\nu^\pm(x)$ funksiyalar orasidagi funksional bog'lanishlarni topish haqida gap ketganda,

(2), (3) (5) shartlar va BC_p masalanig 1) shartini e'tiborga olib, Ω_1 parabolik sohadan (1) tenglamaga $y \rightarrow +0$ limitga o'tib quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$x \tau^{+''}(x) + \alpha_0 \tau^{+'}(x) = \nu^+(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (15)$$

$$\tau^+(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad \tau^+(c) = 0, \quad (16_1)$$

$$\tau^+(c) = 0, \quad \tau^+(1) = \varphi_2(0). \quad (16_2)$$

(16₁) va (15), (16₂) masalalarni yechib, Ω_1 parabolik sohadan mos ravishda J_1 va J_2 buzilish chizig'ida $\tau^+(x)$ va $\nu^+(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi funksional bog'lanishni topamiz:

$$\tau^+(x) = \int_0^c G_1(x, t) \nu^+(t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{J}_1, \quad (17_1)$$

va

$$\tau^+(x) = \int_c^1 G_2(x, t) \nu^+(t) dt + x^{1-\alpha_0} \varphi_2(0), \quad (x, 0) \in \bar{J}_2, \quad (17_2)$$

bu yerda

$$G_1(x, t) = \frac{1}{1-\alpha_0} \begin{cases} x^{1-\alpha_0} (c^{\alpha_0-1} - t^{\alpha_0-1}), & 0 \leq x \leq t, \\ c^{\alpha_0-1} x^{1-\alpha_0} - 1, & t \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (18_1)$$

$$G_2(x, t) = \frac{1}{1-\alpha_0} \begin{cases} x^{1-\alpha_0} (1 - t^{\alpha_0-1}), & c \leq x \leq t, \\ x^{1-\alpha_0} - 1, & t \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (18_2)$$

(18_j) ($j=1, 2$) formula bilan aniqlangan $G_j(x, t)$ funksiya bir jinsli (15), (16_j) masalasining Grin funksiyasi bo'ladi [17].

Ω_2 sohada (1) tenglamaning

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} T(\zeta) d\zeta + \int_\xi^\eta (\eta - \zeta)^{-\beta} (\zeta - \xi)^{-\beta} N(\zeta) d\zeta \quad (19)$$

yechimidan foydalanamiz, bu yerda

$$N(\zeta) = \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(\zeta) - \gamma_2 \nu^-(\zeta), \quad (20)$$

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau^-(x). \quad (21)$$

(3.19) ga $\xi=0$, $\eta=x$ va $\xi=c$, $\eta=x$ qo'yib va (3.4) dan foydalanib, hamda bir necha hisob kitoblardan so'ng quyidagini hosil qilamiz:

$$u[\Theta(x)] = \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} N(t) dt, \quad (22)$$

$$u[\Theta^*(x)] = \int_0^c (x-t)^{-\beta} (c-t)^{-\beta} T(t) dt + \int_c^x (x-t)^{-\beta} (t-c)^{-\beta} N(t) dt. \quad (23)$$

(22) va (23) x bo'yicha differensiallab, so'ngra formulani qo'llab, quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u[\Theta(x)] &= -\beta \int_0^x (x-t)^{-\beta-1} t^{-\beta} N(t) dt = \\ &= \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta} x^{-\beta} N(x), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u[\Theta^*(x)] &= -\beta \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} T(t) dt - \beta \int_c^x (x-t)^{-\beta-1} (t-c)^{-\beta} N(t) dt = \\ &= -\beta \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} T(t) dt + \Gamma(1-\beta) D_{cx}^{\beta} (x-c)^{-\beta} N(x). \end{aligned} \quad (25)$$

Endi (7) shartni x bo'yicha differensiallab,

$$\frac{d}{dx} u[\Theta(x)] = \mu \frac{d}{dx} u[\Theta^*(x)] + \psi'_2(x), \quad (26)$$

so'ngra hosil qilgan tengligimizning o'ng tomoniga $D_{cx}^{-\beta}[\cdot]$ operator qo'llab, ushuni

$$\begin{aligned} D_{cx}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\theta(x)] &= \frac{d}{dx} D_{cx}^{-\beta-1} \frac{d}{dx} u[\theta(x)] = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_c^x \frac{d}{dt} \{u[\theta(t)]\} \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d}{dt} \{u[\theta(t)]\} \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}} + \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_c^0 \frac{d}{dt} \{u[\theta(t)]\} \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}} = \\ &= D_{0x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\theta(x)] - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^c \frac{d}{dt} \{u[\theta(t)]\} \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}}, \quad (x, 0) \in J_2, \\ D_{cx}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\theta(x)] &= D_{0x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\theta(x)] - \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^c \frac{d}{dt} \{u[\theta(t)]\} \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}}, \quad (x, 0) \in J_2 \end{aligned} \quad (27)$$

hosil qilamiz.

(27) ga ko'ra (26) tenglikdan quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} D_{0x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\Theta(x)] &- \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^c \frac{d}{dt} [u(\Theta(t))] \frac{dt}{(x-t)^{-\beta}} = \\ &= \mu D_{cx}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\Theta^*(x)] + D_{cx}^{-\beta} \psi'_2(x), \end{aligned} \quad (28)$$

bu yerda $D_{cx}^{\alpha}[\cdot]$ — α kasr tartibli differensial operator.

(24) va (25) ni (28) ga qo'yib, (28), (6), (20) hamda

$$\begin{aligned} D_{0x}^{-\beta} D_{0x}^{\beta} x^{-\beta} N(x) &= x^{-\beta} N(x), \\ D_{cx}^{-\beta} D_{cx}^{\beta} (x-c)^{-\beta} N(x) &= (x-c)^{-\beta} N(x) \end{aligned} \quad (29)$$

ni hisobga olib,

$$\begin{aligned} \gamma_2 v^-(x) &= \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(x) - \frac{\mu \beta}{\Gamma(1+\beta) \Gamma(1-\beta) [\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta}]} \times \\ &\times D_{cx}^{-\beta} \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} T(t) dt + F_1(x), \quad (x, 0) \in J_2, \end{aligned} \quad (30)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{D_{cx}^{-\beta} \psi'_2(x)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(1+\beta) [\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta}]} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(1+\beta) (\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta})} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^c \frac{\psi'_1\left(\frac{t}{2}\right) dt}{(x-t)^{-\beta}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Xuddi shunday (19) ga $\xi = 0$, $\eta = x$ va (3.6) dan foydalanib quyidagini olamiz:

$$\gamma_2 v^-(x) = \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(x) - \frac{x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{-\beta} \psi'_1(x), \quad (x, 0) \in J_1. \quad (32)$$

(21) ni (30) va (32) tenglikka qo'yib, noma'lum $v^-(x)$ funksiyani $\tau^-(x)$ orqali ushbu ko'rinishda

$$\begin{aligned} v^-(x) &= \frac{1}{2 \gamma_2 \Gamma(1-2\beta) \cos \pi \beta} D_{0x}^{1-2\beta} \tau^-(x) - \\ &- \frac{x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta) \gamma_2} D_{0x}^{-\beta} \psi'_1(x), \quad (x, 0) \in J_1, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 v^-(x) &= \frac{1}{2 \Gamma(1-2\beta) \cos \pi \beta} D_{0x}^{1-2\beta} \tau^-(x) - \frac{\mu \beta}{\Gamma(1+\beta) \Gamma(1-\beta) [\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta}]} \times \\ &\times D_{cx}^{-\beta} \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} D_{0t}^{1-2\beta} \tau^-(t) dt + F_1(x), \quad (x, 0) \in J_2 \end{aligned} \quad (34)$$

topamiz.

Demak, (33) va (34) formulalar mos ravishda Ω_2 giperbolik sohadan J_1 va J_2 buzilish chizig'ida

olingan $\tau^-(x)$ va $v^-(x)$ funksiyalar orasidagi ikkinchi funksional bog'lanishdir.

BC_p masala yechimining yagonaligi

(3) belgilashga ko'ra (8) va (9) shartlarni quyidagicha yozab olamiz:

$$\tau^-(x) = p_1(x) \tau^+(x) + q_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (35)$$

$$v^-(x) = p_2(x) v^+(x) + q_2(x), \quad (x, 0) \in J. \quad (36)$$

(35) va (36) ifodalarni (33) va (34) tenglikka qo'yib, ushbu ko'rinishda

$$p_2(x) v^+(x) + q_2(x) = \frac{1}{2 \gamma_2 \Gamma(1-2\beta) \cos \pi \beta} D_{0x}^{1-2\beta} [p_1(x) \tau^+(x) + q_1(x)] -$$

$$-\frac{x^\beta}{\Gamma(1-\beta)\gamma_2}D_{0x}^{-\beta}\psi'_1(x), \quad (x,0) \in J_1, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 \left[p_2(x)v^+(x) + q_2(x) \right] = & \frac{1}{2\Gamma(1-2\beta)\cos\pi\beta} D_{0x}^{1-2\beta} \left[p_1(x)\tau^+(x) + q_1(x) \right] - \\ & - \frac{\mu\beta}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta) \left[\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta} \right]} D_{cx}^{-\beta} \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} \times \\ & \times D_{0t}^{1-2\beta} \left[p_1(t)\tau^+(t) + q_1(t) \right] dt + F_1(x), \quad (x,0) \in J_2 \end{aligned} \quad (38)$$

topamiz.

Agar (2), (14) shartlar bajarilsa, u holda Ω sohada BC_p masala birdan ortiq yechimga ega emas.

Lemma. Agar $\tau^{-'}(x)$ funksiya $0 < x < 1$ da $k > -2\beta$ ko'rsatgich bilan Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda

$$P(x) = \int_0^x \tau^{-'}(t)(x-t)^{2\beta} dt$$

funksiya birinchi hosilaga ega va quyidagi

$$P'(x) = \tau^{-'}(x)(1+x)^{2\beta} + 2\beta \int_0^x \left[\tau^{-'}(t) - \tau^{-'}(x) \right] (x-t)^{2\beta-1} dt.$$

ko'rinishda bo'ladi.

Lemma. Aytaylik $\tau^-(x) \in C[0,1] \cap C^{(1,k)}(0,1)$, bu yerda $k > -2\beta$, $x = x_0$ ($x_0 \in (0,1)$) nuqtada eng katta musbat (eng kichik manfiy) qiymatga erishsa. Unda $T(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin

$$\begin{aligned} T(x_0) = & \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau^-(x) \Big|_{x=x_0} = \\ = & \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left[2\beta x_0^{2\beta-1} \tau^-(x_0) - 2\beta(1-2\beta) \int_0^{x_0} \frac{\tau^-(t) - \tau^-(x_0)}{(x_0-t)^{2-2\beta}} dt \right], \end{aligned}$$

hamda

$$T(x_0) < 0 \quad (T(x_0) > 0), \quad x_0 \in (0,1). \quad (40)$$

Lemma. Agar (2), (14) va (40) shartlar bajarilsa, u holda BC_p masalaning $u(x,y)$ yechimi $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$, $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ da o'zining musbat maksimumiga va manfiy minimumiga $\bar{\Omega}_1$ yopiq sohaning $\overline{AA_0} \cup \overline{AB_0}$ da erishadi.

Lemmaning isboti. Parabolik tipdagi tenglamalar nazariyasining ekstremum prinsipiga ko'ra, Ω_1 parabolik sohada (1) tenglamaning $u(x,y)$ yechimi o'zining musbat maksimumiga va manfiy minimumiga $\bar{D}_1$ sohaning chegarasi $\overline{AA_0} \cup \overline{BB_0} \cup J_1 \cup J_2 \cup E(c,0)$ da erishadi. (3.1) tenglamaning $u(x,y)$ yechimi o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) $J_1 \cup J_2 \cup E(c,0)$ intervalda erishmasligini ko'satamiz.

Teskarisini faraz qilamiz. 1) Aytaylik $u(x, y)$ funksiya biror $Q_1(x_0, 0) \in J_1$ nuqtada o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) erishsin.

Unda (37) tenglikdan $\psi_1(x) \equiv 0$, $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ da quyidagini olamiz:

$$p_2(x)v^+(x) = \frac{1}{2\gamma_2\Gamma(1-2\beta)\cos\pi\beta} D_{0x}^{1-2\beta} p_1(x)\tau^+(x), \quad (x, 0) \in J_1. \quad (41)$$

(2), (14) va ishdagi

$$D_{0x_0}^{1-2\beta} p_1(x_0)\tau^+(x_0) > 0 \left[D_{0x_0}^{1-2\beta} p_1(x_0)\tau^+(x_0) < 0 \right] \quad (42)$$

shartlardan foydalanib, (41) tenglikdan $Q_1(x_0, 0) \in J_1$ nuqtada musbat maksimumi (manfiy minimumi) uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$v^+(x_0) > 0 \quad (v^+(x_0) < 0). \quad (43)$$

Ikkinchi tomondan $Q_1(x_0, 0) \in J_1$ nuqtada musbat maksimumi (manfiy minimumi) uchun (15) tenglikdan quyidagilarni

$$\tau^{+'}(x_0) = 0, \quad \tau^+(x_0) > 0 \left[\tau^+(x_0) < 0 \right], \quad \tau^{+''}(x_0) \leq 0 \left[\tau^{+''}(x_0) \geq 0 \right] \quad (44)$$

e'tiborga olib, ushbu tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$v^+(x_0) < 0 \quad [v^+(x_0) > 0].$$

Bu tengsizlik (3.43) tengsizliklarga ziddir.

Shunday qilib, $u(x, y)$ J_1 intervalda o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) erishmaydi.

2) Aytaylik $u(x, y)$ funksiya biror $Q_2(x_0, 0) \in J_2$ nuqtada o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) erishsin.

Unda (3.37) tenglikdan $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$, $q_1(x) \equiv q_2(x) \equiv 0$ da quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned} \gamma_2 p_2(x)v^+(x) = & \frac{1}{2\Gamma(1-2\beta)\cos\pi\beta} D_{0x}^{1-2\beta} p_1(x)\tau^+(x) - \\ & - \frac{\mu\beta}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-\beta)\left[\mu(x-c)^{-\beta} - x^{-\beta}\right]} D_{cx}^{-\beta} \int_0^c (x-t)^{-\beta-1} (c-t)^{-\beta} \times \\ & \times D_{0t}^{1-2\beta} p_1(t)\tau^+(t) dt, \quad (x, 0) \in J_2 \end{aligned} \quad (45)$$

(2), (14) va ishdagi (42) shartlardan foydalanib, (45) tenglikdan $Q_2(x_0, 0) \in J_2$ nuqtada musbat maksimumi (manfiy minimumi) uchun quyidagiga ega bo'lamiz :

$$v^+(x_0) > 0 \quad (v^+(x_0) < 0). \quad (46)$$

Ikkinchi tomondan $Q_2(x_0, 0) \in J_2$ nuqtada musbat maksimumi (manfiy minimumi) uchun (15) tenglikdan (44) ni e'tiborga olib, ushbu tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$v^+(x_0) < 0 \quad (v^+(x_0) > 0).$$

Bu tengsizlik (46) tengsizliklarga ziddir.

Shunday qilib, $u(x, y)$ J_2 intervalda o'zining musbat maksimumiga (manfiy minimumiga) erishmaydi.

Lemma isbotlandi.

Yuqoridagi lemmani hamda (5) da $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0$ ni hisobga olib $\bar{\Omega}_1$ sohada

$u(x, y) \equiv 0$ bo'ladi. (1) tenglama uchun Ω_2 sohada

Koshi masalasining yagonaligini hisobga olib, $\bar{\Omega}_2$ da $u(x, y) \equiv 0$ ni olamiz.

Demak,

$$u(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Bundan esa BC_p masalaning yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

Xulosa. O'tgan asrning ellikkinchi yillaridan boshlab ikkinchi tur elliptiko-giperbolik, parabolik-giperbolik va parabolik-elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan lokal va nolokal masalalarni yechishga bo'lgan qiziqish yanada ortdi. Bunga sabab bu tenglamalarni ko'pgina fizik, mexanik va biologik jarayonlarni o'rganishda qo'llanishidir. Xulosa sifatida shuni aytish mumkinki, maqolada R_2 sinfdagi ikkinchi tur buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasining umumlashgan yechimi topilgan, buzilish chizig'iga ega bo'lgan parabolik tipdagi tenglama uchun birinchi chegaraviy masala yechilgan va maqolada (1) ko'rinishdagi buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun parallel xarakteristikalarda Bitsadze – Samarskiy sharti bilan qo'yilgan masala yechimining bir qiymatli yechilishi va uning isboti ko'rsatilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Gellerstedt S. Quelques problems mixtes pour equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. // Arxiv F.M. A.o.F. 26A 1938 v.3.p.1-32.
2. Islomov B., Ochilova N.K. О краевой задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // «Узбекский математический журнал». 2005. №3. С.43-51.
3. Islomov B.I., Abdullayev A.A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition. // Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2018. 9 (3). Pp. 307-318.
4. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. –T.: “O'qituvchi”. 2007. 256 b.
5. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. 41(9). Pp. 1886–1897.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. –М. Наука. 1966. Т. 2. 295 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. –М.: Наука. 1965. Т. 1. 296 с.
8. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: наука 1981. 448 с.
9. Джуроев Н. // Изв. АН УзССР. Серия физ-мат наук. 1989. №2 С.19-23.
10. Джуроев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: Фан. 1979. 240 с.
11. Жумоев Б. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо – гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области. // «Узбекский математический журнал». 2012. № 1. С. 38-46.
12. Ивашкина Г.А. О задачах типа Бицадзе-Самарского для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y |y|^m u_{yy} = 0, 0 < m < 1$. // «Дифференциальные уравнения». 1981. 17(6). С. 1078-1089.
13. Исамухамедов С.С // сб. трудов: Вырождающиеся дифференциальные уравнения и обратные задачи. – Ташкент. “Фан». 1986. С.98-113.
14. Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Меж. конф. молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». Россия. Нальчик. 2011. С. 122-125.
15. Исламов Н.Б. Аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа с характеристическим вырождением. // «Узбекский математический журнал». 2014. № 4. С. 63-74.
16. Исламов Н.Б. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения эллиптического - гиперболического типа второго рода. // «Узбекский математический журнал». 2012. № 4. С. 38-50.

17. Исломов Б., Акбарова С. Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // Тез. докл. всесоюз. конф. "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление". Ашхабад. 1990. С.65-66.

18. Исломов Б.И., Мадрахимова З.С. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором.

SPECTRAL ANALYSIS OF NONLOCAL DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Begimkulov Fozil Khidirovich,

Acting Associate Professor, Department of Economics and
Business Management Nordic International University,

Tashkent, Uzbekistan

<https://orcid.org/0009-0005-6105-711X>,

f.begimkulov@nordicuniversity.org

Abstract. In this paper, a nonlocal problem of the Samarskii-Ionkin type is studied for a degenerate elliptic equation with a singular coefficient. The spectral method is applied to solve the problem. Under certain conditions on the given functions, theorems on the existence and uniqueness of a solution are proved. The proof of uniqueness is based on the completeness of the eigenfunction system, whereas the solution is represented as an absolutely and uniformly convergent biorthogonal series.

Keywords: degenerate elliptic equation, equations with singular coefficients, half-strip, nonlocal boundary conditions, spectral method, modified Bessel functions, uniqueness, existence, biorthogonal series, completeness, basis property, adjoint problem, eigenvalues, eigenfunctions.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная задача типа Самарского-Ионкина для вырожденного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом. Для решения задачи применяется спектральный метод. При определённых условиях на заданные функции устанавливаются теоремы о единственности и существовании решений. Доказательство единственности основано на полноте системы собственных функций, а решение представляется в виде абсолютно и равномерно сходящегося биортogonalного ряда.

Ключевые слова: вырожденное эллиптическое уравнение, уравнения с сингулярными коэффициентами, полуполоса, нелокальные граничные условия, спектральный метод, модифицированные функции Бесселя, единственность, существование, биортogonalные ряды, полнота, базисные свойства, сопряжённая задача, собственные значения, собственные функции.

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ НОЛОКАЛ ДЕГЕНЕРАЦИЯЛАНГАН ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ СПЕКТРАЛ ТАҲЛИЛИ

Аннотация. Ушбу мақолада сингуляр коэффициентли айниган эллиптик тенглама учун Самарский-Ионкин типдаги нолокал масала ўрганилган. Масалани ечишда спектрал усул қўлланилган. Берилган функциялар учун маълум шартлар остида ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалар исботланган. Ягоналикнинг исботи хос функциялар тизимининг тўлиқлигига асосланган бўлиб, ечим абсолют ва текис яқинлашувчи биортogonal қатор кўринишида ифодаланади.

Калим сўзлар: айниган эллиптик тенглама, сингуляр коэффициентли тенгламалар, ярим полоса, нолокал чегаравий шартлар, спектрал усул, модификация қилинган Бессел функциялари, ягоналик, мавжудлик, биортogonal қатор, тўлиқлик, базис хоссаси, қўшма масала, хос қийматлар, хос функциялар.

Introduction. The theory of nonlocal boundary value problems was first established in the pioneering works of T. Carleman [1]. In these studies, the author investigated solvability questions for boundary value problems with nonlocal conditions arising in the theory of holomorphic functions defined in bounded domains. In particular, the formulation involved relations connecting the values of the unknown function at different points of the boundary. Later, A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii [2] proposed a new class of nonlocal boundary value problems for elliptic differential equations motivated by applications in plasma physics. By reducing the original problem to a Fredholm integral equation of the second kind and applying the maximum principle for elliptic equations, they proved the uniqueness of the classical solution.

Subsequent developments in the theory of partial differential and functional-differential equations made it possible to investigate the solvability of nonlocal problems for a wide class of elliptic equations. Monographs [3, 4] provide a detailed classification of nonlocal elliptic boundary value problems, establish unique solvability results in Sobolev and weighted Kondratiev spaces, and present their applications to heat conduction, diffusion, and the cooling of aircraft engines. Similar problems were studied in [5-10], and for parabolic systems in [11, 12].

Regarding degenerate equations, it is worth noting the study [13], in which, for equation (1) with a different type of degeneracy in the half-strip, a nonlocal problem of the Samarskii-Ionkin type was investigated. Similar problems for degenerate equations with Samarskii-Ionkin type conditions were studied using the spectral method in [14, 15]. In [16, 18], mixed-type equations whose elliptic component coincides with a half-strip and contains equation (1) were investigated. In these works, the Tricomi problem as well as boundary value problems with nonlocal periodic-type conditions were analyzed. Moreover, local and nonlocal boundary value problems for degenerate mixed-type equations, whose elliptic part is a half-strip, were also studied in [13, 14].

For degenerate elliptic equations, refer to work [21], where a nonlocal problem of Ionkin type was studied for an equation similar to (1) in the half-strip. Similar problems for degenerate equations with nonlocal boundary conditions solved by the spectral method were investigated in [16, 19]. In [18], Tricomi-type and nonlocal periodic-type problems for mixed-type equations whose elliptic part coincides with a half-strip have been studied in a number of works. Local and nonlocal boundary value problems for degenerate mixed-type equations with an elliptic component in the form of a half-strip were also analyzed in [24]. In the present study, a nonlocal boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type is considered for a second-order degenerate elliptic equation. The analysis is based on the spectral method, which enables the determination of the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the associated spatial problem, as well as the investigation of their completeness and basis properties in an appropriate functional space. The spectral characteristics of the adjoint problem are also examined.

In the present work, a nonlocal problem of Samarskii-Ionkin type is studied for a degenerate second-order elliptic equation. Using the spectral method, the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the associated spatial problem are obtained, and their completeness and basis properties in the relevant functional space are established. The spectral properties of the adjoint problem are also examined. Samarskii-Ionkin type problems are characterized by nonlocal conditions that relate the values of the solution or its derivatives at different parts of the boundary, which leads to a non-self-adjoint spatial differential operator. Consequently, the system of eigenfunctions is generally incomplete and nonorthogonal, making the study of its completeness and basis properties a nontrivial and important mathematical problem.

Materials and Methods.

Problem statement. Let $\Omega = \{(x, y) \in R^2: 0 < x < 1, y > 0\}$ and $\bar{\Omega} = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$. Consider the degenerate elliptic equation

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y} u_y - b^2 y^m u = 0, \quad (1)$$

where p is a real number, m and b are positive numbers.

The domain Ω is bounded by the segment OA , connecting the points $O(0,0)$, $A(1,0)$ and laterally by the half-lines $x = 0, y \geq 0$ and $x = 1, y \geq 0$.

Investigate the following **nonlocal boundary value problem** corresponding to equation (1) in the domain Ω .

Problem $N_1(2p < -1 - m)$. Find a function $u(x, y)$ in the domain Ω satisfying the following conditions:

$$u(x, y) \in C^1(\Omega \cup \{x = 0, y > 0\}) \cap C^2(\Omega), \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0 \text{ uniformly for } 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(0, y) = 0, y \geq 0, \quad u_x(1, y) + u_x(0, y) = 0, y > 0, \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{-1-m} u_y(x, y) = v(x), 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Problem N_2 ($2p = -1 - m$). Find a function $u(x, y)$ in the domain Ω satisfying conditions (3), (4)

and

$$u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \overline{OA}) \cap C^2(\Omega),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{y^{-1-m}}{\ln y} u_y(x, y) = v(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6)$$

Problem N_3 ($2p > -1 - m$). Find a function $u(x, y)$ in the domain Ω satisfying conditions (2)-(4) and

the following condition

$$u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \overline{OA}) \cap C^2(\Omega),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2p} u_y(x, y) = v(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

where $v(x)$ is a given function.

Results and Discussion.

Spectral properties of the problem. To solve the problem, apply the spectral method (Fourier method). Seek nontrivial solutions of equation (1) in the form

$$u(x, y) = X(x) \cdot T(y).$$

Substituting this expression into equation (1) and performing the separation of variables, arrive at the following spectral problem for the function $X(x)$

$$X''(x) = -\lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

subject to the boundary conditions:

$$X(0) = 0, \quad X'(0) + X'(1) = 0. \quad (9)$$

For $\lambda \leq 0$, problem (8) and (9) has only the trivial solution. For $\lambda > 0$ the general solution of (8) is

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Imposing the boundary conditions (9) yields the characteristic equation that determines the eigenvalues. The eigenvalues are found to be:

$$\lambda = ((2n - 1)\pi)^2, \quad n \in N. \quad (10)$$

The corresponding eigenfunctions form a system of two linearly independent functions for each eigenvalue λ :

$$X_n(x) = \sin \mu_n x, \quad \tilde{X}_n(x) = x \cos \mu_n x, \quad n \in N. \quad (11)$$

where $\lambda = \mu_n^2$.

Problem (8) and (9) is non-self-adjoint. Therefore, also consider the adjoint problem:

$$Y''(x) + \mu_n^2 \cdot Y(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (12)$$

$$Y'(1) = 0, \quad Y(0) + Y(1) = 0. \quad (13)$$

The eigenvalues of the adjoint problem (12) and (13) coincide with those of the original problem, given by (10). The corresponding eigenfunctions of the adjoint problem are:

$$Y_n(x) = \cos \mu_n x, \quad \tilde{Y}_n(x) = (1 - x) \sin \mu_n x, \quad n \in N. \quad (14)$$

The systems of eigenfunctions $\{X_n(x), \tilde{X}_n(x)\}$ and $\{Y_n(x), \tilde{Y}_n(x)\}$ constitute a biorthogonal system in $L_2(0, 1)$. Moreover, it has been shown in [23] that these systems are complete and form a Riesz basis in $L_2(0, 1)$.

Existence and uniqueness of the solution to problem N_1 . Begin by proving the uniqueness of the solution for Problem N_1 .

Theorem 1. If a solution to problem (2) - (5) exists, then it is unique.

Proof. Let $u(x, y)$ be a solution to problem (2) - (5) with $v(x) = 0$. Will show that $u(x, y) \equiv 0$ in Ω .

Consider the following functions

$$u_n(y) = \int_0^1 u(x, y) \cos \mu_n x dx, \quad (15)$$

$$\tilde{u}_n(y) = \int_0^1 u(x, y) (1 - x) \sin \mu_n x dx. \quad (16)$$

Differentiating $u_n(y)$ twice with respect to y and using equation (1), it is obtained that

$$u_n''(y) = -y^{2q-2}T_1 - \frac{2p}{y}u_n'(y) + b^2y^{2q-2}u_n(y),$$

where $2q = m + 2$.

Now integrate the term T_1 by parts twice. Applying the boundary conditions (4), obtain the following result

$$T_1 = \int_0^1 u_{xx}(x, y) \cos \mu_n x dx = -\mu_n^2 \int_0^1 u(x, y) \cos \mu_n x dx = -\mu_n^2 u_n(y). \quad (17)$$

Substituting this into (17) gives the ordinary differential equation for $u_n(y)$:

$$u_n''(y) + \frac{2p}{y}u_n'(y) - (b^2 + \mu_n^2)y^{2q-2}u_n(y) = 0. \quad (18)$$

From the boundary condition (5) and the condition at infinity (3), derive the boundary conditions for $u_n(y)$:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-2q}u_n'(y) = v_n, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u_n(y) = 0, \quad (19)$$

where

$$v_n = \int_0^1 v(x) \cos \mu_n x dx. \quad (20)$$

To solve equation (18), apply the change of variables:

$$u_n(y) = Z(b_n y^q) y^{qp_1} \Rightarrow u_n(y) = Z(t) y^{qp_1}, \quad (21)$$

where

$$t = b_n y^q, \quad p_1 = \frac{1-2p}{2q}, \quad b_n = \frac{\sqrt{b^2 + \mu_n^2}}{q}.$$

This transformation reduces equation (18) to the modified Bessel equation of order p_1 :

$$Z''(t) + \frac{1}{t}Z'(t) - \left(1 + \frac{p_1^2}{t^2}\right)Z(t) = 0.$$

The general solution of this equation is expressed in terms of the modified Bessel functions of the first and second kind, $I_{p_1}(t)$ and $K_{p_1}(t)$, respectively:

$$u_n(y) = A_n I_{p_1}(b_n y^q) + B_n K_{p_1}(b_n y^q).$$

Substituting this expression for $Z(t)$ into the transformation (21), obtain the general solution of equation (18) in the following form

$$u_n(y) = A_n y^{qp_1} I_{p_1}(b_n y^q) + B_n y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q). \quad (22)$$

Using the asymptotic behavior of these functions $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$ as $z \rightarrow \infty$ [22]:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{z}}, \quad K_\nu(z) \sim \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}, \quad (23)$$

and the second condition (19), conclude that $A_n = 0$. Consequently, the solution of (22) can be represented in the following form

$$u_n(y) = B_n y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q), \quad (24)$$

where B_n is an arbitrary constant.

As $z \rightarrow 0$, recall the formula for the derivative of the modified Bessel function given in [4, p. 91]:

$$\frac{d}{dz}(z^\nu K_\nu(z)) = -z^\nu K_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}(z^{-\nu} K_\nu(z)) = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \quad (25)$$

Using the first relation in (25), differentiate equation (24) and determine the expression for $u'_n(y)$. As a result, obtain the following

$$u'_n(y)(y) = -B_n q b_n y^{q+qp_1-1} K_{p_1-1}(b_n y^q). \quad (26)$$

Next, applying the asymptotic expansion of the function $K_\nu(t)$ as $z \rightarrow 0$ [14]:

$$K_\nu(z) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2^{1-\nu} z^\nu}, \nu > 0, K_0(z) \simeq -\ln z. \quad (27)$$

Taking into account (26) and the first boundary condition of equation (19), obtain the following relation

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-2q} [-B_n q b_n y^{q+qp_1-1} K_{p_1-1}(b_n y^q)] = v_n.$$

By applying the first of the asymptotic formulas in (27), obtain the following result

$$B_n = -\frac{v_n}{q\Gamma(p_1-1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1-2}.$$

Consequently, the solution of equations (18) and (19) can be expressed in the following form

$$u_n(y) = -\frac{v_n}{q\Gamma(p_1-1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1-2} y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q). \quad (28)$$

Next, using conditions (3) - (5), determine the explicit form of the function $\tilde{u}_n(y)$. For the purpose of this analysis, equation (16) is differentiated twice, and by **employing** equation (1), the following relation is obtained.

$$\tilde{u}_n''(y) = -y^{2q-2} \int_0^1 u_{xx}(x, y)(1-x) \sin \mu_n x \, dx - \frac{2p}{y} \tilde{u}_n'(y) + b^2 y^{2q-2} \tilde{u}_n(y).$$

Performing two successive integrations by parts on the first term, obtain the following inhomogeneous differential equation for $\tilde{u}_n(y)$:

$$\tilde{u}_n''(y) + \frac{2p}{y} \tilde{u}_n'(y) - (b^2 + \mu_n^2) y^{2q-2} \tilde{u}_n(y) = 2\mu_n y^{2q-2} u_n(y), \quad (29)$$

with boundary conditions:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-2q} \tilde{u}_n''(y) = \tilde{v}_n, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(y) = 0, \quad (30)$$

where

$$\tilde{v}_n = \int_0^1 (1-x) \mu(x) \sin \mu_n x \, dx. \quad (31)$$

Since the differential equation (29) is nonhomogeneous, its solution can be represented as the sum of the general solution of the corresponding homogeneous equation and a particular solution of the nonhomogeneous equation. Using the method of undetermined coefficients, a particular solution of equation (29) can be taken as follows

$$C_n y^{q+qp_1} K_{p_1+1}(b_n y^q),$$

where the constant C_n is given by

$$C_n = -\frac{\mu_n v_n}{2q^3(1-2p_1)\Gamma(p_1-1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1-3}.$$

Then

$$-\frac{\mu_n v_n}{2q^3(1-2p_1)\Gamma(p_1-1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1-3} y^{q+qp_1} K_{p_1+1}(b_n y^q).$$

The general solution of problem (29) and (30) is readily seen to have the form

$$\tilde{u}_n(y) = A_n y^{qp_1} I_{p_1}(b_n y^q) + B_n y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q) + C_n y^{q+qp_1} K_{p_1+1}(b_n y^q). \quad (32)$$

Using arguments similar to those for $u_n(y)$, conclude that $A_n = 0$. Thus, expression (32) can be

written as

$$\tilde{u}_n(y) = B_n y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q) + C_n y^{q+qp_1} K_{p_1+1}(b_n y^q). \quad (33)$$

Now, taking formula (25) into account, from (33) this yields

$$\tilde{u}_n'(y) = B_n b_n q y^{q p_1 + q - 1} K_{p_1 - 1}(b_n y^q) + C_n b_n q y^{q p_1 + 2q - 1} K_{p_1}(b_n y^q). \quad (34)$$

Next, using the first boundary condition from (30) together with (27) and (34), we obtain

$$B_n = -\frac{\tilde{v}_n}{\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} + \frac{\mu_n \cdot v_n \cdot \Gamma(p_1)}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma^2(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 4}.$$

As a result, formula (33) takes the form:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(y) = & -\frac{\tilde{v}_n}{\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q) + \frac{\mu_n \cdot v_n \Gamma(p_1)}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma^2(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 4} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q) - \\ & - \frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 3} y^{q + q p_1} K_{p_1 + 1}(b_n y^q). \end{aligned} \quad (35)$$

Formulas (28) and (35) together imply that problem (3) - (5) has a unique solution. Indeed, if $v(x) \equiv 0$ on $[0, 1]$, then $\tilde{u}_n(y) = 0$ and $u_n(y) = 0$. Then, from (15) and (16), it is obtained that:

$$\int_0^1 u(x, y) \cos \mu_n x dx = 0, \quad \int_0^1 u(x, y) (1 - x) \sin \mu_n x dx = 0.$$

Given that systems (11) and (14) form a complete set in $L_2(0, 1)$, immediately deduce that $u(x, y) \equiv 0$

in $\bar{\Omega}$. This establishes the uniqueness of the solution for problem N_1 .

Now turn to the question of existence for a solution to problem N_1 . To this end, formulate the

following lemma:

Lemma 1. If $v(x) \in C^{2+\alpha}[0, 1]$ and $v(0) = 0, v'(0) + v'(1) = 0$, then the estimates below are valid

$$|v_n| \leq \frac{A_1}{n^{2+\alpha}}, \quad |\tilde{v}_n| \leq \frac{A_2}{n^{2+\alpha}}.$$

Proof. Applying integration by parts two times in (15) and (16). Then, taking into account the conditions of Lemma 1, it is obtained that

$$|v_n| \leq \frac{A_1}{n^{2+\alpha}}, \quad |\tilde{v}_n| \leq \frac{A_2}{n^{2+\alpha}}.$$

Lemma 2. Under the assumptions of Lemma 1, the following inequalities hold for any $y > 0$

$$|u_n(y)| \leq \frac{A_4 |v_n|}{n^2}, \quad |\tilde{u}_n(y)| \leq \frac{A_5 |\tilde{v}_n|}{n^2}.$$

Proof. Let $0 \leq y < \varepsilon$, where $\varepsilon > 0$ is a sufficiently small number. By employing the asymptotic

behavior of Bessel functions, we estimate $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$, defined by formulas (28) and (35), respectively.

The following holds:

$$|u_n(y)| = \left| -\frac{\mu_n}{q\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q) \right| \leq A_1 \left| \frac{\mu_n}{q\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1} b_n^{p_1} y^{q p_1}} \right| \leq \frac{A_4 |\mu_n|}{n^2}.$$

To estimate $\tilde{u}_n(y)$, express it as a sum:

$$\tilde{u}_n(y) = a_n(y) + b_n(y) + c_n(y), \quad (36)$$

where

$$\begin{aligned} a_n(y) = & -\frac{\tilde{v}_n}{q\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q), \\ |a_n(y)| = & \left| -\frac{\tilde{v}_n}{\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q) \right| \leq A_3 \left| -\frac{\tilde{v}_n}{q\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 2} y^{q p_1} \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1} (b_n y^q)^{p_1}} \right| \leq \frac{A_5 |\tilde{v}_n|}{n^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} b_n(y) = & \frac{\mu_n \cdot v_n \cdot \Gamma(p_1)}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma^2(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 4} y^{q p_1} K_{p_1}(b_n y^q), \\ |b_n(y)| \leq & A_5 \left| \frac{\mu_n \cdot v_n \cdot \Gamma(p_1)}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma^2(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 4} y^{q p_1} \frac{\Gamma(p_1)}{2^{1-p_1} (b_n y^q)^{p_1}} \right| \leq \frac{A_6 |v_n|}{n^3}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} c_n(y) = & -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 3} y^{q + q p_1} K_{p_1 + 1}(b_n y^q), \\ |c_n(y)| \leq & A_7 \left| -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3(1 - 2p_1)\Gamma(p_1 - 1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{p_1 - 3} y^{q + q p_1} \frac{\Gamma(p_1 + 1)}{2^{-p_1} (b_n y^q)^{p_1 + 1}} \right| \leq \frac{A_8 |v_n|}{n^3}. \end{aligned} \quad (39)$$

It follows from (36) - (39) that

$$|\tilde{u}_n(y)| \leq \frac{A_5 |\tilde{v}_n|}{n},$$

where all constants $A_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ are positive and remain so throughout. Now state the following theorem:

Theorem 2. If $v(x) \in C^{2+\alpha}[0,1]$ satisfies the conditions of Lemma 1, then there exists a unique solution to problem (2)-(5), which can be represented in the form of a biorthogonal series:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) x \cos \mu_n x, \quad (40)$$

where the functions $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ are defined by formulas (28) and (35), respectively.

Proof. Since the systems of functions (11) and (14) form a Riesz basis, if $v(x) \in L_2(0,1)$, then the function $u(x, y)$ can be represented by the biorthogonal series (40), which converges in $L_2(0,1)$ for any $y > 0$. If the function $v(x)$ satisfies the conditions of Lemma 1, then, using the estimates for $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ from Lemma 2, the series (40) converges uniformly for any $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Consequently, the function $u(x, y)$ is continuous on $\bar{\Omega}$ and can be expressed as the sum of a uniformly convergent series.

We now show that the series (40) can be differentiated twice with respect to x and y . To do this, we demonstrate that term-by-term differentiation yields series that converge absolutely and uniformly in $\bar{\Omega}$. Formally differentiating the series (40) term by term, we obtain:

$$u_{xx} = -\mu_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \mu_n x - \mu_n \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) \sin \mu_n x - \mu_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) x \cos \mu_n x, \quad (41)$$

$$u_{xy} = \mu_n \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}'_n(y) \cos \mu_n x + \mu_n \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}'_n(y) \cos \mu_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}'_n(y) \cos \mu_n x, \quad (42)$$

$$u_{yy} = -\mu_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}''_n(y) \sin \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}''_n(y) x \cos \mu_n x. \quad (43)$$

Thus, by the Weierstrass criterion, the series (41)-(43) converge absolutely and uniformly within the closure of the domain $\bar{\Omega}$. Consequently, the second-order partial derivatives u_{xx} , u_{xy} and the first-order derivative u_y are continuous throughout $\bar{\Omega}$. By substituting the expressions (41) and (43) into equation (1), it can be verified that the function $u(x, y)$, defined by the series (40), indeed satisfies the differential equation (1) throughout the domain Ω . This demonstrates that the constructed function $u(x, y)$ is not only continuous together with its required derivatives but also fulfills all the necessary conditions of the degenerate elliptic equation under consideration.

Therefore, we conclude that the function $u(x, y)$ represents a valid and well-defined solution to equation (1). Hence, the theorem is completely proven.

Existence and uniqueness of the solution to problem N_2 . Let us now prove the existence and uniqueness of the solution to problem N_2 . When $2p = 1 - 2q$, equation (1) takes the following form

$$y^{2q-2} u_{xx} + u_{yy} + \frac{1-2q}{y} u_y - (b^2 + \mu_n^2) y^{2q-2} u = 0. \quad (44)$$

First, find the function for $u_n(y)$. To this end, integrating $u_n(y)$ y parts twice and taking into account (44), we get the following

$$\begin{aligned} u''_n(y) &= \int_0^1 u_{yy}(x, y) \cos \mu_n x dx = -y^{2q-2} \int_0^1 u_{xx}(x, y) \cos \mu_n x dx - \\ &\quad - \frac{1-2q}{y} \int_0^1 u_y(x, y) \cos \mu_n x dx + b^2 y^{2q-2} \int_0^1 u(x, y) \cos \mu_n x dx = \\ &= -y^{2q-2} T_1 - \frac{1-2q}{y} u'_n(y) + b^2 y^{2q-2} u_n(y). \end{aligned}$$

Thus, considering the last obtained expression together with equation (17), arrive at the following problem associated with the function $u_n(y)$:

$$u_n'' + \frac{1-2q}{y} u_n'(y) - y^{2q-2} (b^2 + \mu_n^2) u_n(y) = 0, \quad (45)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{y^{1-2q}}{\ln y} u_n'(y) = \mu_n, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u_n(y) = 0, \quad (46)$$

where

$$v_n = \int_0^1 v(x) \cos \mu_n x dx. \quad (47)$$

Now introduce the substitution $u_n(y) = y^q Z(t)$. In this case, equation (45) takes the following form [11]:

$$t^2 Z''(t) + t Z'(t) - (t^2 + 1) Z(t) = 0.$$

Hence, the solution of problem (45) and (46) can be written as

$$u_n(y) = B_n y^q K_{-1}(b_n y^q). \quad (48)$$

By substituting expression (48) into the first boundary condition of (46), we obtain

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{1-2q}}{\ln y} (B_n y^q K_{-1}(b_n y^q))'_y = \frac{y^{1-2q}}{\ln y} B_n b_n q y^{2q-1} K_0(b_n y^q) = v_n.$$

From the first asymptotic formula in (25) and the above expression, we find B_n

$$B_n = -\frac{v_n}{b_n q^2}.$$

Thus, the function $u_n(y)$ to problems (45), (46) is given by

$$u_n(y) = -\frac{v_n}{q^2 b_n} y^q K_{-1}(b_n y^q). \quad (49)$$

Now we find the function $\tilde{u}_n(y)$. Differentiating expression (16) twice with respect to y , and taking into account (44), obtain we following

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n''(y) &= \int_0^1 u_{yy}(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx = -y^{2q-2} \int_0^1 u_{xx}(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx - \\ &\quad - \frac{1-2q}{y} \int_0^1 u_y(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx + b^2 y^{2q-2} \int_0^1 u(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx = \\ &= -y^{2q-2} T_2 - \frac{1-2q}{y} u_n'(y) + b^2 y^{2q-2} u_n(y). \end{aligned}$$

Similar to the computation of the integral T_1 , evaluate the integral T_2 as follows:

$$T_2 = \int_0^1 u_{xx}(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx.$$

Using integration by parts and the boundary conditions (4), the following result is obtained

$$T_2 = \int_0^1 u_{xx}(x, y) (1-x) \sin \mu_n x dx = -2\mu_n u_n(y) - \mu_n^2 \tilde{u}_n(y).$$

Thus, $\tilde{u}_n(y)$ satisfies the inhomogeneous ordinary differential equation

$$\tilde{u}_n''(y) + \frac{1-2q}{y} \tilde{u}_n'(y) - (\mu_n^2 + b^2) y^{2q-2} \tilde{u}_n(y) = 2\mu_n y^{2q-2} u_n(y), \quad (50)$$

with the boundary conditions:

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{y^{1-2q}}{\ln y} \tilde{u}_n'(y) = \tilde{v}_n, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{u}_n(y) = 0, \quad (51)$$

where $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ are the Fourier coefficients corresponding to the given functions and

$$\tilde{v}_n = \int_0^1 (1-x) v(x) \sin \mu_n x dx. \quad (52)$$

Solving equation (50) with boundary conditions (51), (52) (e.g., by the method of variation of parameters or by finding a particular solution), obtain the expression for $\tilde{u}_n(y)$:

$$\tilde{u}_n(y) = -\frac{v_n}{q^2 b_n} y^q K_{-1}(b_n y^q) + \frac{\mu_n v_n}{2 b_n^2 q^4} y^{2q} K_{-2}(b_n y^q). \quad (53)$$

From formulas (49) and (53), it follows that the solution to problem N_2 (i.e., (2)-(4) and (6)) is unique. Specifically, if $v(x) \equiv 0$ on $[0, 1]$, then $v_n = 0$ and $\tilde{v}_n = 0$, which in turn implies that $u_n(y) = 0$ and $\tilde{u}_n(y) = 0$ for $y > 0$. Consequently, owing to the completeness of the systems

$$\{\cos(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty} \text{ and } \{(1-x)\sin(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty} \text{ in } L_2(0, 1),$$

conclude that $u(x, y) \equiv 0$ for all $x \in [0, 1]$ and $y \in (0, \infty)$. This establishes the uniqueness of the solution to problem N_2 .

From formulas (49) and (53), it follows that the solution to problem N_2 (i.e., (2)-(4) and (6)) is unique. Indeed, $v(x) \equiv 0$ on $[0,1]$, then $v_n = 0$ and $\tilde{v}_n = 0$, which implies $u_n(y) = 0$ and $\tilde{u}_n(y) = 0$ for $y > 0$. Therefore, due to the completeness of the systems

$$\{\cos(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty} \text{ and } \{(1-x)\sin(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}$$

in $L_2(0,1)$, it follows that $u(x,y) \equiv 0$ for all $x \in [0,1]$, $y \in (0, \infty)$. This proves the uniqueness of the solution to problem N_2 .

Similarly, the solution to problem N_2 may be expressed as a biorthogonal series:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) x \cos \mu_n x,$$

where $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ are given by (49) and (53), respectively. By substituting these expressions, the explicit form of the equation can be obtained as follows:

$$u(x,y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n + \tilde{v}_n}{b_n q^2} y^q K_{-1}(b_n y^q) \sin \mu_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n v_n}{b_n^2 q^4} y^{2q} K_{-2}(b_n y^q) x \cos \mu_n x. \quad (54)$$

Based on the expressions (49) and (53) and the asymptotic properties of the Macdonald function $K_\nu(z)$ for small and large arguments, estimate the functions $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ uniformly in y :

$$|u_n(y)| \leq \frac{B_1 |v_n|}{n^2}, \quad |\tilde{u}_n(y)| \leq \frac{B_2 |\tilde{v}_n|}{n^2} + \frac{B_3 |v_n|}{n^3}, \quad (55)$$

here $B_i (i = 1, 2, 3)$ are positive constants, and these estimates follow from the fact that $v(x) \in C^{2+\alpha}[0,1]$ and the decay rate of Fourier coefficients in the trigonometric system [21,22]. Similarly, we estimate the Fourier coefficients v_n and $\tilde{v}_n$ using integration by parts (as in Lemma 1), which yields $|v_n|$ and $|\tilde{v}_n|$ for $v(x) \in C^{2+\alpha}[0,1]$. Since the function systems $\{\sin(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x \cos(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ and their biorthogonal counterparts form a Riesz basis in $L_2(0,1)$ the uniform convergence of the series (54) follows from the estimates $K_\nu(b_n y^q)$ and the exponential decay of v_n for large n with fixed $y > 0$.

For $y \geq \varepsilon > 0$, the asymptotic behavior of the Macdonald function $K_\nu(z)$ [10], implies that the terms $K_{-1}(b_n y^q)$ and $K_{-2}(b_n y^q)$ decay exponentially as $n \rightarrow \infty$. The other factors in (49) and (53) grow at most polynomial in n . Therefore, the terms $|u_n(y)|$ and $|\tilde{u}_n(y)|$ decay exponentially for $y > 0$. This ensures the absolute and uniform convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(y)|$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{u}_n(y)|$ for $y \geq \varepsilon > 0$.

It follows that the series (54) converges both absolutely and uniformly in the domain $x \in [0,1]$, $y \geq \varepsilon > 0$, which establishes the existence of a solution to problem N_2 .

Existence and uniqueness of the solution to problem N_3 . Now consider Problem N_3 , where $2p > -1 - m$. This condition implies $p_1 = \frac{1-2p}{2q} < 0$. Let us denote $-p_1 > 0$. We now establish the existence and uniqueness of the solution to problem N_3 (i.e., (2)-(4) and (7)).

Theorem 3. *If a solution to problem N_3 (i.e., (2)-(4) and (7)) exists, then it is unique.*

Proof. The proof of uniqueness follows the same pattern as for Problems N_1 and N_2 . Define the Fourier coefficients using the adjoint eigenfunctions

$$\{\sin(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}, \{x \cos(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}, \\ \{\cos(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty}, \{(1-x)\sin(2n-1)\pi x\}_{n=1}^{\infty},$$

are **biorthogonal systems**, complete and form a Riesz basis in $L_2(0,1)$ [21].

Using formulas (15) and (16), and proceeding analogously to the method applied for $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ in problem N_1 , we define the Fourier coefficients $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$. First, consider $u_n(y)$. Differentiating it twice with respect to y and using equation (1) together with the boundary conditions (3), (4) and (7), find that $u_n(y)$ satisfies the differential equation

$$u_n''(y) + \frac{2p}{y} u_n'(y) - (\mu_n^2 + b^2) y^m u_n(y) = 0 \quad (56)$$

and the boundary conditions

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2p} u_n'(y) = v_n, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u_n(y) = 0, \quad (57)$$

here

$$v_n = \int_0^1 v(x) \cos \mu_n x dx. \quad (58)$$

The unique solution to problem (56) and (57) can be found using the substitution $u_n(y) = y^{qp_1} Z(b_n y^q)$, leading to a modified Bessel equation. Furthermore, by employing the second formula in (25), the solution can be represented in the following form

$$u_n(y) = -\frac{v_n}{q \cdot \Gamma(1-p_1)} \cdot \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q). \quad (59)$$

Now we find function $\tilde{u}_n(y)$. Similarly to the previous cases, derive the following ordinary differential equation for $\tilde{u}_n(y)$:

$$\tilde{u}_n''(y) + \frac{2p}{y} \tilde{u}_n'(y) - (\mu_n^2 + b^2) y^{2q-2} \tilde{u}_n(y) = 2y^{2q-2} u_n(y). \quad (60)$$

From the boundary conditions (3), (4) and (7), the boundary conditions for $\tilde{u}_n(y)$ are:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2p} \tilde{u}_n'(y) = \tilde{v}_n, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{u}_n(y) = 0, \quad (61)$$

where

$$\tilde{v}_n = \int_0^1 (1-x) v(x) \sin \mu_n x dx. \quad (62)$$

Equation (60) is a linear inhomogeneous ordinary differential equation. Its general solution is the sum of the general solution of the corresponding homogeneous equation and a particular solution of the nonhomogeneous equation. The homogeneous equation is identical to equation (56) and its general solution is given by a linear combination of $y^{qp_1} I_{p_1}(b_n y^q)$ and $y^{qp_1} K_{p_1}(b_n y^q)$. A particular solution to equation (60) can be found using the method of undetermined coefficients or variation of parameters, and is given by the function

$$C_n \cdot \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} K_{-p_1-1}(b_n y^q),$$

here

$$C_n = -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3 \Gamma(1-p_1)}.$$

It then follows that

$$-\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3 \Gamma(1-p_1)} \cdot \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} K_{-p_1-1}(b_n y^q). \quad (63)$$

Thus, the general solution to (60) can be written as

$$\tilde{u}_n(y) = A_n y^{qp_1} I_{-p_1}(b_n y^q) + B_n y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q) + C_n y^{qp_1+q} K_{-p_1-1}(b_n y^q), \quad (64)$$

where the last term is the particular solution (63). Using the asymptotic behavior of the functions $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$ as $z \rightarrow \infty$ (see (23)), and applying the boundary condition $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(y) = 0$, we conclude that $A_n = 0$ because $I_{p_1}(z)$ grows exponentially at infinity. Therefore, formula (64) is reduced to the following form

$$\tilde{u}_n(y) = B_n y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q) + C_n y^{qp_1+q} K_{-p_1-1}(b_n y^q). \quad (65)$$

Next, we apply the first boundary condition from (61) and use the asymptotic formula for the derivative of $K_\nu(z)$ for small arguments. After calculations, we obtain the constant B_n :

$$B_n = -\frac{\tilde{v}_n}{q \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1}.$$

Substituting the expressions for B_n and C_n from (63) into (65), the function $\tilde{u}_n(y)$ assumes the form:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(y) = & -\frac{\tilde{v}_n}{q \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} \cdot K_{-p_1}(b_n y^q) - \\ & -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3 \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} \cdot K_{-p_1-1}(b_n y^q). \end{aligned} \quad (66)$$

Since the systems of functions (11) and (14) form a Riesz basis in $L_2(0,1)$, the solution to problem N_3 in the domain Ω is sought in the form of the biorthogonal series:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \sin \mu_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(y) x \cos \mu_n x,$$

where $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ are given by (59) and (66), respectively. Substituting these expressions yields the explicit series representation

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q \cdot \Gamma(1-p_1)} \cdot \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q) (v_n \sin \mu_n x + \tilde{v}_n x \cos \mu_n x) \\ & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^3 \Gamma(1-p_1)} \cdot \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} \cdot K_{-p_1-1}(b_n y^q) x \cos \mu_n x. \end{aligned} \quad (67)$$

It can be verified by direct substitution that the function defined by the series (67) satisfies equation (1) in the domain Ω , provided the series converges sufficiently well. Furthermore, it satisfies the boundary conditions (4) and (7), as well as the conditions at infinity (3), by construction of the functions $u_n(y)$ and $\tilde{u}_n(y)$ as solutions to (56), (57) and (60), (61).

Thus, the solution to problem N_3 can be represented by the series (67). For each fixed $x \in (0,1)$ and $y > 0$, this series converges in $L_2(0, \infty)$ sense with respect to x . Furthermore, for any $y \geq \varepsilon > 0$, where ε is sufficiently small, the series (67) and all its term wise derivatives of arbitrary order converge absolutely and uniformly. This is due to the exponential decay as $n \rightarrow \infty$ of the Macdonald functions $K_{-p_1}(b_n y^q)$, $K_{p_1}(b_n y^q)$ and $K_{-p_1-1}(b_n y^q)$, which dominates any polynomial growth of the coefficients v_n , $\tilde{v}_n$ and the powers of n arising from b_n . Therefore, the function $u(x, y)$ defined by (67) is smooth in Ω and satisfies equation (1) by term wise differentiation.

We now show that the series (67) also satisfies the boundary conditions (4) and (7). This requires verifying the behavior of the solution as $y \rightarrow +0$. Assume the function $v(x)$ satisfies $v(x) \in C^{2+\alpha}[0,1]$, $v(0) = 0$ and $v'(1) + v'(0) = 0$. Then, integrating by parts in (58) and (62) (analogously to estimates in Lemma 1), we obtain the estimates

$$|v_n| \leq \frac{D_1}{n^2} \text{ and } |\tilde{v}_n| \leq \frac{D_2}{n^2}.$$

Now, for fixed $n \in N$ and sufficiently small $y > 0$, we estimate the function $u_n(y)$ given by (59) using the asymptotic behavior of $K_\nu(z)$ for small z [22]:

$$\begin{aligned} |u_n(y)| &= \left| -\frac{v_n}{q\Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q) \right| \leq \\ &\leq C_1 \left| -\frac{v_n}{q\Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} \frac{\Gamma(-p_1)}{2^{1+p_1} b_n^{-p_1} y^{-qp_1}} K_{p_1}(b_n y^q) \right| \leq C_2 |v_n|. \end{aligned} \quad (68)$$

Similarly, represent $\tilde{u}_n(y)$ from (66) as a sum of two terms:

$$\tilde{u}_n(y) = a_n(y) + b_n(y),$$

where

$$a_n(y) = -\frac{\tilde{v}_n}{q\Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q).$$

Using the asymptotic (27) for $z \rightarrow 0$ and $p_1 > 0$ [22], estimate

$$\begin{aligned} |a_n(y)| &= \left| -\frac{\tilde{v}_n}{q\Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1} y^{qp_1} K_{-p_1}(b_n y^q) \right| \leq \\ &\leq C_3 \left| -\frac{\tilde{v}_n}{q\Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-1-p_1} y^{q+qp_1} \frac{\Gamma(p_1)}{2^{2+p_1} (b_n y^q)^{-1-p_1}} \right| \leq C_4 |\tilde{v}_n|. \end{aligned} \quad (69)$$

The second term $b_n(y)$ is given by

$$b_n(y) = -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2p_1 q^3 \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} K_{-p_1-1}(b_n y^q).$$

The asymptotic behavior of $b_n(y)$ as $y \rightarrow 0$ depends on the sign of the exponent and the order of the Bessel function. Consider different cases based on the value of $p_1 = \frac{1-2p}{2q}$ which corresponds to the cases $2p < 1$, $2p > 1$ and $2p = 1$.

Case 1: $2p < 1$ (which implies $p_1 > 0$). In this case, $-p_1 - 1 < 0$. Using the asymptotic $K_\nu(z)$ for $z \rightarrow 0$ and $\nu > 0$ [10]:

Case 2: $2p > 1$ (which implies $p_1 < 0$). For $z \rightarrow 0$, the asymptotic depends on whether $2p > 1 + 2q$, $2p = 1 + 2q$ and $1 < 2p < 1 + 2q$ respectively. We first analyze the case in which $2p > 1 + 2q$ is present.

Subcase 2a: $2p > 1 + 2q$. Using the first formula (27), we have

$$\begin{aligned} |b_n(y)| &= \left| -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2p_1 q^3 \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} K_{-p_1-1}(b_n y^q) \right| \leq \\ &\leq C_7 \left| \frac{\mu_n \cdot v_n}{2p_1 q^3 \Gamma(1-p_1)} \left(\frac{b_n}{2}\right)^{-p_1-1} y^{q+qp_1} \frac{\Gamma(-1-p_1)}{2^{2+p_1} (b_n y^q)^{-1-p_1}} \right| \leq C_8 n |v_n|. \end{aligned} \quad (70)$$

Subcase 2b: $2p = 1 + 2q$:

$$|b_n(y)| = \left| -\frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^2 \Gamma(2)} K_0(b_n y^q) \right| \leq C_9 \left| \frac{\mu_n \cdot v_n}{2q^2 \Gamma(2)} \ln(b_n y^q) \right| \leq C_{10} n \ln n |v_n|. \quad (71)$$

$$|\tilde{u}_n(y)| \leq C_4 |\tilde{v}_n| + C_{10} n \ln n |v_n|, \quad (72)$$

where the Fourier coefficients v_n and $\tilde{v}_n$ are defined by (58) and (62). Assuming $v(x) \in C^{2+\alpha}[0,1]$ with $v(0) = 0$ and $v'(0) + v'(1) = 0$, integration by parts yields:

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^1 v(x) \cos \mu_n x dx, \quad v_n = -\frac{1}{\mu_n^2} \int_0^1 v''(x) \cos \mu_n x dx, \\ \tilde{v}_n &= \int_0^1 v(x)(1-x) \sin \mu_n x dx, \quad \tilde{v}_n = \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^1 v''(x) \cos \mu_n x dx + \\ &\quad + \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^1 v''(x)(1-x) \sin \mu_n x dx. \end{aligned}$$

Applying integration by parts two times, while observing that the boundary terms disappear as a result of the constraints on $v(x)$, the following is obtained:

$$|v_n| \leq \frac{C_1}{\mu_n^2} |\tilde{v}_n''|, \quad (73)$$

$$|\tilde{v}_n| \leq \frac{C_2}{\mu_n^2} |\tilde{v}_n''| + \frac{C_3}{\mu_n^3} |v_n''|, \quad (74)$$

here, $C_i (i = 1, \dots, 3)$ are positive constants and

$$v_n'' = \int_0^1 v''(x)(1-x) \sin \mu_n x dx; \quad v_n'' = \int_0^1 v''(x) \cos \mu_n x dx.$$

The estimates (68)-(72) for $|u_n(y)|$ and $|\tilde{u}_n(y)|$, together with the estimates (73) and (74) for $|v|$ and $|\tilde{v}|$, guarantee the absolute and uniform convergence of the series (67) and its required derivatives in the domain $\bar{\Omega} = \{x \in [0,1], y \in [0, \infty)\}$. Therefore, the function $u(x, y)$ defined by (67) is indeed a classical solution of problem N_3 , satisfying equation (1), boundary conditions (4), (7) and the condition at infinity (3). This completes the proof of Theorem 3.

REFERENCES:

1. Carleman T. *Sur la théorie des équations intégrales et ses applications*. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich. 1932;1:138–151.
2. Bitsadze A.V, Samarskii A.A. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1969;185:739-740. (Engl. transl.: *Soviet Math Doklady*. 1969;10:398-400.)
3. Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems I. *Sovremennaya Matematika. Fundamental'nye Napravleniya*. 2007;26:3–132. (Engl. transl.: *J Math Sci (N.Y.)*. 2008;155:199-334.)
4. Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems II. *Sovremennaya Matematika. Fundamental'nye Napravleniya*. 2009;33:3-179. (Engl. transl.: *J Math Sci (N.Y.)*. 2010;166:377–561.)
5. Khubiev K.U. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation. *J Samara State Tech Univ Ser Phys Math Sci*. 2019;23(4):789–796. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1677>
6. Khubiev K.U. A Bitsadze-Samarskii type problem for a loaded equation of hyperbolic-parabolic type. *Mathematical Notes of SVFU*. 2019;26(2):31-40.
7. Karachik V, Turmetov B. On solvability of some nonlocal boundary value problems for the biharmonic equation. *Mathematica Slovaca*. 2020;70(2):329-342. DOI: <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0355>
8. Al-Shamsi H, Kadirkulov B.J, Kerbal S. The Bitsadze-Samarskii type problem for a mixed-type equation in a domain with a deviation from the characteristics. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41:1021–1030. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220060025>
9. Khubiev K.U. The Bitsadze-Samarskii problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation with order degeneration in the domain of its hyperbolicity. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021;198:123-132.
10. Ashurov R.R, Kadirkulov B.J, Jalilov M.A. On an inverse problem of the Bitsadze-Samarskii type for a parabolic equation of fractional order. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 2023;29:70. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00542-y>
11. Baderko E.A, Cherepova M. Solution of the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system in a semibounded domain. *Differential Equations*. 2017;53(10):1294-1302. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117100068>

12. Baderko E.A, Cherepova M. Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2018;64(5):753–765. DOI: <https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501039>
13. Lerner M.E, Repin O.A. On problems of the Frankl'-type for some elliptic equations with degenerations of different kinds. *Differential Equations*. 1999;35(8):1087–1093.
14. Moiseev E.I. On the solution of a nonlocal boundary value problem by the spectral method. *Differential Equations*. 1999;35(8):1094–1100.
15. Sabitov K.B, Sidorenko O.G. On the unique solvability of a nonlocal problem for a degenerate elliptic equation by the spectral method. *Proceedings of the International Conference, Sterlitamak*. 2003:213–219.
16. Repin O.A. The Tricomi problem for an equation of mixed type in a domain whose elliptic part is a half-strip. *Differential Equations*. 1996;32(4):565–567.
17. Lerner M.E, Repin O.A. On a problem with two nonlocal boundary conditions for an equation of mixed type. *Siberian Mathematical Journal*. 1999;40(6):1260–1276.
18. Abashkin A.A. On a Dirichlet-type problem in an infinite half-strip for a biaxially symmetric Helmholtz equation. *Scientific Bulletin. Series Mathematics and Physics*. 2012;11(130):27.
19. Ruziev M.Kh. A boundary value problem for an equation of mixed type with singular coefficients. *Vestnik of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*. 2009;1(18):33–40.
20. Vagapov V.Z. Dirichlet problem for the mixed-type equation with two degeneration lines in a half-strip. *Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*. 2019;23(1):7–19.
21. Bari N.K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. *Uchenye Zapiski Moskovskogo Universiteta. Mathematics*. 1951;4:69–107. (In Russian.)
22. Olver F.W.J. *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press; 1974. (Russian transl.: Nauka, Moscow, 1990.)
23. Kadirkulov B.J, Begimqulov F.Kh. On a nonlocal problem of the Bitsadze–Samarskii type for an elliptic equation with degeneration. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025;46(1):448–456. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224608051>
24. Ruziev, M., Kazakbaeva, K. On a nonlocal boundary value problem for the Holmgren equation with a singular coefficient. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2024, vol. 7, no. 5, pp. 117–124. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224604065>

JORDAN CANONICAL FORMS FOR MATRICES OVER FINITE FIELDS AND
NILPOTENT MATRICES OVER RESIDUE CLASS RINGS

Shodiyev Mirzobek Ubaydullo o'g'li,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi

mirzobekshodiyev7@gmail.com,

Beshimova Shaxnoza Xamidjonovna,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi

shaxnozabuxdu@gmail.com

Abstract. We develop a complete theory of Jordan canonical forms for matrices over finite fields F_p and their algebraic closures $\overline{F_p}$. Existence and uniqueness theorems are established via the decomposition into generalized eigenspaces and the construction of Jordan chains. We derive explicit formulas for determining Jordan block sizes from the dimensions of kernels of powers of $A - \lambda I$. Computational algorithms are presented and illustrated through detailed examples over F_2 , F_3 and F_5 including cases requiring extension fields.

Keywords: Jordan canonical form, finite fields, nilpotent matrices, generalized eigenvectors, rational canonical form

ЖОРДАНОВЫ КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДЛЯ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ
ПОЛЯМИ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ НАД КОЛЬЦАМИ ВЫЧЕТОВ

Аннотация. В работе развивается полная теория жордановых канонических форм для матриц над конечными полями F_p и их алгебраическими замыканиями. Устанавливаются теоремы существования и единственности на основе разложения на обобщённые собственные подпространства и построения жордановых цепочек. Выводятся явные формулы для определения размеров жордановых блоков через размерности ядер степеней оператора $A - \lambda I$. Представлены вычислительные алгоритмы и приведены подробные примеры над полями F_2 , F_3 и F_5 , включая случаи, требующие расширения поля.

Ключевые слова: жорданова каноническая форма, конечные поля, нильпотентные матрицы, обобщённые собственные векторы, рациональная каноническая форма.

CHEKLI MAYDONLAR USTIDAGI MATRITSALAR UCHUN JORDAN KANONIK
SHAKLLARI VA QOLDIQ SINF HALQALARI USTIDAGI NILPOTENT MATRITSALAR

Annotatsiya. Ushbu ishda chekli maydonlar F_p va ularning algebraik yopilmalari ustidagi matritsalar uchun Jordan kanonik shakllarining to'liq nazariyasi ishlab chiqiladi. Mayjudlik va yagonalik teoremlari umumlashgan xos qiymatlar osti fazolariga ajratish va Jordan zanjirlarini qurish orqali isbotlanadi. Jordan bloklari o'lchamlarini $A - \lambda I$ operatori darajalari yadrolari o'lchamlari orqali aniqlash uchun aniq formulalar keltiriladi. Hisoblash algoritmlari taqdim etilib, F_2 , F_3 va F_5 maydonlarida, shu jumladan kengaytirilgan maydonlarni talab qiluvchi holatlar uchun batafsil misollar bilan yoritiladi.

Kalit so'zlar: Jordan kanonik shakli, chekli maydonlar, nilpotent matritsalar, umumlashgan xos vektorlar, ratsional kanonik shakl.

Introduction. The Jordan canonical form stands as one of the cornerstones of linear algebra, providing a nearly diagonal representation for linear operators over an algebraically closed field. Since its introduction by Camille Jordan in the 1870s, the theory has found applications across mathematics, from differential equations to representation theory. While the classical treatment focuses on the complex numbers, the theory extends naturally to fields of positive characteristic, including finite fields.

Let F_p denote the finite field of prime order p and $\bar{F}_p$ its algebraic closure. For a matrix $A \in M_n(F_p)$, the Jordan form theorem asserts the existence of an invertible matrix $P \in GL_n(\bar{F}_p)$ such that $P^{-1}AP$ is a direct sum of Jordan blocks

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k},$$

with $\lambda \in \bar{F}_p$. This decomposition is unique up to permutation of the blocks.

The present paper has two principal objectives. First, we provide a self-contained and rigorous development of the Jordan theory over finite fields, emphasizing the algorithmic aspects necessary for explicit computation. Second, we investigate nilpotent matrices over the non-field rings $\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, where Jordan theory does not directly apply but combinatorial enumeration remains possible.

The structure of the paper is as follows. Section 2 collects preliminary results on finite fields and basic matrix cardinalities. Section 3 treats nilpotent matrices over residue class rings, culminating in Theorem 1.12 which gives explicit counting formulas. Section 4 presents the core Jordan theory: generalized eigenspaces, Jordan chains, existence and uniqueness theorems, and the block size formula. Section 5 provides extensive computational examples, illustrating the theory over various finite fields. Section 6 discusses the relationship with the rational canonical form and compares computational complexities. Section 7 concludes with open problems and directions for future research.

Definition 1.1 Let p be a prime number. The finite field of order p , denoted F_p , is the set $\{0, 1, \dots, p-1\}$ with addition and multiplication modulo p . For any positive integer k , there exists a unique (up to isomorphism) extension field F_{p^k} of degree k , and $F_{p^k} \cong F_p[x]/(f(x))$ for any irreducible polynomial $f \in F_p[x]$ of degree k .

Definition 1.2 The algebraic closure $\bar{F}_p$ is the direct limit $\varinjlim_k F_{p^k}$. It is an algebraically closed field of characteristic p , and every element of $\bar{F}_p$ lies in some finite extension F_{p^k} .

Proposition 1.1 (Frobenius automorphism) The map $\Phi_p: \bar{F}_p \rightarrow \bar{F}_p$ defined by $\Phi_p(x) = x^p$ is a field automorphism, called the Frobenius automorphism. Its fixed field is F_p , and it generates the Galois group $\text{Gal}(F_{p^k}/F_p) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Proposition 1.2

$$|M_n(F_p)| = p^{n^2}, \quad |GL_n(F_p)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i) = p^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n (p^i - 1).$$

Proof. The first formula follows because each matrix entry can be chosen independently from the p elements of F_p . For the second, an invertible matrix consists of n linearly independent columns. The first column can be any nonzero vector ($p^n - 1$ choices). The second column can be any vector not in the span of the first ($p^n - p$ choices). Continuing this argument yields the product formula.

Definition 1.3 A matrix $A \in M_n(R)$ over a commutative ring R is nilpotent if $A^k = 0$ for some positive integer k . The smallest such k is called the nilpotency index of A .

Theorem 1.1 (Fine-Herstein) For any prime power $q = p^k$, the number of nilpotent matrices in $M_n(F_q)$ is q^{n^2-n} . Consequently, the probability that a uniformly random matrix in $M_n(F_q)$ is nilpotent equals q^{-n} .

Sketch. The proof proceeds by counting matrices with a given Jordan form. Over F_q , a nilpotent matrix is similar to a direct sum of Jordan blocks with eigenvalue 0. The number of matrices with a given partition $\lambda \vdash n$ is q^{n^2-n} times a product of Gaussian binomial coefficients that telescopes to q^{n^2-n} .

For a prime power p^β ($\beta \geq 2$), the ring $\mathbb{Z}/p^\beta\mathbb{Z}$ is not a field. Nevertheless, the nilpotence condition lifts.

Lemma 1.1 Let $\pi: \mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$ be the natural projection. For any matrix $A \in M_n(\mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z})$, we have $\pi(A^k) = \pi(A)^k$ for all $k \geq 1$.

Theorem 1.2 (Lifting Criterion) A matrix $A \in M_n(\mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z})$ is nilpotent if and only if its reduction $\bar{A} = \pi(A) \in M_n(\mathbb{F}_p)$ is nilpotent.

Proof. ($\Rightarrow$) If $A^k = 0$ in $\mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z}$, applying π gives $\bar{A}^k = 0$ in $\mathbb{F}_p$, so $\bar{A}$ is nilpotent.

($\Leftarrow$) Suppose $\bar{A}^k = 0$. Write $A = \bar{A} + pC$ where $C \in M_n(\mathbb{Z}/p^{\beta-1} \mathbb{Z})$. By the binomial theorem,

$$A^k = (\bar{A} + pC)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \bar{A}^{k-i} (pC)^i.$$

Since $\bar{A}^k = 0$, every term in the sum contains at least one factor p . Hence $A^k = pD$ for some $D \in M_n(\mathbb{Z}/p^{\beta-1} \mathbb{Z})$. Repeating this argument, we obtain $A^{k\beta} = p^\beta E = 0$ in $\mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z}$.

Theorem 1.3 $|\{A \in M_n(\mathbb{Z}/p^\beta \mathbb{Z}) : A \text{ nilpotent}\}| = p^{\beta n^2 - n}$.

Proof. By Theorem 1.2, nilpotence depends only on $\bar{A}$. There are $p^{n^2 - n}$ nilpotent choices for $\bar{A}$ by Theorem 1.1. For each such $\bar{A}$, the lift C in the decomposition $A = \bar{A} + pC$ can be chosen arbitrarily in $M_n(\mathbb{Z}/p^{\beta-1} \mathbb{Z})$, giving $p^{(\beta-1)n^2}$ choices. The product yields $p^{\beta n^2 - n}$.

Theorem 1.4 Let $m = m_1 m_2$ with $\gcd(m_1, m_2) = 1$. Then

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z},$$

and consequently,

$$M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong M_n(\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}) \times M_n(\mathbb{Z}/m_2\mathbb{Z}).$$

Theorem 1.5 (Multiplicativity) For coprime m_1, m_2 ,

$$N_{\text{nil}}(n, m_1 m_2) = N_{\text{nil}}(n, m_1) \cdot N_{\text{nil}}(n, m_2),$$

where $N_{\text{nil}}(n, m)$ denotes the number of nilpotent matrices in $M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Proof. Under the CRT isomorphism, a matrix $A \in M_n(\mathbb{Z}/m_1 m_2 \mathbb{Z})$ corresponds to a pair (A_1, A_2) with $A_i \in M_n(\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z})$. Then $A^k = 0$ iff $A_1^k = 0$ and $A_2^k = 0$. Since the choices for A_1 and A_2 are independent, the counts multiply.

Theorem 1.6 (Main Counting Theorem) Let $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t}$ be the prime factorization of m . Then

$$N_{\text{nil}}(n, m) = m^{n^2} \prod_{i=1}^t p_i^{-n}, \quad P_{\text{nil}}(n, m) = \prod_{i=1}^t p_i^{-n},$$

where $P_{\text{nil}}(n, m)$ denotes the probability that a uniformly random matrix in $M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ is nilpotent.

Proof. By Theorem 1.5,

$$N_{\text{nil}}(n, m) = \prod_{i=1}^t N_{\text{nil}}(n, p_i^{\beta_i}) = \prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i n^2 - n} = m^{n^2} \prod_{i=1}^t p_i^{-n}.$$

The probability is $N_{\text{nil}}(n, m) / |M_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = \prod_{i=1}^t p_i^{-n}$.

Corollary 1.1 For square-free m with prime factors $p_1, \dots, p_t$, the probability of nilpotence is $(\prod_{i=1}^t p_i)^{-n}$.

a.

[Jordan Canonical Form over Finite Fields](#)

From this point forward, all matrices are considered over the algebraic closure $\bar{\mathbb{F}}_p$ unless otherwise specified. The Jordan form exists precisely when the characteristic polynomial splits, which is always true over $\bar{\mathbb{F}}_p$.

Definition 2.1 For $A \in M_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$, the characteristic polynomial is $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. For an eigenvalue $\lambda_0 \in \bar{\mathbb{F}}_p$, the algebraic multiplicity $m_a(\lambda_0)$ is the multiplicity of λ_0 as a root of χ_A . The geometric multiplicity $m_g(\lambda_0)$ is $\dim \ker(A - \lambda_0 I)$.

Theorem 2.1 (Eigenvalue Inequalities) For any eigenvalue λ_0 of A ,

$$1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0).$$

Proof. The lower bound follows from the definition of eigenvalue. For the upper bound, note that eigenvectors for distinct eigenvalues are linearly independent, and the sum of the geometric multiplicities is at most n . More directly, $\ker(A - \lambda_0 I) \subseteq \ker(A - \lambda_0 I)^{m_a(\lambda_0)}$, and the dimension of the latter equals $m_a(\lambda_0)$.

Definition 2.2 A is diagonalizable if there exists $P \in GL_n(\bar{F}_p)$ such that $P^{-1}AP$ is diagonal.

Theorem 2.2 (Diagonalizability Criterion) A is diagonalizable if and only if $m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$ for every eigenvalue λ_0 .

Definition 2.3 A vector $v \in \bar{F}_p^n$ is a generalized eigenvector of A for eigenvalue λ_0 if $(A - \lambda_0 I)^k v = 0$ for some $k \geq 1$. The smallest such k is the height of v .

Definition 2.4 The generalized eigenspace for eigenvalue λ_0 is

$$V_{\lambda_0}(A) = \{v \in \bar{F}_p^n : (A - \lambda_0 I)^{m_a(\lambda_0)} v = 0\}.$$

Theorem 2.3 (Primary Decomposition) Let $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ be the distinct eigenvalues of A . Then

$$\bar{F}_p^n = \bigoplus_{i=1}^r V_{\lambda_i}(A),$$

each $V_{\lambda_i}(A)$ is A -invariant, and $\dim V_{\lambda_i}(A) = m_a(\lambda_i)$.

Proof. The minimal polynomial $m_A(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{m_i}$ factors into pairwise coprime factors. The primary decomposition theorem yields the direct sum decomposition. The dimension claim follows from considering the restriction of A to each primary component.

Definition 2.5 A Jordan chain of length k for eigenvalue λ_0 is a sequence of nonzero vectors $v_1, \dots, v_k$ satisfying

$$(A - \lambda_0 I)v_1 = 0, \quad (A - \lambda_0 I)v_j = v_{j-1} \quad (2 \leq j \leq k).$$

Lemma 2.1 If $v_1, \dots, v_k$ is a Jordan chain, then these vectors are linearly independent.

Proof. Suppose $\sum_{i=1}^k c_i v_i = 0$. Apply $(A - \lambda_0 I)^{k-1}$: the only term that survives is $c_k v_1$, so $c_k = 0$. Proceed inductively.

Definition 2.5 A Jordan block $J_k(\lambda_0)$ is the $k \times k$ matrix with λ_0 on the diagonal, 1 on the superdiagonal, and 0 elsewhere.

Proposition 2.1 For $J = J_k(\lambda_0)$:

1. $\chi_J(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k$;
2. $\dim \ker(J - \lambda_0 I) = 1$;
3. $(J - \lambda_0 I)^k = 0$ but $(J - \lambda_0 I)^{k-1} \neq 0$;
4. The vectors $e_1, (J - \lambda_0 I)e_2, (J - \lambda_0 I)^2 e_3, \dots$ (appropriately interpreted) form a Jordan chain.

Theorem 2.4 (Jordan Canonical Form) For every $A \in M_n(\bar{F}_p)$, there exists $P \in GL_n(\bar{F}_p)$ such that

$$P^{-1}AP = \bigoplus_{i=1}^r J_{k_i}(\lambda_i),$$

where λ_i are the eigenvalues of A (with repetitions).

Proof. We proceed by induction on n . The case $n=1$ is trivial. Assume the theorem holds for all smaller dimensions.

By Theorem 2.3, we may restrict to a single generalized eigenspace V_{λ} . On V_{λ} , the operator $N = A - \lambda I$ is nilpotent. Let k be the nilpotency index of N .

Choose a vector $v \in \ker N^k \setminus \ker N^{k-1}$. The vectors $v, Nv, \dots, N^{k-1}v$ are linearly independent and span a N -invariant subspace W of dimension k . In the basis $N^{k-1}v, \dots, Nv, v$, the restriction of N to W is a single Jordan block $J_k(0)$, so $A|_W$ is $J_k(\lambda)$.

Now consider the quotient space V_{λ}/W . By the induction hypothesis, A induces a Jordan form on this quotient. Lifting back gives a complete Jordan basis for V_{λ} . Repeating for each eigenvalue yields the result.

Definition 2.6 For an eigenvalue λ of A , define

$$n_k(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I)^k, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

with $n_0 = 0$.

Lemma 2.2 The sequence $\{n_k(\lambda)\}$ is non-decreasing and concave: $n_k - n_{k-1} \geq n_{k+1} - n_k$.

Theorem 2.5 (Block Size Formula) The number $t_j(\lambda)$ of Jordan blocks of size j for eigenvalue λ is given by

$$t_j(\lambda) = 2n_j(\lambda) - n_{j-1}(\lambda) - n_{j+1}(\lambda).$$

Proof. For a single Jordan block $J_k(\lambda)$, we have $n_r = \min(r, k)$. One verifies that $t_k = 1$ and $t_j = 0$ for $j \neq k$. Since n_r is additive over direct sums, the formula follows by linearity.

Corollary 2.1 (Uniqueness) The Jordan canonical form of A is unique up to permutation of the Jordan blocks.

Proof. The numbers $t_j(\lambda)$ are determined solely by the dimensions $n_k(\lambda)$, which are similarity invariants. Hence any two Jordan forms must have the same multiset of block sizes for each eigenvalue.

We now illustrate the theory with detailed examples over various finite fields. Each example includes the computation of the characteristic polynomial, kernel dimensions, and the resulting Jordan form.

Example 2.1 Consider

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_2).$$

The characteristic polynomial is $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$, so $\lambda=1$ is the only eigenvalue with $m_a=3$. Compute $B=A-I$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then $B^2=0$. The kernel dimensions are $n_1 = \dim \ker B = 2$ and $n_2 = 3$. Applying Theorem 2.5:

$$t_1 = 2n_1 - n_0 - n_2 = 4 - 0 - 3 = 1, \quad t_2 = 2n_2 - n_1 - n_3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Thus the Jordan form consists of one 1×1 block and one 2×2 block:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Example 2.2 Let

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_2).$$

One verifies that $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^4$. Computing powers of $B=A-I$ yields:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = 0.$$

The kernel dimensions are $n_1=1, n_2=2, n_3=3, n_4=4$. Theorem 2.15 gives $t_1=t_2=t_3=0$ and $t_4=1$. Hence A is similar to a single 4×4 Jordan block.

Example 2.3 Let

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_3).$$

Set $\mu = 2 - \lambda$. Expanding the determinant yields

$$\chi_A(\lambda) = \mu^3 - \mu + 1.$$

Testing $\mu=0,1,2$ in $\mathbb{F}_3$ gives 1,1,1 respectively, none of which are zero. Thus χ_A is irreducible over $\mathbb{F}_3$. Over the extension field $\mathbb{F}_{27}$, it splits into three distinct linear factors. Consequently, A is diagonalizable over $\mathbb{F}_{27}$:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^9 \end{pmatrix},$$

where $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$.

Example 2.4 Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_5).$$

Step 1: Characteristic Polynomial. Set $\mu=2-\lambda$. Expanding the determinant gives

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\mu^4-\mu^3+2\mu+2.$$

Testing all $\mu \in \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{array}{ll} \mu & \mu^4 - \mu^3 + 2\mu + 2 \\ 0 & 2 \neq 0 \\ 1 & 1 - 1 + 2 + 2 = 4 \neq 0 \\ 2 & 16 - 8 + 4 + 2 = 14 \equiv 4 \neq 0 \\ 3 & 81 - 27 + 6 + 2 = 62 \equiv 2 \neq 0 \\ 4 & 256 - 64 + 8 + 2 = 202 \equiv 2 \neq 0 \end{array}$$

No root exists in $\mathbb{F}_5$, so χ_A is irreducible of degree 4 over $\mathbb{F}_5$.

Step 2: Splitting Field. Let $\mathbb{F}_{5^4} = \mathbb{F}_{625}$ be the extension field containing all roots of χ_A . Since χ_A is irreducible and separable (characteristic 5 does not divide the derivative), it has four distinct roots $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{F}_{625}$.

Step 3: Jordan Form. Because all eigenvalues are distinct, A is diagonalizable over $\mathbb{F}_{625}$. Thus there exists $P \in \text{GL}_4(\mathbb{F}_{625})$ such that

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

where α_i are the four distinct roots of χ_A in $\mathbb{F}_{625}$.

Conclusion. The Jordan form is diagonal with four distinct eigenvalues in the extension field $\mathbb{F}_{625}$.

Example 2.5 (Alternative: Companion Matrix Construction) A simpler way to obtain a 4×4 matrix over $\mathbb{F}_5$ with irreducible characteristic polynomial is the companion matrix of an irreducible quartic. For instance, take

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

whose characteristic polynomial is $x^4 - 4 = x^4 + 1$ (since $-4 \equiv 1 \pmod{5}$). One checks that $x^4 + 1$ has no roots in $\mathbb{F}_5$, and it is irreducible. Hence C is diagonalizable over $\mathbb{F}_{625}$ with four distinct eigenvalues.

REFERENCES:

1. N. J. Fine and I. N. Herstein, *The probability that a matrix be nilpotent*, *Illinois J. Math.* **2** (1958), 499–504.
2. R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields*, 2nd ed., *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, 1997.
3. Roman, *Advanced Linear Algebra*, 3rd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2005.
4. D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd ed., Wiley, 2004.
5. K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, 2nd ed., Prentice Hall, 1971.
6. M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
7. S. Lang, *Algebra*, Revised 3rd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2002.
8. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. II: *Linear Algebra*, Van Nostrand, 1953.
9. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. I, Chelsea, 1959.
10. R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions. Part 2*, *Studies in Appl. Math.* **50** (1971), 259–279.
11. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.

PROPORSIONAL INTENSIVLIK MODELİ BAHOSI UCHUN MUVOFIQLIK MEZONI

Mansurov Dilshod Ravilovich,

Navoiy davlat universiteti

Matematika kafedrası, Navoiy, O‘zbekiston

dmansurovmath@gmail.com

Bozorov Suxrob Baxodirovich,

Guliston davlat universiteti

Matematika kafedrası, Guliston, O‘zbekiston

suxrobbek_8912@mail.ru

Oltiyev Azizbek Bayramovich,

Navoiy davlat universiteti

Matematika kafedrası, Navoiy, O‘zbekiston

azizbekolot1993@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada o‘ng tomondan tasodifiy senzurlanishli informativ model va bu modeldagi bir bahoning xossalari tadqiq etilgan. O‘ng tomondan senzurlangan tanlanmalar uchun Abdushukurov–Cheng–Lin (ACL) bahosi asosida muvofiqlik mezonining limit taqsimoti sonli usullar yordamida o‘rganilgan. Asosiy natija sifatida limit taqsimotning $F(t)$ taqsimot funksiyasi va uning parametrlariga bog‘liq emasligi, lekin senzurlanish darajasiga kuchli bog‘liqligi aniqlangan. Turli senzurlanish darajalari uchun kritik nuqtalar jadvali tuzilgan hamda normallashtirilgan statistikaning Kolmogorov taqsimotiga yaqinlashish masalasi ko‘rib chiqilgan.

Kalit so‘zlar: tasodifiy senzurlanish, informativ model, proporsional intensivliklar, muvofiqlik mezon, ACL bahosi, Kolmogorov taqsimoti.

A GOODNESS-OF-FIT CRITERION FOR THE ESTIMATION OF THE PROPORTIONAL INTENSITY MODEL

Abstract. This article investigates the informative model of right-censored data and the properties of the estimate within this model. The limiting distribution of the goodness-of-fit criterion based on the Abdushukurov–Cheng–Lin (ACL) estimate for right-censored samples has been studied by numerical methods. It is shown that the limiting distribution does not depend on the distribution function $F(t)$ or its parameters, but strongly depends on the censoring level. A table of critical values for various censoring levels is constructed, and the problem of approximation of the normalized statistic to the Kolmogorov distribution is considered.

Key words: random censorship, informative model, proportional hazards, goodness-of-fit test, ACL estimate, Kolmogorov distribution.

КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ МОДЕЛИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Аннотация. В этой статье исследуется информативная модель данных с правильной цензурой и свойства оценки в рамках этой модели. Численными методами было изучено предельное распределение критерия соответствия, основанное на оценке Абдушукурова-Ченг-Лина (ACL) для выборок с правильной цензурой. Показано, что предельное распределение не зависит от функции распределения $F(t)$ или её параметров, но сильно зависит от уровня цензурирования. Построена таблица критических значений для различных уровней цензурирования, и рассмотрена задача аппроксимации нормализованной статистики распределением Колмогорова.

Ключевые слова: случайная цензура, информативная модель, пропорциональные риски, критерий соответствия, оценка ACL, распределение Колмогорова.

Kirish. Tibbiy-biologik tadqiqotlarda bemorning yashab qolish ko‘rsatkichlarini tekshirishda yoki muhandislik tajribalarida texnik qurilmaning ishonchligini o‘rganishda, tadqiq etilayotgan obyekt haqidagi ma’lumotlar o‘ng tomondan senzurlanishi mumkin. Bunga misol sifatida biror klinikada davolanayotgan

bemorning muayyan sabablarga ko'ra (yashash joyining o'zgarishi, boshqa klinikaga ko'chishi va hokazo) klinikani tark etishini keltirish mumkin. Bunday holda bemor klinikaga kelgan paytdan boshlab ketgunga qadar bo'lgan ma'lumotlar mavjud bo'ladi, lekin ketganidan keyingi axborot yo'q. Shunga o'xshash holatlar o'ngdan senzurlangan ma'lumotlarning namunaviy misollari hisoblanadi.

Faraz qilaylik, X – tadqiq etilayotgan obyektning yashash davomiyligi bo'lib, u Y tasodifiy miqdor yordamida o'ngdan senzurlangan bo'lsin. X va Y bog'liqsiz bo'lib, ularning taqsimot funksiyalari mos ravishda F va G .

O'ngdan senzurlangan ma'lumotlar bilan ishlashda asosiy statistik masala – senzurlangan tanlanma asosida F taqsimot funksiyasini baholashdan iborat. Bu masalani birinchilardan bo'lib Kaplan va Meier [4] ko'rib chiqqan. Ular taklif etgan noparametrik baho amaliy masalalarda keng qo'llaniladi. Biroq, ma'lum informativ model sharoitida Abdushukurov [1], Cheng va Lin [2] hamda Csörgő [3] tomonidan mustaqil ravishda o'rganilgan ACL bahosi bir qator afzalliklarga ega ekanligi isbotlangan.

Muvofiqlik mezonlari statistik tahlilning muhim qismi bo'lib, ular ma'lumotlarning faraz qilinayotgan taqsimotga mosligini tekshirish uchun xizmat qiladi. To'liq tanlanmalar uchun Kolmogorov mezonini keng qo'llaniladi [5]. Biroq, senzurlangan tanlanmalar uchun bu mezonning analogini qurish qo'shimcha nazariy va amaliy tadqiqotlarni talab etadi [6-7].

Ushbu maqolada asosan ACL bahosi asosida senzurlangan tanlanmalar uchun muvofiqlik mezonini qurish va uning limit taqsimotini sonli usullar yordamida o'rganish maqsad qilingan.

Matematik asos.

1 Informativ model va acl bahosi.

Faraz qilaylik, $\{(X_k, Y_k), k \geq 1\} - (X, Y)$ juftliklarning bog'liqsiz realizatsiyalari ketma-ketligi va

$$S^{(n)} = \{(\mathbb{Z}_i, \delta_i), i = 1, \dots, n\}$$

kuzatilgan tanlanma bo'lsin. Bu yerda $\mathbb{Z}_i = \min\{X_i, Y_i\}$, $\delta_i = I(X_i \leq Y_i)$ va $I(A) - A$ hodisaning indikator. Eslatib o'tamizki, $S^{(n)}$ tanlanmada X_i ning kuzatilishlari soni $\delta_1 + \dots + \delta_n$ ga teng.

Statistik masala $S^{(n)}$ tanlanma asosida F taqsimot funksiyasini baholashdan iborat. Buning uchun $\mathbb{Z}_i$ ning taqsimot funksiyasini H orqali belgilaymiz. Minimumning taqsimotiga ko'ra:

$$H(t) = 1 - (1 - F(t))(1 - G(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

(1) ga qo'shimcha ravishda, qandaydir musbat θ parametr mavjud bo'lib, barcha $t \in \mathbb{R}$ uchun quyidagi funksional bog'lanish o'rinli bo'lsin:

$$1 - G(t) = (1 - F(t))^\theta. \quad (2)$$

Bu modeldagi θ parametr o'ngdan senzurlanish darajasini belgilaydi ($\theta = 0$ – senzurlanish yo'q, $\theta \rightarrow 1$ – kuchli senzurlanish). (1) va (2) formulalarni birlashtirish orqali F uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$F(t) = 1 - [1 - H(t)]^p, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

bu yerda $p = \frac{1}{1 + \theta}$.

$(H(t), p)$ juftlik o'rniga $S^{(n)}$ tanlanma yordamida olingan uning baholarini (3) ifodaga qo'yib, ACL bahosini hosil qilamiz:

$$F_n^{\text{ACL}}(t) = 1 - [1 - H_n(t)]^{p_n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

bu yerda

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\mathbb{Z}_i \leq t).$$

Bu baho [1-3] adabiyotlarda mustaqil ravishda o'rganilgan bo'lib, uni ACL (Abdushukurov–Cheng–Lin) bahosi deb atash tavsiya etilgan.

2 To'liq tanlanma uchun muvofiqlik mezonini.

Tekshirilayotgan asosiy gipoteza:

$$H_0 : F(t) = F_0(t) \quad \text{barcha } t \text{ uchun,}$$

muqobil gipoteza esa:

$$H_1 : F(t) \neq F_0(t) \quad \text{qandaydir } t \text{ uchun.}$$

Bu gipotezani tekshirish nazariy taqsimot funksiyasi $F(t)$ va empirik taqsimot funksiyasi $F_n^*(t)$ orasidagi farqning moduli supremumiga asoslanadi:

$$D_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t) - F_n^*(t)|. \quad (5)$$

D_n ning ixtiyoriy n da taqsimoti $F(t)$ ga bog'liq emas – bu xususiyat mezon qurishning asosi hisoblanadi. Tegishli limit taqsimot quyidagi teorema bilan beriladi.

Teorema 1 (A.N.Kolmogorov) Agar $F(t)$ – uzluksiz taqsimot funksiya bo'lsa, u holda barcha $t > 0$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \sqrt{n} D_n < t = K(t), \quad (6)$$

bu yerda

$$K(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t^2} \quad (7)$$

Kolmogorov taqsimot funksiyasi deb ataladi.

$K(t)$ – parametrsiz taqsimot funksiyasi bo'lib, $K(t)$ ning qiymatlari va $K^{-1}(p)$ kvantillari statistik jadvallar yoki kompyuter dasturlari yordamida hisoblanadi. Statistika sifatida $R = \sqrt{n} D_n$ olinadi. H_0 gipotezasini qabul qilish sohasi:

$$[0, K^{-1}(1-\alpha)],$$

bu yerda α – ishonchlilik darajasi. $R > K^{-1}(1-\alpha)$ bo'lganda H_1 qabul qilinadi.

3 Senzurlangan tanlanma uchun muvofiqlik mezon. (5) da $F_n^*(t)$ o'rniga (4) ACL bahosini qo'ysak, limit taqsimot qanday o'zgaradi? Ushbu savolga quyida javob topishga urinamiz.

$$D_n^{\text{ACL}} = \sup_{t \leq T_H} |F(t) - F_n^{\text{ACL}}(t)|, \quad (8)$$

$$T_H = \inf \{x : H_n(x) = 1\}.$$

[2] da quyidagi yaqinlashish tezligi isbotlangan:

$$D_n^{\text{ACL}} = O \sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}. \quad (9)$$

Bu tezlikni inobatga olib, mezonning asosiy statistikasini shakllantiramiz:

$$T_n = \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}} \cdot \sup_{t \leq T_H} |F(t) - F_n^{\text{ACL}}(t)|. \quad (10)$$

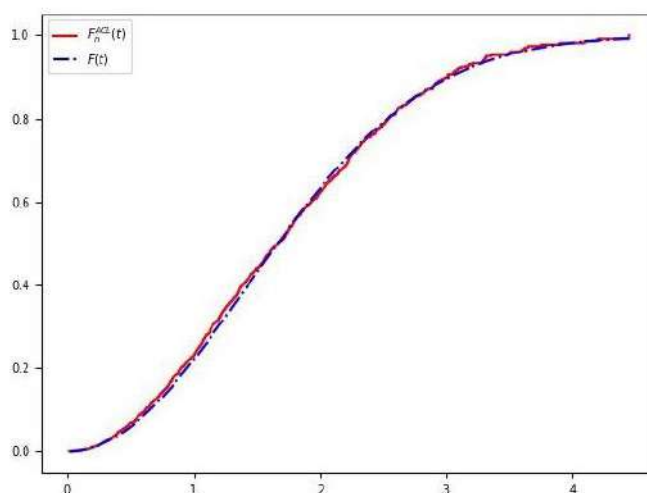
Endi yuqoridagi (10) T_n ning limit taqsimotini sonli usulda o'rganish uchun quyidagi iterativ algoritm (Monte-Karlo usuli) qo'llaniladi.

Algoritm:

1. Berilgan $F(t)$ va senzurlanish darajasi θ asosida katta hajmli sun'iy tanlanma hosil qilinadi.
2. Hosil qilingan tanlanma asosida T_n ning empirik taqsimoti quriladi.
3. Qurilgan empirik taqsimot bo'yicha kerakli kvantil topiladi.
4. 1–3-qadamlar zarur aniqlikka erishilgunga qadar takrorlanib, olingan kvantillarning o'rtachasi hisoblanadi.

Har bir seriyada $n \in \{500, 5000\}$, $F(t)$ sifatida eksponensial $\text{Exp}(\lambda)$, normal $N(\mu, \sigma^2)$ va tekis $U(0,1)$ taqsimotlar, senzurlanish darajasi esa 10% dan 80% gacha tekshirildi. Alohida ko'rsatilmagan holatlarda barcha grafiklar o'rtacha 50% senzurlanish darajasida tasvirlangan. Barcha amaliy tekshiruvlar Python dasturlash tili yordamida bajarildi.

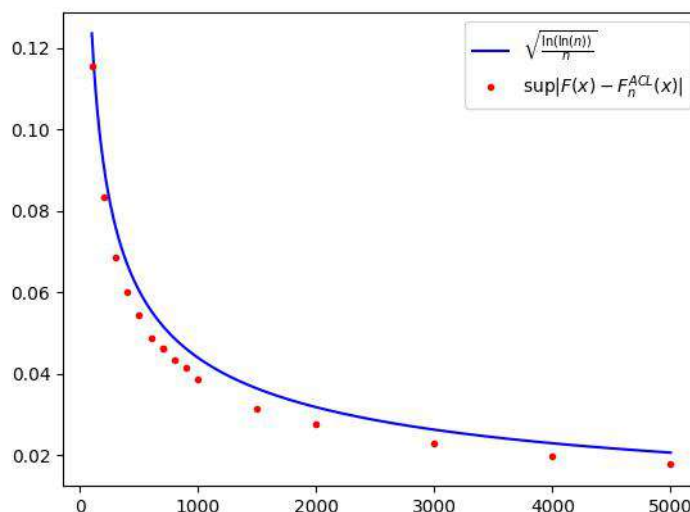
ACL bahosini (4) haqiqiy taqsimot funksiyasi bilan solishtiruvchi grafik 1-rasmda keltirilgan.



1-rasm. ACL bahosi va $F(t)$: $n = 1000$, senzurlanish darajasi 30%.

1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, $F_n^{\text{ACL}}(t)$ haqiqiy taqsimot funksiyasiga juda yaqin joylashadi. Turli adabiyotlarda bu bahoning Kaplan–Meier bahosiga nisbatan bir qator ustunliklari ko‘rsatilgan: asimptotik samaradorlik, kichik tanlanmada barqarorlik va senzurlangan nuqtalarda yaxshiroq o‘zini tutishi kabilar.

Eng avvalo muvofiqlik mezonini qurish uchun yaqinlashish tezligi zarur bo‘ladi. Ushbu tezlik (9) da $O(\sqrt{\ln \ln n / n})$ shaklida berilgan. Tezlikni sonli tekshirish uchun turli n larda D_n^{ACL} ning o‘rtacha qiymati va nazariy egri chizig‘i birgalikda tasvirlangan (2-rasm).



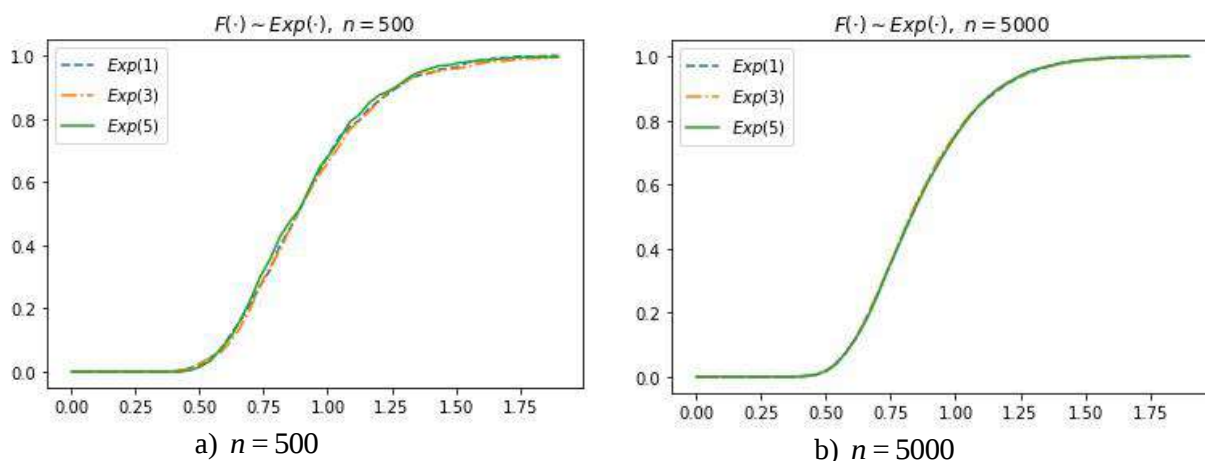
2-rasm. D_n^{ACL} ning $\sqrt{\ln \ln n / n}$ yaqinlashish tezligi: nuqtalar – tajriba natijalari, chiziq – nazariy tezlik.

2-rasmdan ko‘rinib turibdiki, empirik qiymatlar nazariy $\sqrt{\ln \ln n / n}$ egri chizig‘iga yaqin joylashgan bo‘lib, bu (9) ning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Natijalar.

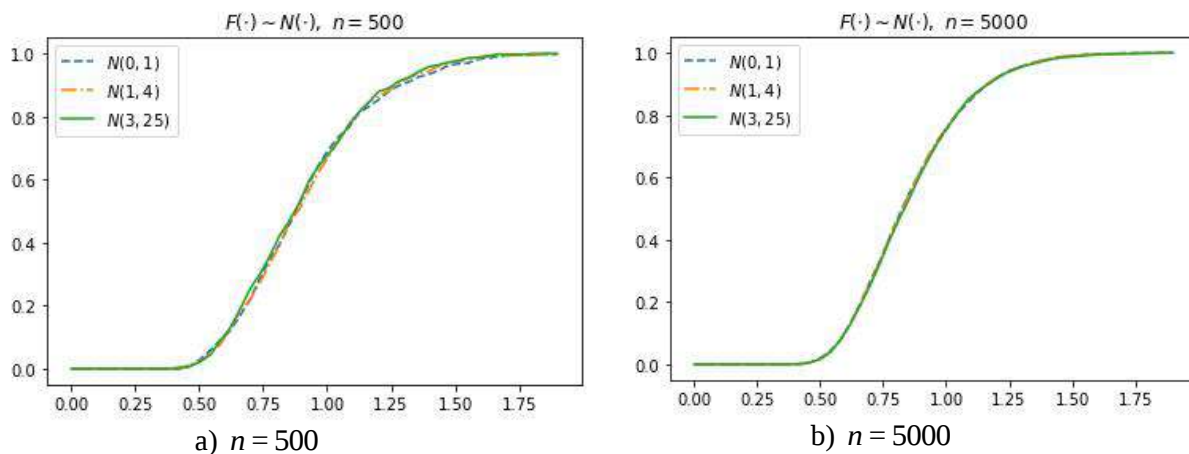
1 Limit taqsimotning $F(t)$ va uning parametrlaridan mustaqilligi.

T_n ning limit taqsimoti $F(t)$ ning parametrlariga bog‘liqligini tekshirish uchun eksponensial va normal taqsimotlar bir necha parametrdan sinab ko‘rildi.



3-rasm. $F(\cdot) \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda = 1, 2, 3$

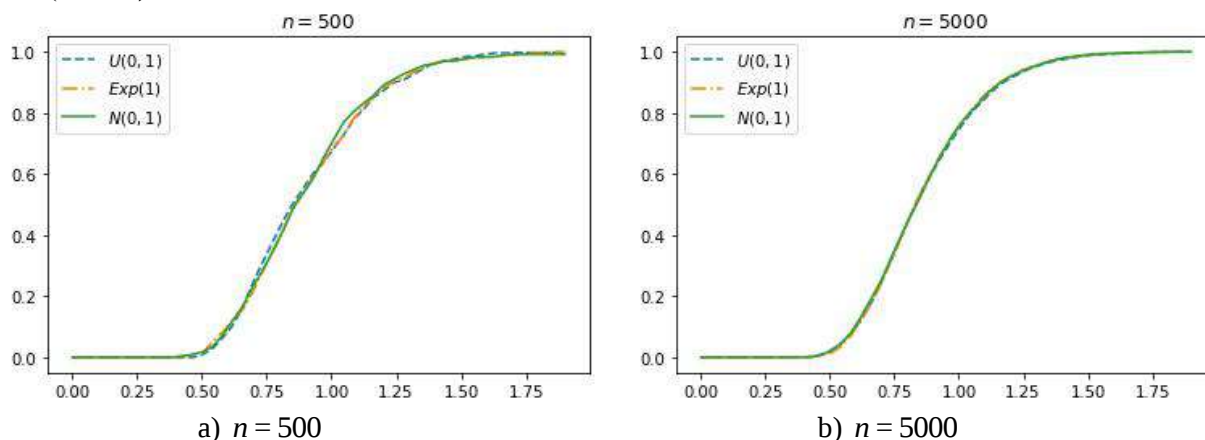
3-rasmdan (a) va b) ko'rinib turibdiki, $n = 500$ va $n = 5000$ da ham λ ning turli qiymatlari uchun T_n ning empirik taqsimotlari deyarli ustma-ust tushadi. Bu holat eksponensial taqsimot parametrlari limit taqsimotga ta'sir qilmasligini ko'rsatadi.



4-rasm. $F(\cdot) \sim N(\mu, \sigma^2)$

4-rasm normal taqsimot uchun ham xuddi shunday xulosa beradi: (μ, σ^2) qiymatlari o'zgarganda limit taqsimot o'zgarmaydi.

Yuqorida limit taqsimotning parametrlarga bog'liq emasligi o'rganildi. Endi limit taqsimotning taqsimot funksiyani o'zini ko'rinishiga bog'liq emasligini tekshiramiz. Umumiylikni chegaralamasdan, barcha tekis $U(0,1)$, eksponensial $\text{Exp}(1)$ va normal $N(0,1)$ taqsimotlar standart parametrlarda olinib T_n o'rganildi (5-rasm).

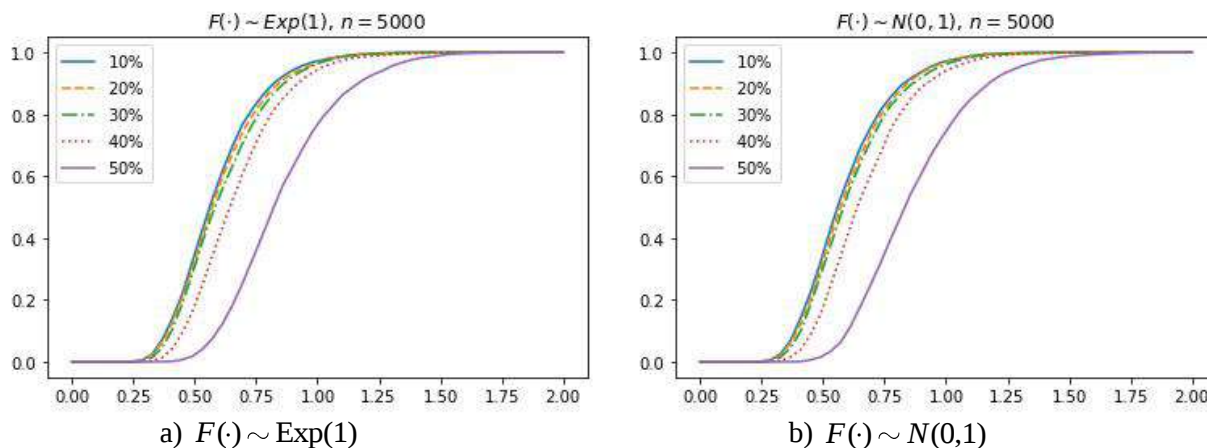


5-rasm. $U(0,1)$, $\text{Exp}(1)$, $N(0,1)$

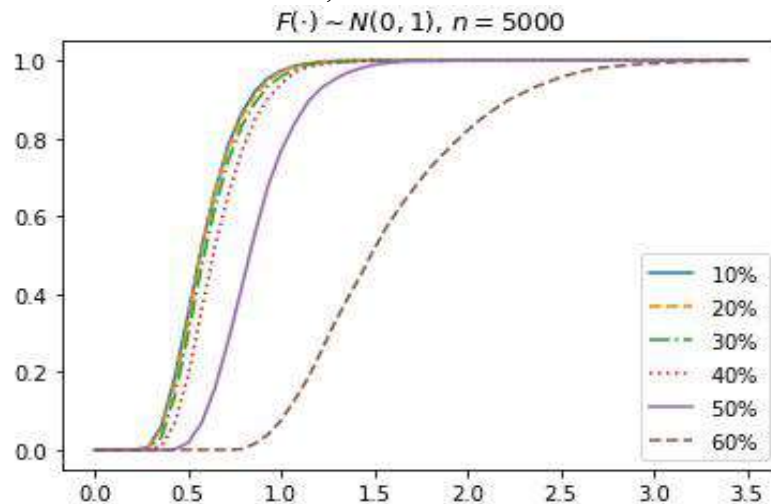
5-rasmdan ko‘rinib turibdiki, uch xil taqsimot uchun ham T_n ning taqsimoti amalda bir xil. Ayniqsa $n = 5000$ da (5b-rasm) uchta egri chiziq deyarli to‘liq ustma-ust tushadi. Bu esa T_n ning limit taqsimoti $F(t)$ taqsimot funksiyasining ko‘rinishi va parametrlaridan bog‘liq emasligini anglatadi.

2 Limit taqsimotning senzurlanish darajasiga bog‘liqligi.

Senzurlanish darajasining T_n ga ta‘sirini o‘rganish uchun bir xil $F(t)$ da turli θ qiymatlari qo‘llanildi (6-rasm).

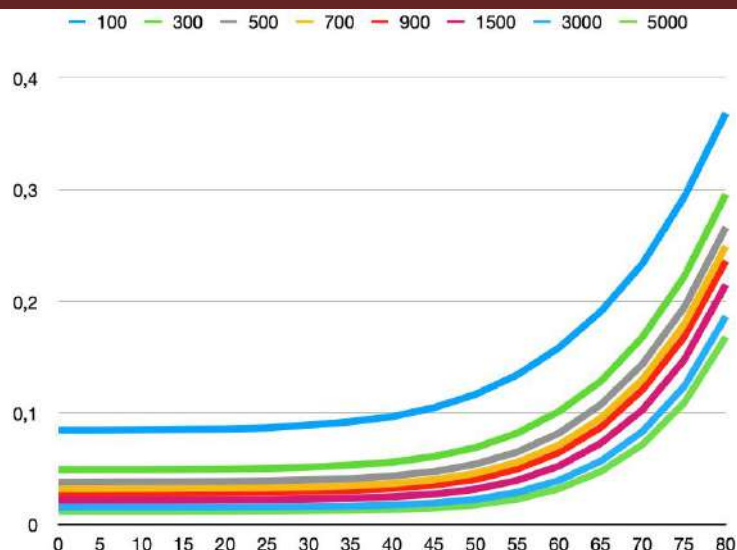


6-rasm. $n = 5000$; senzurlanish 10%–50%.



7-rasm. $F(\cdot) \sim N(0,1)$, $n = 5000$; senzurlanish 10%–60%.

6-7-rasmlardan yaqqol ko‘rinib turibdiki, T_n ning limit taqsimoti senzurlanish darajasiga kuchli bog‘liq. Buni ayniqsa 8-rasmda yaqqol ko‘rishimiz mumkin. Senzurlanish darajasi 50% dan oshganda taqsimot keskin o‘ngga siljiydi. Bu senzurlanishli tanlanmalar uchun muvofiqlik mezonlarini analitik usulda ishlab chiqishda qiyinchilikni keltirib chiqaradi.



8-rasm. D_n^{ACL} ning senzurlanish darajasiga bog'liqligi (gorizontal o'q – senzurlanish darajasi, %, vertikal o'q – 20 000 ta tajribada o'rtacha supremum qiymati).

8-rasmdan ko'rinib turibdiki, D_n^{ACL} senzurlanish darajasi ortishi bilan monoton o'sadi va 50% dan keyin sezilarli tezlashadi. Yuqoridagi sonli tajribalar asosida olingan natijalarga ko'ra limit taqsimotni analitik usulda ko'rsatish murakkab masala ekanligini xulosa qilishimiz mumkin. Chunki limit taqsimot senzurlanish darajasiga kuchli bog'liq.

$F(t)$ dan mustaqillik. T_n statistikasing limit taqsimoti $F(t)$ ning ko'rinishi va parametrlariga bog'liq emasligini aniqlash – bu ish natijalarning eng muhim qismidir. Ekspontensial, normal va tekis taqsimotlar uchun olib borilgan tajribalar (3–5-rasmlar) ushbu fakti aniq tasdiqladi. Bu xususiyat ACL bahosiga asoslangan muvofiqlik mezonining universalligini ta'minlaydi.

Senzurlanish darajasiga bog'liqlik va amaliy yechimlar. Limit taqsimotning senzurlanish darajasiga kuchli bog'liqligi (10–12-rasmlar) mezonni amalda qo'llashni qiyinlashtiradi. Bu holatda muammoni hal etishning uchta amaliy tavsiyasi beriladi:

1. Jadval usuli. Muayyan senzurlanish darajalari uchun yuqori aniqlikda kritik nuqtalar jadvalini oldindan tayyorlash (1-jadval). Kamchiligi: ixtiyoriy senzurlanish darajasi uchun jadval tuzish imkonsiz.

2. Monte-Karlo usuli. Berilgan model va senzurlanish darajasi uchun dastur orqali empirik kvantilni real vaqtda hisoblash. Bu usul zamonaviy kompyuterlar bilan yaxshi ishlaydi va juda aniq natija beradi, biroq hisoblash vaqtini talab etadi.

3. Normallashtirish usuli. $\varphi(\theta)$ funksiyasi yordamida $W_n(\theta) = \varphi(\theta)T_n$ statistikani Kolmogorov taqsimotiga yaqinlashtirish (2-jadval). Agar $\varphi(\theta)$ ning analitik ko'rinishi topilsa, bu eng samarali yondashuv bo'ladi.

Yuqorida aytilgan uchta tavsiya barchasi uchun yechim namunalari keltiramiz. Monte-Karlo usulida (har biri 20000 ta takrorlash) turli senzurlanish darajalari va ishonchlilik darajalari uchun T_n ning empirik kvantillari hisoblandi (1-jadval).

1-jadval.

T_n statistikasing kritik nuqtalari			
Senzurlanish darajasi	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
5%	0,8498	0,9430	1,1311
10%	0,8492	0,9430	1,1294
15%	0,8515	0,9451	1,1326
20%	0,8565	0,9512	1,1424
25%	0,8652	0,9610	1,1526
30%	0,8800	0,9768	1,1719
35%	0,9029	1,0016	1,2024
40%	0,9400	1,0401	1,2417
45%	1,0163	1,1168	1,3222
50%	1,1871	1,3064	1,5504
55%	1,5332	1,7061	2,0554
60%	2,1338	2,3671	2,8066

65%	3,0211	3,3128	3,8522
70%	4,2853	4,6352	5,2771
75%	6,0780	6,4921	7,2249
80%	8,6178	9,0822	9,8962

1-jadvaldan ko‘rinib turibdiki, past senzurlanish darajalarida (5%–30%) kritik nuqtalar nisbatan barqaror va Kolmogorov taqsimotiga yaqin, 50% dan oshganda esa ular keskin ortadi.

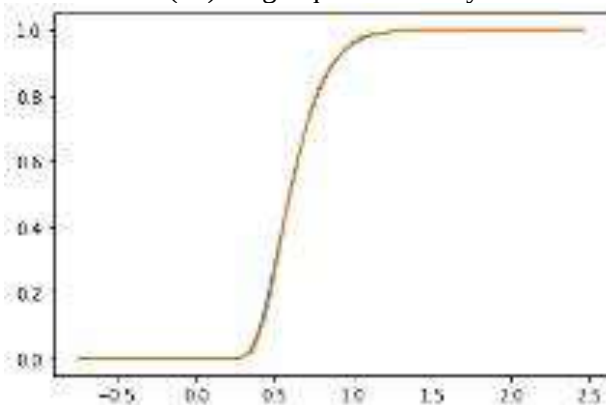
Keyingi usul normallashtirilgan statistika va Kolmogorov taqsimoti. D_n^{ACL} ning o‘rishini normallashtiradigan $\varphi(\theta)$ ko‘paytuvchi yordamida:

$$W_n(\theta) = \varphi(\theta) \sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}} D_n^{ACL} \quad (11)$$

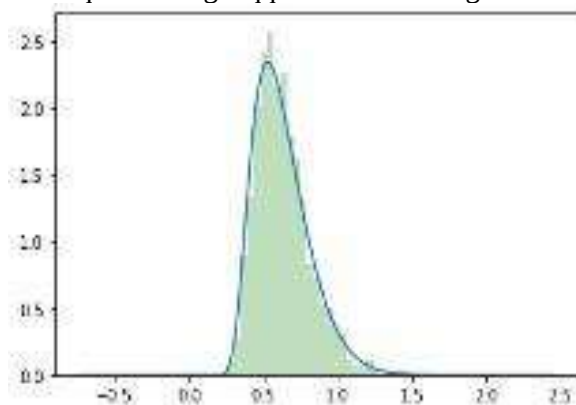
statistikasining Kolmogorov taqsimotiga yaqinlashishi tekshirildi, ya’ni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P W_n(\theta) < t \stackrel{?}{\approx} K \left(\frac{\varphi(\theta)}{\sqrt{\ln \ln n}} t \right). \quad (12)$$

9-10-rasmlarda (11) ning taqsimot funksiyasi va Kolmogorov taqsimotining taqqoslanishi keltirilgan.

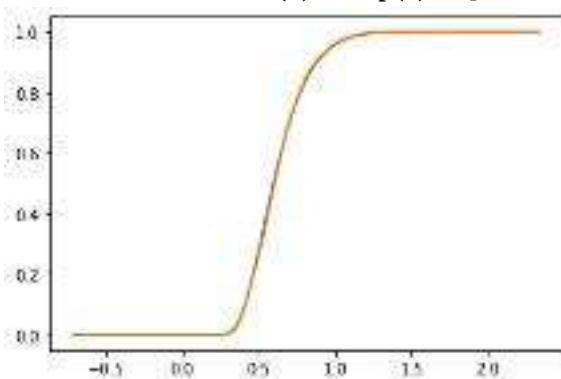


a) taqsimot funksiyasi

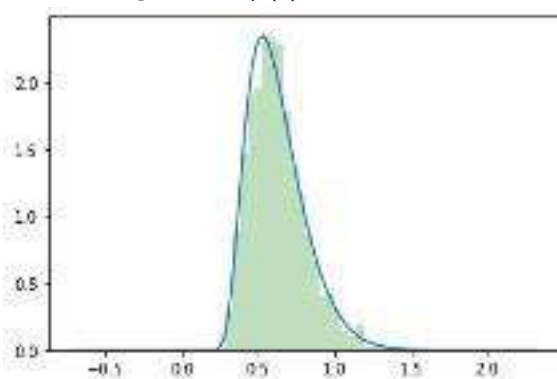


b) zichligi

9-rasm. $F(x) \sim \text{Exp}(1)$ taqsimot funksiyasi va zichligi $\theta = 1$, $\varphi(\theta) = 0,7$.



a) taqsimot funksiyasi



b) zichligi

10-rasm. $F(x) \sim N(0,1)$ taqsimot funksiyasi va zichligi $\theta = 1$, $\varphi(\theta) = 0,7$.

9-10-rasmlardan ko‘rinib turibdiki, $\varphi(\theta)$ to‘g‘ri tanlanganda $W_n(\theta)$ ning empirik taqsimoti Kolmogorov taqsimotiga yaxshi mos keladi. $\varphi(\theta)$ funksiyasining turli senzurlanish darajalaridagi sonli qiymatlari 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval.

$\varphi(\theta)$ funksiyasining qiymatlari

Senzurlanish	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%
$\varphi(\theta)$	0,99	0,98	0,95	0,91	0,70	0,40	0,19	0,08

2-jadvaldan past senzurlanish darajalarida $\varphi(\theta) \approx 1$ bo‘lib, senzurlanish darajasi 50% dan oshganda $\varphi(\theta)$ keskin kamayadi.

$\varphi(\theta)$ ning tahlili. Senzurlanish 10%–30% oralig‘ida $\varphi(\theta) \in [0,95; 0,99]$, ya‘ni normallashtirish ahamiyatsiz. 50% dan yuqorida $\varphi(\theta)$ keskin kamayib, 80% senzurlanishda 0,08 ga tushadi. Bu holat yuqori senzurlanish darajalarida Kolmogorov yaqinlashishi sezilarli darajada buzilishini ko‘rsatadi. Kelgusida $\varphi(\theta)$ ning polinomial yoki boshqa analitik yaqinlashtirishini topish muhim masala bo‘lib qoladi.

Xulosa. Ushbu maqolada o‘ngdan senzurlangan tanlanmalar uchun ACL bahosi asosida muvofiqlik mezonini qurildi va uning xossalari sonli usullar yordamida o‘rganildi. Tadqiqotning asosiy natijalari:

ACL bahosining haqiqiy taqsimot funksiyasiga yaqinlashish tezligi $O(\sqrt{\ln \ln n / n})$ ekanligi sonli tajribalar tomonidan tasdiqlandi.

$T_n = \sqrt{n / (\ln \ln n)} \cdot D_n^{\text{ACL}}$ statistikasining limit taqsimoti $F(t)$ ning ko‘rinishi va parametrlaridan bog‘liq emasligini ko‘rsatuvchi empirik dalillar olingan. Bu xususiyat universal muvofiqlik mezonini qurishning asosi hisoblanadi.

Limit taqsimotning senzurlanish darajasiga kuchli bog‘liqligi aniqlandi; senzurlanish darajasi 50% dan oshganda keskin o‘zgarish kuzatildi.

Turli senzurlanish darajalari (5%–80%) va ishonchlik darajalari ($\alpha = 0,10; 0,05; 0,01$) uchun Monte-Karlo usulida kritik nuqtalar jadvali tuzildi.

Normallashtirilgan $W_n(\theta)$ statistikasining Kolmogorov taqsimotiga yaqinlashishi empirik tarzda ko‘rsatildi va $\varphi(\theta)$ ning sonli qiymatlari aniqlandi.

Kelgusidagi tadqiqotlarda $\varphi(\theta)$ ning analitik ko‘rinishini topish, limit taqsimotga nazariy asoslash berish hamda boshqa senzurlanish modellari uchun o‘xshash mezonlarni qurish rejalashtirilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Abdushukurov A. A. *Nonparametric Estimation in Proportional Hazards Model of Random Censorship* // VINITI. – 1987. – No. 3448 (B87).
2. Cheng P. E., Lin G. D. *Maximum Likelihood Estimation of Survival Function under the Koziol–Green Proportional Hazards Model* // *Statistics & Probability Letters*. – 1987. – Vol. 5. – P. 75–80. [https://doi.org/10.1016/0167-7152\(87\)90030-7](https://doi.org/10.1016/0167-7152(87)90030-7).
3. Csörgő S. *Estimation in the Proportional Hazards Model of Random Censorship* // *Statistics*. – 1988. – Vol. 19. – P. 437–463. <https://doi.org/10.1080/02331888808802115>.
4. Kaplan E. L., Meier P. *Nonparametric Estimation from Incomplete Observations* // *Journal of the American Statistical Association*. – 1958. – Vol. 53, No. 282. – P. 457–481.
5. Kolmogorov A. N. *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione* // *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*. – 1933. – Vol. 4. – P. 83–91.
6. Абдушукуров А.А., Бозоров С.Б., Мансуров Д.Р. *Оптимальное ядерное оценивание плотности методом статистического моделирования при случайном цензурировании наблюдений* // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. (Q4, 1.Web of Science, 3. Scopus, IF=0.1) 2024. № 67. С. 49-59. doi: 10.17223/19988605/67/6;
7. Abdushukurov A. A., Bozorov S. B., Mansurov D. R. *Estimation of Distribution Function Based on Presmoothed Relative-Risk Function* // *Applied Mathematics*. 2022. № 02 (13). С. 191-204 (35. CrossRef, IF=0.61).

$W_2^{(2,1)}(0,t)$ FAZOSIDA IKKI NUQTALI VAZNLI KVADRATUR FORMULALAR QURISH

Davronov Javlon Rustam o‘g‘li,
Tashkent International University dotsenti v.b., PhD
javlon davronov77@gmail.com
Elmurodova Sitora Saidmurodovna,
Buxoro davlat universiteti tayanch doktoranti
misselmurodova@gmail.com
Ko‘klamova Matlyuba Ulug‘bek qizi,
Buxoro davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada $W_2^{(2,1)}(0,t)$ Gilbert fazosida kvadratur formulalarni qurish va ularning xatolik funksionalini baholash masalalari o‘rganilgan. Xatolik funksionalining normasi analitik ko‘rinishda topilgan va optimal koeffitsiyentlarni topish uchun sistema tuzilgan. Tuzilgan sistemada $N=1$ bolgan hol uchun koeffitsiyentlarning aniq ko‘rinishi topilgan.

Kalit so‘zlar: Gilbert fazosi, kvadratur formula, xatolik funksionali, xatolik funksionalining normasi, optimal koeffitsiyentlar.

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ВЗВЕШЕННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В
ПРОСТРАНСТВЕ $W_2^{(2,1)}(0,t)$

Аннотация. В данной статье изучены вопросы построения квадратурных формул и оценки их функционала погрешности в гильбертовом пространстве $W_2^{(2,1)}(0,t)$. Норма функционала погрешности найдена в аналитическом виде, и составлена система для нахождения оптимальных коэффициентов. Для случая $N=1$ в составленной системе найден точный вид коэффициентов.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, квадратурная формула, функционал погрешности, норма функционала погрешности, оптимальные коэффициенты.

$W_2^{(2,1)}(0,t)$ CONSTRUCTION OF TWO-POINT WEIGHTED QUADRATURE FORMULAS IN
FAZO SPACE

Abstract. This paper studies the problems of constructing quadrature formulas and estimating their error functional in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,t)$. The norm of the error functional is found in an analytical form, and a system is constructed to find the optimal coefficients. The exact form of the coefficients is found for the case $N=1$ in the constructed system.

Keywords: Hilbert space, quadrature formula, error functional, norm of the error functional, optimal coefficients.

Kirish va asosiy tushunchalar. So‘nggi yillarda kasr tartibli differensial va integral operatorlar matematik modellashtirishning ko‘plab sohalarida — fizik jarayonlar nazariyasi, viskoelastiklik, diffuziya jarayonlari, biofizika, signalni qayta ishlash va moliyaviy matematikada keng qo‘llanilmoqda. Klassik butun tartibli operatorlar ko‘plab real jarayonlarning xotira effektini yetarlicha ifodalay olmagan sababli, kasr tartibli operatorlar asosidagi modellar alohida ahamiyat kasb etmoqda [6-10].

Kasr tartibli integrallar tarkibida ko‘pincha singulyar yadrolar qatnashadi. Bunday integrallarni aniq hisoblash ko‘p hollarda murakkab yoki imkonsiz bo‘lib, ularni taqribiy hisoblash masalasi dolzarb hisoblanadi. Ayniqsa, kuchsiz singulyar integrallarni Sobolev fazolarida optimal kvadratur formulalar yordamida hisoblash masalasi nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega.

Sobolev fazolarida optimal kvadratur formulalar qurish masalasi funksional analiz, operatorlar nazariyasi va sonli analiz kesishgan nuqtada joylashgan murakkab ilmiy yo‘nalishdir. Ikki nuqtali optimal formula qurish esa minimal hisoblash xarajati bilan maksimal aniqlikka erishish imkonini beradi.

Shu sababli, Sobolev fazosida kuchsiz singulyar [3] integrallarni taqribiy hisoblashning ikki nuqtali optimal formulalarini qurish va ularning xatolik funksionalini minimallashtirish masalasi dolzarb ilmiy muammo hisoblanadi.

Ushbu tadqiqot ishi funksional yondashuvga taalluqli bo'lganligi sababli, biz asosan ushbu sohadagi natijalar sharhini keltirib o'tamiz. Kvadratur va kubatur formulalarni qurishdagi funksional yondashuv integral ostidagi funksiyalarning ma'lum bir Banax yoki Gilbert fazosiga tegishli bo'lishini nazarda tutadi. Integral va integral ostidagi funksiya qiymatlarining taqribiy kombinatsiyasi o'rtasidagi farq chiziqli uzluksiz funksional sifatida qaralib, u kubatur yoki kvadratur formulaning xatolik funksionali deb ataladi. Formulaning xatoligi ushbu xatolik funksionalining normasi orqali baholanadi. Xatolik funksionalining normasini kvadratur va kubatur formulalarning parametrlari (tugunlari va koeffitsiyentlari) [4-5] bo'yicha minimallashtirish orqali sonli integrallash uchun optimal formulalar olinadi.

Biz quyidagi kvadratur formulani qurish bilan shug'ullanamiz

$$\int_0^t \frac{\varphi(x) dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}) \quad (1)$$

Bu yerda C_{β} koeffitsiyentlar, $x_{\beta} \left(x_{\beta} = h\beta, h = \frac{t}{N} \right)$ lar esa tugun nuqtalar ($0 < \alpha < 1$). Ushbu $\varphi(x)$ funksiyalar esa $W_2^{(2,1)}(0, t)$ fazoning elementi va fazo quyidagicha ta'riflanadi

$$W_2^{(2,1)}(0, t) = \left\{ \varphi: [0, t] \rightarrow R \mid \varphi, \varphi' - \text{abs. uzl.}, \varphi^{(2)} \in L_2(0, t) \right\}.$$

Ushbu fazodagi ixtiyoriy ikkita φ va ψ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi quyidagicha aniqlangan

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^t (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\psi''(x) + \psi'(x)) dx.$$

$W_2^{(2,1)}(0, t)$ fazosi Gilbert fazosi bo'lganligi uchun norma skalyar ko'paytma yordamida kiritiladi

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_0^t (\varphi''(x) + \varphi'(x))^2 dx}.$$

(1)- ko'rinishdagi kvadratur formulaning xatoligi quyidagicha

$$(\ell, \varphi) = \int_0^t \frac{\varphi(x) dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}) \quad (2)$$

(2)- ko'rinishdagi xatolikka mos xatolik funksionali esa ushbu ko'rinishda

$$\ell(x) = \frac{\varepsilon_{[0,t]}(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \delta(x - x_{\beta}). \quad (3)$$

Bu yerda $\varepsilon_{[0,t]}(x) - [0, t]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ - Dirakning delta funksiyasi.

Funksionalning normasi quyidagicha

$$\|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}} = \sup_{\varphi, \|\varphi\| \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}}}.$$

Xatolik funksionalining normasini topish. Koshi-Shvars tengsizligiga ko'ra xatolik xatolikning absolyut qiymati quyidagi ko'paytma yordamida yuqoridan baholanadi

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}} \cdot \|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}} \quad (4)$$

(4)- munosabatdan foydalanib xatolikning yuqori bahosi topish uchun ℓ funksionalning normasini ko'rinishini topishimiz kerak bundan esa quyidagi masalaga kelamiz.

1-Masala. Yuqoridagi (3)-ko'rinishdagi xatolik funksionalining normasini ko'rinishini topish.

Xatolik funksionalining normasini topish masalasi $W_2^{(m,m-1)}$ fazoda umumiy holda [1] va [2] ishlarida yechilgan.

Xususan biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$\|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 = \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_{\beta} C_{\gamma} G_2(h\beta - h\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \int_0^t \frac{G_2(x - h\beta) dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int_0^t \int_0^t \frac{G_2(x-y) dx dy}{(t-x)^{1-\alpha} (t-y)^{1-\alpha}} \quad (5)$$

Bu yerda $G_2(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right)$ ga teng. (5)-normaning ko‘rinishidan ma’lumki normaning kvadrati C_β ko‘effitsiyentlar va x_β tugun nuqtalarga bog‘liq tugun nuqtalarni fikslab olib, ushbu normaga eng kichik qiymat beruvchi C_β ko‘effitsiyentlarni topamiz. Ya’ni quyidagi masalaga kelamiz.

2-Masala. (5)-xatolik funksionalining normasiga eng kichik qiymat beruvchi C_β ko‘effitsiyentlarni topish.

Shuni ta’kidlash kerakki, $\ell(x)$ xatolik funksionali uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$(\ell, e^{-x}) = 0, \quad (6)$$

$$(\ell, 1) = 0. \quad (7)$$

(6) va (7) tenglamalar (1)-kvadratur formula $de^{-x} + P_0$ kabi har qanday chiziqli kombinatsiyasiga aniq. (5)-normaning ko‘rinishidan ma’lumki normaning kvadrati C_β ko‘effitsiyentlarga nisbatan ko‘p o‘zgaruvchili funksiya. (6) va (7) shartlarni inobatga olib Logranjning aniqmas ko‘effitsiyentlar metodiga asosan quyidagini yozib olamiz

$$\Lambda(C, d, P_0) = \|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 - 2d(\ell, e^{-x}) - 2P_0(\ell, 1)$$

Bu yerda (2), (6) va (7) tenglamalarni hisobga olgan holda

$$(\ell, e^{-x}) = \int_0^t \frac{e^{-x} dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta e^{-h\beta} = 0$$

$$(\ell, 1) = \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta = 0$$

U holda

$$\begin{aligned} \Lambda(C, d, P_0) &= \|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 - 2d(\ell, e^{-x}) - 2P_0(\ell, 1) = \\ &= \|\ell\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 - 2d \left(\int_0^t \frac{e^{-x} dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta e^{-h\beta} \right) - 2P_0 \left(\int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \right) \end{aligned} \quad (8)$$

(8) da C_β ($\beta = 0, 1, 2, \dots, N$), d va P_0 bo‘yicha xususiy hosila olib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\beta=0}^N G_2(h\beta - h\gamma) + de^{-h\beta} + P_0 &= \int_0^t \frac{G_2(x - h\beta) dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \\ \sum_{\beta=0}^N C_\beta e^{-h\beta} &= \int_0^t \frac{e^{-x} dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \\ \sum_{\beta=0}^N C_\beta &= \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \end{aligned} \right.$$

Biz quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$f_2(h\beta) = \int_0^t \frac{G_2(x - h\beta)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad (9)$$

$$g = \int_0^t \frac{e^{-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} dx, \quad (10)$$

$$g_0 = \int_0^t \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \quad (11)$$

Keyingi paragrafda biz ushbu sistemani yechish bilan shug‘ullanamiz

Asosiy natijalar

Teorema: Ushbu $W_2^{(2,1)}(0, t)$ fazoda (1) ko‘rinishdagi kvadratur formulaning $N=1$ bo‘lgan hol uchun koeffitsiyentlarning analitik ko‘rinishi quyidagicha

$$C_0 = \frac{g\alpha e^t - t^\alpha}{\alpha(e^t - 1)}$$

$$C_1 = \frac{e^t(t^\alpha - g\alpha)}{\alpha(e^t - 1)}$$

bo‘ladi.

Isbot: Birinchi navbatda biz (9), (10) va (11) larni hisoblaymiz. Ushbu integrallarni bajarish uchun bizga quyidagi Teylor qatori kerak bo‘ladi.

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$$

$$e^{t-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)^k}{k!}$$

Dastlab

$$g = \int_0^t \frac{e^{-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = e^{-t} \cdot \int_0^t \frac{e^{t-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} dx =$$

$$= e^{-t} \cdot \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)^k}{k!} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = e^{-t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \int_0^t (t-x)^{k+\alpha-1} dx = e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+\alpha}}{k!(k+\alpha)}$$

$$g_0 = \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} = \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{t^\alpha}{\alpha}$$

$$f_2(h\beta) = \int_0^t \frac{G_2(x-h\beta)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{4k!(k+\alpha)} \frac{e^{t-h\beta} - e^{h\beta-t}}{2} (2(t-h\beta)^{k+\alpha} - t^{k+\alpha}) -$$

$$- \frac{2(t-h\beta)^\alpha (h\alpha\beta + t) - t^{\alpha+1}}{2\alpha(\alpha+1)} + \frac{2h\beta(t-h\beta)^\alpha - h\beta t^\alpha}{2\alpha}, \quad \beta = \overline{0, N},$$

Endi sistemani $N=1$ da yechamiz:

$$\begin{cases} C_0 G_2(h\beta) + C_1 G_2(h\beta - h) + de^{-h\beta} + P_0 = f_2(h\beta), \quad \beta = 0, 1 \\ C_0 e^0 + C_1 e^{-h} = g, \\ C_0 + C_1 = g_0. \end{cases}$$

Xulosa. Yuqoridagi sistemadan ko‘rinib turibdiki sistemadan C_0 va C_1 koeffitsiyentlarni topish uchun ushbu ikkita tenglamadan foydalanish yetarlidir

$$\begin{cases} C_0 e^0 + C_1 e^{-h} = g, \\ C_0 + C_1 = g_0. \end{cases}$$

Ushbu sistemani yechib quyidagi yechimlarni olamiz:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{g\alpha e^h - t^\alpha}{\alpha(e^h - 1)}, \\ C_1 = \frac{e^h(t^\alpha - g\alpha)}{\alpha(e^h - 1)}. \end{cases}$$

Xususan $N=1$ bo‘lganda $h=t$ bo‘ladi bundan esa

$$C_0 = \frac{g\alpha e^t - t^\alpha}{\alpha(e^t - 1)}$$

$$C_1 = \frac{e^t(t^\alpha - g\alpha)}{\alpha(e^t - 1)}$$

teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R. Computation of coefficients of optimal quadrature formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ // *Uzbek Mathematical Journal*. 2004. № 3. C. 67–82.
2. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space // *Calcolo*. 2014. T. 51. C. 211–243.
3. Sobolev S. L., Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. 413 c.
4. Sard A. *Linear Approximation* // *Amer. Math. Soc.* 1963.
5. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // *Успехи матем. наук*. 1950. Т. 5, № 3. С. 165–177.
6. Shadimetov Kh. M. A method of construction of weight optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space // *Uzbek Mathematical Journal*. 2018. T. No. 3. C. 140–146.
7. Hayotov A. R., Babaev S. S. An Optimal Quadrature Formula with Derivative for Weakly Singular Integrals // *Math. Methods Appl. Sci.* 2025. T. 48, № 17. C. 15591–15601
8. Babaev S. S., Davronov J. R., Mamatova N. H. On an optimal interpolation formula in the space $W_{2,\sigma}^{(m,m-1)}(0,1)$ // *Bulletin of the Institute of Mathematics*. 2020. № 4. C. 1–12.
9. Hayotov A. R., Babaev S. S. The numerical solution of a Fredholm integral equations of the second kind by the weighted optimal quadrature formula // *Results in Applied Mathematics*. 2024. T. 24. C. 100508.
10. Babaev S. S. The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space // *Problem of Computational and Applied Mathematics, Uzbekistan*. 2024. T. 60, № 4/2. C. 99–107.

BIRINCHI TARTIBLI DISKRET HARDY TENGSIZLIGI

Kuliyev Komil Danaboyevich,

Sharof Rashidov nomidagi

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O‘zbekiston

Tilavov Rustam Aktamovich,

Samarqand davlat pedagogika instituti,

Samarqand, O‘zbekiston

Ergashev Sharofiddin Qo‘chqor o‘g‘li,

Samarqand davlat pedagogika instituti, Samarqand, O‘zbekiston

Toshkent Kimyo xalqaro universiteti, Toshkent, O‘zbekiston

Annotatsiya. Ushbu ishda birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi Pol’ja shartlarini qanoatlantiruvchi chegaraviy shartlar bilan o‘rganilgan. Chegaraviy shartlarning tanlanishiga qarab turli yangi tengsizliklar paydo qilingan va ularning o‘rinli bo‘lishini ta’minlovchi ekvivalent shartlar olingan.

Kalit so‘zlar: diskret tengsizlik, yuqori tartibli Hardy tengsizligi, vazn, ketma-ketlik, chegaraviy shart, Pol’ja sharti, yadro, ekvivalent shartlar.

ДИСКРЕТНОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В данной работе исследуется дискретное неравенство Харди первого порядка с граничными условиями, удовлетворяющими условиям Поля. В зависимости от выбора граничных условий получены различные новые неравенства, и установлены эквивалентные условия, обеспечивающие их справедливость.

Ключевые слова: дискретное неравенство, неравенство Харди, вес, последовательность, граничное условие, условие Поля, ядро, эквивалентные условия.

FIRST-ORDER DISCRETE HARDY INEQUALITY

Abstract. This paper investigates the first-order discrete Hardy inequality under boundary conditions satisfying the Pólya criteria. Depending on the choice of boundary conditions, various new inequalities are derived, and equivalent conditions ensuring their validity are established.

Keywords: discrete inequality, Hardy inequality, weight sequence, boundary conditions, Pólya condition, kernel, equivalent conditions.

Kirish. 1925-yil Buyuk Britaniyalik olim G.Hardy quyidagi tengsizlikni isbotladi: ixtiyoriy $p > 1$ va har qanday $\{a_n\}_{n \geq 1}$ nomanfiy haqiqiy ketma – ketlik uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \quad (1.1)$$

tengsizlik barcha $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no‘manfiy ketma-ketliklar uchun o‘rinli bo‘ladi. Bunda $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ son tengsizlikning eng yaxshi konstantasidir, ya’ni tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan konstantalar ichida eng kichigidir. O‘tgan asrda (1.1) tengsizlik turli ko‘rinishlarda umulashtirildi, ularni quyidagicha umumiy ko‘rinishda yozish ham mumkin:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^q u_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p v_n \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.2)$$

bu yerda $0 < q < \infty$, $1 < p < \infty$ va $\{u_n\}, \{v_n\}$ lar vazn ketma-ketliklari, ya’ni nomanfiy ketma-ketliklar. (1.2) tengsizlik umumlashgan Hardy tengsizligi deyiladi. Bu tengsizlikning integral ko‘rinishi quyidagichadir:

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.3)$$

bunda $u(x)$ va $v(x)$ lar vazn funksiyalari. (1.2) va (1.3) tengsizliklar yaxshi o'rganilgan, ma'lumot uchun [1], [2] ga qarang. Agar (1.3) da

$$y(x) = \int_a^x f(t) dt$$

deb olsak u holda tengsizlikni ushbu ko'rinishda qayta yozish mumkin:

$$\left(\int_a^b |y(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |y'(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

(1.4) tengsizlik (1.3) ning differensial ko'rinishi bo'lib, bunda $y(a) = 0$ shartni qanoatlantiradi. Agar (1.4) ga e'tibor qaratilsa u funksiyani hosilasi orqali integral normada baholashni ifodalaydi. Xuddi shunday funksiyani uning yuqori tartibli hosilalari orqali baholashlar ham qaralgan, ya'ni:

$$\left(\int_a^b |y(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |y^{(k)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5)$$

Bunday tengsizliklar ham yetarlicha o'rganilgan bo'lib, unga tengsizliklar nazariyasida *yuqori tartibli Hardy tengsizliklari* deb yuritiladi, ma'lumot uchun ([1], [2], [3]) adabiyotlarga qarang.

(1.5) da chegaraviy shartlar turlicha olinishiga qarab (1.3) tengsizlikka nisbatan yangi ko'rinishdagi tengsizliklar paydo bo'ladi, ularning umumiy ko'rinishi quyidagichadir

$$\left(\int_a^b \left| \int_a^x K(x, t) f(t) dt \right|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |f(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

bunda $K(x, t)$ – Green funksiyasi $K(x, t)$ –tengsizlikning yadrosidir.

Bunda asosiy masalalardan biri chegaraviy shartlarni qanday tanlanishiga bog'liq. Uzluksiz holda Pol'ja shartlari nomi bilan mashhur shartlar keltirilgan bo'lib, ular yuqori tartibli Hardy tengsizligi ma'noga ega bo'lishi uchun chegaraviy shartlar tanlanishini ko'rsatadi. Ma'lumot uchun [2], [7] ga qarang.

Ushbu ishda, shu nuqtayi nazardan diskret Hardy tengsizligi (1.2) ning birinchi va ikkinchi tartibli differensial ko'rinishlari o'rganilgan. Asosiy masala, differensial ko'rinishda berilgan Hardy tengsizligining turli chegaraviy shartlarda paydo qilingan Hardy tipidagi tengsizliklarni tadqiq qilishdan iborat.

Yordamchi natijalar. Ushbu paragrafda biz quyidagi umumiy ko'rinishdagi k -tartibli vaznli diskret Hardy tengsizligini qaraymiz:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |s(n)|^q u(n) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\nabla^k s(n)|^p v(n) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.1)$$

bunda $1 < p, q < \infty$, $\{s(n)\}$ — haqiqiy sonlar ketma-ketligi, $u(n)$ va $v(n)$ esa mos ravishda musbat vaznli ketma-ketliklar. (2.1) tengsizlikning o'rinli bo'lishi $\{s(n)\}$ ketma-ketlikka qo'yilgan chegaraviy shartlarga bevosita bog'liq. Agarda $\{s(n)\}$ ketma-ketligi darajasi k dan kichik bo'lgan ixtiyoriy ko'phad ko'rinishidagi ketma-ketlik bo'lsa, u holda (2.1) tengsizlikning o'ng tomoni nolga aylanib, o'z mazmunini yo'qotadi.

Shu sababli biz $\{s(n)\}$ ketma-ketligi qo'shimcha chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi talab etiladi. Ushbu ishda:

$$\begin{cases} \nabla^i s(1) = 0, & \text{agar } i \in M_0 \\ \nabla^j s(\infty) = 0, & \text{agar } j \in M_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

bu yerda $M_0, M_1 \subseteq \{0, 1, \dots, k-1\}$ — chegaraviy shartlar indekslar to'plami. Ushbu shartlar ketma-ketlikning boshlang'ich qiymatlariga va uning cheksizlikdagi holatiga bog'liq ekanligini bildiradi. Endi chegaraviy shartlarning to'g'ri tanlanganligini kafolatlash uchun Pol'ja shartidan foydalanilamiz.

Ta'rif (Pol'ja sharti). (M_0, M_1) juftligiga mos keluvchi $E = (e_{\alpha i})$ insidentsiya matritsasini (2×2) o'lchamli quyidagicha kiritamiz:

$$e_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \text{agar } i \in M_{\alpha} \\ 0, & \text{agar } i \notin M_{\alpha} \end{cases}, \quad \alpha \in \{0,1\}.$$

Agar quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa (M_0, M_1) juftligi Pol'ja shartini qanoatlantiradi deyiladi:

$$\sum_{i=0}^r (e_{0i} + e_{1i}) \geq r + 1, \quad r = 0,1.$$

Quyida Drábek va Kufnerning [8] teoremasini diskret holatdagi analogini keltiramiz:

Teorema (Drábek-Kufner). Faraz qilaylik, $1 < p, q < \infty$ va $k \in \mathbb{N}$ bo'lsin. U holda (2.1) tengsizlik (2.2) shartlar bilan ma'noga ega bo'lishi uchun (M_0, M_1) juftlik Pol'ja shartini qanoatlantirishi yetarli va zarurdir.

Endi (2.1) tengsizlikning birinchi tartibli ($k = 1$) holati uchun bo'lishi mumkin bo'lgan barcha chegaraviy shartlar juftliklari

$$\begin{cases} s(1) = 0 \\ s(\infty) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ni tahlil qilamiz. Bu holatda chegaraviy shartlar indekslar to'plami $M_0, M_1 \subseteq \{0\}$ ko'rinishida bo'ladi. Pol'ja shartiga ko'ra, $k = 1$ bo'lganda jami shartlar soni kamida bittaga teng bo'lishi, ya'ni

$$\sum_{i=0}^0 (e_{0i} + e_{1i}) \geq 1$$

munosabati bajarilishi talab etiladi. Quyida ushbu shartni qanoatlantiruvchi uchta asosiy holatni ko'rib chiqamiz:

1. $s(1) = 0$ holati.

Bu holda chegaraviy shartlar to'plami $M_0 = \{0\}$ va $M_1 = \emptyset$ ekanligini anglatadi. Unga mos keluvchi insidentsiya matritsasi:

$$E = \begin{pmatrix} e_{00} \\ e_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pol'ja shartini tekshiramiz:

$$\sum_{i=0}^0 (e_{0i} + e_{1i}) = e_{00} + e_{10} = 1 + 0 = 1 \geq 1. \quad (2.4)$$

Shart bajarildi, demak ushbu chegaraviy shart birinchi tartibli Hardy tengsizligi uchun o'rinli bo'ladi.

2. $s(\infty) = 0$ holati.

Bu holda chegaraviy shartlar to'plami $M_0 = \{0\}$ va $M_1 = \{0\}$ va ko'rinishida bo'ladi. Insidentsiya matritsasi ushbu:

$$E = \begin{pmatrix} e_{00} \\ e_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Pol'ja shartini tekshiramiz:

$$\sum_{j=0}^0 (e_{0i} + e_{1i}) = 0 + 1 = 1 \geq 1. \quad (2.5)$$

Shart bajarildi, ya'ni ushbu holat ham (2.1) tengsizlik uchun ma'noga ega.

3. $s(1) = s(\infty) = 0$ holati.

Ushbu holda shartlar ikkala chegarada ham berilgan bo'lib, $M_0 = \{0\}$ va $M_1 = \{0\}$ bo'ladi. Tegishli insidentsiya matritsasi:

$$E = \begin{pmatrix} e_{00} \\ e_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pol'ja shartiga ko'ra:

$$\sum_{j=0}^0 (e_{0i} + e_{1i}) = 1 + 1 = 2 \geq 1. \quad (2.6)$$

Ko'rinib turibdiki, shart bajarilmoqda.

Shunday qilib, birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi uchun yuqoridagi barcha chegaraviy shartlar Pol'ja mezonini to'liq qanoatlantiradi. Maqolaning keyingi paragrafida biz ushbu shartlarning har biri uchun mos keluvchi vaznli tengsizliklarning aniq ko'rinishlarini va ularning o'rinli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartlarni bayon qilamiz.

Birinchi tartibli diskret hardy tengsizligi. Ushbu paragrafda biz (2.1) tengsizlikning $k = 1$ bo'lgan holatini qaraylik:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} s(n)^q u(n) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\nabla s(n)|^p v(n) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.1)$$

bunda $u(n)$, $v(n)$ lar berilgan vazn ketma-ketliklardir va $\nabla s(n) = s(n+1) - s(n)$. Dastlab, tengsizlik ma'noga ega bo'ladigan ketma-ketliklar fazosini anqilab olishimiz zarur, sababi $s(n) = \text{const} \neq 0$ ketma - ketliklar uchun (3.1) o'rinli emas, chunki uning o'ng tomoni nolga teng, lekin chap tomoni noldan farqli.

Quyida turli chegaraviy holatlarga mos (3.1) tengsizlikning ko'rinishlarini taqdim etamiz:

a) Agar biz $s(n)$ ketma-ketligi uchun faqat chap chegarada qabul qilsak:

$$s(1) = 0$$

shartiga ega bo'lamiz. (2.4) ga asosan, $s(1) = 0$ sharti birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi uchun Pol'ja mezonini to'liq qanoatlantiradi. Ushbu shart $\{s(n)\}$ ketma-ketligi orasida noldan farqli o'zgarmas funksiyalar ($s(n) \equiv \text{const} \neq 0$) mavjud emasligini kafolatlaydi, bu esa (3.1) tengsizlikning o'rinli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

Agar

$$\nabla s(n) = s(n+1) - s(n) = a(n)$$

belgilash olsak, u holda

$$\begin{cases} a(1) = s(2) - s(1) \\ a(2) = s(3) - s(2) \\ a(3) = s(4) - s(3) \\ \dots\dots\dots \\ a(n-2) = s(n-1) - s(n-2) \\ a(n-1) = s(n) - s(n-1) \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz. Tengliklarni ikki tomonlarini hadma-had qo'shib va $s(1) = 0$ ni e'tiborga olsak, u holda

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(k) = s(n)$$

ni hosil qilamiz. Demak, (3.1) tengsizlik $s(1) = 0$ shart bilan ushbu ko'rinishdagi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n-1} a(k) \right|^q u(n) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^p v(n) \right)^{\frac{1}{p}},$$

diskret Hardy tengsizligiga ekvivalent bo'lar ekan.

Shunday qilib, quyidagi teoremani isbotladik.

1-teorema. Birinchi tartibli (3.1) tengsizlik $s(1) = 0$ chegaraviy shart bilan o'rinli bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi yetarli va zarurdir:

$$A = \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=1}^n v(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u(k) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

b) (2.3) shartga ko'ra ketma-ketlikning kamida bitta chegarada nolga teng bo'lishini talab etadi. Agar biz $s(n)$ ketma-ketligi uchun faqat o'ng chegarada qabul qilsak:

$$s(\infty) = 0$$

shartiga ega bo'lamiz. (2.5) ga asosan, $s(\infty) = 0$ sharti birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi uchun Pol'ja mezonini to'liq qanoatlantiradi. Ushbu shart $\{s(n)\}$ ketma-ketligi orasida noldan farqli

o'zgaras funksiyalar ($s(n) \equiv \text{const} \neq 0$) mavjud emasligini kafolatlaydi, bu esa (3.1) tengsizlikning o'rinli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

Agar

$$\nabla s(n) = s(n+1) - s(n) = a(n)$$

belgilash olsak, u holda

$$\begin{cases} a(n) = s(n+1) - s(n) \\ a(n+1) = s(n+2) - s(n+1) \\ a(n+2) = s(n+3) - s(n+2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a(N-1) = s(N) - s(N-1) \\ a(N) = s(N+1) - s(N) \end{cases}$$

ga ega bo'lamiz. Tengliklarni ikki tomonlarini hadma-had qo'shib olsak, natijada quyidagi yig'indiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=n}^N a(k) = -s(n) + s(N+1),$$

Agar $N \rightarrow \infty$ da $s(N+1) \rightarrow 0$, ya'ni $s(\infty) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda

$$s(n) = - \sum_{k=n}^{\infty} a(k)$$

hosil bo'ladi. Demak, (3.1) tengsizlik $s(\infty) = 0$ shart bilan ushbu ko'rinishdagi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a(k) \right|^q u(n) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^p v(n) \right)^{\frac{1}{p}}$$

diskret Hardy tengsizligiga ekvivalent bo'ladi. Bu tengsizlik ham yaxshi o'rganilgan.

Shunday qilib, quyidagi teoremani isbotladik.

2-teorema. *Birinchi tartibli (3.1) tengsizlik $s(\infty) = 0$ chegaraviy shart bilan o'rinli bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi yetarli va zarurdir:*

$$A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n v(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

c) Faraz qilaylik

$$s(1) = s(\infty) = 0$$

bo'lsin. (2.6) ga asosan, $s(1) = s(\infty) = 0$ sharti birinchi tartibli diskret Hardy tengsizligi uchun Pol'ja mezonini to'liq qanoatlantiradi. Ushbu shart $\{s(n)\}$ ketma-ketligi orasida noldan farqli o'zgaras funksiyalar ($s(n) \equiv \text{const} \neq 0$) mavjud emasligini kafolatlaydi, bu esa (3.1) tengsizlikning o'rinli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

Ma'lumki, birinchi tartibli $\nabla s(n) = a(n)$ ayirmali tenglamasi uchun bitta chegaraviy shart $\{s(n)\}$ ketma-ketligini to'liq aniqlash uchun yetarlidir. Agarda biz faqat $s(1) = 0$ shartidan foydalansak, ketma-ketlikning umumiy hadi quyidagicha topiladi:

$$s(n) - s(1) = \sum_{k=1}^{n-1} \nabla s(k) \Rightarrow s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a(k).$$

Biroq, $s(1) = s(\infty) = 0$ ga muvofiq qo'yilgan ikkinchi shart — $s(\infty) = 0$ tizimni **haddan tashqari aniqlangan (over-determined)** holatga keltiradi. Ketma-ketlik cheksizlikda nolga intilishi uchun $\{a(n)\}$ ketma-ketligi ustida quyidagi muvofiqlik munosabati bajarilishi zarur:

$$s(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} a(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a(k) = 0.$$

Ushbu munosabat bajarilgan taqdirdagina $\{s(n)\}$ ketma-ketligini **qoldiq yig'indi** orqali ham ifodalash imkoniyati tug'iladi:

$$s(n) = - \sum_{k=n}^{\infty} a(k).$$

Bu bilan biz ushbu teoremani isbotladik.

3-teorema. Birinchi tartibli (3.1) tengsizlik $s(1) = s(\infty) = 0$ chegaraviy shartlar bilan o‘rinli bo‘ilshi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli va zarurdir:

$$A_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n v(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

va

$$A_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n u(k) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

ADABIYOTLAR:

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, 324 (1952).
2. Drábek P. and Kufner A.: *The Hardy inequality and Birkhoff interpolation*, Bayreuth Math. Schr. 47 (1994), 99-104. MR 95h:26024.
3. Kufner A: *Higher order Hardy inequalities*. Collect Math. 44, 147–154 (1993).
4. Kufner A, Persson L-E: *Weighted Inequalities of Hardy Type*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NY (2003).
5. Kufner A.: *A remark of k-th order Hardy inequalities*. Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, 2005, Volume 248, Pages 144–152.
6. Kufner A., Kuliev K. & Persson LE. *Some higher order Hardy inequalities*. J Inequal Appl 2012, 69 (2012). <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-69>
7. Kuliev K., Turakulov T. *New weight characterizations for the discrete hardy inequality with kernel*. JMI Volume 19, Number 4 (2025), 1109–1134, doi:10.7153/jmi-2025-19-71.
8. Kuliev K.D., Kulieva G.T., Turakulov T.D. *On estimates for norms of matrix operators: the case $q < p$* . Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, № 1(121), 2026, pp. 156–168. <https://doi.org/10.31489/2026M1/156-168>

MATEMATIK OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA KESMADA UZLUKSIZ
FUNKSIYALAR XOSSALARIDAN FOYDALANISH

Husenova Jasmina To‘lqinovna,

Buxoro davlat universiteti

Ahrorova Hilola Hakimjon qizi,

Buxoro davlat universiteti

Annotatsiya. Maqolada dastlab matematik analiz kursidan yaxshi ma’lum bo‘lgan Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremlari hamda Bolsano-Koshining birinchi va ikkinchi teoremlari o‘quvchiga qulay va sodda tarzda bayon qilingan. Mazkur teoremlar asosida xalqaro matematika olimpiadalarida uchragan 6 turdagi masalaning yechimlari tahlil etilgan. Shuningdek, o‘quvchilarning mavzu bo‘yicha bilim va ko‘nikmalarini mustahkamlash hamda mustaqil ishlash malakasini rivojlantirish maqsadida 5 turdagi mustaqil yechish uchun masalalar tavsiya etilgan.

Kalit so‘zlar: uzluksiz funksiya, Veyershtrass teoremlari, Bolsano-Koshi teoremlari, xalqaro matematika olimpiadasi.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ ПРИ
РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Аннотация. В статье в простой и доступной для читателя форме изложены первая и вторая теоремы Вейерштрасса, а также первая и вторая теоремы Больцано-Коши, хорошо известные из курса математического анализа. На основе данных теорем проанализированы решения шести типов задач, встречавшихся на международных математических олимпиадах. Кроме того, с целью закрепления знаний и навыков учащихся по данной теме, а также развития умений самостоятельного решения задач предложены пять типов задач для самостоятельной работы.

Ключевые слова: непрерывная функция, теоремы Вейерштрасса, теоремы Больцано-Коши, Международная математическая олимпиада.

USING THE PROPERTIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON AN INTERVAL IN
SOLVING MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEMS

Abstract. The article first presents, in a simple and reader-friendly manner, the first and second theorems of Weierstrass as well as the first and second theorems of Bolzano-Cauchy, which are well known from the course of mathematical analysis. Based on these theorems, solutions to six types of problems taken from international mathematics olympiads are analyzed. In addition, five types of problems for independent study are proposed in order to strengthen students' knowledge and skills on the topic and to develop their independent problem-solving abilities.

Keywords: continuous function, Weierstrass theorems, Bolzano-Cauchy theorems, International Mathematics Olympiad.

Kirish. Matematik analiz kursi oliy matematikaning fundamental bo‘limlaridan biri bo‘lib, unda uzluksiz funksiyalar nazariyasi alohida muhim o‘rin egallaydi. Xususan, Veyershtrass hamda Bolsano-Koshi teoremlari nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy masalalarni yechishda ham keng qo‘llaniladigan asosiy natijalardan hisoblanadi. Ushbu teoremlar funksiyalarning kesmadagi xossalarini chuqur o‘rganish, ekstremal qiymatlarni aniqlash, tenglamalarning ildizlari mavjudligini asoslash hamda turli nostandart masalalarni tahlil qilish imkonini beradi. Shu sababli uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalarini puxta o‘zlashtirish matematik tafakkurni rivojlantirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Hozirgi kunda xalqaro matematika olimpiadalarida matematik analiz elementlariga asoslangan masalalarning ulushi ortib bormoqda. Bunday masalalar o‘quvchilardan nafaqat nazariy bilim, balki mantiqiy fikrlash, tahlil qilish va nostandart yondashuv ko‘nikmalarini ham talab qiladi. Amaliyot shuni ko‘rsatadiki, ko‘plab olimpiada masalalarini murakkab hisob-kitoblarsiz, aynan uzluksiz funksiyalarning asosiy teoremlari yordamida ixcham va elegant usulda yechish mumkin. Bu esa mazkur mavzuning dolzarbligini yanada oshiradi.

Mazkur maqolada matematik analiz kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan Veyershrassning birinchi va ikkinchi teoremlari hamda Bolsano-Koshining birinchi va ikkinchi teoremlari sodda va tushunarli tarzda bayon qilingan. Ularga izohlar berilgan hamda geometrik nuqtayi nazardan nimani anglatishi ham qisqacha aytib o'tilgan. Teoremlar mazmunining o'quvchilar uchun qulay shaklda yoritilishi ularning nazariy bilimlarini mustahkamlash bilan birga, amaliy masalalarni yechishda ushbu natijalardan samarali foydalanish imkonini beradi.

Maqolada xalqaro matematika olimpiadalarida uchragan olti turdagi masalaning yechimlari batafsil tahlil qilingan. Har bir masalada uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalariidan foydalanish usullari ko'rsatilib, masalalarni qisqa, mantiqiy va samarali yechish yo'llari yoritilgan. Ushbu usullar o'quvchilarda matematik mulohaza yuritish, isbotlash va umumlashtirish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Ayniqsa, murakkab ko'rinishga ega bo'lgan ayrim olimpiada masalalarining oddiy nazariy teoremlar yordamida yechilishi o'quvchilarning fanga bo'lgan qiziqishini oshiradi hamda matematik analizning amaliy ahamiyatini yaqqol namoyon etadi.

Shuningdek, maqolada mavzu bo'yicha bilim va ko'nikmalarni mustahkamlash maqsadida mustaqil yechish uchun besh turdagi masalalar tavsiya etilgan. Bu masalalar o'quvchilarning mustaqil ishlash malakasini rivojlantirish, nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq qilish hamda olimpiada masalalarini yechish tajribasini boyitishga xizmat qiladi. Shu jihatdan maqola matematik analiz fanini o'qitishda, iqtidorli talabalarni olimpiadalarga tayyorlashda hamda metodik qo'llanma sifatida foydalanishda muhim ahamiyatga ega.

2. Kesmada uzluksiz funksiyalar haqidagi to'rtta asosiy teoremlar.

Ushbu bo'limda kesmada uzluksiz funksiyalar nazariyasiga oid to'rtta asosiy teorema [1] qisqa va tushunarli shaklda bayon etiladi. Jumladan, Veyershrass hamda Bolsano-Koshi teoremlarining olimpiada masalalarini yechishdagi eng muhim jihatlariga alohida e'tibor qaratiladi. Bo'limning asosiy maqsadi chuqur va batafsil isbotlarni keltirish emas, balki amaliy masalalarda tez va samarali qo'llaniladigan natijalarni yoritishdan iborat. Shu sababli teoremlar mazmuni olimpiada darajasidagi masalalarga yo'naltirilgan holda izohlanadi. Bu yondashuv o'quvchilarga nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq etishni osonlashtiradi.

Aytmaylik $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lsin.

Teorema (Veyershrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz, ya'ni $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo'ladi.

Mazkur teorema uzluksiz funksiyaning yopiq va chegaralangan kesmada "cheksiz o'sib ketmasligi"ni kafolatlaydi. Boshqacha aytganda, agar funksiya kesmada uzluksiz bo'lsa, uning qiymatlari ma'lum bir oraliq ichida qoladi. Bu xossa olimpiada masalalarida funksiyaning maksimal yoki minimal qiymatini baholashda, tengsizliklarni isbotlashda hamda ekstremal masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega.

Bizga yaxshi ma'lumki, geometrik nuqtayi nazardan, uzluksiz funksiyaning grafigi $[a, b]$ kesmada uzilishsiz chiziladi va u vertikal yo'nalishda cheksizlikka ketmaydi. Ya'ni, grafik butunlay ma'lum bir gorizontal tasma ichida joylashadi. Bu esa quyidagini anglatadi: funksiyaning grafigi "sakrashlar" hosil qilmaydi; grafik yuqoridan ham, pastdan ham ma'lum to'g'ri chiziqlar bilan chegaralanadi; kesmada funksiyaning barcha qiymatlari chekli bo'ladi.

Teorema (Veyershrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, bu funksiya $[a, b]$ segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni

$$\exists c_1 \in [a, b], \forall x \in [a, b]: f(x) \leq f(c_1)$$

$$\exists c_2 \in [a, b], \forall x \in [a, b]: f(x) \geq f(c_2)$$

bo'ladi.

Mazkur teorema uzluksiz funksiyaning yopiq kesmada nafaqat chegaralanganligini, balki uning eng katta va eng kichik qiymatlari haqiqatan ham mavjud bo'lishini kafolatlaydi. Boshqacha aytganda, funksiya maksimum yoki minimum qiymatlarga "yaqinlashib qolmaydi", balki kesmaning biror nuqtasida aynan shu qiymatlarni qabul qiladi. Bu teorema matematik olimpiada masalalarida ekstremal qiymatlarni topishda, tengsizliklarni isbotlashda, funksiyaning eng qulay yoki eng noqulay holatini aniqlashda, parametrli masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.

Ta'kidlash joizki, geometrik jihatdan qaralganda, uzluksiz funksiyaning grafigi $[a, b]$ kesmada eng yuqori va eng past nuqtalarga ega bo'ladi. Ya'ni grafikning eng tepada joylashgan nuqtasi - maksimum qiymatga, eng pastda joylashgan nuqtasi - minimum qiymatga mos keladi. Bu nuqtalar kesmaning ichki qismida ham, chekka nuqtalarida ham joylashishi mumkin.

Teorema (Bolsano-Koshining 1-teoremasi). Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$;

2) segmentning chetki nuqtalari a va b larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya'ni

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo'lsin. U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki

$$f(x_0) = 0$$

bo'ladi.

Bayon qilingan teorema uzluksiz funksiyaning oraliq qiymatlar xossasini ifodalaydi. Ya'ni, uzluksiz funksiya bir qiymatdan ikkinchi qiymatga o'tishda ular orasidagi barcha qiymatlarni ham qabul qiladi. Funksiya qiymatlarda "sakrash" qilmaydi. Bu teorema olimpiada masalalarida tenglamaning yechimi mavjudligini asoslashda, funksiyaning ma'lum qiymatni qabul qilishini ko'rsatishda, kesishish nuqtalarini topishda, parametrlil masalalarni tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega.

Geometrik jihatdan qaralganda, uzluksiz funksiyaning grafigi $(a, f(a))$ nuqtadan $(b, f(b))$ nuqtaga uzilishsiz o'tadi. Shuning uchun grafik $y = C$ gorizontall to'g'ri chiziqni kamida bir marta kesib o'tadi, agar C soni $f(a)$ va $f(b)$ orasida joylashgan bo'lsa. Boshqacha aytganda, uzluksiz grafik yuqoridan pastga yoki pastdan yuqoriga o'tayotganda oradagi hech bir qiymatni "tashlab ketmaydi".

Teorema (Bolsano-Koshining 2-teoremasi). Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo'lsa, u holda chegaralari $f(a)$ va $f(b)$ bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy ℓ soni olinganda $[a, b]$ da shunday x_0 nuqta topiladiki,

$$f(x_0) = \ell$$

bo'ladi.

Mazkur teorema uzluksiz funksiyaning ishorasi o'zgaradigan kesmada kamida bitta ildizga ega bo'lishini kafolatlaydi. Ya'ni agar funksiya kesmaning bir uchida musbat, ikkinchi uchida manfiy qiymat qabul qilsa, u albatta nol qiymatdan o'tadi. Bu natija olimpiada masalalarida tenglamalarning yechimi mavjudligini isbotlashda, ildizlar sonini aniqlashda, parametrlil tenglamalarda yechim borligini ko'rsatishda, grafik kesishish nuqtalarini tahlil qilishda juda muhim rol o'ynaydi.

Geometrik jihatdan bu teorema shuni anglatadiki, uzluksiz funksiya grafigi $[a, b]$ kesmada x -o'qni (ya'ni $y = 0$ chizig'ini) kamida bir marta kesib o'tadi, agar funksiya qiymatlari kesmaning uchlarida turli ishorali bo'lsa. Boshqacha aytganda grafik bir tomondan x -o'qdan yuqorida, ikkinchi tomondan esa pastda joylashgan bo'lsa, uzluksizlik sababli u x -o'qni kesib o'tmasdan "sakrab" o'ta olmaydi.

3. Uzluksiz funksiyalar xossalriga asoslangan olimpiada masalalarini yechish usullari.

Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari matematik olimpiada masalalarini yechishda kuchli va samarali vosita hisoblanadi. Ushbu bo'limda Veyershtass hamda Bolsano-Koshi teoremlarining amaliy qo'llanilishi orqali turli tipdagi olimpiada masalalarini yechish usullari ko'rib chiqiladi. Har bir usul masalaning mazmuniga mos ravishda tanlanib, yechimni qisqa va mantiqiy asoslash imkonini beradi. Shuningdek, uzluksizlik xossalariidan foydalanish murakkab ko'rinishdagi masalalarni sodda va tushunarli yondashuv bilan hal qilishga xizmat qiladi. Bu esa o'quvchilarda analitik fikrlash va isbotlash madaniyatini rivojlantiradi.

1-masala (IMC 2011 1-kun 1-masala, [2])

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar $y > x$ bo'lgan shunday $y \in \mathbb{R}$ nuqta mavjud bo'lib, $f(y) > f(x)$ bo'lsa, x nuqta soya nuqta deyiladi. $a < b$ haqiqiy sonlar uchun quyidagilar o'rinli deb faraz qilinsin:

- (a, b) ochiq intervalning barcha nuqtalari soya nuqtalardir
- a va b soya nuqtalar emas.

U holda quyidagilarni isbotlang:

a) Barcha $a < x < b$ uchun $f(x) \leq f(b)$

b) $f(a) = f(b)$.

Yechim. a) Teskarisidan faraz qilib isbotlaymiz.

Faraz qilaylik shunday $c \in (a, b)$ nuqta mavjudki $f(c) > f(b)$. $[c, b]$ kesmani qaraylik. f funksiya $[c, b]$ da uzluksiz. Veyershtass teoremasiga ko'ra f funksiya $[c, b]$ kesmada maksimal m qiymatga ega va bu qiymatni biror $d \in [c, b]$ nuqtada qabul qiladi:

$$f(d) = \max_{x \in [c, b]} f(x) \geq f(c) > f(b) \Rightarrow f(d) > f(b), d \neq b$$

demak $d \in [c, b) \subset (a, b) \Rightarrow d \in (a, b)$.

d nuqta (a, b) da yotgani uchun u soya nuqta. Soya nuqtaga ko'ra $y > d$ bo'lgan $y \in \mathbb{R}$ uchun $f(y) > f(d)$ bo'ladi. Tengsizliklarni birlashtirish orqali $f(y) > f(d) > f(b)$ hosil bo'ladi.

Endi y ning qayerda joylashganligiga qarab 2 holat ko'riladi.

1-holat. $y > b$. Shartga ko'ra $f(y) > f(b)$ -bu esa b ning soya nuqta ekanligini bildiradi. Lekin masala shartida b soya nuqta emas. Ziddiyat.

2-holat. $y \leq b$.

$y > d$ va $y \leq b \Rightarrow y \in (d, b] \subset [c, b]$.

$d \in [c, b]$ kesmadagi maksimum nuqta, ya'ni

$$f(d) = \max_{x \in [c, b]} f(x)$$

lekin $y \in [c, b]$ bo'lsa

$$f(y) \leq \max_{x \in [c, b]} f(x) = f(d) < f(y) \Rightarrow f(y) < f(y). \text{Ziddiyat.}$$

Ikkala hol ham ziddiyatga olib keldi. Demak boshlang'ich farazimiz noto'g'ri, ya'ni $f(c) > f(b)$ bo'ladigan $c \in (a, b)$ nuqta mavjud emas. Barcha $x \in (a, b)$ uchun $f(x) \leq f(b)$ bo'ladi.

b) 1) shartga ko'ra a nuqta soya nuqta emas va $a < b$, demak $b > a, f(b) \leq f(a)$ bo'ladi.

2) (a) qismdan $x > a, x \in (a, b)$ uchun $f(x) \leq f(b)$ ekanligi ma'lum.

$x \rightarrow a +$ yaqinlashsa, f uzluksizligidan

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

bo'ladi. $f(x) \leq f(b)$,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a+} f(b) \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

hosil bo'ladi. $f(a) \geq f(b)$ va $f(a) \leq f(b) \Rightarrow f(a) = f(b)$.

2-masala (IMC 2000 2-kun 2-masala, [2])

f funksiya $[0, 1]$ segmentda uzluksiz va shu segmentning hech qayerida monoton bo'lmasin. f funksiya lokal minimumga erishadigan nuqtalar to'plami $[0, 1]$ da zich ekanligini isbotlang.

(Funksiya hech qayerda monoton deyiladi, agar birorta ham segmentda funksiya monoton bo'lmasa. To'plam zich deyiladi, agar har bir bo'sh bo'lmagan ochiq interval to'plamning hamida bitta elementini o'z ichiga olsa.)

Yechim. $(x - a, x + a) \subset [0, 1]$ ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq interval bo'lsin. f funksiya $[x - a, x]$ va $[x, x + a]$ kesmalarda monoton emas, demak shunday haqiqiy sonlar mavjudki

$$x - a \leq p < q \leq x; x \leq r < s \leq x + a$$

bu sonlar uchun $f(p) > f(q)$ va $f(r) < f(s)$ bo'ladi. Veyershtass teoremasiga ko'ra f funksiya $[p, s]$ kesmada global minimumga ega. $f(p)$ va $f(s)$ qiymatlar minimum emas, chunki ular mos ravishda $f(q)$ va $f(r)$ dan katta. Demak minimum (p, s) intervalning ichki nuqtasida, bu minimum lokal minimumdir. Demak har qanday bo'sh bo'lmagan $(x - a, x + a) \subset [0, 1]$ interval kamida bitta lokal minimum nuqtasini o'z ichiga oladi. Bu esa lokal minimumlar to'plamining $[0, 1]$ da zich ekanligini bildiradi.

3-masala (IMC 2006 2-kun 2-masala, [2])

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiyalarni toping: har qanday $a < b$ haqiqiy sonlar uchun $f([a, b])$ obrazi uzunligi $b - a$ ga teng bo'lgan yopiq kesma bo'lsin.

Yechim. $y = x + c$ va $y = -x + c$ funksiyalar masala shartini qanoatlantirishini tekshiramiz.

$$f(x) = x + c; f([a, b]) = [a + c, b + c] \text{ uzunligi } (b + c) - (a + c) = b - a$$

$$f(x) = -x + c; f([a, b]) = [-b + c, -a + c], \text{ uzunligi } (-a + c) - (-b + c) = b - a$$

Endi faqat shu funksiyalar berilgan xususiyatga ega ekanligini isbotlaymiz.

Har qanday $x < y$ va ixtiyoriy $z \in [x, y]$ uchun $f(z) \in f([x, y])$ bo'ladi. $f([x, y])$ ning uzunligi $y - x$ ga teng. $f([x, y])$ ning eng katta qiymati $y - x$ ga teng, ya'ni $f([x, y])$ ichidagi har ikki qiymatning farqi $y - x$ dan oshib ketmaydi:

$$|f(x) - f(y)| \leq y - x = |x - y|$$

bu Lipschits sharti. Lipschits shartidan uzluksizlik kelib chiqadi. f uzluksiz bo'lganligi uchun, Veyersstrass teoremasiga asosan, f har qanday yopiq $[x, y]$ kesmada maksimum va minimumga erishadi. Ularni a va b ($a, b \in [x, y]$) nuqtalarda erishadi deylik. U holda $f([x, y]) = [f(b), f(a)]$

Masala shartiga ko'ra bu obrazning uzunligi $y - x$ ga teng, ya'ni

$$f(a) - f(b) = y - x$$

$$y - x = f(a) - f(b) = |f(a) - f(b)| \leq |a - b| \leq y - x$$

Bu har qanday $x < y$ uchun $\{a, b\} = \{x, y\}$ ekanligini bildiradi. Demak maksimum va minimumga har doim kesma uchlarida erishiladi. Bu esa f funksiyaning monoton ekanligini bildiradi. Endi 2 holatni ko'ramiz.

$$1) f \text{ o'suvchi bo'lsa } f(y) - f(x) = y - x,$$

$$f(x) - x = f(y) - y = \text{const} = c \Rightarrow f(x) = x + c$$

$$2) f \text{ kamayuvchi bo'lsa } f(x) - f(y) = y - x,$$

$$f(x) + x = f(y) + y = \text{const} = c \Rightarrow f(x) = -x + c, c \in \mathbb{R}.$$

4-masala (OMOUS 2023 B kategoriya 6-masala, [3])

Faraz qilaylik $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uzluksiz funksiya bo'lsin. Shunday $a \in [0, 1]$ nuqta mavjudki, u uchun $f(a) < a < f(f(a))$ sharti bajariladi. Shunday $z \in [0, 1]$ nuqta mavjudligini isbotlangki, bunda $f(z) \neq z$ va $f(f(z)) = z$ bo'lsin.

Yechim. $f(a) < a$ va $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bo'lgani uchun $f(a) \in [0, 1]$. f funksiya $[f(a), a]$ kesmada uzluksiz va $f(a) < a < f(f(a))$. Bolsano–Koshi teoremasiga asosan shunday $b \in (f(a), a)$ mavjudki $f(b) = a$ bo'ladi.

Quyidagi yordamchi funksiyani tanlab olamiz:

$$g(x) = f(f(x)) - x$$

f uzluksiz bo'lgani uchun g ham $[0, 1]$ da uzluksiz: $f \in C[0, 1] \Rightarrow g \in C[0, 1]$.

$$g(b) = f(f(b)) - b = f(a) - b < 0$$

$$g(0) = f(f(0)) - 0 = f(f(0)) \geq 0$$

Bolsano–Koshi teoremasiga asosan shunday $z \in [0, b]$ mavjudki

$$g(z) = 0 = f(f(z)) - z \Rightarrow f(f(z)) = z.$$

Endi $f(z) \neq z$ ekanligini isbotlaymiz.

$\Omega = \{x \in [0, 1] | f(x) = x\}$ f funksiyaning qo'zg'almas nuqtalar to'plami. f uzluksiz bo'lgani uchun Ω yopiq to'plam.

1-holat. $\Omega \cap [0, b] \neq \emptyset$.

Ω yopiq to'plam bo'lgani uchun $\alpha = \sup(\Omega \cap [0, b])$ ham Ω ga tegishli, ya'ni $f(\alpha) = \alpha$.

$f(b) = a > b$ bo'lgani uchun $b \notin \Omega$, demak $\alpha < b$.

Endi f ni $[\alpha, b]$ kesmada ko'rib chiqamiz: $f(\alpha) = \alpha$, $f(b) = a > b$. Bolsano–Koshi teoremasiga asosan shunday $c \in (\alpha, b)$ mavjudki $f(c) = b$.

$$g(c) = f(f(c)) - c = f(b) - c = a - c > 0$$

$$g(b) = f(f(b)) - b = f(a) - b < 0$$

Bolsano–Koshi teoremasiga asosan shunday $z \in (c, b)$ mavjudki $g(z) = 0 \Rightarrow f(f(z)) = z$.

$f(z) \neq z$. Sababi $z \in (c, b)$ va $c > \alpha = \sup(\Omega \cap [0, b])$. Demak $z > \alpha$, ya'ni $z \notin \Omega \cap [0, b]$. $z < b \leq 1$ va $z \in [0, 1] \Rightarrow z \notin \Omega$, demak $f(z) \neq z$.

2-holat. $\Omega \cap [0, b] = \emptyset$, ya'ni $[0, b]$ da f funksiyaning qo'zg'almas nuqtasi yo'q. ixtiyoriy $z \in [0, b]$ uchun $f(z) \neq z$.

5-masala (NCUMC 2021 1-masala, [4]).

Faraz qilaylik $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uzluksiz va chegaralangan bo'lsin. Shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjudligini isbotlangki, unda quyidagi shartlar bajarilsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + 2021) - f(x_n)) = 0.$$

Yechim. $g(x) = f(x + 2021) - f(x)$ yordamchi funksiyani qaraymiz. f uzluksiz bo'lgani uchun g ham uzluksiz. Ikki holatni ko'ramiz.

1-holat. Faraz qilaylik, shunday $x_0 > 1$ mavjudki, barcha $x > x_0$ uchun $g(x) > 0$.

$x_n = x_0 + 2021n$ deb olamiz. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

$$g(x) > 0$$

$$f(x_0 + 2021n + 2021) - f(x_0 + 2021n) > 0$$

$$f(x_0 + 2021(n + 1)) - f(x_0 + 2021n) > 0$$

$$f(x_0 + 2021(n + 1)) > f(x_0 + 2021n)$$

ya'ni $\{f(x_0 + 2021n)\}$ ketma-ketligi monoton o'suvchidir. f chegaralangan bo'lgani uchun bu ketma-ketlikning limiti mavjud:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + 2021n) = L; L \in \mathbb{R}.$$

$$g(x_n) = f(x_0 + 2021n + 2021) - f(x_0 + 2021n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + 2021(n + 1)) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + 2021n) = L - L = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0.$$

2-holat. Faraz qilaylik bunday x_0 mavjud emas, ya'ni $g(x)$ hech qanday nuqtadan keyin doimiy ishorali bo'lmaydi. U holda har bir $n \geq 1$ uchun n dan katta qiymatlarda g musbat ham, manfiy ham qiymat oladi:

$$\exists a_n > n, g(a_n) > 0; \exists b_n > n, g(b_n) < 0.$$

$$\text{Bolsano-Koshi} \quad \text{teoremasiga} \quad \text{asosan} \quad \text{shunday} \quad x_n \in (a_n, b_n)$$

mavjudki, $g(x_n) = 0, x_n > n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

6-masala (SEEMOUS 2023 4-masala, [5]).

Faraz qilaylik $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uzluksiz va qat'iy kamayuvchi funksiya bo'lsin. Har bir $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ uchun $f(x) = x^n$ tenglamasining $(0, 1)$ oraliqda yagona a_n yechimi mavjudligini isbotlang va $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ekanligini ko'rsating.

Yechim. Mavjudlik. Yordamchi funksiyani kiritamiz: $g(x) = f(x) - x^n, x \in [0, 1]$. g funksiyasi $[0, 1]$ da uzluksizdir, chunki f uzluksiz va x^n ham uzluksizdir. Endi qiymatlarni hisoblaymiz.

$$g(0) = f(0) - 0^n = f(0)$$

f qat'iy kamayuvchi va $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ bo'lgani uchun $f(0) > f(1) \geq 0$. Agar $f(0) = 0$ bo'lsa, f kamayuvchiligidan $f \equiv 0$ kelib chiqadi, bu esa qat'iy kamayuvchilikka zid. Demak $f(0) > 0$, ya'ni $g(0) > 0$.

$$g(1) = f(1) - 1^n = f(1) - 1$$

f qat'iy kamayuvchi va $f(0) \in [0, 1]$ bo'lgani uchun $f(1) < f(0) \leq 1$, demak $f(1) < 1$, ya'ni $g(1) < 0$.

Shunday qilib, $g(0) > 0$ va $g(1) < 0$. g funksiyasi $[0, 1]$ da uzluksiz bo'lgani uchun, Bolsano-Koshi teoremasiga asosan, shunday $a_n \in (0, 1)$ mavjudki $g(a_n) = 0$, ya'ni $f(a_n) = a_n^n$.

Yagonalik. Faraz qilaylik $a < b$ ikkala yechim bo'lsin, ya'ni $f(a) = a^n$ va $f(b) = b^n$. f qat'iy kamayuvchi va $a < b$ bo'lgani uchun $f(a) > f(b)$, ya'ni $a^n > b^n$. Lekin $0 < a < b < 1$ bo'lganda $a^n < b^n$ bo'ladi. Ziddiyat. Demak yechim yagonadir.

Endi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ekanligini isbotlaymiz.

1-qadam. (a_n) ketma-ketligi qat'iy o'suvchi.

Faraz qilaylik $a_n \geq a_{n+1}$. f kamayuvchi bo'lgani uchun $f(a_n) \leq f(a_{n+1})$, ya'ni $a_n^n \leq a_{n+1}^{n+1}$. Lekin $a_{n+1} \in (0, 1)$ bo'lgani uchun $a_{n+1}^{n+1} < a_{n+1}^n \cdot a_{n+1} \geq a_{n+1}$ dan $a_n^n \geq a_{n+1}^n$ kelib chiqadi. Demak $a_n^n \geq a_{n+1}^n > a_{n+1}^{n+1}$, bu esa $a_n^n \leq a_{n+1}^{n+1}$ ga zid. Demak $a_n < a_{n+1}$, ya'ni (a_n) qat'iy o'suvchidir.

2-qadam. (a_n) qat'iy o'suvchi va yuqoridan 1 bilan chegaralangan, demak biror $\ell \in (0, 1]$ limitga yaqinlashadi.

3-qadam. $\ell = 1$ ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $\ell < 1$. U holda barcha n uchun $a_n \leq \ell < 1$, demak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0$ (chunki $a_n \leq \ell < 1$ va $\ell^n \rightarrow 0$). f uzluksiz bo'lgani uchun va $a_n \rightarrow \ell$ dan

$$f(\ell) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 0.$$

Demak, $f(\ell) = 0$. Lekin f qat'iy kamayuvchi va $\ell < 1$ bo'lgani uchun $f(\ell) > f(1) \geq 0$. Agar $f(1) = 0$ bo'lsa, qat'iy kamayuvchilikdan $f(\ell) > f(1) = 0$ bo'ladi, bu $f(\ell) = 0$ ga zid. Agar $f(1) > 0$ bo'lsa, $f(\ell) > f(1) > 0$, bu ham $f(\ell) = 0$ ga zid. Har ikki holda ham ziddiyat. Demak $\ell = 1$, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

4. Mustaqil ishlash uchun tavsiya etiladigan masalalar

Ushbu bo'limda uzluksiz funksiyalar xossalari va ularning olimpiada masalalarini yechishdagi qo'llanilishiga oid mustaqil ishlash uchun masalalar keltiriladi. Berilgan topshiriqlar o'quvchilarning nazariy bilimlarini mustahkamlash va ularni amaliy masalalarda qo'llash ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Masalalar turli murakkablik darajasida tanlangan bo'lib, mantiqiy fikrlash va isbotlash madaniyatini shakllantirishga yo'naltirilgan. Ularni yechish jarayonida o'quvchilar Veyershtass va Bolsano–Koshi teoremlaridan samarali foydalanish malakasini oshiradilar. Bu esa mustaqil ijodiy yondashuvni rivojlantirishga imkon beradi.

1-masala (Putnam and Beyond 389-masala, [6])

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -uzluksiz funksiya bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0; x \in \mathbb{R}$$

f funksiyasi o'zgarmas, ya'ni $f \equiv \text{const}$ ekanini isbotlang.

2-masala (IMC 2016 1-kun 1-masala, [2])

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz va (a, b) da differensiallanuvchi funksiya bo'lsin. Faraz qilaylik f funksiya cheksiz ko'p nollarga ega, ammo hech qanday $x \in (a, b)$ nuqtada $f(x) = f'(x) = 0$ shart bajarilmasin.

(a) $f(a) \cdot f(b) = 0$ ekanini isbotlang.

(b) $[0, 1]$ kesmada yuqoridagi barcha shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyaga misol keltiring.

3-masala (SEEMOUS 2008 1-masala, [5])

$f: [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ -uzluksiz funksiya bo'lib, har bir $a > 0$ uchun $f(x) = ax$ tenglamasi $[1, +\infty)$ da kamida bitta yechimga ega bo'lsin.

(a) Har bir $a > 0$ uchun $f(x) = ax$ tenglamasi cheksiz ko'p yechimga ega ekanini isbotlang.

(b) Yuqoridagi xossani qanoatlantiruvchi qat'iy o'suvchi uzluksiz funksiyaga misol keltiring.

4-masala (IMC 1997 2-kun 6-masala, [2])

Aytaylik, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Agar $f(x) = 0$ bo'lsa va x ning ixtiyoriy atrofida $f(y) < 0$ hamda $f(z) > 0$ bo'ladigan y, z nuqtalar topilsa, f funksiya x nuqtada “o'qni kesib o'tadi” deyiladi.

a) “o'qni” cheksiz ko'p marta kesib o'tuvchi uzluksiz funksiyaga misol keltiring.

b) uzluksiz funksiya “o'qni” cheksiz ko'p marta kesib o'ta oladimi? Javobingizni asoslang.

5-masala (IMC 2002 1-kun 4-masala, [2])

$f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ -uzluksiz funksiya va $p \in [a, b]$ bo'lsin. $p_0 = p$ va $p_{n+1} = f(p_n), n = 0, 1, 2, \dots$ deb ta'riflansin. Faraz qilaylik,

$$T_p = \{p_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

to'plami yopiq bo'lsin, ya'ni agar $x \notin T_p$ bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0$ mavjudki, barcha $x' \in T_p$ uchun $|x' - x| \geq \delta$ bo'lsin.

T_p to'plam chekli ko'p elementdan iborat ekanligini isbotlang.

Xulosa. Ushbu maqolada matematik analiz kursining muhim bo'limlaridan biri hisoblangan uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari Veyershtass hamda Bolsano–Koshi teoremlari orqali sodda va tushunarli tarzda yoritildi. Mazkur nazariy natijalarning amaliy ahamiyatini ko'rsatish maqsadida xalqaro matematika olimpiadalarida uchragan turli tipdagi masalalar tahlil qilinib, ularning yechimlarida uzluksiz funksiyalar xossalariidan samarali foydalanish usullari namoyish etildi. Tahlil qilingan masalalar o'quvchilarda matematik mulohaza yuritish, mantiqiy fikrlash va nostandart yondashuv ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Shuningdek, maqolada tavsiya etilgan mustaqil yechish uchun masalalar o'quvchilarning

mavzuni chuqurroq o'zlashtirishga, nazariy bilimlarini mustahkamlashga hamda olimpiada masalalarini yechish bo'yicha amaliy tajribasini oshirishga yordam beradi. Olingan natijalar matematik analizni o'qitishda va iqtidorli o'quvchilarni xalqaro olimpiadalarga tayyorlash jarayonida samarali metodik manba sifatida foydalanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. G.Xudayberganov, A.K.Vorisov, X.T Mansurov, B.A.Shoimqulov. *Matematik analizdan ma'ruzalar 1-qism*. "Voriz-nashriyot". Toshkent-2010
2. IMC (International Mathematics Competition for University Students). <https://www.imc-math.org.uk/>
3. OMOUS (Open Mathematical Olympiad for University Students). <https://iuhd.edu.tm/competitions>
4. NCUMC (North Countries Universities Mathematical Competition). <https://im.itmo.ru/ru/events/ncumc>
5. SEEMOUS (South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students). <https://massee-org.eu/seemous/>
6. Gelca R. Andreescu T. *Putnam and Beyond*. New York Springer, 2007

DISCRETE SPECTRUM OF THE EVEN PART OF A LATTICE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH ON-SITE AND NEAREST-NEIGHBOUR INTERACTIONS

Khamidov Shakhobiddin Ilkhom ugli,

Senior Researcher of the V.I. Romanovskiy Institute
of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, 100174, Uzbekistan, PhD
shoh.hamidov1990@mail.ru

Niyozkhonov Lazizkhon Latifkhonovich,

Master's Student of the Samarkand State University,
University boulevard, 15,
Samarkand, 140104 Uzbekistan
niyozxon2002@gmail.com

Sharipova Sadokat Fazliddinovna,

Teacher of the Jizzakh branch of National University
of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 259,
Sh. Rashidov avenue, Jizzakh, 130100, Uzbekistan
sadokatsharipova8@gmail.com

Abstract. We study a one-particle discrete Schrödinger operator on the lattice $\mathbb{Z}$ with a finite-range external potential. The potential consists of an on-site interaction of strength $\gamma \in \mathbb{R}$ and nearest-neighbour interactions of strength $\lambda \in \mathbb{R}$. The present paper is devoted to the restriction $H_{\gamma\lambda}^e := H_{\gamma\lambda}|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ of this operator to the even subspace. The eigenvalues of $H_{\gamma\lambda}^e$ outside the essential spectrum are characterized by an explicit Fredholm determinant equation. This characterization yields a complete classification of the number and location of the discrete eigenvalues of the even part in terms of the parameters $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Keywords: Schrödinger operator, one-particle operator, eigenvalue, lattice.

BIR TUGUNDA VA ENG YAQIN QO'SHNI TUGUNLARDA TA'SIRLARGA EGA PANJARADAGI SCHRÖDINGER OPERATORI JUFT QISMINING DISKRET SPEKTRI

Annotatsiya. Biz $\mathbb{Z}$ panjarada aniqlangan, chekli ta'sir radiusiga ega tashqi potensial bilan ta'sirlashadigan bir zarrachali diskret Schrödinger operatorini o'rganamiz. Mazkur potensial $\gamma \in \mathbb{R}$ kuchga ega bir tugundagi ta'sir hamda $\lambda \in \mathbb{R}$ kuchga ega eng yaqin qo'shni tugunlardagi ta'sirlardan iborat. Ushbu maqola mazkur operatorning juft funksiyalar fazosidagi qismi $H_{\gamma\lambda}^e := H_{\gamma\lambda}|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ ni o'rganishga bag'ishlangan. $H_{\gamma\lambda}^e$ operatorning muhim spektrdan tashqarida joylashgan xos qiymatlari aniq Fredholm determinanti tenglamasi orqali tavsiflanadi. Ushbu tavsif $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ parametrlar bo'yicha juft qismning ajralgan xos qiymatlari soni va joylashuvini to'liq tavsiflash imkonini beradi.

Kalit so'zlar: Schrödinger operatori, bir zarrachali operator, xos qiymat, panjara.

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ЧЁТНОЙ ЧАСТИ РЕШЁТОЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ОДНОУЗЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ НА БЛИЖАЙШИХ СОСЕДНИХ УЗЛАХ

Аннотация. Мы изучаем одночастичный дискретный оператор Шрёдингера на решётке $\mathbb{Z}$ с внешним потенциалом конечного радиуса действия. Потенциал состоит из одноузельного взаимодействия интенсивности $\gamma \in \mathbb{R}$ и взаимодействий на ближайших соседних узлах интенсивности $\lambda \in \mathbb{R}$. Настоящая работа посвящена сужению $H_{\gamma\lambda}^e := H_{\gamma\lambda}|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ данного оператора на чётное подпространство. Собственные значения оператора $H_{\gamma\lambda}^e$, лежащие вне существенного спектра, характеризуются явным уравнением для детерминанта Фредгольма. Эта характеристика даёт полную классификацию числа и расположения дискретных собственных значений чётной части в терминах параметров $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Ключевые слова: оператор Шрёдингера, одночастичный оператор, собственное значение, решётка.

Introduction. Lattice Schrödinger operators form a fundamental class of models in spectral theory and mathematical physics. They arise naturally both as discrete counterparts of continuous Schrödinger operators and as effective Hamiltonians for quantum particles moving in periodic media. Such operators play an important role in the analysis of spectral bands, isolated eigenvalues, threshold effects, and finite-rank perturbations of multiplication operators.

The spectral theory of lattice Hamiltonians has been extensively studied for one-, two-, and three-particle systems; see, for example, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] and the references therein. Particular attention has been paid to the structure of the essential spectrum, the existence and location of eigenvalues outside spectral bands, and threshold phenomena. In this setting, Fredholm determinants and Birman–Schwinger type methods provide an effective approach; see also [10].

Discrete Schrödinger operators also arise in the description of quantum systems in periodic structures. Typical examples are ultracold atoms in optical lattices generated by interfering laser beams; see [11, 12, 13, 14, 15]. The possibility of controlling lattice geometry and interaction strengths makes such models suitable for studying bound states, spectral thresholds, and related phenomena.

In the present paper we study the even part of a one-particle discrete Schrödinger operator on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$. The external potential consists of an on-site term with coupling constant $\gamma \in \mathbb{R}$ and a nearest-neighbour term with coupling constant $\lambda \in \mathbb{R}$. Under the Fourier transform, the operator is unitarily equivalent to a bounded self-adjoint operator in $L^2(\mathbb{T})$, where $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, with dispersion relation

$$\varepsilon(p) = 2(1 - \cos 2p) = 4\sin^2 p, \quad p \in \mathbb{T}.$$

The essential spectrum is the interval $[0, 4]$; hence discrete eigenvalues may occur only in $(-\infty, 0)$ and $(4, \infty)$.

Since the dispersion relation and the potential are even, the even subspace $L^{2,e}(\mathbb{T})$ is invariant. We therefore consider the restricted operator

$$H_{\gamma\lambda}^e = H_{\gamma\lambda}|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}.$$

The main purpose of the paper is to describe the discrete spectrum of $H_{\gamma\lambda}^e$ outside the essential band $[0, 4]$ for all $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

For the even part, the eigenvalue problem is reduced to the scalar Fredholm determinant equation $(1 + \gamma a(z))(1 + \lambda c(z)) = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 4]$.

By analyzing the sign properties, monotonicity, and threshold asymptotics of the functions a and c , we determine the number and location of the eigenvalues of $H_{\gamma\lambda}^e$ below and above the essential spectrum. This gives a complete classification of the discrete spectrum of the even part in terms of the parameters (γ, λ) .

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the coordinate-space lattice Schrödinger operator and derive its momentum representation. Section 3 is devoted to the essential spectrum, the parity decomposition of $H_{\gamma\lambda}$, and the reduction to the even subspace; we also obtain the corresponding Fredholm determinant criterion for the eigenvalues of $H_{\gamma\lambda}^e$. In Section 4 we state and prove the main results, giving the classification of the discrete spectrum of the even part in terms of the parameters $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

1 Coordinate and momentum representations of the lattice Schrödinger operator. Let $\ell^2(\mathbb{Z})$ denote the Hilbert space of square-summable complex-valued functions on $\mathbb{Z}$. We consider the bounded self-adjoint operator

$$\hat{H}_{\gamma\lambda} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\gamma\lambda}, \quad \gamma, \lambda \in \mathbb{R}.$$

The free part $\hat{H}_0$ is defined by

$$(\hat{H}_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \varepsilon(s) \hat{f}(x + s), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

where

$$\varepsilon(s) = 2\delta_{s,0} - \delta_{s,2} - \delta_{s,-2}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Here δ_{ij} denotes the Kronecker delta.

The perturbation $\hat{V}_{\gamma\lambda}$ is the multiplication operator

$$(\hat{V}_{\gamma\lambda}\hat{f})(x) = \hat{v}_{\gamma\lambda}(x)\hat{f}(x), \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

with

$$\hat{v}_{\gamma\lambda}(x) = \gamma\delta_{x,0} + \lambda(\delta_{x,1} + \delta_{x,-1}), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Thus the parameter γ corresponds to an on-site interaction at the origin, whereas λ describes the nearest-neighbour interaction.

Let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable complex-valued functions on the torus $\mathbb{T} := (-\pi, \pi]$. We denote by

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad (\mathcal{F}\hat{f})(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) e^{ixp},$$

the Fourier transform. In momentum representation, the operator $\hat{H}_{\gamma\lambda}$ takes the form

$$H_{\gamma\lambda} := \mathcal{F}\hat{H}_{\gamma\lambda}\mathcal{F}^{-1} = H_0 + V_{\gamma\lambda}.$$

Then H_0 is the multiplication operator

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

where

$$\varepsilon(p) = 2 - e^{2ip} - e^{-2ip} = 2(1 - \cos 2p).$$

Moreover,

$$(V_{\gamma\lambda} f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\gamma + 2\lambda \cos(p-t)) f(t) dt, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

2 Essential spectrum and the even part of $H_{\gamma\lambda}$. Since $V_{\gamma\lambda}$ is a finite-rank operator, Weyl's theorem implies that

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\lambda}) = \sigma_{\text{ess}}(H_0).$$

Because H_0 is the multiplication operator by

$$\varepsilon(p) = 2(1 - \cos 2p) = 4\sin^2 p, \quad p \in \mathbb{T},$$

it follows that

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\lambda}) = [0, 4].$$

Using the trigonometric identity

$$\cos(p-t) = \cos p \cos t + \sin p \sin t,$$

the perturbation term can be written in the form

$$(V_{\gamma\lambda} f)(p) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt + \frac{\lambda}{\pi} \cos p \int_{\mathbb{T}} \cos t f(t) dt + \frac{\lambda}{\pi} \sin p \int_{\mathbb{T}} \sin t f(t) dt.$$

Accordingly, the operator $H_{\gamma\lambda} = H_0 + V_{\gamma\lambda}$ acts in $L^2(\mathbb{T})$ as

$$(H_{\gamma\lambda} f)(p) = \varepsilon(p)f(p) + \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt + \frac{\lambda}{\pi} \cos p \int_{\mathbb{T}} \cos t f(t) dt + \frac{\lambda}{\pi} \sin p \int_{\mathbb{T}} \sin t f(t) dt.$$

Since ε is even and $V_{\gamma\lambda}$ preserves parity, the subspaces

$$L^{2,e}(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(p) = f(-p) \text{ for a.e. } p \in \mathbb{T}\}$$

and

$$L^{2,o}(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(p) = -f(-p) \text{ for a.e. } p \in \mathbb{T}\}$$

reduce $H_{\gamma\lambda}$. Hence

$$L^2(\mathbb{T}) = L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T}), \quad H_{\gamma\lambda} = H_{\gamma\lambda}^e \oplus H_{\gamma\lambda}^o.$$

More precisely, if $f \in L^{2,e}(\mathbb{T})$, then the function $t \mapsto \sin t f(t)$ is odd, and therefore

$$\int_{\mathbb{T}} \sin t f(t) dt = 0.$$

Thus

$$(H_{\gamma\lambda}^e f)(p) = \varepsilon(p)f(p) + \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) dt + \frac{\lambda}{\pi} \cos p \int_{\mathbb{T}} \cos t f(t) dt.$$

Similarly, if $f \in L^{2,o}(\mathbb{T})$, then both $t \mapsto f(t)$ and $t \mapsto \cos t f(t)$ are odd, so that

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) dt = 0, \quad \int_{\mathbb{T}} \cos t f(t) dt = 0.$$

Hence

$$(H_{\lambda}^{\circ} f)(p) = \varepsilon(p)f(p) + \frac{\lambda}{\pi} \sin p \int_{\mathbb{T}} \sin t f(t) dt.$$

The main objective of the present paper is to determine, for each $(\gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, the exact number of discrete eigenvalues of the even part $H_{\gamma\lambda}^e$ lying below and above the essential spectrum.

To characterize the discrete spectrum of the even part $H_{\gamma\lambda}^e$, we introduce the corresponding scalar Fredholm determinant. For $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 4]$, set

$$\Delta_{\gamma\lambda}^e(z) := (1 + \gamma a(z))(1 + \lambda c(z)),$$

where

$$a(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dq}{\varepsilon(q) - z}, \quad c(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q dq}{\varepsilon(q) - z}.$$

The next lemma shows that the discrete eigenvalues of $H_{\gamma\lambda}^e$ outside the essential spectrum are precisely the zeros of $\Delta_{\gamma\lambda}^e$.

Lemma 1. *For every $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 4]$, $z \in \sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \Leftrightarrow \Delta_{\gamma\lambda}^e(z) = 0$.*

The proof of this lemma is straightforward and can be found in various sources, such as [6]. Therefore, we do not provide a proof in this paper.

Lemma 2. *The functions $a(z)$ and $c(z)$ are real-analytic on each of the intervals $(-\infty, 0)$ and $(4, \infty)$. Moreover, they are positive and strictly increasing on $(-\infty, 0)$, while they are negative and strictly increasing on $(4, \infty)$.*

Proof. Since

$$\varepsilon(q) = 2(1 - \cos 2q) = 4\sin^2 q, \quad q \in \mathbb{T},$$

one has $\varepsilon(\mathbb{T}) = [0, 4]$. Hence, for $z \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, the denominators $\varepsilon(q) - z$ do not vanish.

Let I be a compact subinterval of $(-\infty, 0)$ or $(4, \infty)$. Then there exists $\delta_I > 0$ such that

$$|\varepsilon(q) - z| \geq \delta_I \quad \text{for all } q \in \mathbb{T}, \quad z \in I.$$

Therefore differentiation under the integral sign is justified, and a and c are real-analytic on each of the above intervals. In particular,

$$a'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dq}{(\varepsilon(q) - z)^2}, \quad c'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q dq}{(\varepsilon(q) - z)^2}.$$

Since $(\varepsilon(q) - z)^2 > 0$ for all $q \in \mathbb{T}$, it follows that

$$a'(z) > 0.$$

Likewise, $\cos^2 q \geq 0$ for all q , and $\cos^2 q > 0$ on a set of positive measure. Hence

$$c'(z) > 0.$$

Thus both a and c are strictly increasing on $(-\infty, 0)$ and on $(4, \infty)$.

If $z < 0$, then $\varepsilon(q) - z > 0$ for all $q \in \mathbb{T}$. Therefore the integrand defining $a(z)$ is strictly positive, while the integrand defining $c(z)$ is nonnegative and positive on a set of positive measure. Hence

$$a(z) > 0, \quad c(z) > 0.$$

If $z > 4$, then $\varepsilon(q) - z < 0$ for all $q \in \mathbb{T}$. Therefore the integrand defining $a(z)$ is strictly negative, while the integrand defining $c(z)$ is nonpositive and negative on a set of positive measure. Hence

$$a(z) < 0, \quad c(z) < 0.$$

This completes the proof.

Lemma 3. *The following threshold asymptotics hold:*

$$a(z) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} - \frac{1}{16}\sqrt{-z} + O((-z)^{3/2}) \quad \text{as } z \nearrow 0,$$

$$c(z) = \frac{1}{\sqrt{-z}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{-z} + O((-z)^{3/2}) \quad \text{as } z \nearrow 0$$

and

$$a(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z-4}} + \frac{1}{16}\sqrt{z-4} + O((z-4)^{3/2}) \quad \text{as } z \searrow 4,$$

$$c(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{z-4} + O((z-4)^{3/2}) \quad \text{as } z \searrow 4.$$

Proof. Using

$$\varepsilon(q) = 2(1 - \cos 2q) = 2 - 2\cos 2q,$$

we may write

$$a(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2 - z - 2\cos 2q}.$$

After the change of variables $t = 2q$ and the 2π -periodicity of the integrand, this becomes

$$a(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 - z - 2\cos t}.$$

Now apply the tangent half-angle substitution

$$x = \tan \frac{t}{2}, \quad \cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2 dx}{1 + x^2}.$$

Then

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(-z) + (4 - z)x^2}.$$

Consequently,

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{(-z)(4 - z)}} \quad \text{for } z < 0, \quad a(z) = -\frac{1}{\sqrt{z(z - 4)}} \quad \text{for } z > 4.$$

Next, since

$$\cos^2 q = 1 - \sin^2 q = 1 - \frac{\varepsilon(q)}{4},$$

we obtain

$$\begin{aligned} c(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q dq}{\varepsilon(q) - z} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \varepsilon(q)/4}{\varepsilon(q) - z} dq \\ &= 2a(z) - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon(q) dq}{\varepsilon(q) - z}. \end{aligned}$$

Using

$$\frac{\varepsilon(q)}{\varepsilon(q) - z} = 1 + \frac{z}{\varepsilon(q) - z},$$

we infer that

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varepsilon(q) dq}{\varepsilon(q) - z} = \frac{1}{2} + \frac{z}{2} a(z),$$

and hence

$$c(z) = 2a(z) - \frac{1}{2} - \frac{z}{2} a(z) = \frac{4 - z}{2} a(z) - \frac{1}{2}.$$

We now derive the stated threshold expansions.

Let $z \nearrow 0$. Then

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{(-z)(4 - z)}} = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \left(1 - \frac{z}{4}\right)^{-1/2}.$$

Since

$$(1 - u)^{-1/2} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2), \quad u \rightarrow 0,$$

with $u = z/4$, it follows that

$$a(z) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} - \frac{1}{16}\sqrt{-z} + O((-z)^{3/2}).$$

Substituting this into

$$c(z) = \frac{4-z}{2} a(z) - \frac{1}{2},$$

we obtain

$$c(z) = \frac{1}{\sqrt{-z}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sqrt{-z} + O((-z)^{3/2}).$$

Let now $z \searrow 4$, and put $w = z - 4 > 0$. Then

$$a(z) = -\frac{1}{\sqrt{z(z-4)}} = -\frac{1}{\sqrt{(4+w)w}} = -\frac{1}{2\sqrt{w}}(1 + \frac{w}{4})^{-1/2}.$$

Using

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + O(u^2), \quad u \rightarrow 0,$$

with $u = w/4$, we get

$$a(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z-4}} + \frac{1}{16}\sqrt{z-4} + O((z-4)^{3/2}).$$

Finally,

$$c(z) = \frac{4-z}{2} a(z) - \frac{1}{2} = -\frac{w}{2} a(z) - \frac{1}{2},$$

and therefore

$$c(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{z-4} + O((z-4)^{3/2}).$$

This completes the proof.

3 Main results. We next state the main classification result for the restriction $H_{\gamma\lambda}^e = H_{\gamma\lambda}|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}$ of $H_{\gamma\lambda}$ to the even subspace $L^{2,e}(\mathbb{T})$. It provides a complete description of the discrete spectrum of $H_{\gamma\lambda}^e$ outside the essential spectral interval $[0, 4]$.

For $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, let $N_-^e(\gamma, \lambda)$ and $N_+^e(\gamma, \lambda)$ denote the numbers of discrete eigenvalues of $H_{\gamma\lambda}^e$ in $(-\infty, 0)$ and $(4, \infty)$, respectively, counted with multiplicities.

Theorem 1 *Let $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$. Then the discrete spectrum of $H_{\gamma\lambda}^e$ is finite and satisfies*

$$\sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \subset (-\infty, 0) \cup (4, \infty).$$

Denote by

$$N_-^e(\gamma, \lambda) := \#(\sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \cap (-\infty, 0)), \quad N_+^e(\gamma, \lambda) := \#(\sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \cap (4, \infty)),$$

where eigenvalues are counted with their multiplicities. Then

$$(N_-^e(\gamma, \lambda), N_+^e(\gamma, \lambda)) = \begin{cases} (1,1), & \gamma > 0, \quad \lambda < 0, \\ (0,1), & \gamma > 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 2, \\ (0,2), & \gamma > 0, \quad \lambda > 2, \\ (1,0), & \gamma = 0, \quad \lambda < 0, \\ (0,0), & \gamma = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 2, \\ (0,1), & \gamma = 0, \quad \lambda > 2, \\ (2,0), & \gamma < 0, \quad \lambda < 0, \\ (1,0), & \gamma < 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 2, \\ (1,1), & \gamma < 0, \quad \lambda > 2. \end{cases}$$

Proof. Since the restriction of the perturbation to $L^{2,e}(\mathbb{T})$ is finite-rank, Weyl's theorem gives

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\gamma\lambda}^e) = [0, 4].$$

Hence

$$\sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \subset (-\infty, 0) \cup (4, \infty).$$

By Lemma 3.1,

$$z \in \sigma_d(H_{\gamma\lambda}^e) \Leftrightarrow \Delta_{\gamma\lambda}^e(z) = 0,$$

where

$$\Delta_{\gamma\lambda}^e(z) = (1 + \gamma a(z))(1 + \lambda c(z)).$$

Thus it remains to count the zeros of the two scalar factors on $(-\infty, 0)$ and $(4, \infty)$.

By Lemma 3.2, a is positive and strictly increasing on $(-\infty, 0)$, negative and strictly increasing on $(4, \infty)$. Moreover, Lemma 3.3 gives

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} a(z) = 0, \quad \lim_{z \nearrow 0} a(z) = +\infty,$$

and

$$\lim_{z \searrow 4} a(z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} a(z) = 0.$$

Therefore $1 + \gamma a(z) = 0$ has exactly one solution in $(-\infty, 0)$ if $\gamma < 0$, exactly one solution in $(4, \infty)$ if $\gamma > 0$, and no solution if $\gamma = 0$.

Similarly, c is positive and strictly increasing on $(-\infty, 0)$, with

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} c(z) = 0, \quad \lim_{z \nearrow 0} c(z) = +\infty.$$

Hence $1 + \lambda c(z) = 0$ has exactly one solution in $(-\infty, 0)$ if and only if $\lambda < 0$.

On $(4, \infty)$, the function c is negative and strictly increasing, and

$$\lim_{z \searrow 4} c(z) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} c(z) = 0.$$

Thus

$$c((4, \infty)) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Therefore $1 + \lambda c(z) = 0$ has exactly one solution in $(4, \infty)$ if and only if

$$-\frac{1}{\lambda} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

which is equivalent to $\lambda > 2$. For $\lambda \leq 2$, no such solution exists. In particular, for $\lambda = 2$ the value $-1/2$ is attained only at the threshold $z = 4$, which is not a discrete eigenvalue.

Combining these alternatives gives precisely the nine cases stated in the theorem. Each scalar zero is simple by strict monotonicity. If the two factors vanish at the same point, the corresponding eigenfunctions

$$\frac{1}{\varepsilon(\cdot) - z}, \quad \frac{\cos(\cdot)}{\varepsilon(\cdot) - z}$$

are linearly independent. Hence the eigenvalues are counted with the stated multiplicities. The proof is complete.

REFERENCES:

1. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov, "The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices", *Comm. Math. Phys.* 262, 91–115, (2006).
2. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, M.O.Akhmadova, "Number of Bound States of the Hamiltonian of a Lattice Two-boson System with Interactions up to the Next Neighboring Sites", *Lobachevskii J. Math.* 45:12, 6526–6537, (2024).
3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov, "Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics", *Ann. Henri Poincaré.* 5, 743–772, (2004).
4. S. Albeverio, S.N. Lakaev, A.M. Khalkhujayev, "Number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrödinger Operators on Lattices", *Markov Process. Relat. Fields.* 18, 387–420, (2012).
5. V. Bach, W. de Siqueira Pedra, S.N. Lakaev, "Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators", *J. Math. Phys.* 59:2, 022109, (2017).
6. S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov, "On the number and location of eigenvalues of the two particle Schrödinger operator on a lattice", *Lobachevskii J. Math.* 43:12, 135–145, (2022).
7. I.N.Bozorov, Sh.I.Khamidov, S.N.Lakaev, "The number and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators", *Lobachevskii J. Math.* 43:11, 47–58, (2022).
8. A.M. Khalkhuzhaev, Sh.I. Khamidov, H.Sh. Mahmudov, "On the Existence of Eigenvalues of the One Particle Discrete Schrödinger Operators", *AIP Conf. Proc.* 3004, 020007, (2024).
9. S.S.Ulashov, Sh.I.Khamidov, Sh.S.Lakaev, "The Number and Location of Eigenvalues of Two Particle Schrödinger Operators on a Lattice", *Lobachevskii J. Math.* 45:11, 5918–5931, (2024).
10. L.D. Faddeev, S.P. Merkuriev, "Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems", (Doderecht: Kluwer Academic Publishers, 1993).
11. I. Bloch, "Ultracold quantum gases in optical lattices", *Nat. Phys.* 1, 23–30, (2005).

12. D. Jaksch, C. Bruder, J. Cirac, C.W. Gardiner, P. Zoller, “Cold bosonic atoms in optical lattices”, *Phys. Rev. Lett.* 81, 3108–3111, (1998).
13. D. Jaksch, P. Zoller, “The cold atom Hubbard toolbox”, *Ann. Phys.* 315, 52–79, (2005).
14. M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, “*Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems*”, Oxford University Press, Oxford, (2012).
15. K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hecker Denschlag, A.J. Daley, A. Kantian, H.P. Büchler, P. Zoller, “Repulsively bound atom pairs in an optical lattice”, *Nature* 441, 853–856, (2006).

ELEMENTARY METHODS FOR FINDING OPTIMAL SOLUTIONS TO
ECONOMIC PROBLEMS

Qushaqov Kholmurodjon Shermamatovich,

Docent at Andijan State University

xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com

Fazliddinova Mukhsinabegim Dilshodbek kizi,

Student at Andijan State University

sinafazlioff@gmail.com

Abstract. This article examines elementary mathematical methods used to find optimal solutions for economic problems where the objective is to determine the maximum or minimum value of a linear function. The study focuses on scenarios with a small number of independent variables, making these manual calculation methods convenient and practical. Through three detailed case studies, the text demonstrates the process of: *Mathematical Modeling*: Translating logistical and production constraints into systems of linear equations and inequalities. *Optimization of Logistics*: Minimizing transportation costs between multiple supply points and destinations by satisfying specific demand requirements. *Production Efficiency*: Maximizing factory profit while balancing resource limits (such as steel and non-ferrous metals) and ensuring full utilization of specific machinery. The methodology emphasizes reducing multi-variable systems into single-variable linear functions to identify optimal values within a feasible range. These techniques provide a grounded approach to resource allocation and cost reduction in industrial and commercial contexts.

Key words: linear function, optimization, transportation problem, mathematical model, feasible plan, constraints, resource allocation, profit maximization, cost minimization.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. В данной статье рассматриваются элементарные математические методы поиска оптимальных решений для специфических экономических задач, в которых решение заключается в нахождении максимального или минимального значения линейной функции. Эти методы наиболее удобны в случаях, когда количество независимых переменных невелико. В работе на конкретных примерах демонстрируется процесс построения математических моделей для различных сценариев: *транспортная логистика*: минимизация общих затрат на перевозку грузов между пунктами отправления и назначения при соблюдении условий поставок и потребностей. *Распределение ресурсов*: определение наиболее экономичного способа доставки сырья со складов в магазины. *Планирование производства*: максимизация прибыли предприятия при соблюдении лимитов на сырьё (сталь, цветные металлы) и требований по эксплуатации оборудования. Методика основывается на сведении систем ограничений к линейным функциям от одной переменной. Анализируя эти функции на допустимых интервалах, авторы показывают, как определить оптимальные значения переменных для достижения наилучшего экономического результата.

Ключевые слова: линейная функция, оптимальное решение, транспортная задача, математическая модель, допустимый план, система ограничений, распределение ресурсов, максимизация прибыли, минимизация затрат

IQTISODIY MASALALARNING OPTIMAL YECHIMLARINI TOPISHNING
ELEMENTAR USULLARI

Annotatsiya. Ushbu maqolada yechimi chiziqli funksiyaning maksimal yoki minimal qiymatini topishdan iborat bo'lgan muayyan iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarini topishning elementar matematik usullari ko'rib chiqiladi. Bu usullar erkli o'zgaruvchilar soni kam bo'lgan holatlarda juda qulaydir. Ishda aniq misollar yordamida turli ssenariylar uchun matematik modellarni qurish jarayoni namoyish etilgan: *Transport logistikasi*: Yetkazib berish shartlari va ehtiyojlarni hisobga olgan holda, jo'natish va yetkazish punktlari o'rtasida yuk tashishning umumiy xarajatlarini minimallashtirish.

Resurslarni taqsimlash: Xomashyoni omborlardan do'konlarga yetkazib berishning eng tejamkor usulini aniqlash. Ishlab chiqarishni rejalashtirish: Xomashyo (po'lat, rangli metallar) cheklovlari va uskunalaridan foydalanish talablariga rioya qilgan holda korxona foydasini maksimallashtirish. Ushbu uslub cheklovlar tizimini bir o'zgaruvchili chiziqli funksiyalarga keltirishga asoslangan. Mualliflar ushbu funksiyalarni ruxsat etilgan intervallarda tahlil qilish orqali eng yaxshi iqtisodiy natijaga erishish uchun o'zgaruvchilarning optimal qiymatlarini qanday aniqlashni ko'rsatib beradilar.

Kalit so'zlar: chiziqli funksiya, optimal yechim, transport masalasi, matematik model, muvofiq reja, cheklovlar tizimi, resurslarni taqsimlash, foydani maksimallashtirish, xarajatlarni minimallashtirish

Introduction. In the modern economic landscape, efficiency is often dictated by the ability to make precise decisions under specific constraints. Finding the most cost-effective way to transport goods or the most profitable way to utilize factory resources requires a systematic approach to optimization. This article explores elementary mathematical methods used to find optimal solutions for economic problems where the objective is defined by the maximum or minimum value of a linear function. When the number of independent variables is small, these methods offer a convenient and practical way to achieve economic goals without requiring overly complex computational tools. By translating real-world scenarios—such as logistics coordination and industrial production—into mathematical models, we can define a "feasible plan" that satisfies all operational requirements.

Through the analysis of a constraint system, these models allow us to identify the "optimal plan" that yields the best possible financial outcome. This study examines three specific types of optimization challenges: Transportation Logistics: Minimizing the total cost of delivering raw materials from multiple supply points to various destinations. Warehouse Distribution: Identifying the most economical delivery route from warehouses to retail stores while meeting specific demand units. Resource and Production Planning: Maximizing factory profit by balancing raw material stocks, such as steel and non-ferrous metals, against equipment labor hours. By reducing these systems of inequalities and equations into single-variable linear functions, we can clearly determine the precise values needed to minimize costs or maximize returns.

Problem 1. At points A and B, there are 15 wagons each, making a total of 30 wagons of raw materials. All wagons must be delivered to points C and D, where 10 wagons must be delivered to point C and 20 wagons to point D. The transportation cost for one wagon is as follows: from A to C – 1 soum; from A to D – 3 soums; from B to C – 2 soums; from B to D – 5 soums. Plan the transportation of the raw materials in such a way that the total transportation cost is minimized.

Solution of the problem. The following table fully represents all the conditions of the problem:

	C		D		
A		1		3	15
B		2		5	15
	10		20		

It is also convenient to represent the transportation plan in a similar table. For example, let us present the table corresponding to sending 3 wagons from point A to C, 12 wagons from A to D, 7 wagons from B to C, and 8 wagons from B to D:

	C		D		
A	3	1	12	3	15
B	7	2	8	5	15
	10		20		

For this plan, we calculate the corresponding transportation costs:

$$H = 3 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 93 \text{ soums.}$$

Many similar transportation plans can be constructed. Among all feasible plans, it is required to find the optimal one. By a *feasible plan*, we mean a plan in which 15 wagons are shipped from each of points A and B, and 10 and 20 wagons are delivered to points C and D, respectively. By an *optimal plan*, we mean a feasible plan that requires the minimum total transportation cost.

To solve the problem, we construct its mathematical model. Let x wagons be transported from A to C, and y wagons from B to C. Similarly, let z wagons be transported from A to D, and u wagons from B to D.

MATHEMATICS

	C		D		
A	x	1	z	3	15
B	y	2	u	5	15
	10		20		

Since a total of 10 wagons must be delivered to point C, we obtain the condition: $x + y = 10$.

Similarly, since 20 wagons must be delivered to point D, we have the condition: $z + u = 20$.

On the other hand, since 15 wagons must be shipped from each of points A and B, we have:

$$x + z = 15$$

$$y + u = 15$$

The inequalities obtained above and the non-negativity of the quantities (x, y, z, u) are called the constraint system of Problem 1, that is, the constraint system can be written in the following form:

$$\begin{cases} x+y=10, \\ z+u=20, \\ x+z=15, \\ y+u=15. \end{cases} \quad (1)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, u \geq 0$$

Let us denote the transportation cost of the goods by (F) and calculate it:

$$F = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + 5 \cdot u \quad (2)$$

To solve the given problem, we need to find values of the variables (x, y, z, u) such that the function (F) takes its minimum value.

The problem can be reduced to checking a single-variable linear function. Indeed, from system (1) we get the equalities: $y = 10 - x$, $z = 15 - x$, $u = 5 + x$ and we substitute these into (2):

$$F = x + 3(15 - x) + 2(10 - x) + 5(5 + x) = 90 + x$$

Here, the variable (x) can take integer values from 0 to 10. Therefore, when $x = 0$, the function F attains its minimum value of 90. Thus, the optimal transportation plan is represented in the following table:

	C		D		
A	0	1	15	3	15
B	10	2	5	5	15
	10		20		

Problem 2. There are raw materials in two warehouses, which need to be delivered to three stores. Warehouse 1 has 10,000 units, and warehouse 2 has 5,000 units of raw materials. It is required to deliver 4,000 units to store 1, 8,000 units to store 2, and 3,000 units to store 3. The transportation cost per unit from the warehouses to the stores is given in the following table:

	1-store	2-store	3-store
1-warehouse	3 soums	3 soums	2 soums
2-warehouse	6 soums	5 soums	1 soum

Plan the delivery of goods from the warehouses to the stores in such a way that the total transportation cost is minimized.

Solution of the problem. Let x units be transported from warehouse 1 to store 1, and y units from warehouse 1 to store 2. Then, from warehouse 1 to store 3, the number of units transported will be: $10000 - (x + y)$.

From warehouse 2, the units delivered to stores 1, 2, and 3 will be, respectively:

$$4000 - x, 8000 - y, 3000 - [10000 - (x + y)] = x + y - 7000.$$

	1-s	2-s	3-s	
1-w	x	y	$10000 - x - y$	10000
2-w	$4000 - x$	$8000 - y$	$x + y - 7000$	5000
3-w	4000	8000	3000	

Now we calculate the transportation costs:

$$F = 3x + 2y + 6(10000 - x - y) + 5(4000 - x) + 5(8000 - y) + x + y - 7000 = 77000 - 4x - 3y$$

Taking the above conditions into account, for the variables x and y :

$$0 \leq x \leq 4000, \quad 7000 \leq x+y \leq 10000$$

inequalities arise. Then

$$F = 77000 - x - 3(x+y) \geq 77000 - 4000 - 3 \cdot 10000 = 43000$$

Thus, the function F attains its minimum value when $x = 4000$ and $y = 6000$.

Accordingly, the optimal transportation plan is represented in the following table:

	1-s	2-s	3-s	
1-w	4000 3	6000 3	0 2	10000
2-w	0 6	2000 5	3000 1	5000
3-w	4000	8000	3000	

Thus, the minimum cost of delivering all the goods amounts to 43,000 soums:

$$F_{\min} = 43000.$$

Problem 3. In the production of two types of products, A and B: The first stage uses the services of lathes and benchwork machines. The second stage uses two types of raw materials: steel and non-ferrous metal. The table below provides information on the resources required to produce one unit of each product and the total availability of these resources in the factory:

Resource name	Measurement	Consumption for unit		Resource stock
		A	B	
Steel	kg	10	70	320
Non-ferrous metal	kg	20	50	420
Lathe	Hour	300	400	6200
Benchwork station	Hour	200	100	3400
Profit per unit	soum	3000	8000	

The factory earns a profit of 3,000 soums per unit of product A and 8,000 soums per unit of product B. Plan the factory's production so that, first, the carpentry machine is fully utilized, and second, the factory's profit is maximized.

Solution. Let the factory produce x units of product A and y units of product B. Then the consumption of resources will be steel: $(10x + 70y)$; non-ferrous metal: $(20x + 50y)$ Since the available stock of steel and non-ferrous metal is 320 kg and 420 kg, respectively, the consumption must not exceed the available amount:

$$10x + 70y \leq 320,$$

$$20x + 50y \leq 420.$$

In the production process, the lathe is used for $(300x + 400y)$ hours, and its operating time must not exceed 6,200 hours:

$$300x + 400y \leq 6200.$$

According to the problem condition, the benchwork machine must be fully utilized:

$$200x + 100y = 3400.$$

Thus, the constraint system of the problem takes the following form:

$$\begin{cases} 10x + 70y \leq 320, \\ 20x + 50y \leq 420, \\ 300x + 400y \leq 6200, \\ 200x + 100y = 3400, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

The profit from selling the products is represented by the function:

$$F = 3000x + 8000y$$

From equation $200x + 100y = 3400$ of system (3), let us express y in terms of x and substitute it into the remaining equations of the system and into the function F :

$$y=34-2x; \begin{cases} x+34-2x \leq 32, \\ 2x+5(34-2x) \leq 42, \\ 3x+4(34-2x) \leq 62, \\ 34-2x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 15\frac{11}{13}, \\ x \geq 16, \\ x \geq 14\frac{4}{5}, \\ x \leq 17 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 16 \leq x \leq 17$$

$$F=3000x+8000(34-2x)=(272-13x) \cdot 1000$$

Thus, to solve the economic problem under consideration, we need to determine the maximum value of the function $F = (272 - 13x)1000$ on the interval $[16; 17]$. By simple reasoning, we find that $x_{max}=16$, $F_{max}=64000$ dr

Conclusion. This study demonstrates elementary approaches to solving linear programming problems in economics. Through three distinct scenarios—ranging from wagon logistics to factory production planning—it is shown that complex economic conditions can be effectively reduced to rigorous mathematical models. The primary findings of the analysis include: Modeling Versatility: The use of systems of linear equations and inequalities allows for the formalization of diverse constraints regarding resources, equipment capacity, and market demand. Variable Reduction Method: When the number of independent variables is small, expressing all parameters through a single variable transforms the search for an optimum into the analysis of a simple linear function over a specific interval. Economic Impact: Applying these methods yields concrete quantitative results, such as minimizing transportation costs to specific values (e.g., 90 or 43,000 soums) or maximizing factory profit while ensuring full utilization of machinery. In summary, these elementary methods serve as an accessible and powerful tool for operational decision-making in environments with limited resources.

REFERENCES:

1. Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press. (The foundational text for the simplex method and linear optimization used in your models).
2. Taha, H. A. (2017). *Operations Research: An Introduction* (10th ed.). Pearson Education.
3. Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2021). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill Education. (Covers resource allocation and cost minimization strategies).
4. Xashimov, A. A. (2012). *Matematik dasturlash va iqtisodiy masalalarni optimallashtirish*. O'quv qo'llanma. Andijon.
5. Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms*. Brooks/Cole Editorial Office. (Excellent for practical case studies involving warehouse distribution and logistics).
6. Vanderbei, R. J. (2020). *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Springer. (Detailed analysis of the mathematical modeling of constraints and feasible regions).
7. Gass, S. I. (2010). *Linear Programming: Methods and Applications*. Courier Corporation. (Focuses on reducing multi-variable systems to find optimal values).
8. Chvátal, V. (1983). *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company. (Provides the logic behind the "optimal plan" and "feasible plan" terminology used in the article) [cite_start][cite: 26].

MODULLI TENGLAMALAR SISTEMALARI VA TENGSIZLIKLARNI YECHISH USULLARI

Rasulova Gulnozaxon Azamovna,

Qo'qon davlat pedagogika instituti

Matematika kafedrası dotsenti,

pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

rasulovagulnozaxon@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada modulli tenglama va tengsizliklar hamda ularning tatbiqlariga doir masalalarni yechishning odatdagi usulida haqiqiy sonning moduli ta'rifiga asosan noma'lumning qabul qiladigan qiymatlari to'plami har birida qatnashayotgan funksiyalar o'z ishorasini saqlab qoladigan, kesishmaydigan qismlariga ajratilib, tengsizliklar to'plamini yechishga o'tish usullari keltirilgan bo'lib, ba'zi hollarda boshqa usullardan ham foydalanish mumkinligi yoritilgan. Modulli tenglama va tengsizliklar, ularning tatbiqlariga doir masalalarni yechish bevosita hayotda uchraydigan ilmiy-amaliy masalalarni hal qilishga qaratilgan fanning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanib, uzluksiz ta'lim tizimining barcha bosqichlarida qo'llash amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: modulli tenglama va tengsizliklar, tenglamalar sistemasi, haqiqiy sonning moduli, funksiya, tengsizliklar to'plami, usul.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ МОДУЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Аннотация. В статье в обычном методе решения задач, связанных с модулярными уравнениями и неравенствами и их приложениями, основанном на определении модуля действительного числа, множество значений неизвестного разбивается на непересекающиеся части, каждая из которых сохраняет свой знак и решает совокупность неравенств. Перечисляется совокупность методов решения неравенств, а в некоторых случаях поясняется, что можно использовать и другие методы. Модульные уравнения и неравенства, а также решение задач, связанных с их применением в реальной жизни, являются одним из важных направлений обучения. Это имеет практическое значение на всех этапах непрерывной системы образования, и его применение обладает практической значимостью.

Ключевые слова: модулярные уравнение и неравенства, система уравнений, модуль действительного числа, функция, набор неравенств, метод.

METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF ABSOLUTE VALUE EQUATIONS AND INEQUALITIES

Abstract. In the article, in the usual method for solving problems related to modular equations and inequalities and their applications, based on the definition of the modulus of a real number, the set of values of the unknown is divided into disjoint parts, each of which retains its sign and solves the set of inequalities. A set of methods for solving inequalities is listed, and in some cases it is explained that other methods can be used. Modular equations and inequalities, along with solving problems related to their applications in real life, are considered one of the important directions of the subject. Addressing problems directly related to the scientific and practical challenges encountered in daily life is a crucial aspect of the comprehensive education system at all levels. This application holds practical significance across all stages of the education system.

Key words: modular equations and inequalities, system of equations, modulus of a real number, function, the set of inequalities, method.

Kirish. Mamlakatimizda mavjud uzluksiz ta'lim tizimining har bir bo'g'inida o'quvchi-yoshlar, talabalarni o'qitish ishlarida an'anaviy metodlardan tashqari noan'anaviy metodlardan foydalanish, yangi pedagogik texnologiyalar, kompyuter va axborot texnologiyalaridan unumli foydalanish, tabiiy va ijtimoiy fanlarni, jumladan, matematik tahlil, differentsial tenglamalar, matematik fizika tenglamalari fanlarini o'qitishda, muhim amaliy masalalarni yechishda yangidan-yangi usullarni qo'llash va bunday usullarni ishlab chiqish va takomillashtirish masalalari dolzarb masalalardan biri bo'lib kelmoqda.

Ta'lim-tarbiya jarayonini maqsadga muvofiq tashkil etish va o'qituvchilarning pedagogik faoliyati, ularning kasbiy tayyorgarligidagi qayd etilgan kamchiliklarni bartaraf etish uchun:

- o'qituvchi va o'quvchilar o'rtasidagi munosabatlarni insonparvarlashtirish va demokratlashtirish;
- ta'lim-tarbiya jarayonida o'quvchilarning bilish faoliyatini hamkorlikda tashkil etish va boshqarish orqali ongli intizomni tarkib toptirish;
- o'qitishda zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalaridan uyg'un ravishda foydalanish orqali ta'lim samaradorligiga erishish;
- o'quvchilarning bilish faoliyatini mustaqil va ijodiy izlanish asosida tashkil etish orqali mustaqil va ijodiy faoliyatni tarkib toptirish;

o'quvchilarning qiziqishlari, ehtiyojlari va qobiliyatlarini hisobga olgan holda ta'lim-tarbiya jarayoniga tabaqalashtirilgan yondashuvning ilmiy-metodik asoslarini ishlab chiqish va amaliyotga joriy etish zarur.

Matematika fanining o'zida ham ko'rsatib o'tilgan masalalarga aloqador alohida mavzular va masalalar mavjud. Shulardan biri modulli tenglama va tengsizliklar va ularni tatbiqlariga doir misollardir. Umuman olganda ushbu misollar "modulli tenglamalar", "modulli tengsizliklar", "modulli tenglama va tengsizliklar sistemalar" kabi tushunchalar va bu misollarni elementar ko'rinishlari orqali o'quvchilar ongida quyi sinflardan boshlab shakllantirilib boriladi. Modulli tenglama va tengsizliklar, ularning tatbiqlari masalalari va ularni hal qilish esa bevosita hayotda uchraydigan ilmiy-amaliy masalalarni hal qilishga qaratilgan fan yo'nalishidir. Shuning uchun tenglama va tengsizliklar hamda ularning tatbiqlariga doir masalalarni ta'lim bosqichlarining barcha bo'g'inlarida, ya'ni umumta'lim maktablari, akademik litsey va kasb hunar kollejlari va oliy ta'limda o'rgatilishini tizimli tahlil qilish, modulli ifodalar va ularning tatbiqlari masalalari bo'yicha tadqiqot ishlarini olib borish matematik usullari bilan bog'liqligini ochib berish dolzarb masalalardandir.

Asosiy qism. Modul belgisi qatnashgan tengsizliklarni yechishning odatdagi usulida haqiqiy sonning moduli ta'rifi asosan noma'lumning qabul qiladigan qiymatlari to'plami har birida qatnashayotgan funksiyalar o'z ishorasini saqlab qoladigan, kesishmaydigan qismlariga ajratilib, tengsizliklar to'plamini yechishga o'tiladi.

Bu asosiy usul bo'lib, ayrim misollarni yechishda juda ko'p hollar bilan ish olib borishga to'g'ri keladi. Shuning uchun ba'zi hollarda boshqa usullardan ham foydalanish mumkin.

$$1\text{-qoida: } |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \quad (*)$$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \quad (**)$$

teng kuchlilik xossasidan foydalanish mumkin [3;134].

$$2\text{-qoida: } |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2 \quad (***)$$

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2 \quad (****)$$

3- qoida: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ teng kuchlilikdan ham foydalaniladi.

4- qoida: Ba'zi bir sodda tengsizliklarni $\rho(M, N)$ masofa tushunchasidan foydalanib ham yechish mumkin.

1- misol : $|x-2| < 3$ tengsizlikni yeching.

a) 3- qoidadan foydalanamiz.

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$$

b) $|x-2| = \rho(M(x), N(2)) < 3$, bu 2 nuqttagacha bo'lgan masofalari 3 dan kichik bo'lgan x nuqtalar to'plami: $-1 < x < 5$

v) Yuqoridagi 2- qoidadagi (****) ga ko'ra :

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 3 \\ x-2 > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 5$$

d) Umumiy qoidaga ko'ra :

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -x+2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ 2 \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

2-misol: $|1-3x| > 2$ tengsizlikni yeching.

$$|1-3x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x > 2 \\ 1-3x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x > 1 \\ -3x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases} \text{ demak, } x < -\frac{1}{3} \text{ va } x > 1$$

3-misol: $|2x-1| \leq |3x+1|$ tengsizlikni yeching.

$$(2x-1)^2 \leq (3x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x \geq 0 \Leftrightarrow 5x(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Demak, $x \leq -2$ va $x \geq 0$ yechimlar to'plami.

4-misol: $\left| \frac{3x+1}{2x-1} \right| > 1$ tengsizlikni yeching.

$$2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \text{ uchun } \left| \frac{3x+1}{2x-1} \right| = \frac{|3x+1|}{|2x-1|} \text{ shuning uchun } \frac{|3x+1|}{|2x-1|} > 1 \text{ tengsizlikni yechamiz.}$$

$$\frac{|3x+1|}{|2x-1|} > 1 \Leftrightarrow |3x+1| > |2x-1| \Leftrightarrow (3x+1)^2 > (2x-1)^2 \text{ bundan}$$

$$9x^2 + 6x + 1 > 4x^2 - 4x + 1 \text{ yoki } 5x^2 + 10x > 0 \text{ kvadrat tenglama ko'rinishiga keldi.}$$

$$5x(x+2) > 0 \text{ tengsizlikni yechimlar to'plami } x < -2 \text{ va } x > 0 \text{ dan iborat, lekin yuqorida } x \neq \frac{1}{2} \text{ deb}$$

olgan edik. Shuning uchun yechimlar to'plami $(-\infty : -2) \cup \left(0 : \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2} : +\infty\right)$ dan iborat bo'ladi.

5-misol: $|x-1| + |2x+3| > 7$ tengsizlikni yeching [1; 67].

Yuqoridagi (****) qoidani qo'llaymiz:

$$\begin{cases} 2x+3 > 8-x \\ 2x+3 < x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3} \\ x < -11 \end{cases} \quad \begin{matrix} x < -11 & x > 3 \end{matrix}$$

$$|x-1| + |2x+3| > 7 \Leftrightarrow |x-1| > 7 - |2x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 7 - |2x+3| \\ x-1 < |2x+3| - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x+3| > 8-x \\ |2x+3| > x+6 \end{cases}$$

Demak, $(-\infty : -11) \cup (3 : \infty)$ tengsizlikni yechimlari to'plami bo'ladi.

6-misol: $|x-1| + |x-2| < x+3$ tengsizlikni yeching.

$$|x-1|+|x-2|<x+3 \Leftrightarrow |x-1|<x+3-|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1 < x+3-|x-2| \\ x-1 > |x-2|-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| < 4 \\ |x-2| < 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < -2 < 4 \\ x-2 < 2x+2 \\ x-2 > -2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 6 \\ x > -4 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 6 \\ x > 0 \\ 0 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Demak, $(0;6)$ tengsizlikning yechimlar to'plami.

7-misol: $|x|+|x-1|+|x-2|<4$ tengsizlikni yeching.

Bu tengsizlikni umumiy qoidani qo'llash orqali yechamiz.

Har bir hadni nolga aylantiradigan nuqtalarini topib, hadlarning ishorasi o'zgarmaydigan oraliqlarni ajratamiz.

Bu oraliqlar $(-\infty;0), [0;1), [1;2), (2;\infty)$ bo'ladi.

1) $x \in (-\infty;0)$ da $x < 0, x-1 < 0, x-2 < 0$ bo'ladi. Shuning uchun $|x|=-x, |x-1|=1-x, |x-2|=2-x$ bo'ladi.

2) $x \in [0;1)$ da $x \geq 0, x-1 < 0, x-2 < 0$ bo'lib,

$|x|=x, |x-1|=1-x, |x-2|=2-x$ bo'ladi.

3) $x \in [1;2)$ da $x > 0, x-1 \geq 0, x-2 < 0$ bo'lib, $|x|=x, |x-1|=x-1, |x-2|=2-x$ bo'ladi.

4) $x \in (2;\infty)$ da $x > 0, x-1 > 0, x-2 > 0$ bo'lib, $|x|=x, |x-1|=x-1, |x-2|=x-2$ bo'ladi.

Shunday qilib, berilgan tengsizlik quyidagi sistemalarni to'plamiga teng kuchli bo'ladi.

$$\begin{cases} \begin{cases} x < 0 \\ -3x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x < 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x < \frac{7}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -\frac{1}{3} < x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x < \frac{7}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3} \quad \text{Demak, } \left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right) \text{ berilgan}$$

tengsizliklar tenglamalar yechimi bo'ladi.

8-misol: $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| > 1$ tengsizlikni yeching.

$$\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| > 1 \Leftrightarrow |x^2-3x+2| > |x^2+3x+2|, \quad (x \neq -2, x \neq -1)$$

Bu tengsizlikni ushbu paragrafdagi 1- va 2- qoidalar yordamida bajarish mumkin:

$$|x^2-3x+2| > |x^2+3x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 > x^2+3x+2 \\ x^2+3x+2 < -x^2+3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x^2 + 3x + 2| < x^2 - 3x + 2 \\ |x^2 + 3x + 2| < -x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 < x^2 - 3x - 2 \\ x^2 + 3x + 2 > -x^2 + 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 > -2 \\ x^2 < -2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \otimes \end{cases} \Rightarrow x < 0$$

Tengsizlik yechimlar to'plami $(-\infty : -2) \cup (-2 : -1) \cup (-1 : 0)$ bo'ladi.

9-misol: $|\log_{\sqrt{2}} x - 2| - |2 - \log_2 x| > 1$ tengsizlikni yeching.

Bu tengsizlikni ham ilgari ko'rib o'tilganlardan biri bilan yechamiz, lekin yozuvni ixchamlashtirish maqsadida $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ ayniyatdan foydalansa bo'ladi.

$$\begin{aligned} |\log_{\sqrt{2}} x - 2| > 1 + |2 - \log_2 x| &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 - 2 > 1 + |2 - \log_2 x| \\ \log_2 x^2 - 2 < -1 - |2 - \log_2 x| \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} |2 - \log_2 x| < \log_2 x^2 - 3 \\ |2 - \log_2 x| < 1 - \log_2 x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - \log_2 x < \log_2 x^2 - 3 \\ 2 - \log_2 x > 3^2 \log_2 x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - \log_2 x < 1 - \log_2 x \\ 2 - \log_2 x > \log_2 x^2 - 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \log_2 x^3 > 5 \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_2 x > 5 \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > \frac{5}{3} \\ \log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2^{\frac{5}{3}} \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2^{\frac{5}{3}} \\ \begin{cases} \log_2 x < -1 \\ \log_2 x^3 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -1 \\ 3\log_2 x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -1 \\ \log_2 x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 0,5 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

10-misol: $|x+1|^{x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2}} < 1$ (*) bu tengsizlikni yechamiz.

$$\begin{cases} \begin{cases} 0 < |x+1| < 1 \\ x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x+1| > 1 \\ x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \\ 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Demak, yechimlar to'plami: $(-2 : -1) \cup (-1 : 0) \cup (1 : \frac{3}{2})$ bo'ladi

Modul qatnashgan tenglamalar sistemasini yoki tengsizliklar sistemasini yechishga ifodalardagi modul qatnashgan hadlarni modulsiz yozishga o'tib, so'ng odatdagi sistema yechiladi [4; 94].

11-misol: $\begin{cases} |x| + 3y = 7 \\ 2x + 2|y-1| = 3 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching. $x=0$ va $y-1=0$ munosabatlar

yordamida koordinata o'qlari shunday oraliqlarga bo'lamizki, ularning har birida modul ostidagi ifodalar o'z ishoralarini saqlab qoladilar. Shunday qilib,

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| + 3y = 7 \\ 2x + 2|y-1| = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 0, y < 1 \\ -x + 3y = 7 \Rightarrow \\ 2x - 2y = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, y \geq 1 \\ -x + 3y = 7 \Rightarrow \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, y < 1 \\ x + 3y = 7 \Rightarrow \\ 2x - 2y = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 1 \\ x + 3y = 7 \Rightarrow \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x < 0, y < 1 \\ x = \frac{17}{4} \Rightarrow \otimes \\ y = \frac{15}{4} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 0, y < 1 \\ x = \frac{1}{8}, y = \frac{19}{8} \Rightarrow \odot \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, y < 1 \\ x = \frac{17}{8}, y = \frac{13}{8} \Rightarrow \otimes \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 1 \\ x = \frac{1}{4}, y = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, y = 2\frac{1}{4} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Demak, tenglama $x = \frac{1}{4}, y = 2\frac{1}{4}$ yagona yechimga ega.

12-misol: $\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x-1}{x} \right| + \left| \frac{1}{1+y} \right| = 1 \\ 2 \left| \frac{1}{1+y} - \frac{x-1}{x} \right| = 2 \end{array} \right\}$ sistemani yeching.

Oldin $\left| \frac{x-1}{x} \right| = u, \left| \frac{1}{1+y} \right| = v$ belgilashlar kiritilib, $\begin{cases} u+v=1 \\ 2v-u=2 \end{cases}$ sistemani hosil qilamiz. Bundan

$v=1$ va $u=0$ kelib chiqadi. Demak, $\frac{1}{1+y} = 1 \Rightarrow 1+y=1$ yoki $y=-2$ va $y=0, \left| \frac{x-1}{x} \right| = 0$ va $x=1$

hosil bo'ladi.

Demak, berilgan sistema $(1:-2)$ va $(1:0)$ yechimga ega.

13-misol: $\left\{ \begin{array}{l} |\log_a x| < 1 \\ \frac{\log_a x}{1 - \log_a x} < 1 \end{array} \right. \quad (a > 1)$ sistemani yeching [2;127].

$$\left\{ \begin{array}{l} |\log_a x| < 1 \\ \frac{\log_a x}{1 - \log_a x} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_a x > -1 \\ \log_a x < 1 \\ \log_a x < 1 - \log_a x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_a x > -1 \\ 2\log_a x < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -1 < \log_a x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} < x < \sqrt{a}$$

14-misol: $\left\{ \begin{array}{l} x+y-7 < 0 \\ |x-y| < 2 \\ 4x > 5 \end{array} \right\}$ sistemani yeching.

$|x-y| > 2 \Leftrightarrow -2 < x-y < 2$ bo'lgani uchun berilgan sistema

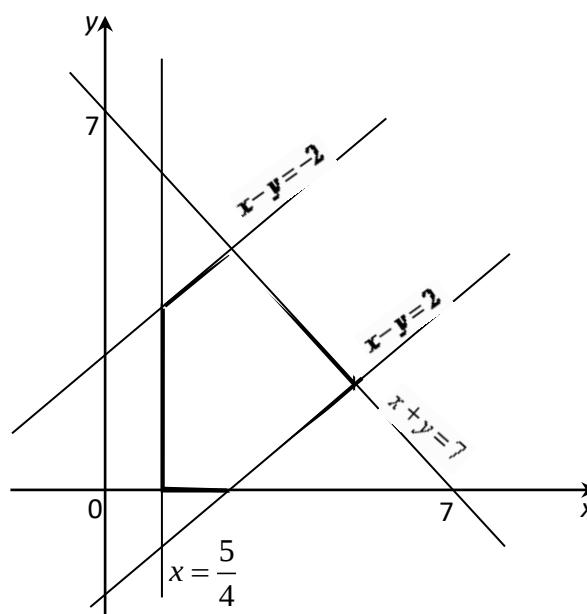
$$\begin{cases} x+y-7 < 0 \\ x-y > -2 \\ x-y < 2 \\ 4x > 5 \end{cases} \text{ sistemaga teng kuchlidir.}$$

Endi $x+y=7$, $x-y=-2$, $x-y=2$, $4x=5$ to'g'ri chiziqlarni koordinatalar sistemasida chizib, so'ngra har bir tengsizlikni ifoda qiladigan yarim tekislik aniqlanadi.

Shtrixlangan soha:

$$\begin{cases} \frac{5}{4} < x < \frac{5}{2} \\ x-2 < y < x+2 \end{cases} \begin{cases} \frac{5}{2} < x < \frac{9}{2} \\ x-2 < y < -x+7 \end{cases} \text{ bilan chegaralangan.}$$

Demak, sistemaning yechimlari to'plami tekislikda shtrixlangan sohaning yuzidan iborat, faqat to'g'ri chiziqlar kirmaydi.



1 – rasm.

15-misol: $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ |x-1| - y = -5 \end{cases}$ sistemani yeching.

Sistemaning 2- tenglamasidan $|x-1| = y-5$ ya'ni $y-5 \geq 0$ yoki $y \geq 5$ kelib chiqadi. U holda $|y-5| = y-5$ bo'lib, sistema quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} |x-1| + (y-5) = 1 \\ |x-1| = y-5 \end{cases} \Leftrightarrow 2|x-1| = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{3}{2}$$

U holda $y = \frac{11}{2}$, demak $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ va $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ sistemaning yechimlaridir.

Xulosa. Shunday usullar orqali misollarni yechishni o'quvchilarga, talabalarga, abutiriyentlarga tushuntirsa, ularning tushunishlari oson bo'ladi. Bunday usullarni qolgan modul qatnashgan misollarga qo'llab ularni yechish ancha qulaydir.

ADABIYOTLAR:

1. A.G'.Hikmatov. Modulli ifodalar.- Toshkent:- "O'qituvchi", 1993, 121 b.
2. П.Ф.Севрюков, А.Н.Смоляков. "Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения". Москва. Ставрополь. 2005, стр. 315

3. M.A. Mirzaahmedov, A.A.Rahimqoriyev. 6-sinf. Matematika darsligi. 2005-yil, T. "O'qituvchi", 224 b.
4. Sh.A. Alimov, O.R.Holmuhammedov, M. A. Mirzaahmedov. 8-sinf. Algebra darsligi. 2006-yil, T. "O'qituvchi", 222 b.
5. X.Tilavoldiyev. Matematika. -Toshkent:-"O'qituvchi",1994.
6. [http://: www.puremath.com](http://www.puremath.com)

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A TIME-DEPENDENT EQUATION WITH A FRACTIONAL POWER OF THE BESSEL OPERATOR

Durdiyev Umid Durdimuratovich,
Docent at Bukhara State University
umidjan93@mail.ru

Raxmatova Nigora Jamshid qizi,
Basic doctoral at Bukhara State University
nigora.raxmatova99@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the Cauchy problem for a second-order time-dependent equation involving a fractional power of the Bessel operator. By applying the Fourier–Bessel (Hankel) transform, the original problem is reduced to an ordinary differential equation in the spectral domain. Using the obtained spectral solution and the inverse Hankel transform, an explicit integral representation of the solution is derived. Employing the product formula for Bessel functions, the solution is rewritten in terms of a generalized translation operator and Bessel convolution, and the corresponding Green functions are introduced. Finally, the existence of the solution is established using Young's inequality, while the fulfillment of the initial conditions is verified via the Plancherel theorem.

Keywords: Bessel operator, Fourier–Bessel transform, Hankel transform, Green function, Bessel convolution, Young inequality, Plancherel theorem.

BESSEL OPERATORINING KASR DARAJALI VA VAQTGA BOG'LIQ TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASI HAQIDA

Annotatsiya. Ushbu ishda biz Bessel operatorining kasr darajasi qatnashgan vaqtga bog'liq ikkinchi tartibli tenglama uchun Koshi masalasini o'rganamiz. Tenglamani yechishda Fourier–Bessel (Hankel) almashtirishidan foydalanib, masalani spektral sohada oddiy differensial tenglamaga keltiramiz. Spektral yechimdan foydalanib, teskari Hankel almashtirish orqali yechimning aniq integral ko'rinishini hosil qilamiz. Bessel funksiyalari ko'paytmasi formulasi yordamida yechimni umumlashgan siljitish operatori va konvolyutsiya ko'rinishiga keltiramiz hamda Green funksiyalarni aniqlaymiz. Nihoyat, Young tengsizligi yordamida yechim mavjudligini va Plancherel tengligi orqali boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Kalit so'zlar: Bessel operatori, Fourier-Bessel almashtirishi, Hankel transform, Green funksiyasi, Bessel konvolyutsiyasi, Young tengsizligi, Plancherel tengligi.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ ДРОБНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Аннотация. В данной работе исследуется задача Коши для уравнения второго порядка по времени с дробной степенью оператора Бесселя. С помощью преобразования Фурье–Бесселя (Ханкеля) исходное уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в спектральной области. Используя найденное спектральное решение, с применением обратного преобразования Ханкеля получено интегральное представление решения. Применяя формулу произведения функций Бесселя, решение приводится к виду обобщённого оператора сдвига и свёртки, а также вводятся соответствующие функции Грина. В заключение, с использованием неравенства Юнга доказывается существование решения, а с помощью равенства Планшереля устанавливается выполнение начальных условий.

Ключевые слова: оператор Бесселя, преобразование Фурье–Бесселя, преобразование Ханкеля, функция Грина, свёртка Бесселя, неравенство Юнга, равенство Планшереля.

Introduction. Fractional differential equations have been extensively studied in recent decades due to their wide range of applications in physics, engineering, and applied sciences. Fundamental contributions to the theory of fractional calculus and its applications can be found in the monographs by Podlubny ([1],[8]). These works provide the analytical background for studying nonlocal operators and fractional evolution equations.

On the other hand, differential equations involving the Bessel operator arise naturally in problems with radial symmetry and singularities at the origin. Various properties of Bessel functions and related integral transforms are discussed in detail in classical works such as Watson \cite{Watson}. Equations associated with the Bessel operator and their spectral analysis have been investigated in a number of papers, particularly in connection with Fourier–Bessel (Hankel) transforms and generalized translation operators (see, for example, [2]–[7]).

Fractional powers of differential operators, including the Bessel operator, have also attracted significant attention. In particular, problems involving fractional diffusion-wave equations have been studied in ([9]–[13], where existence, uniqueness, and inverse problems were analyzed under various conditions. These studies demonstrate that the combination of fractional derivatives and singular operators leads to new analytical challenges, especially in weighted functional spaces.

Despite the considerable progress in this direction, the analysis of Cauchy problems for second-order in time equations involving fractional powers of the Bessel operator still requires further investigation, particularly for the case $1 < \beta < 2$.

In the present paper, we study the Cauchy problem for a second-order in time equation with a fractional power of the Bessel operator. Our approach is based on the Fourier–Bessel (Hankel) transform ([14],[15]), which allows us to reduce the problem to an equation in the spectral domain. The solution is then represented in a convolution form.

To establish the main results, we employ the Plancherel theorem for the Hankel transform and Young’s inequality. The Plancherel identity is used to verify that the obtained solution satisfies the initial conditions in the weighted space $L^2_\nu(0, \infty)$, while Young’s inequality provides the necessary estimates to prove the existence of the solution.

Basic Notions and Definitions. In this section, we present the fundamental concepts and definitions that will be used throughout the paper. These preliminaries establish the analytical framework necessary for studying the problem under consideration. In particular, we recall the definition of the Bessel function of the first kind of order ν , which plays a central role in our analysis. All introduced notions will be employed in the sequel without further reference. The normalized Bessel function

$j_\nu(x)$ associated with the Bessel function of the first kind $J_\nu(x)$ is defined by

$$j_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) z^{-\nu} J_\nu(z)$$

here

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad x \in \mathbb{R}, \nu > -1.$$

Definition 1. Let $\nu > -\frac{1}{2}$. The Hankel transform of order ν of a function $f(x, t), x \in (0, \infty)$, is defined by

$$(H_\nu f)(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda, t) = \int_0^\infty f(x, t) j_\nu(\lambda x) d\sigma_\nu(x), \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

The corresponding inverse Hankel transform is given by

$$(H_\nu^{-1} f)(\lambda, t) = f(\lambda, t) = \int_0^\infty \hat{f}(x, t) j_\nu(\lambda x) d\sigma_\nu(\lambda), \quad x > 0. \quad (2)$$

The eigenfunction $j_\nu(\lambda \xi)$ satisfies the following product formula (see, [3]): for all $x, \xi \in (0, +\infty)$,

$$j_\nu(\lambda x) j_\nu(\lambda \xi) = c_\nu \int_0^\pi j_\nu(\lambda \rho(x, \xi, \theta)) (\sin \theta)^{2\nu} d\theta, \quad (3)$$

Where

$$\rho(x, \xi, \theta) = \sqrt{x^2 + \xi^2 + 2x\xi \cos \theta}, \quad c_\nu = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}.$$

The previous product formula allows us to define the Hankel translation operator and the convolution product related to the Bessel operator $(-B_\nu)^{\beta/2}$.

Theorem 1. (Plancherel)(see [3], 143–144). Let $f, g \in L^2((0, \infty), d\sigma_\nu)$. Then

$$\int_0^\infty f(x) g(x) d\sigma_\nu(x) = \int_0^\infty H_\nu(f)(\lambda) H_\nu(g)(\lambda) d\sigma_\nu(\lambda).$$

In particular,

$$\|f\|_{L^2((0, \infty), d\sigma_\nu)} = \|H_\nu(f)\|_{L^2((0, \infty), d\sigma_\nu)}.$$

Theorem 2. (see, [13]) Let $d\sigma_\nu(x) = x^{2\nu+1} dx$, and let $*_\nu$ denote the Bessel convolution.

(i) If $f, g \in L^1(0, \infty), d\sigma_v$ then

$$f *_v g \in L^1(0, \infty), d\sigma_v,$$

$$\|f *_v g\|_{L^1((0, \infty), d\sigma_v)} \leq \|f\|_{L^1((0, \infty), d\sigma_v)} \|g\|_{L^1((0, \infty), d\sigma_v)}.$$

(ii) If $f \in L^1(0, \infty), d\sigma_v$ and $g \in L^2(0, \infty), d\sigma_v$

$$f *_v g \in L^2(0, \infty), d\sigma_v,$$

$$\|f *_v g\|_{L^2((0, \infty), d\sigma_v)} \leq \|f\|_{L^1((0, \infty), d\sigma_v)} \|g\|_{L^2((0, \infty), d\sigma_v)}$$

Proof (see, see, [13])

The Cauchy problem. In this subsection, we consider the Cauchy problem for the second-order in time equation with a fractional power of the Bessel operator. In the domain $\Omega := \{(x, t) : x \in (0, \infty), t > 0\}$, we consider the Cauchy problem for the time-fractional diffusion-wave equation with a fractional power of the Bessel operator:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) + (-B_v)^{\beta/2} u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

Where $1 < \beta < 2$ and $1 < \alpha < 2$

Here ∂_t^α denotes the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (1, 2)$, defined by

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} (t-\tau)^{1-\alpha} d\tau,$$

The Bessel differential operator B_v is given by

$$B_v u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2v+1}{x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad v > -\frac{1}{2}, x > 0.$$

And $(-B_v)^{\beta/2}$ denotes its fractional power of order $\beta/2$, with $1 < \beta < 2$. Moreover, $\Gamma(\cdot)$ is the Euler gamma function.

The initial conditions are prescribed as

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x > 0. \quad (5)$$

A regularity condition at $x = 0$, usually $|u(0, t)| < \infty$, is imposed to ensure bounded behavior of the solution near the singular point of the Bessel operator.

A function $u(x, t)$ is called a classical solution of the direct problem if:

1. For each fixed $t > 0$, the function $u(\cdot, t)$ is twice continuously differentiable with respect to x in $(0, \infty)$;
2. For each fixed $x > 0$, the Caputo fractional derivative $\partial_t^\alpha u(x, t)$ exists and is continuous for $t > 0$;
3. The fractional power $(-B_v)^{\beta/2} u(x, t)$ is well-defined for $x > 0, t > 0$;

The function $u(x, t)$ satisfies equation (1), the initial conditions (5), and the additional condition (6).

The Bessel operator B_v is self-adjoint in the weighted space $L_v^2(0, \infty), x^{2v+1} dx$, which allows the use of the Hankel transform and ensures the spectral representation of the solution.

To find the solution of (10)–(8), we apply the Hankel transform with respect to the space variable x .

Denoting

$$(H_v u)(\lambda, t) = \hat{u}(\lambda, t), \quad (H_v F)(\lambda, t) = \hat{F}(\lambda, t),$$

and using the standard property

$$H_v(-B_v)^{\beta/2} u(\cdot, t)(\lambda) = \lambda^\beta \hat{u}(\lambda, t).$$

we obtain

$$\partial_t^\alpha \hat{u}(\lambda, t) + \lambda^\beta \hat{u}(\lambda, t) = \hat{F}(\lambda, t), \quad \lambda > 0.$$

The initial conditions (8) take the forms

$$\hat{u}(\lambda, t)|_{t=0} = \hat{\varphi}(\lambda), \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\lambda, t)|_{t=0} = \hat{\psi}(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

where $\hat{\varphi} = H_v \varphi$ and $\hat{\psi} = H_v \psi$.

For fixed $\lambda > 0$, (5)-(6) is a Cauchy type problem for an ordinary fractional differential equation in t . Its solution is expressed by the Mittag-Leffler functions as

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda) E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) + t \hat{\psi}(\lambda) E_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^\beta (t-\tau)^\alpha) \hat{F}(\lambda, \tau) d\tau.$$

We denote by

$$\hat{\varphi}(\lambda) = (H_v \varphi)(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(\xi) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\xi), \quad \lambda > 0, \quad (A1)$$

$$\hat{\psi}(\lambda) = (H_v \psi)(\lambda) = \int_0^\infty \psi(\xi) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\xi), \quad \lambda > 0, \quad (A2)$$

And

$$\hat{F}(\lambda) = (H_v F)(\lambda, t) = \int_0^\infty F(\xi, t) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\xi), \quad \lambda > 0, t > 0. \quad (A3)$$

Applying the inverse Hankel transform and using (A1)-(A3), we return to the physical space. By the linearity of the Hankel transform the solution $u(x, t)$ admits the following integral representation:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^\infty \left[\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\lambda) \right] \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi) \\ & + \int_0^\infty \left[\int_0^\infty t E_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\lambda) \right] \psi(\xi) d\sigma_v(\xi) \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^\beta (t-\tau)^\alpha) j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\lambda) \right] F(\xi, \tau) d\sigma_v(\xi) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

For $x > 0$ and $t > 0$.

Note that each spectral bracket in (5) contains the product $j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi)$. To handle this product we invoke the classical product formula for Bessel functions and introduce the generalized Hankel translation operator τ_x^ν associated with the Bessel operator (by the product formula and the definition of τ_x^ν). In particular, for every fixed $\lambda > 0$ the factor $j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi)$. Substituting this representation into the brackets and changing the order of integration (by Fubini), we are led to expressions of the type

$$j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) = \tau_x^\nu(j_v(\lambda \cdot))(\xi).$$

Substituting this identity into each spectral bracket in (5) and changing the order of integration by Fubini's theorem, we obtain a convolution-type representation of the solution.

Indeed, for the first term in (5) we have

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\lambda) \right] \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi) \\ & = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) \tau_x^\nu(j_v(\lambda \cdot))(\xi) d\sigma_v(\lambda) \right] \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi). \end{aligned}$$

Interchanging the order of integration yields

$$\int_0^\infty \tau_x^\nu \left[\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) \tau_x^\nu(j_v(\lambda \cdot)) d\sigma_v(\lambda) \right] (\xi) \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi).$$

This motivates the introduction of the kernel

$$G_1(r, t) := \int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda r) d\sigma_v(\lambda), \quad (6)$$

Then, by the linearity of the generalized translation operator and its compatibility with the Hankel integral, we have

$$\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) \tau_x^\nu(j_v(\lambda \cdot))(\xi) d\sigma_v(\lambda) = \tau_x^\nu G_1(\xi, t)$$

Therefore,

$$\int_0^\infty E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda x) \hat{\varphi}(\lambda) d\sigma_v(\lambda) = \int_0^\infty \tau_x^\nu G_1(\xi, t) (\xi) \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi).$$

By the definition of the Hankel convolution, the last integral can be written as

$$\int_0^\infty \tau_x^\nu G_1(\xi, t) (\xi) \varphi(\xi) d\sigma_v(\xi) = (G_1(\cdot, t) *_v \varphi)(x).$$

In the same way, for the second term we define

$$G_2(r, t) := t \int_0^\infty E_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda r) d\sigma_v(\lambda), \quad (7)$$

and obtain

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty t E_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_v(\lambda x) j_v(\lambda \xi) d\sigma_v(\lambda) \right] \psi(\xi) d\sigma_v(\xi) = (G_2(\cdot, t) *_v \psi)(x).$$

Similarly, for the third term we introduce

$$G_3(r, t - \tau) := \int_0^\infty (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^\beta (t - \tau)^\alpha) j_\nu(\lambda r) d\sigma_\nu(\lambda), \quad (8)$$

which leads to

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^\beta (t - \tau)^\alpha) j_\nu(\lambda x) j_\nu(\lambda \xi) d\sigma_\nu(\lambda) \right] F(\xi, \tau) d\sigma_\nu(\xi) \\ &= \int_0^t (G_3(\cdot, t - \tau) *_\nu F(\cdot, \tau))(x) d\tau. \end{aligned}$$

Consequently, the solution $u(x, t)$ can be rewritten in the convolution form

$$u(x, t) = (G_1(\cdot, t) *_\nu \varphi)(x) + (G_2(\cdot, t) *_\nu \psi)(x) + \int_0^t (G_3(\cdot, t - \tau) *_\nu F(\cdot, \tau))(x) d\tau. \quad (9)$$

Theorem 3. Let $\nu > -\frac{1}{2}$, $1 < \alpha < 2$, $1 < \beta < 2$, and $T > 0$. Assume that $\varphi, \psi \in L_\nu^2(0, \infty)$ and $F \in L_\nu^1(0, \infty) \cap L_\nu^2(0, \infty)$. Define, for $t \in (0, T)$, (9). Then $u(x, t)$ is the solution in $L_\nu^2(0, \infty)$ of the Cauchy problem (1)-(3).

Proposition. Let $\nu > -\frac{1}{2}$, $1 < \alpha < 2$. Assume that $\varphi, \psi \in L_\nu^2(0, \infty)$ and $F \in L_\nu^1(0, \infty) \cap L_\nu^2(0, \infty)$. Define, for $t \in (0, T)$, (9). The kernels G_1, G_2, G_3 are determined via

their Hankel transforms by

$$H_\nu(G_1(\cdot, t))(\lambda) = E_{\alpha, 1}(-\lambda^\beta t^\alpha), \quad \lambda > 0, t > 0, \quad (B1)$$

$$H_\nu(G_2(\cdot, t))(\lambda) = t E_{\alpha, 2}(-\lambda^\beta t^\alpha), \quad \lambda > 0, t > 0, \quad (B2)$$

$$H_\nu(G_3(\cdot, t))(\lambda) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^\beta t^\alpha), \quad \lambda > 0, t > 0 \quad (B3)$$

where $E_{\alpha, \alpha}(\cdot)$ is the two-parameter Mittag-Leffler function.

Proof. Let the kernel G_1 be defined by

$$G_1(r, t) = \int_0^\infty E_{\alpha, 1}(-\lambda^\beta t^\alpha) j_\nu(\lambda r) d\sigma_\nu(\lambda)$$

Then $G_1(\cdot, t)$ is the inverse Hankel transform of the function

$$E_{\alpha, 1}(-\lambda^\beta t^\alpha).$$

Since the Hankel transform is self-inverse in $L_\nu^2(0, \infty)$, that is,

$$H_\nu^{-1} = H_\nu,$$

we obtain

$$H_\nu(G_1(\cdot, t))(\lambda) = E_{\alpha, 1}(-\lambda^{2\beta} t^\alpha).$$

Indeed,

$$H_\nu(G_1(\cdot, t))(\lambda) = H_\nu \left[H_\nu^{-1} \left(E_{\alpha, 1}(-\lambda^{2\beta} t^\alpha) \right) \right] (\lambda) = E_{\alpha, 1}(-\lambda^{2\beta} t^\alpha).$$

Thus, the kernel G_1 is chosen in such a way that its Hankel transform coincides with the spectral multiplier appearing in the solution formula.

Proposition. Let $\nu > -1/2$ and $1 < \alpha < 2$. Assume that $\varphi, \psi \in L_\nu^2(0, \infty)$ and $F(\cdot, \tau) \in L^1((0, T); L_\nu^2(0, \infty))$,

$$u(x, t) = (G_1(\cdot, t) *_\nu \varphi)(x) + (G_2(\cdot, t) *_\nu \psi)(x) + \int_0^t (G_3(\cdot, t - \tau) *_\nu F(\cdot, \tau))(x) d\tau, \quad T \in (0, T).$$

where the radial kernels G_1, G_2, G_3 are characterized by their Hankel transforms (A1)-(A3) for $\lambda > 0$ and $t > 0$. Then the initial position condition holds in $L_\nu^2(0, \infty)$, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(\cdot, t) - \varphi\|_{2, \nu} = 0.$$

Proof. Our aim is to prove. By Theorem 1,

$$\|f\|_{2, \nu} = \|H_\nu f\|_{2, \nu},$$

it suffices to estimate the Hankel transforms of the three terms in (??).

Step 1: the term $\varphi *_\nu g_1(\cdot, t)$. By the Theorem 1 is enough to estimate the Hankel transforms:

$$\|\varphi *_\nu g_1(\cdot, t) - \varphi\|_{L_\nu^2} = \|H_\nu(\varphi *_\nu g_1(\cdot, t)) - H_\nu \varphi\|_{L_\nu^2}.$$

Using the convolution theorem for the Hankel transform, we have

$$H_\nu(\varphi *_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) = (H_\nu \varphi)(\lambda) (H_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda).$$

Hence

$$H_\nu(\varphi *_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) - H_\nu\varphi(\lambda) = [(H_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) - 1]H_\nu\varphi(\lambda).$$

By the definition of g_1 in the transform domain, we have

$$(H_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) = E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha).$$

$$\text{Therefore, } \|H_\nu(\varphi *_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) - H_\nu\varphi(\lambda)\|_{L_\nu^2} = \|[(H_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) - 1]H_\nu\varphi(\lambda)\|_{L_\nu^2}.$$

$$\text{Since } E_{\alpha,1}(0) = 1$$

and $E_{\alpha,1}$ is continuous at zero, we have, for each fixed $\lambda > 0$,

$$E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) \rightarrow 1 \quad \text{as } t \rightarrow 0.$$

Moreover, by the uniform bound for $1 < \alpha < 2$, there exists $C > 0$ such that

$$|E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) - 1| \leq 1 + C,$$

So

$$|(E_{\alpha,1}(-\lambda^\beta t^\alpha) - 1) H_\nu\varphi(\lambda)| \leq 1 + C |H_\nu\varphi(\lambda)|.$$

Because H_ν is an isometry on L_ν^2 , we have $H_\nu\varphi \in L_\nu^2$. Hence, by the dominate convergence theorem

(2),

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|H_\nu(\varphi *_\nu g_1(\cdot, t))(\lambda) - H_\nu\varphi(\lambda)\|_{L_\nu^2} = 0.$$

and again by (14),

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi *_\nu g_1(\cdot, t) - \varphi\|_{L_\nu^2} = 0.$$

Step 2: the term $\psi *_\nu g_2(\cdot, t)$. Again by the convolution property,

$$H_\nu(\psi *_\nu g_2(\cdot, t))(\lambda) = (H_\nu\psi)(\lambda)(H_\nu g_2(\cdot, t))(\lambda).$$

By the definition of g_2 in the transform domain,

$$(H_\nu g_2(\cdot, t))(\lambda) = tE_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha).$$

Therefore,

$$H_\nu(\psi *_\nu g_2(\cdot, t))(\lambda) = tE_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha)H_\nu\psi(\lambda).$$

Hence,

$$\|\psi *_\nu g_2(\cdot, t)\|_{L_\nu^2} = \|tE_{\alpha,2}(-\lambda^\beta t^\alpha)H_\nu\psi(\lambda)\|_{L_\nu^2}.$$

Using the boundedness of $E_{\alpha,2}$ on the negative real axis, there exists a constant $C > 0$ such that

$$|E_{\alpha,2}(-s)| \leq C, \quad s \geq 0.$$

$$\text{Thus } \|\psi *_\nu g_2(\cdot, t)\|_{L_\nu^2} \leq Ct \|H_\nu\psi\|_{L_\nu^2} = Ct \|\psi\|_{L_\nu^2}.$$

Since $t \rightarrow 0$, we get

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi *_\nu g_1(\cdot, t) - \varphi\|_{L_\nu^2} = 0.$$

Step 2: the term $I(\cdot, t) = \int_0^t (G_3(\cdot, t - \tau) *_\nu F(\cdot, \tau)) d\tau$.

Applying the Hankel transform and using the convolution theorem, we obtain

$$H_\nu I(\lambda, t) = \int_0^t H(G_3(\cdot, t - \tau) *_\nu F(\cdot, \tau)) d\tau.$$

Hence,

$$H_\nu I(\lambda, t) = \int_0^t H(G_3(\cdot, t - \tau))(\lambda) (H_\nu F(\cdot, \tau))(\lambda) d\tau.$$

By the definition of G_3 in the transform domain, we have

$$H(G_3(\cdot, t - \tau))(\lambda) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^\beta (t - \tau)^\alpha).$$

Therefore,

$$H_\nu I(\lambda, t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^\beta (t - \tau)^\alpha) H_\nu F(\lambda, \tau) d\tau.$$

By the Plancherel theorem and Minkowski's integral inequality, we get

$$\|I(\cdot, t)\|_{L_v^2} = \|H_v I(\cdot, t)\|_{L_v^2} \leq \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^\beta (t-\tau)^\alpha) H_v F(\lambda, \tau) d\tau.$$

Since $E_{\alpha,\alpha}$ is bounded on the negative real axis, there exists a constant $C > 0$ such that

$$E_{\alpha,\alpha}(-s) \leq C, \quad s \geq 0.$$

Thus,

$$\|I(\cdot, t)\|_{L_v^2} \leq C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|H_v F(\cdot, \tau)\|_{L_v^2} d\tau = C \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|F(\cdot, \tau)\|_{L_v^2} d\tau.$$

Assume that

$$F \in C((0, T]; L_v^2(0, \infty)).$$

Then

$$\|I(\cdot, t)\|_{L_v^2} \leq CM_F \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = CM_F \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

Since $1 < \alpha < 2$, we have $t^\alpha \rightarrow 0$ as $t \rightarrow 0$. Hence,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \int_0^t (G_3(\cdot, t-\tau) *_v F(\cdot, \tau)) d\tau \right\|_{L_v^2} = 0.$$

Thus, the third term vanishes at $t = 0$.

Conclusion. In this paper, we studied the Cauchy problem for a second-order equation in time involving a fractional power of the Bessel operator. By applying the Fourier–Bessel transform, the original problem was reduced to an ordinary differential equation in the spectral domain, which allowed us to construct an explicit representation of the solution. Using the inverse Hankel transform together with the product formula for Bessel functions, the solution was rewritten in terms of generalized translation operators and expressed in a convolution form. As a result, two distinct Green kernels corresponding to the initial displacement and initial velocity (as well as the source term) were identified.

The existence of the solution was established by means of Young's inequality for the Bessel convolution under appropriate assumptions on the Green kernels and given data. Moreover, by applying the Plancherel theorem for the Hankel transform, it was shown that the constructed solution satisfies the initial conditions in the $L_v^2(0, \infty)$ sense. These results demonstrate the effectiveness of harmonic analysis methods for equations involving Bessel-type operators and provide a basis for further studies, including inverse problems and qualitative analysis of solutions.

REFERENCES:

1. G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1976.
2. Elias M. Stien, Rami Sh., *Fourier analysis an introduction*, Ibookroot, Princeton University press Princeton and Oxford, 2007, 143-150.
3. Chirin Ch., An other uncertainty principle for the Hankel transform, *CUBO A Mathematical Journal*, Vol.17, №2, (15–30). June 2015.
4. Margit R., Bessel-type signed Hupergroup on R , *Mathematisches Institut, Technische Universität Munchen Arcisstr. 21, 80290 München, Germany*.
5. Fethi B., *Space-Time Fractional Bessel Diffusion Equation*, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Taylor Francis, United Kingdom, 2025.
6. Sami G., Jihed S., Generalized translation operator and the Heat equation for the canonical Fourier Bessel transform, *Mathematisches Institut, Technische Universität Munchen Arcisstr. 21, 80290 München, Germany*.
7. Jorge J. Betancor, Xuan Thinh Duong, Ming-Yi Lee, Ji Li and Brett D. Wick, *The Riesz Transform and Fractional Integral Operators in the Bessel Setting*, *Integral Equations and Operator Theory* 97(2), June 2025.
8. Watson G.N, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1944.

9. Gerald B. Folland *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley, Sons, New York, USA, second edition, April 1999.
10. Rakhmatova N., *An initial-boundary/value problem for 2d a fractional differential equation*, Uzbekistan, *Bulletin of the institute of mathematics* 2024.
11. Fethi B., *Inversion formulas for space-fractional Bessel heat diffusion through Tikhonov regularization*, American Institute of Mathematical Sciences, AIMS Mathematics. June 2024.
12. Fethi B., Garayev M., *On the fractional Bessel operator*, *Integral Transforms and Special Functions*. 2021, May.
13. Msehli N., Rachdi L.T., Rouz A., *Fourier Hankel Transform and the Zemanian Spaces in the Half Space*, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 2, 2008, no. 16, 747 – 789
14. David J., Nolte A., Sherman J. *A Boundary-Value problem for 3-D Fractional Wave Equation with Singularity*. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2018, №2, pp.28-52
15. E. Karimov, M Mamchuen and M. Ruzhansky. *Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation*. *Hokkaido Matheamatical Journal*, Vol. 49 (2020) p. 349-361.

LAPLAS TENGLAMASIGA QO'YILGAN DIRIXLE MASALASINI FURYE USULI BILAN YECHISH

Daminova Mukarram Sulton qizi,
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi
Safarov Rasul Choriyor o'g'li,
Qarshi davlat universiteti o'qituvchisi
r.safarov1@gnsu.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada xususiy hosilali differensial tenglamaning ta'rifi va qutb koordinatalar sistemasida Laplas tenglamasining ko'rinishi keltirilgan. Laplas tenglamasiga qo'yilgan birinchi chegaraviy masalaning yechimi Fure usulidan foydalanib keltirilib chiqarilgan.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, Dirixle masalasi, qutb koordinatalar sistemasi.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ, ПОСТАВЛЕННОЙ ПЕРЕД УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ФУРЬЕ

Аннотация. В данной статье представлено определение дифференциального уравнения в частных производных и описание уравнения Лапласа в полярной системе координат. Решение первой краевой задачи, поставленной для уравнения Лапласа, получено с использованием метода Фурье.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Дирихле, полярная система координат.

SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM POSED FOR THE LAPLACE EQUATION USING THE FOURIER METHOD

Abstract. This article presents the definition of a partial differential equation and a description of the Laplace equation in polar coordinates. The solution to the first boundary value problem posed for the Laplace equation is obtained using the Fourier method.

Keywords: Laplace equation, Dirichlet problem, polar coordinates.

Kirish. Ω orqali Dekart orthogonal koordinatalari $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$ bo'lgan x nuqtalarning n – o'lchovli E^n Evklid fazosidagi sohani belgilaymiz.

$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning $x \in \Omega$ nuqtadagi $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ tartibli hosilasini

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 u = u(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ manfiy bo'lmagan butun sonlar.

$F = F(x, \dots, p_\alpha \dots)$ funksiya $x \in \Omega$ nuqta va

$p_\alpha = p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ ($\alpha_j = 0, 1, \dots, j = 1, 2, 3, \dots, n$) haqiqiy o'zgaruvchilarning berilgan funksiyasi

bo'lib, kamida bitta $\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}$, $|\alpha| = m > 0$ hosila noldan farqli bo'lsin.

Ushbu $F(x, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0$ tenglik noma'lum $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ funksiyaga nisbatan m - tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.[4]

Faraz qilaylik, V soha markazi $(0, 0)$ nuqtada joylashgan R radiusli doira bo'lsin:

$$\begin{aligned} V &= \{x, y \mid x^2 + y^2 < R^2\}, \\ \bar{V} &= \{x, y \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}. \end{aligned}$$

Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasi V doirad qaraymiz.

V sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi, $\bar{V}$ sohada uzluksiz, quyidagi Laplas tenglamasini qanoqlantiruvchi $u(x, y)$ funksiyani topaylik

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, \quad (x, y) \in V,$$

va doira chegarasida $x^2 + y^2 = R^2$ berilgan qiymatlarni qabul qilsin:

$$u(x, y) = f(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Dekart koordinatalar sistemasida qutb kordinatalar sistemasiga quyidagi alamshtirish yordamida o'tamiz:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

(1) alamshtirishdan ρ va φ ni topamiz:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Laplas tenglamasining qutb koordinatalar sistemasidagi ko'rinishi topish uchun u_{xx} , u_{yy} larni ρ va φ larga bog'liq holatda topamiz:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\rho \rho_x + u_\varphi \varphi_x = \frac{x}{\rho} u_\rho - \frac{y}{\rho^2} u_\varphi \\ u_{xx} &= \left(\frac{x}{\rho} u_\rho - \frac{y}{\rho^2} u_\varphi \right)_x = \left(\frac{x}{\rho} u_\rho \right)_x - \left(\frac{y}{\rho^2} u_\varphi \right)_x = \frac{\rho - x\rho_x}{\rho^2} u_\rho + \frac{x}{\rho} u_{\rho\rho} \rho_x + u_{\rho\varphi} \varphi_x + \\ &\quad \frac{2xy}{\rho^4} u_\varphi - \frac{y}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} \varphi_x + u_{\rho\varphi} \rho_x = \frac{y^2}{\rho^4} u_\rho + \frac{x}{\rho} \left(\frac{x}{\rho} u_{\rho\rho} - \frac{y}{\rho^2} u_{\rho\varphi} \right) + \frac{2xy}{\rho^4} u_\varphi - \\ &\quad \frac{y}{\rho^2} \left(\frac{-y}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{x}{\rho} u_{\rho\varphi} \right) = \frac{y^2}{\rho^3} u_\rho + \frac{2xy}{\rho^4} u_\varphi - \frac{2xy}{\rho^3} u_{\rho\varphi} + \frac{x^2}{\rho^2} u_{\rho\rho} + \frac{y^2}{\rho^4} u_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= u_\rho \rho_y + u_\varphi \varphi_y = \frac{y}{\rho} u_\rho + \frac{x}{\rho^2} u_\varphi \\ u_{yy} &= \left(\frac{y}{\rho} u_\rho + \frac{x}{\rho^2} u_\varphi \right)_y = \left(\frac{y}{\rho} u_\rho \right)_y + \left(\frac{x}{\rho^2} u_\varphi \right)_y = \frac{\rho - y\rho_y}{\rho^2} u_\rho + \frac{y}{\rho} (u_{\rho\rho} \rho_y + u_{\rho\varphi} \varphi_y) - \\ &\quad \frac{2x\rho_y}{\rho^3} u_\varphi + \frac{x}{\rho^2} (u_{\rho\varphi} \rho_y + u_{\varphi\varphi} \varphi_y) = \frac{x^2}{\rho^3} u_\rho - \frac{2xy}{\rho^4} u_\varphi + \frac{2xy}{\rho^3} u_{\rho\varphi} + \frac{y^2}{\rho^2} u_{\rho\rho} + \frac{x^2}{\rho^4} u_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

u_{xx} va u_{yy} larni Laplas tenglamasiga qo'ysak, Laplas tenglamasining qutb koordinatalar sistemasidagi ko'rinishiga ega bo'lamiz:

$$\Delta u \equiv u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho} u_\rho. \quad (3)$$

Doira chegarasida esa

$$u(R, \varphi) = f(\varphi) \quad (4)$$

Natija va muhokamalar. (3), (4) masalaning yechimni o'zgaruvchilari ajralgan ko'rinishida izlaymiz:

$$u(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi). \quad (5)$$

bu yerda $P(\rho)$ va $\Phi(\varphi)$ noldan farqli funksiyalar. (5) tenglikni (3) tenglamaga qo'ysak

$$P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} P(\rho)\Phi''(\varphi) + \frac{1}{\rho} P'(\rho)\Phi(\varphi) = 0 \quad (6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, (6) tenglikning har ikkala tomonini $\rho^2 P(\rho)\Phi(\varphi)$ ko'paytmaga bo'lib yuborsak quyidagi tenglikka ega bo'lamiz

$$-\left(\rho^2 \frac{P''(\rho)}{P(\rho)} + \rho \frac{P'(\rho)}{P(\rho)} \right) = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda \quad (7)$$

(7) tenglikdan quyidagi (8), (9) tenglamalarga ega bo'lamiz

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) - \lambda P = 0 \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (9)$$

$\Phi(\varphi)$ funksiyaning davriy ekanligidan $u(r, \varphi)$ funksiyaning ham davri 2π ga teng ekanligiga erishamiz.

(9) masala noldan faqrqli yechimlarga xos sonning faqat $\lambda = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

qiymatlarida ega bo'ladi va u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Phi(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi \quad (10)$$

(8) munosabatdan $\lambda = k^2$ bo'lganda quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - k^2 P(\rho) = 0 \quad (11)$$

(11) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz

$$P(\rho) = \rho^\alpha, \quad \alpha = \text{const.}$$

Ushbu funksiyaning (11) tenglamaga olib borib qo'ysak, $\alpha = \pm k$, ekanliga erishamiz. Demak

$$P(\rho) = \rho^k, \text{ yoki } P(\rho) = \rho^{-k}.$$

$\rho < R$ da $P(\rho) = \rho^{-k}$ garmonik funksiya emas.

U holda (5) ga ko'ra (3) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin ekan

$$u_k(\rho, \varphi) = \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(3) tenglama bir jinsli va chiziqli ekanligidan, umumiy yechim xususiy yechimlar yig'indisidan iborat bo'ladi va uni qator ko'rinishda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi).$$

(4) chegaraviy shartga ko'ra

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) = f(\varphi). \quad (12)$$

$f(\varphi)$ funksiyani Fure qatoriga yoyamiz

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = f(\varphi). \quad (13)$$

Bu yerda

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad (14)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

(12) hamda (13) qatorlarni teng ekanligidan

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \frac{a_k}{R^k}, \quad B_k = \frac{b_k}{R^k}$$

Demak, Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimi $\rho < R$ sharda quyidagi ko'rinishda ekan

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (16)$$

bu yerda a_0, a_k, b_k koefitsiyentlar (14) yoki (15) formulalardan aniqlanadi.

Teorema. $f(\varphi)$ funksiya, $\rho = R$ doira chegarasida uzluksiz bo'lsin. U holda koefitsiyentlari (14), (15) formulalar bilan aniqlangn (16) qator (3), (4) masalaning yechimi bo'ladi.

Minnatdorchilik. Hurmat bilan ushbu maqola mualliflari ushbu maqola taqrizchilariga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

ADABIYOTLAR:

1. Терсенов А.С. О достаточных условиях существования радиально-симметричного решения уравнения р-Лапласа // Нелинейный анализ. 2014. В. 95. П. 362-373.
2. Корпусов М. О. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения математической физики. Москва: Физический факультет МГУ, 2016. – 188 с.
3. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. / Пер. с англ. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. - 562 с.
4. Салохиддинов М.С. Исломов Б.И. Математика физика тенгламаларидан мисол ва масалалар туплами, 146-180 с.

DIRICHLET-NEUMANN PROBLEM FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION DEGENERATING AT THE BOUNDARY OF THE DOMAIN

Usmonov Donyor Abdumutolib ugli,
Lecturer at Fergana State University, PhD
usmonov-doniyor@inbox.ru
Tukhtasinova Solikhabonu Nodirxon kizi,
Basic student at Fergana State University
toxtasinovas04@gmail.com

Abstract. This paper investigates Dirichlet-Neumann problem for a nonlinear second-order ordinary differential equation with degenerating coefficients at the boundaries of the interval. The differential equation is defined on the interval $(0,1)$ with degeneracy at both endpoints $x = 0$ and $x = 1$. The problem is reduced to an integral equation using the Green's function method. Under appropriate conditions on the nonlinear term, the existence and uniqueness of the solution are established based on the contraction mapping principle. Explicit estimates for the solution are provided using Gronwall's inequality.

Keywords: a nonlinear second-order ordinary differential equation, an integral equation, Green's function method, Gronwall's inequality.

SOHA CHEGARASIDA BUZILADIGAN IKKINCHI TARTIBLI NOCHIZIQLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN DIRIXLE-NEYMAN MASALASI

Annotatsiya. Ushbu maqolada interval chegaralarida buziladigan koeffitsiyentlarga ega bo'lgan ikkinchi tartibli nochiziqli oddiy differensial tenglama uchun nolokal chegaraviy masala tadqiq qilinadi. Differensial tenglama $(0,1)$ intervalda qaralib, $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda buzilish holati mavjud. Masala Grin funksiyasi usuli yordamida integral tenglamaga keltiriladi. Nochiziqli had uchun mos shartlar ostida yechimning mavjudligi va yagonaligi qisqartirib aks ettirish prinsipi asosida isbotlanadi. Yechim uchun aniq baholar Gronwall tengsizligi yordamida olinadi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli nochiziqli oddiy differensial tenglama, integral tenglama, Grin funksiyasi usuli, Gronwall tengsizligi.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Дирихле-Неймана для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с вырождающимися коэффициентами на границах интервала. Дифференциальное уравнение рассматривается на интервале $(0,1)$ и имеет вырождение в обеих граничных точках $x=0$ и $x=1$. Задача сводится к интегральному уравнению с использованием метода функции Грина. При соответствующих условиях на нелинейный член устанавливаются существование и единственность решения на основе принципа сжимающего отображения. Явные оценки решения получены с помощью неравенства Гронуолла.

Ключевые слова: нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, интегральное уравнение, метод функции Грина, неравенство Гронуолла.

Introduction. Differential equations with degenerating coefficients are widely used in mathematical physics, mechanics, heat conduction theory, and the modeling of filtration processes [1, 2]. In particular, the tendency of coefficients to zero or infinity at the boundaries of a domain allows for a more accurate description of real physical processes [3, 4].

Classical boundary value problems usually involve local boundary conditions. However, in many applied problems such conditions are insufficient, necessitating the introduction of nonlocal boundary conditions [5]. Nonlocal conditions are given in the form of integral, functional, or coupled boundary values, enabling the consideration of memory and global properties of complex processes [6, 7]. Recent studies have

shown that integral conditions with nonlinear kernels are particularly effective in redefining vectors for complex systems [8].

Interest in nonlocal boundary value problems has significantly increased in recent years. In particular, the issues of existence and uniqueness of solutions for linear and nonlinear differential equations under nonlocal conditions have been extensively studied using Green's functions, integral equations, and functional analysis methods [9, 10]. Modern research also explores these problems for second-order functional equations and systems with piecewise constant arguments [11, 12]. When singular weight functions are involved, the construction of the Green's function becomes one of the key challenges [13, 14].

It should be noted that the majority of existing works deal with equations possessing a single singular point or linear cases [15, 16]. Problems with two-sided degeneration, nonlinearity, and nonlocal boundary conditions have been relatively less studied.

This work considers a nonlocal boundary value problem for a nonlinear second-order ordinary differential equation defined on the interval $(0,1)$, with degeneracy at both endpoints $x=0$ and $x=1$.

Statement of the problem. Consider the following nonlinear second-order ordinary differential equation with two lines of degeneracy on the interval $(0,1)$:

$$[x^\alpha(1-x)^\beta y'(x)]' = f(x, y(x)), \quad 0 < x < 1, \quad (2.1)$$

where $y(\cdot)$ is an unknown function, $f(\cdot, \cdot)$ is a given function, α and β are given real numbers such that $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$.

Problem 1 (Problem A_{pq}). Find a function y belonging to the class $y, x^\alpha(1-x)^\beta y' \in C[0,1], [x^\alpha(1-x)^\beta y']' \in C(0,1)$, satisfying equation (2.1) and the boundary conditions

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^\alpha y'(x)] = A_1, \quad y(1) = B_1, \quad (2.2)$$

where A_1, B_1 are given real numbers.

Construction of the Green's function

First, let $f(x, y(x)) = F(x)$ and seek the function $y(x)$ in the form

$$y(x) = y_0(x) + y_F(x)$$

where $y_0(x)$ is a solution of the problem

$$\begin{cases} [x^\alpha(1-x)^\beta y_0'(x)]' = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} [x^\alpha y_0'(x)] = A_1, \quad y_0(1) = B_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

and $y_F(x)$ is a solution of the problem

$$\begin{cases} [x^\alpha(1-x)^\beta y_F'(x)]' = F(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} [x^\alpha y_F'(x)] = 0, \quad y_F(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

It is not difficult to show that the general solution of the equation in problem (3.1) is given by

$$y_0(x) = C_2 + C_1 \int_0^x \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} \quad (3.3)$$

Substituting this general solution into the boundary conditions in (3.1), we find C_1 and C_2 :

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = B_1 - A_1 \sigma,$$

where $\sigma = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}$, and $\Gamma(z)$ is Euler's gamma function.

Substituting the obtained C_1 and C_2 into (3.3), we find the function $y_0(x)$ in the form:

$$y_0(x) = A_1 \int_0^x z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz - A_1 \sigma + B_1 \quad (3.4)$$

Now we proceed to solve problem (3.2) using the Green's function method.

Definition 4.1. The Green's function for problem (3.2) is defined as a function $G(x, s)$ satisfying the following conditions:

1°) $G(x, s)$ is continuous for $x, s \in [0, 1]$;

2°) For each interval $(0, s)$ and $(s, 1)$, the derivative $(\partial/\partial x)G(x, s)$ is continuous, and at $x = s$ there is a jump equal to $[-s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}]$, i.e.,

$$\left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \right|_{x=s+0} - \left. \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \right|_{x=s-0} = -s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}; \quad (3.5)$$

3°) On each interval $(0, s)$ and $(s, 1)$, the function $G(x, s)$ satisfies the homogeneous equation with respect to x :

$$[x^\alpha(1-x)^\beta G_x(x, s)]_x = 0;$$

4°) For all $s \in (0, 1)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^\alpha G_x(x, s)] = 0, \quad G(1, s) = 0 \quad (3.6)$$

are satisfied.

Lemma 3.1. The Green's function for problem (3.2) exists and is unique; it is defined by the formula:

$$G(x, s) = \begin{cases} \int_1^x z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz, & x < s; \\ \int_x^s z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz, & s < x. \end{cases} \quad (3.7)$$

Proof. Since $\alpha, \beta \in [0, 1]$, each integral in formula (3.7) is a continuous function with respect to its upper limit. Therefore, the function $G(x, s)$ is continuous in the domain $\Omega_1 = \{(x, s) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ for $x \neq s$.

Furthermore, for each fixed $s \in (0, 1)$,

$$\lim_{x \rightarrow s+0} G(x, s) = \lim_{x \rightarrow s-0} G(x, s) = G(s, s)$$

holds, where

$$G(s, s) = \int_s^1 z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz.$$

Since $G(s, s)$ is continuous for $s \in [0, 1]$, it follows that $G(x, s) \in (\bar{\Omega})$. Now, by directly differentiating formula (3.7), we obtain:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, s) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ x^{-\alpha} (1-x)^{-\beta}, & s < x. \end{cases} \quad (3.8)$$

From here, the validity of equality (3.5) follows easily.

According to (3.8),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha (1-x)^\beta \frac{\partial}{\partial x} G(x, s) \right] = 0,$$

holds for $x \in (0, s) \cup (s, 1)$, i.e., the function $G(x, s)$ satisfies the homogeneous equation with respect to x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha (1-x)^\beta \frac{\partial}{\partial x} G(x, s) \right] = 0.$$

Using formulas (3.7) and (3.8), and also taking into account the equality

$$\int_0^1 z^{-\alpha} (1-z)^{-\beta} dz = \sigma,$$

we derive the following:

$$G(1, s) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^\alpha G_x(x, s) \right] = 0.$$

From these equalities, the fulfillment of condition (3.6) follows straightforwardly.

Using the Green's function, we find the solution (3.2) in the form:

$$y_F(x) = \int_0^1 G(x, s) F(s) ds.$$

Utilizing these solutions and the relations $y(x) = y_0(x) + y_F(x)$, $f(x, y(x)) = F(x)$, we reduce the problem (2.1), (2.2) to the following equivalent integral equations:

$$y(x) = y_0(x) + \int_0^1 G(x, s) f(s, y(s)) ds. \quad (3.9)$$

Existence and uniqueness of the solution. Now we examine the existence and uniqueness of the solution to integral equation (3.9). For this purpose, consider the following operator:

$$y(x) = y_0(x) + \int_0^1 G(x, s) f(s, y(s)) ds.$$

Definition 4.1 (Contraction mapping). [17] Let X be a metric space and A a mapping from X into itself. If there exists a number $\delta \in (0, 1)$ such that for all $x, y \in X$ the inequality

$$\rho(Ax, Ay) \leq \delta \rho(x, y)$$

holds, then A is called a contraction mapping, where $\rho(y_1, y_2)$ is the metric of the space X . If for a mapping $A: X \rightarrow X$ there exists a point $x \in X$ such that $Ax = x$, then the point x is called a fixed point of the mapping A .

Lemma 4.1 (Contraction Mapping Principle). [17] Every contraction mapping in a complete metric space has a unique fixed point.

Lemma 4.2. [17] The space $C[a, b]$ is complete. It is known that in the space $C[0, 1]$, the norm $\rho(x, y)$ is defined by

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{0 \leq x \leq 1} |y_1 - y_2|.$$

We will show that the operator Ty under consideration is a contraction in $C[0, 1]$. For this, consider the following norm:

$$\begin{aligned} \rho(Ty_1, Ty_2) &= \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} |Ty_1 - Ty_2| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G(x, s) [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds \right|. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assume that the function $f(x, y(x))$ satisfies a Lipschitz condition with respect to its second argument, i.e.,

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L |y_1 - y_2| \quad (4.2)$$

holds, where L is a positive real number.

Substituting (4.2) into (4.1), we obtain the following inequality:

$$\begin{aligned}\rho(Ty_1, Ty_2) &\leq L \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |G(x, s)| |y_1 - y_2| ds \leq \\ &\leq L \max_{0 \leq x \leq 1} |y_1 - y_2| \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |G(x, s)| ds.\end{aligned}$$

Let us evaluate the integral $\int_0^1 |G(x, s)| ds$. Using the explicit form (3.7), it can be shown directly that the inequality $|G(x, s)| \leq |G(0, 1)|$ holds, or equivalently,

$$|G(x, s)| \leq \int_0^1 \frac{dz}{z^\alpha (1-z)^\beta}. \quad (4.3)$$

Using inequality (4.3), we derive the following inequality:

$$\rho(Ty_1, Ty_2) \leq L \sigma \rho(y_1, y_2).$$

If

$$L < [\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)/\Gamma(2-\alpha-\beta)]^{-1},$$

then the operator T is a contraction.

Now we show that $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$.

For $y = Ty$, consider the following

$$\text{equality } |y(x)| = |Ty| = \left| y_0(x) + \int_0^1 G(x, s) f(s, y(s)) ds \right| \leq |y_0(x)| + \int_0^1 |G(x, s) f(s, y(s))| ds.$$

It is not difficult to show that for the function $y_0(x)$ the inequality

$$|y_0(x)| \leq 2|A_1|\sigma + |B_1|$$

holds. Using this inequality and the fact that $f(x, y(x))$ satisfies the Lipschitz condition, we write the following inequality:

$$|y(x)| \leq 2|A_1|\sigma + |B_1| + L \int_0^1 |y(s)| |G(x, s)| ds.$$

Using inequality (4.3), we obtain

$$|y(x)| \leq 2|A_1|\sigma + |B_1| + \sigma L \int_0^1 |y(s)| ds.$$

Applying Gronwall's inequality, we obtain the following result:

$$|y(x)| \leq (2|A_1|\sigma + |B_1|) \exp(\sigma L \int_0^1 |y(s)| ds).$$

This implies that $y(x) \in C[0, 1]$. Since $y = Ty$, it follows that $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$.

Based on the obtained results, we formulate the following theorem for problem (2.1), (2.2).

Theorem 4.1. *If the function $f(x, y(x))$ is continuous, satisfies the condition*

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L |y_1 - y_2|,$$

and

$$L < \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \right]^{-1},$$

Then the problem (2.1), (2.2) has a unique solution.

Proof. The proof follows from the contraction mapping principle applied to the operator T in the complete metric space $C[0,1]$. The operator T maps $C[0,1]$ into itself and is a contraction under the given conditions. Therefore, by the contraction mapping principle, T has a unique fixed point in $C[0,1]$, which corresponds to the unique solution of problem (2.1), (2.2).

Conclusion. This paper provides a detailed investigation of Dirichlet-Neumann problem for a nonlinear second-order ordinary differential equation with degeneracy at the boundaries of the interval. First, corresponding auxiliary linear problems were solved, and the Green's function was explicitly constructed. As a result, Dirichle-Neumann problem was reduced to an equivalent integral equation.

Using the contraction mapping principle, a fundamental result in functional analysis, the existence of a unique solution to the integral equation was proved. The existence and uniqueness of the solution were ensured under a Lipschitz condition and corresponding parametric constraints.

The obtained results contribute to the development of the theory of nonlinear differential equations and can be applied in the study of practical models involving nonlocal conditions.

REFERENCES:

1. Naimark M. A.: *Linear Differential Operators*. Nauka, Moscow (1967).
2. Kamynin, L. L.: *Boundary Value Problems for Degenenate Differential Equations*. Nauka, Moscow (1982).
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev, O. L: *Fractional Integrals and Deriontiaes: Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam (1993).
4. Urinov A. K., Usmonov D. A.: *An initial-boundary problem for a hyperholic equation with three lines of degenerating of the second kind*. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 26 (4), 672-693 (2022).
5. Bitsadze A. V.: *Boundary Value Problems for Elliptic Equations*. Nauka, Moscow (1968).
6. Il'kiv, V. S.: *Nonlocal boundary zwlue problems for differential equations*. Ukrainian Mathematical Journal 54 (2), 293-303 (2002).
7. Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. *Integral condition with nonlinear Kernel for an impulsize system of differential equations with maximum and redefinition vector*. Lobachevskii J. Math. 43, 2332-2340 (2022).
8. Yuldashev T. K., Fayziev A. K.: *On a nonlinear impulsize system of integro-differential equations with degenenate Kernel and maxima*. Nanosystems: Phys. Chem. Math. 13 (1), 26-35 (2022).
9. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.: *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel (2004).
10. Cabada A.: *Gren's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, Cham (2014).
11. Buedo-Fernández S., Cao Labora D., Rodriguez-López R: *Boundary zalue problems for nonlinear second-order functional differential equations with precewise constant arguments*. Math. Methods Appl. Sci. 47 (5), 3547-3581 (2024).
12. Cabada A., Cambeses-Franco P.: *Reflection equation with piecewise constant arguments*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 109488 (2025).
13. Kilbas A. A.: *Boundary value problems for fractional differential equations*. Differential Equations 46 (10), 1463-1476 (2010).
14. Ma, S., Zhang, X.: *Positive solutions to second-order singular nonlactl problems: existence and sharp conditions*. Bound. Value Probl. 2019, 173 (2019).
15. Kiguradze I. T., Shekhter, B. L.: *Singular Boundary Volue Problems for Ordinary Differentinl Equations*. Metsniereba, Tbilisi (1976).
16. Saker S. H., Sethi A. K.: *Riccalf technique and oscillation of second order nonlinear neutral delay dynamic equations*. J. Comput. Anal. Appl. 29 (2), 231-245 (2021).
17. Kolmogorov A. N., Fomin S. V.: *Elenents of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow (1968).

NOLOKAL CHEGARAVIY SHARTLARGA EGA BO'LGAN BALKA TENGLAMASI
UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALASI

Turdiyev Xalim Xamroyevich,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası dotsenti

h.h.turdiyev@buxdu.uz

Shodiyev Mirzobek Ubaydullo o'g'li,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi

mirzobekshodiyev7@gmail.com

Hakimova Bahora Bahrom qizi,

Buxoro davlat universiteti 2-boshqich magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada to'sin tenglamasi uchun nolokal chegaraviy shartli boshlang'ich-chegaraviy masala bilan birga o'zgaruvchan koeffitsiyentni aniqlashning teskari masalasini tadqiq etamiz. Dastlab, nolokal chegaraviy shartli boshlang'ich-chegaraviy masala o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida ikkita masalaga keltirildi. Bular fazo o'zgaruvchisi bo'yicha to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun spektral masala, vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasidir. Tadqiq jarayonida spektral masala uchun xarakteristik determinant to'liq hisoblandi va transsendental xos qiymat tenglamasi chiqariladi. Shundan so'ng, xos son va xos funksiyalar aniqlandi. So'ngra Koshi masalasi tadqiq etildi. Nolokal chegaraviy shartli boshlang'ich-chegaraviy masala yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlanildi, yechimning regulyarligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: balka tenglamasi, boshlang'ich va chegaraviy shartlar, to'g'ri masala, spektral usul, analitik yechim, yagonalik, mavjudlik, turg'unlik.

НАЧАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАЛКИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. В данной статье рассматривается начальная краевая задача для уравнения балки с нелокальными граничными условиями. Первоначально начально-краевая задача с нелокальными граничными условиями была сведена к двум задачам при помощи метода разделения переменных. Это спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка по переменной пространства, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по переменной времени. В процессе исследования для спектральной задачи полностью рассчитывается характеристический детерминант, и выводится уравнение трансцендентального собственного значения. Затем определены собственное число и собственные функции. Затем была исследована задача Коши. Доказано существование и единственность решения начально-краевой задачи с нелокальными граничными условиями, показана регулярность решения.

Ключевые слова: уравнение балки, начальные и граничные условия, прямая задача, спектральный метод, аналитическое решение, единственность, существование, устойчивость.

INITIAL BOUNDARY PROBLEM FOR A BEAM EQUATION WITH NONLOCAL
BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. In this article, we will consider the initial boundary problem for a beam equation with nonlocal boundary conditions. Initially, the initial-boundary value problem with non-local boundary conditions was reduced to two problems using the separation of variables method. This is a spectral problem for a fourth-order ordinary differential equation with respect to a space variable, and a Cauchy problem for a second-order ordinary differential equation with respect to a time variable. During the research process, the characteristic determinant is fully calculated for the spectral problem and the equation of the transcendental eigenvalue is derived. Then the eigenvalues and the eigenfunctions are defined. Then the Cauchy problem was investigated. The existence and uniqueness of the solution to the initial-boundary value problem with non-local boundary conditions are proved, and the regularity of the solution is shown.

Keywords: beam equation, initial and boundary conditions, direct problem, spectral method, analytical solution, uniqueness, existence, stability.

Kirish va masalaning qo'yilishi. So'nggi yillarda to'sin tebranishlari tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni o'rganishga katta e'tibor qaratilmoqda. Ko'plab ishlarda bunday masalalar uchun yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va regularligi turli analitik va sonli usullar yordamida tadqiq etilgan [1], [2]. Xususan, o'zgaruvchilarni ajratish usuli asosida spektral masalalarni qurish, xos qiymatlar va xos funksiyalarni aniqlash hamda yechimlarni ortogonal qatorlar ko'rinishida ifodalash keng qo'llanilmoqda. Shu bilan birga, nolokal chegaraviy shartlar fizik jarayonlarni yanada aniqroq aks ettirishi sababli, bunday masalalar nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyat kasb etadi.

Masalan, Ibrohim va Somnay [3] oddiygina qo'llab-quvvatlanadigan elastik nurning tayanch nuqtasidagi ishqalanishni nokonservativ kuch sifatida ko'rib chiqdilar, natijada chiziqli bo'lmagan tayanch hosil bo'ldi. Ular turli xil ishqalanish koeffitsiyentlari bilan tashqi kuchlar ta'sirida asosiy jismdagi deformatsiyalarni tahlil qildilar.

Takidlash joizki, mavjud adabiyotlarda to'sin tebranishlari tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni umumiy holatda o'rganish, shuningdek, ularga mos teskari masalalarni tadqiq etish muhim yo'nalishlardan biri sifatida qaralmoqda. Bunday tadqiqotlarda spektral usullar, o'zgaruvchilarni ajratish usuli hamda integral tenglamalar nazariyasi keng qo'llanilib, yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini asoslash masalalariga alohida e'tibor qaratiladi [4]-[10]. Shu jihatdan, boshlang'ich-chegaraviy masalalarni umumiy matematik yondashuv asosida o'rganish ushbu sohadagi tadqiqotlarning muhim davomiy yo'nalishi hisoblanadi.

Quyidagi boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} + q(t)u_t(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

chegaraviy shartlar

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) - u_x(1, t) = 0, \quad u_{xxx}(1, t) = 0 \\ u_{xxx}(0, t) + u_{xx}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2)$$

va boshlang'ich shartlar

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

To'g'ri masala. (1)-(3) munosabatlarni hamda $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\Omega_T)$ hartini qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiyasini topish masalasi to'g'ri masala deb ataymiz, bu yerda a, l, T sonlari berilgan sonlar va $q(t), f(x, t), \varphi(x), \psi(x)$ funksiyalar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

(1)-(3) boshlang'ich-chegaraviy masalani tadqiq etamiz

Bir jinsli tenglama ($f=0, q=0$) uchun (1)-(3) boshlang'ich-chegaraviy masalani tadqiq etamiz. (1)-(3) boshlang'ich-chegaraviy masala yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

(1) ga qo'yib:

$$X(x)T''(t) + \alpha^2 X^{(4)}(x)T(t) = 0.$$

$\alpha^2 X(x)T(t)$ ga bo'lib (nolga teng bo'lmagan joyda):

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Shunday qilib, ikkita oddiy differensial tenglamani olamiz:

$$T''(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0, \quad X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (5)$$

Spektral masala. (2) chegaraviy shartlardan $X(x)$ ga nisbatan quyidagi masalani olamiz:

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$X(0) = 0, \quad X''(0) - X'(1) = 0, \quad X''(1) = 0, \quad X'''(0) + X''(1) = 0. \quad (6)$$

(6) spektral masalaning xos son va xos funksiyalarini aniqlaymiz. $\lambda = \mu^4$ deb belgilaymiz (μ – spektral parametr, umuman kompleks). U holda (5) tenglama:

$$X^{(4)} - \mu^4 X = 0.$$

Bunda $X_n(x)$ xos funksiyalar $\lambda_n = \mu_n^4$ xos qiymatlarga bog'liq holda aniqlanadi:

$$X_n(x) = \cosh(\mu_n x) - \cos(\mu_n x) + \frac{\mu_n - \sinh \mu_n}{\cosh \mu} \sinh(\mu_n x) + \frac{\mu - \sin \mu}{\cos \mu} \sin(\mu x),$$

bu yerda $\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1} = \frac{\cosh \mu}{\cos \mu}$ tenglamaning ildizlari

Bu xos funksiyalar o'zaro ortogonal emas. Shuning uchun Biortogonal sistema quramiz. Dastlab, berilgan masalaga qo'shma (adjoint) masalani aniqlab va uni to'liq holda keltiramiz.

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqib, berilgan (6) masalaga qo'shma masala quyidagicha bo'ladi:

$$Y^{(4)}(x) - \lambda Y(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$Y''(0) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad Y(0) - Y'(l) = 0, \quad Y(0) + Y'(1) = 0.$$

Bu qo'shma masalaning xos funksiyasi quyidagidan iborat

$$Y_n(x) = (\cos \mu_n x + \cosh \mu_n x) + \frac{\sin \mu_n + \sinh \mu_n}{\cos \mu_n x} \sin \mu_n x - \frac{\sin \mu_n + \sinh \mu_n}{\cosh \mu_n} \sinh \mu_n x$$

Shunday qilib, biz $X_n(x)$ va $Y_n(x)$ biortogonal sistemasini qurdik. Biz boshlang'ich-chegaraviy masalani tadqiq etishda yechimni $X_n(x)$ xos funksiyalar sistemasi orqali, berilgan funksiyalarni esa $Y_n(x)$ xos funksiyalar yordamida hosil qilingan Fure koeffitsiyentlarini aniqlab, Fure qatorlarga yoyib o'rganamiz. Bunda (23) ning xos funksiyalarida mos ravishda $f(x, t)$, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning Fure koeffitsiyentlarini quyidagicha belgilaymiz:

$$\begin{aligned} (f(x, t), Y_n(x)) &= f_n(t), \\ (\varphi(x), Y_n(x)) &= \varphi_n, \quad (\psi(x), Y_n(x)) = \psi_n. \end{aligned} \quad (7)$$

(1) ga ko'ra va $(u(x, t), X_n(x)) = u_n(t)$ bo'lganda, (7) dan foydalanib, $u_n(t)$ ga nisbatan quyidagi

masalani tuzamiz:

$$u_n''(t) + \alpha^2 \mu_n^4 u_n(t) + q(t) u_n'(t) = f_n(t), \quad (8)$$

boshlang'ich shartlar bilan:

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n'(0) = \psi_n. \quad (9)$$

Dastlab, tenglamani soddalashtirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\omega_n = \alpha \mu_n^2, \quad F_n(t) = f_n(t) + q(t) u_n'(t).$$

U holda (8) tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = F_n(t).$$

Bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamani qaraymiz:

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = 0. \quad (10)$$

Xususiy yechimni Lagrange (o'zgarmaslarni variatsiyalash) usuli bilan topamiz:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \\ &- \frac{\cos(\omega_n t)}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n \tau) F_n(\tau) d\tau + \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \int_0^t \cos(\omega_n \tau) F_n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Yuqoridagilardan foydalanib, $u_n(t)$ ga nisbatan quyidagini olamiz:

$$u_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) F_n(\tau) d\tau.$$

Boshlang'ich shartlardan $u_n(0) = \varphi_n$, $u_n'(0) = \psi_n$ foydalanib xususiy yechimini aniqlaymiz. Dastlab $u_n(0) = \varphi_n$ tekshiramiz:

$$u_n(0) = A_n \cdot 1 + B_n \cdot 0 = A_n = \varphi_n.$$

Endi $u_n'(0) = \psi_n$ shartni qo'llaymiz, $t=0$ da

$$u_n'(0) = 0 + \omega_n B_n \cdot 1 + 0 = \omega_n B_n = \psi_n.$$

Shuning	uchun:	$B_n = \frac{\psi_n}{\omega_n}$.
Bulardan xulosa qilib, umumiy yechimni quyidagicha aniqlaymiz:		
$u_n(t) = \varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) F_n(\tau) d\tau.$		

Belgilashlarni keltirib qo'ysak, (8)-(9) Koshi masalasi yechimi quyidagi integral tenglamani qanoatlantirishini olamiz:

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{\psi_n}{\alpha \mu_n^2} \sin(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) f_n(\tau) d\tau + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) q(\tau) u_n'(\tau) d\tau. \quad (11)$$

(11) integral ostida $u_n'(t)$ ishtirok etmoqda. Shuning uchun (11) tenglamani t bo'yicha differensiallaymiz va $u_n'(t)$ ga nisbatan quyidagi integral tenglamani olamiz:

$$u_n'(t) = -\alpha \mu_n^2 \varphi_n \sin(\alpha \mu_n^2 t) + \psi_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) f_n(\tau) d\tau + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) q(\tau) u_n'(\tau) d\tau. \quad (12)$$

$u_n(t)$ va $u_n'(t)$ funksiyalar uchun quyidagi tasdiqlarni isbotlaymiz:

2-lemma. Faraz qilaylik, $q \in C[0, T]$, barcha $\forall t \in [0, T]$ va yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi baholar o'rinli:

$$u_n(t) \leq |\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_1^2} + \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|f_n\|_{C[0, T]} + \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|q\|_{C[0, T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0, T]} \right) \exp(t \|q\|_{C[0, T]}), \quad (13)$$

$$|u_n'(t)| \leq \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0, T]} \right) \exp(t \|q\|_{C[0, T]}), \quad (14)$$

$$|u_n''(t)| \leq \|f_n\|_{C[0, T]} + \alpha^2 \mu_n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_1^2} + \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|f_n\|_{C[0, T]} + \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|q\|_{C[0, T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0, T]} \right) \exp(t \|q\|_{C[0, T]}) \right) + \|q\|_{C[0, T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0, T]} \right) \exp(t \|q\|_{C[0, T]}). \quad (15)$$

Isbot. Dastlab, (12) integral tenglamaning ikkila tomondan modul olamiz:

$$|u_n'(t)| = \left| -\alpha \mu_n^2 \varphi_n \sin(\alpha \mu_n^2 t) + \psi_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) f_n(\tau) d\tau + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) q(\tau) u_n'(\tau) d\tau \right|.$$

So'ng baholaymiz:

$$|u_n'(t)| \leq \alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0, T]} + \|q\|_{C[0, T]} \int_0^t |u_n'(\tau)| d\tau.$$

Gronoull integral tengsizligiga asosan, yuqoridagidan (14) bahoni olamiz.

Endi (11) tenglamadan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned}
 |u_n(t)| &= \left| \varphi_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{\psi_n}{\alpha \mu_n^2} \sin(\alpha \mu_n^2 t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) f_n(\tau) d\tau + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) q(\tau) u_n'(\tau) d\tau \right| \\
 &\leq |\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_n^2} + \frac{t \|f_n\|_{C[0,T]}}{\alpha \mu_n^2} + \frac{t \|q\|_{C[0,T]}}{\alpha \mu_n^2} |u_n'(\tau)| \leq |\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_n^2} + \frac{t \|f_n\|_{C[0,T]}}{\alpha \mu_n^2} \\
 &\quad + \frac{t \|q\|_{C[0,T]}}{\alpha \mu_n^2} (\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0,T]}) \exp(t \|q\|_{C[0,T]}), \quad t \in [0, T]
 \end{aligned}$$

Bundan esa, 2-lemmadagi (13) tengsizlikni olamiz. (8) tenglamadan foydalangan holda, biz $u_n''(t)$ ga nisbatan (15) bahoni oldik.

Faraz qilaylik, $u_n(t)$ va $\tilde{u}_n(t)$ funksiyalar (8)-(9) Koshi masalasining turli yechimlari bo'lsin. Birinchisi (8)-(9) Koshi masalasining yechimi, ikkinchisi esa bu tenglamaning $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\psi}_n$ va $\tilde{f}_n(t)$ funksiyalari bilan o'zgartirilgan holdagi yechim:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_n(t) &= \tilde{\varphi}_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{\tilde{\psi}_n}{\alpha \mu_n^2} \sin(\alpha \mu_n^2 t) \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{f}_n(\tau) d\tau + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{q}(\tau) \tilde{u}_n'(\tau) d\tau. \quad (16)
 \end{aligned}$$

(16) tenglamaning t bo'yicha differensiallari esa

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_n'(t) &= -\alpha \mu_n^2 \tilde{\varphi}_n \sin(\alpha \mu_n^2 t) + \tilde{\psi}_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) \\
 &\quad + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{f}_n(\tau) d\tau + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{q}(\tau) \tilde{u}_n'(\tau) d\tau. \quad (17)
 \end{aligned}$$

$u_n(t) - \tilde{u}_n(t)$ va $u_n'(t) - \tilde{u}_n'(t)$ ayirmalarni tuzib, dastlab (12) va (17) integral tenglamalar yordamida quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
 u_n'(t) - \tilde{u}_n'(t) &= -\alpha \mu_n^2 \sin(\alpha \mu_n^2 t) (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n) + \cos(\alpha \mu_n^2 t) (\psi_n - \tilde{\psi}_n) \\
 &\quad + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) (f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)) d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{q}(\tau) (u_n'(\tau) - \tilde{u}_n'(\tau)) d\tau \\
 &\quad + \int_0^t \cos(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) (q(\tau) - \tilde{q}(\tau)) u_n'(\tau) d\tau. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Shundan so'ng, (11) va (16) integral tenglamalar yordamida $u_n(t) - \tilde{u}_n(t)$ ayirmaga nisbatan quyida integral tenglamani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
 u_n(t) - \tilde{u}_n(t) &= \cos(\alpha \mu_n^2 t) (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n) + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \sin(\alpha \mu_n^2 t) (\psi_n - \tilde{\psi}_n) \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) (f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) \tilde{q}(\tau) (u_n'(\tau) - \tilde{u}_n'(\tau)) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2(t-\tau)) (q(\tau) - \tilde{q}(\tau)) u_n'(\tau) d\tau. \quad (19)
 \end{aligned}$$

So'ngra (18) tenglamadan foydalanib, $u'_n(t) - \tilde{u}'_n(t)$ ayirmani baholab, $|u'_n(t) - \tilde{u}'_n(t)|$ uchun quyidagi chiziqli integral tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} |u'_n(t) - \tilde{u}'_n(t)| &\leq \alpha \mu_n^2 s |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + |\psi_n - \tilde{\psi}_n| + t \|f_n - \tilde{f}_n\|_{C[0,T]} \\ &+ t \|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(t \|q\|_{C[0,T]}) \\ &+ \|\tilde{q}\|_{C[0,T]} \int_0^t |u'_n(\tau) - \tilde{u}'_n(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Gronoull integral tengsizligiga ko'ra quyidagi bahoni olamiz:

$$\begin{aligned} |u'_n(t) - \tilde{u}'_n(t)| &\leq \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + |\psi_n - \tilde{\psi}_n| + t \|f_n - \tilde{f}_n\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ t \|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \\ &\left. \exp(t \|q\|_{C[0,T]}) \right) \exp(t \|\tilde{q}\|_{C[0,T]}). \end{aligned} \quad (20)$$

Xuddi shunday, (19) tenglamadan foydalanib, $u_n(t) - \tilde{u}_n(t)$ ayirmani baholab, $|u_n(t) - \tilde{u}_n(t)|$ uchun quyidagi chiziqli integral tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} |u_n(t) - \tilde{u}_n(t)| &\leq |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + \frac{1}{\alpha \mu_1^2} |\psi_n - \tilde{\psi}_n| + \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|f_n - \tilde{f}_n\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{t}{\alpha \mu_1^2} \|\tilde{q}\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n - \tilde{\varphi}_n| + |\psi_n - \tilde{\psi}_n| + t \|f_n - \tilde{f}_n\|_{C[0,T]} + \right. \\ &+ t \|q - \tilde{q}\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + t \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \\ &\left. \exp(t \|q\|_{C[0,T]}) \exp(t \|\tilde{q}\|_{C[0,T]}) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Bu baholar teskari masalani tadqiq qilishda qo'llaniladi.

Keyin, hosil qilingan integral tenglama (11) ni (4) ga qo'yib, $u(x, t)$ funksiyasiga nisbatan quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{\psi_n}{\alpha \mu_n^2} \sin(\alpha \mu_n^2 t) + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2 (t-\tau)) f_n(\tau) d\tau \right. \\ &\left. + \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \int_0^t \sin(\alpha \mu_n^2 (t-\tau)) q(\tau) u'_n(\tau) d\tau \right) X_n(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Dastlab, $u(x, t)$ funksiyaning uzluksizligini isbotlaymiz. (21) qatorning $\Omega_T := \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, t \in [0, T]\}$ sohasida tekis yaqinlashuvini isbotlaymiz. Bu qator barcha $(x, t) \in \Omega_T$ lar uchun quyidagi sonli qator bilan majorantlanadi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_n^2} + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|f_n\|_{C[0,T]} \right. \\ \left. + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|q\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + T \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(T \|q\|_{C[0,T]}) \right). \end{aligned}$$

Oxirgi qatorning yaqinlashuvini ta'minlash uchun quyidagilar bajariladi deb faraz qilamiz:

1. $\varphi(x) \in C[0, 1]$, $\varphi'(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$;
2. $\psi(x) \in C[0, 1]$;
3. $f(x, t) \in C(\Omega_T)$.

Bulardan foydalanib,

$$C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha \mu_n^2} |\psi_n| + T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha \mu_n^2} \|f_n\| \right)$$

$$\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi'_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C_1 \left(\|\varphi'\|_{L_2(0,l)} + \|\psi\|_{L_2(0,l)} + T \|f\|_{C([0,T], L_2(0,l))} \right).$$

(21) yechimning xossalarini o'rganamiz. Formal ravishda, (4) ni differensiallab, quyidagi qatorlarni hosil qilamiz:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) X_n(x), \quad (22)$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n(t) X_n(x), \quad (23)$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^4 u_n(t) X_n(x). \quad (24)$$

(8), (12) va (13) qatorlarning $\Omega_T := \{(x,t): 0 \leq x \leq l, t \in [0,T]\}$ sohasida tekis yaqinlashuvini isbotlaylik. Bu qatorlar barcha $(x,t) \in \Omega_T$ lar uchun quyidagi sonli qator bilan majorantlanadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + T \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(T \|q\|_{C[0,T]}), \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\|f_n\|_{C[0,T]} + \alpha^2 \mu_n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_n^2} + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|f_n\|_{C[0,T]} + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|q\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + T \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(T \|q\|_{C[0,T]}) \right) \right. \\ \left. + \|q\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + T \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(T \|q\|_{C[0,T]}) \right), \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^4 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{\alpha \mu_n^2} + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|f_n\|_{C[0,T]} + \frac{T}{\alpha \mu_n^2} \|q\|_{C[0,T]} \left(\alpha \mu_n^2 |\varphi_n| + |\psi_n| + T \|f_n\|_{C[0,T]} \right) \exp(T \|q\|_{C[0,T]}) \right). \quad (27)$$

(22)-(24) qatorlar yaqinlashuvchanlikni tanimlash uchun quyidagi yordamchi lemmani keltiramiz:

3-lemma. Agar shartlar bajarilsa

1. $\varphi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$,
2. $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,l)$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$,
3. $f(\cdot, t) \in C^2[0,l]$, $f_{xxx}(\cdot, t) \in L_2(0,l)$, $f(0,t) = f(l,t) = f_{xx}(0,t) = f_{xx}(l,t) = 0$, $0 \leq t \leq T$,

u holda quyidagilar o'rinli

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n^5} \varphi_n^{(5)}, \quad \psi_n = -\frac{1}{\mu_n^3} \psi_n^{(3)}, \quad f_n(t) = -\frac{1}{\mu_n^3} f_n^{(3)}(t), \quad (28)$$

Bu yerda

$$\varphi_n^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(5)}(x) \cos \mu_n x dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(3)}(x) \cos \mu_n x dx,$$

$$f_n^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxx}(x,t) \cos \mu_n x dx$$

Shu bilan birga quyidagi baholar ham o'rinli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(5)}|^2 \leq \|\varphi^{(5)}\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leq \|\psi^{(3)}\|_{L_2(0,l)}^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(3)}(t)|^2 \leq \|f_{xxx}\|_{C([0,T], L_2(0,l))}^2. \quad (29)$$

φ_n dagi integrallarni besh marta, ψ_n va $f_n(t)$ dagi integrallarni esa uch marta bo'laklab integrallash, hamda 3-lemma shartlarini hisobga olgan holda, (28) ni hosil qilamiz. (29) tengsizlik esa $\varphi_n^{(5)}$, $\psi_n^{(3)}$ va $f_n^{(3)}(t)$ funksiyalarining Furrye yoyilmalari koeffitsiyentlari uchun $[0, T]$ segmentida mos xos funksiyalar sistemasi bo'yicha Bessel tengsizligidan iboratdir.

3-lemmaga asosan, (25)-(27) qatorlar

$$C^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\varphi_n^{(5)}| + |\psi_n^{(3)}| + |f_n^{(3)}(t)|),$$

yaqinlashuvchi sonli qatori bilan majorantlanadi, shuning uchun ular Ω_T da tekis yaqinlashadi.

Buni birinchi qator uchun ko'rsatamiz, ikkinchisi uchun esa xuddi shunday isbotlanadi. Haqiqatan ham, (28) va Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\varphi_n^{(5)}| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(5)}|^2},$$

Bundan, (29) dagi birinchi tengsizlikka, asosan, $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 |\varphi_n|$ sonli qatorining yaqinlashuvi kelib chiqadi.

Endi boshlang'ich shartlarning bajarilishini ko'rsatamiz. (21) qator Ω_T da absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, yig'indi belgisi ostida limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} u_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Keyin, (4) qatorning t bo'yicha differensialidan foydalanamiz. Bunda (12) dan foydalangan holda

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} u'_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(0) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan natijalardan foydalanib, quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

1-Teorema. Faraz qilaylik, $q(t) \in C[0, T]$ va 3-Lemma shartlari bajarilsin. U holda (1)-(3) to'g'ri masalasining $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(\Omega_T)$ bo'lgan yagona yechimi mavjud.

ADABIYOTLAR:

1. Krylov A.N. *Vibratsiya sudov (Ship Vibration)*. - Leningrad, Moscow, 1936. - 442 pp. (In Russian)
2. Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A. *Uraveniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics)*. - Moscow: Nauka, 1966. - 724 pp. (In Russian)
3. R. A. Ibrahim and R. J. Somnay, "Nonlinear Dynamic Analysis of an Elastic Beam Isolator Sliding on Frictional Supports," *J. Sound Vib.* 308, 735–757 (2007)
4. Kasimov S.G., Madrakhimov, U.S. *Initial-Boundary Value Problem for the Beam Vibration Equation in the Multidimensional Case*. *Differ. Equations*. 2019, Vol. 55, No. 10, pp. 1336-1348.
5. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. *Vibration-based estimation of axial force for a beam member with uncertain boundary conditions*. *J. Sound Vibrat.*, 2013, Vol. 332, No. 4, pp. 795–806.
6. Rudakov I. A. *Periodic solutions of the quasilinear beam vibration equation with homogeneous boundary conditions*. *Differ. Equations*, 2012, Vol. 48, No. 6, pp. 820-831.

7. Sabitov K.B., Akimov, A.A. *Initial-Boundary Value Problem for a Nonlinear Beam Vibration Equation*. *Differ. Equation*. 2020, Vol. 56, No. 5, pp. 621-634.
8. Sabitov K.B. *A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams*. *Differ. Equations*. 2017, Vol. 53, No. 1, pp. 86-98.
9. Durdiev U.D. *Global Solvability of the Kernel Identification Problem for the Integro-Differential Equation of Beam Vibrations*. *Lobachevskii J Math* 45, 5802–5814 (2024).
10. Durdiev U.D., Bozorov Z.R. *Nonlocal Inverse Problem for Determining the Unknown Coefficient in the Beam Vibration Equation*. *J. Appl. Ind. Math.* 17, 281–290 (2023).

CHEGARADA EGILISH MOMENTI NOLGA TENG BO'LGAN TO'G'RI TO'RTBURCHAK PLASTINKANING TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALA

Durdiyev Umidjan Durdimuratovich,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası mudiri

umidjan93@list.ru

Turdiyev Halim Hamroyevich,

Buxoro davlat universiteti

Differensial tenglamalar kafedrası dotsenti

h.h.turdiyev@buxdu.uz

Ibrohimov Azizbek A'zam o'g'li,

Buxoro davlat universiteti 2-bosqich magistranti

azizibrohimov554@gmail.com

Annotatsiya. *To'g'ri to'rtburchak plastinkaning tebranish tenglamasi uchun chegarada egilish momenti nolga teng bo'lgan chegaraviy shartli boshlang'ich-chegaraviy masala o'rganilgan. Masala yechimining regulyar va umumlashgan yechimlar sinfida mavjudligi va turg'unligi haqidagi tegishli teoremlar isbotlangan. Qo'yilgan masala yechimining mavjudligi spektral tahlil usuli bilan olib borilgan va u o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan qurilgan tegishli ikki o'lchovli spektral masalaning xos funksiyalar sistemasi bo'yicha ortogonal qator yig'indisi ko'rinishida qurilgan. Qurilgan uch o'lchovli qatorning regulyar yechimlar sinfida yaqinlashishini to'liq asoslash berilgan. Umumlashgan yechim boshlang'ich-chegaraviy masala regulyar yechimlari ketma-ketligining tekis limiti sifatida aniqlanadi.*

Kalit so'zlar: *to'g'ri to'rtburchak plastinka tebranish tenglamasi, boshlang'ich-chegaraviy masala, yagonalik, qator, mavjudlik, turg'unlik.*

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF A RECTANGULAR PLATE OSCILLATIONS WITH ZERO BENDING MOMENT ON THE BOUNDARY

Abstract. *In this work, an initial-boundary value problem for the vibration equation of a rectangular plate with boundary conditions corresponding to zero bending moment is investigated. The existence and stability of the solution are established in both regular and generalized solution classes. The existence of the solution to the posed problem is obtained using the spectral analysis method. The solution is constructed in the form of an orthogonal series expansion with respect to the system of eigenfunctions of a corresponding two-dimensional spectral problem, derived via the method of separation of variables. A rigorous justification of the convergence of the resulting three-dimensional series in the class of regular solutions is provided. The generalized solution is defined as the uniform limit of a sequence of regular solutions to the initial-boundary value problem.*

Keywords: *rectangular plate oscillation equation, initial-boundary value problem, uniqueness, series, existence, stability.*

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С НУЛЕВЫМ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ НА ГРАНИЦЕ

Аннотация. *В данной работе исследуется начально-краевая задача для уравнения колебаний прямоугольной пластины с граничными условиями, соответствующими нулевому изгибающему моменту. Доказаны существование и устойчивость решения как в классе регулярных, так и обобщённых решений. Существование решения поставленной задачи установлено с использованием метода спектрального анализа. Решение построено в виде ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей двумерной спектральной задачи, полученной методом разделения переменных. Дано строгое обоснование сходимости полученного трёхмерного ряда в классе регулярных решений. Обобщённое решение определяется как равномерный предел последовательности регулярных решений начально-краевой задачи.*

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-краевая задача, единственность, ряд, существование, устойчивость.

Masalaning qo'yilishi. So'nggi yillarda balka tebranishlari tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganishga qiziqish ortib bormoqda. Shu boisdan balka tebranishlari tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganish dolzarb ilmiy yo'nalishlardan biriga aylandi [1]-[2]. To'g'ri masalalarda berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlar asosida tebranish jarayonining xatti-harakati aniqlansa, teskari masalalarda esa kuzatilgan ma'lumotlar orqali noma'lum koeffitsiyentlar yoki tashqi ta'sirlar tiklanadi. Bunday masalalar muhandislik, qurilish va mexanika sohalarida, ayniqsa, konstruksiyalarning mustahkamligi va barqarorligini baholashda muhim ahamiyatga ega. Ushbu yo'nalishda analitik, sonli va spektral usullar yordamida yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va turg'unligini tadqiq etishga alohida e'tibor qaratilmoqda [3]-[8].

Ushbu [3], [4] ishlarda balkaning tebranish tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimi dastlab tashqi kuch mavjud bo'lmaganda va bir jinsli chegaraviy shartlar qo'yilganda qurilgan, so'ngra tashqi kuch mavjud bo'lganda va bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shartlar qo'yilganda umumiy holat ko'rib chiqilgan. [9] ishda esa cheksiz balkaning tebranish tenglamasi bilan bog'liq to'g'ri masala, xususan, Koshi masalasi, shuningdek, ushbu tenglamadagi bosh hadning vaqtga bog'liq koeffitsiyentini aniqlash bo'yicha teskari masala yechilgan. Tadqiqotda mavjudlik, yagonalik, va teskari masala yechimlarning shartli barqarorligi isbotlanilgan.

To'rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani qaraymiz [1, b. 394]:

$$Lu = u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u + q(t)u_t(x, y, t) = F(x, y, t), \quad (1)$$

bu tenglama yupqa bir jinsli to'g'ri to'rtburchak plastinkaning ko'ndalang tebranishlarini modellashtiradi, bunda $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$; EJ — plastinkaning qattiqligi; ρ — plastinka birlik yuzasiga to'g'ri keladigan massa; E — materialning elastiklik moduli; J — inersiya momenti; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$; $F(x, y, t)$ — plastinka birlik yuzasiga hisoblangan uzluksiz tashqi kuch; $u(x, y, t)$ — plastinkaning (x, y) nuqtasining t vaqtdagi siljishi.

Plastinka nuqtalarining tebranishini (siljishini) aniqlash uchun $x=0$, $x=p$, $y=0$ va $y=q$ chetlarida chegaraviy shartlarni berish kerak. Bu ishda $x=0$ va $x=p$ tomonlari sharnirli mahkamlangan, $y=0$ va $y=q$ tomonlari esa qistirilgan holda mahkamlangan hol o'rganiladi ($0 \leq t \leq T$):

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq q; \\ u(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_y(x, q, t) = 0, & 0 \leq x \leq p. \end{cases} \quad (2)$$

Boshlang'ich shartlar membrana tebranishlaridagi kabi:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, t)|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q. \quad (3)$$

Belgilashlar kiritamiz:

$$Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, 0 < t < T\}, \quad D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

bu yerda p, q va T berilgan musbat sonlar.

1-masala. Quyidagi xossalarga ega $u(x, y, t)$ funksiyani toping:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &\in C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q}), \\ Lu(x, y, t) &\equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \end{aligned} \quad (4)$$

bu funksiya boshlang'ich shartlar (3) va chegaraviy shartlar (2) ni qanoatlantiradi, bunda $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ va $\psi(x, y)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

1-Ta'rif. (1)–(4) masalasining $C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q})$ sinfidagi yechimi bu masalaning klassik (regulyar) yechimi deb ataladi.

Teskari masala. Agar to'g'ri masala (1)–(4) yechimi haqida qo'shimcha ma'lumot

$$\iint_D u(x, y, t) h(x, y) dx dy = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

ma'lum bo'lsa, (1) tenglamadan $q(t)$ koeffitsiyentni aniqlash masalasi, bu yerda $h(x, y)$, $g(t)$ – berilgan funksiyalar. Bunda $g(t)$ qandaydir o'lgangan kattalikni, masalan, to'sin-plastinkaning qaysidir spesifik nuqtadagi og'ishini yoki unga bog'liq kattalikni (masalan, o'rtacha og'ish yoki nurlanish, yuklanish effekti) ifodalashi mumkin. $h(x, y)$ funksiyasi esa to'sin-plastinka bo'ylab ushbu o'lganayotgan kattalik profilini

beradi va uning ko‘rinishi qaysi fizik kattalik o‘lchanayotganiga bog‘liq bo‘lishi mumkin: bu og‘irlik, kuch, kuchlanish yoki og‘ish bo‘lishi mumkin.

$q(t)=0$ bo‘lganda, yechimning yagonaligini K. Sabitov tomonidan [10] ishda isbotlangan.

Ikki uchi mahkamlangan (qisqichlangan) chegara shartlariga ega bo‘lgan to‘sin-plastinkaning tebranishlari

(1) tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratamiz $u(x,y,t)=v(x,y)v(t)$. U holda $v(x,y)$ ga nisbatan spektral masala hosil bo‘ladi:

$$\Delta^2 v - \lambda^2 v = 0, \quad (x,y) \in D, \quad (10)$$

$$v(0,y)=v_{xx}(0,y)=v(p,y)=v_{xx}(p,y)=0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (11)$$

$$v(x,0)=v_y(x,0)=v(x,q)=v_y(x,q)=0, \quad 0 \leq x \leq p. \quad (12)$$

Plastinkaning tebranish chastotalari va tebranish shakllari aynan ana shu chegara shartlariga bog‘liq.

(10)–(12) spektral masala yechimini $v(x,y)=X(x)Y(y)$ ko‘rinishida qidiramiz. U holda (10) tenglamadan

$$\frac{X^{IV}}{X} = -\frac{Y^{IV}}{Y} - 2\frac{Y''}{Y}\frac{X''}{X} + \lambda^2 = -\mu^2$$

ga ega bo‘lamiz.

$X'' = -C_0 X$ deb faraz qilaylik, bunda $C_0 = \text{const} > 0$. U holda quyidagilarni olamiz:

$$X^{IV}(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (13)$$

$$Y^{IV}(y) - 2C_0 Y''(y) - (\mu^2 + \lambda^2) Y(y) = 0, \quad 0 < y < q. \quad (14)$$

$X'' = -C_0 X$ shartidan $X^{IV} = -C_0 X'' = C_0^2 X$ kelib chiqadi. Demak, (13) tenglamadan $\mu^2 = -C_0^2$ ni olamiz va $X(x)$ ga nisbatan quyidagi spektral masalaga ega bo‘lamiz:

$$X^{IV}(x) - C_0^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (15)$$

$$X(0) = X''(0) = X(p) = X''(p) = 0. \quad (16)$$

$C^4(0,p) \cap C^3[0,p]$ funksiyalar to‘plamida X^{IV} differensial ifodasi bilan hosil qilingan L operatori (16) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi o‘z-o‘ziga qo‘shma hisoblanadi. (15), (16) masalaning xos funksiyalari va ularga mos xos qiymatlari quyidagi ko‘rinishga ega [10]:

$$X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin d_m x, \quad (17)$$

$$C_0^2 = d_m^4 = \left(\frac{\pi m}{p}\right)^4, \quad m=1,2,\dots \quad (18)$$

$Y(y)$ funksiyalar uchun (14) va (12) ga asosan quyidagi masalaga ega bo‘lamiz:

$$Y^{IV}(y) - 2C_0 Y''(y) - (\lambda^2 - C_0^2) Y(y) = 0, \quad 0 < y < q, \quad (19)$$

$$Y(0) = Y''(0) = Y(q) = Y''(q) = 0. \quad (20)$$

(19) differensial tenglama uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^4 - 2C_0 k^2 + C_0^2 - \lambda^2 = 0,$$

uning ildizlari:

$$k_1 = \sqrt{C_0 + \lambda}, \quad k_2 = -\alpha, \quad k_3 = \sqrt{C_0 - \lambda} = i\sqrt{\lambda - C_0} = i\beta, \quad k_4 = -i\beta.$$

Bu yerda $C_0 + \lambda > 0$, $C_0 - \lambda < 0$ deb hisoblaymiz. U holda (19) differensial tenglama umumiy yechimi:

$$Y(y) = a_1 \operatorname{ch} \alpha y + a_2 \operatorname{sh} \alpha y + a_3 \cos \beta y + a_4 \sin \beta y, \quad (21)$$

bu yerda a_i — ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

(21) funksiyani (20) dan dastlabki ikki shartga bo‘ysundirib, topamiz:

$$a_3 = -a_1, \quad a_4 = -\frac{\alpha}{\beta} a_2.$$

U holda (21) funksiya quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$Y(y) = a_1 (\operatorname{ch} \alpha y - \cos \beta y) + a_2 \left(\operatorname{sh} \alpha y - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta y \right). \quad (22)$$

Endi (22) funksiyani (20) ning oxirgi ikki shartiga bo‘ysundiramiz:

$$\begin{cases} a_1 (\operatorname{ch} \alpha q - \cos \beta q) + a_2 \left(\operatorname{sh} \alpha q - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta q \right) = 0, \\ a_1 (\alpha \operatorname{sh} \alpha q + \beta \sin \beta q) + a_2 \alpha (\operatorname{ch} \alpha q - \cos \beta q) = 0. \end{cases}$$

β ni aniqlash uchun bu sistemaning determinantini nolga tenglaymiz:

$$2\alpha\beta - 2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha q \cos \beta q - (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha q \sin \beta q = 0. \quad (23)$$

(23) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sin(\beta q + \gamma) = \frac{2\alpha\beta}{A}, \quad (24)$$

bu yerda

$$\gamma = \arcsin \frac{2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha q}{A},$$

$$A = \sqrt{4\alpha^2 \beta^2 \operatorname{ch}^2 \alpha q + (\beta^2 - \alpha^2)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha q} = \sqrt{4\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha q}.$$

(24) tenglamadan topamiz:

$$\beta = \frac{1}{q} \left[\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

chunki (24) tenglamaning o'ng tomoni noldan katta va birdan kichik.

Olingan (25) tenglik β ga nisbatan nochiziqli tenglama hisoblanadi. Uning yechimi mavjudligini asoslash uchun quyidagi funksional tenglamani qaraymiz:

$$\beta = f(\beta) = \frac{1}{q} \left[\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma \right]$$

berilgan n da.

Ma'lumki, bunday tenglamaning yechiluvchanligi uchun $|f'(\beta)| < 1$ bo'lishi yetarli. Hosilani topamiz:

$$f'(\beta) = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2) \operatorname{sh} \alpha q}{A^2} \left[(-1)^n + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \operatorname{ch} \alpha q \right].$$

Bu yerdan quyidagi bahoni olamiz:

$$|f'(\beta)| = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2)(\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha q)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh} \alpha q}$$

katta β larda, demak katta α larda ham ($\alpha > \beta$ bo'lgani uchun) 1 dan kichikdir.

U holda (25) tenglama kamida bitta yechimga ega. n ga har xil qiymatlar berib, (24) tenglamadan topiladigan β_n qiymatlarining sanoqli to'plamini olamiz. Katta n larda asimptotik formula o'rinni:

$$\beta_n \approx \frac{\pi n}{q}.$$

Xos funksiyalarning tegishli sistemasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{nm}(y) &= \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) \\ &+ \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y \\ &= A_{nm} (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) + \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q} [\beta_n (\operatorname{sh} \alpha_{nm} q \cos \beta_n y - \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \cos \beta_n q) - \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} (q - y) - \alpha_{nm} \sin \beta_n (q - y) \\ &\quad + \alpha_{nm} (\operatorname{ch} \alpha_{nm} y \sin \beta_n q - \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \sin \beta_n y)], \end{aligned} \quad (26)$$

bu funksiya umumiy holda m nomeriga bog'liq, chunki $\alpha^2 = C_0 + \lambda = 2C_0 + \beta_n^2 = 2d_m^2 + \beta_n^2$ n va m ga bog'liq.

(19), (20) masala xos funksiyalar sistemasining (26) ortogonalligi (20) chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi $C^4(0, q) \cap C^3[0, q]$ funksiyalar to'plamida $Y^{IV} - 2C_0 Y''$ differensial ifodasi bilan aniqlangan differensial operatorning o'z-o'ziga qo'shma ekanligidan kelib chiqadi.

(26) xos funksiyalar sistemasining normasini topamiz:

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}_{nm}\|^2 &= \int_0^q \tilde{Y}_{nm}^2(y) dy = \int_0^q [A_{nm}^2 (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y)^2 + 2A_{nm} (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) \\ &\times (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y) + (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y)^2] dy = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

J_i integrallarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} J_1 &= A_{nm}^2 \int_0^q (\cos^2 \beta_n y - 2\cos \beta_n y \operatorname{ch} \alpha_{nm} y + \operatorname{ch}^2 \alpha_{nm} y) dy = \\ &= A_{nm}^2 \left(\frac{q}{2} + \frac{\sin 2\beta_n q}{4\beta_n} \right) - \frac{2A_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} [\alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q + \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q] + A_{nm}^2 \left(\frac{q}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{4\alpha_{nm}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= 2A_{nm} \int_0^q (\beta_n \cos \beta_n y \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \cos \beta_n y \sin \beta_n y - \beta_n \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \operatorname{sh} \alpha_{nm} y + \alpha_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \sin \beta_n y) dy = \\
 &= \frac{2A_{nm} \beta_n}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} [\alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q + \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm}] - 2A_{nm} \alpha_{nm} \frac{\sin^2 \beta_n q}{2\beta_n} - 2A_{nm} \beta_n \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} q}{2\alpha_{nm}} \\
 &+ \frac{2A_{nm} \alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} [\alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \beta_n \cos \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q + \beta_n] = -\frac{A_{nm}}{\alpha_{nm} \beta_n} (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \sin \beta_n q)^2, \\
 J_3 &= \int_0^q (\beta_n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} y - 2\beta_n \alpha_{nm} \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \sin \beta_n y + \alpha_{nm}^2 \sin^2 \beta_n y) dy = \\
 &= \frac{\beta_n^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{2\alpha_{nm}} - q \right) - \frac{2\beta_n \alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} (\alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \beta_n \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q) + \frac{\alpha_{nm}^2}{2} \left(q - \frac{\sin 2\beta_n q}{2\beta_n} \right).
 \end{aligned}$$

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{Y}_{nm}\|^2 &= \left(A_{nm}^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2} \right) q + \frac{A_{nm}^2}{4} \left(\frac{\sin 2\beta_n q}{\beta_n} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{\alpha_{nm}} \right) \\
 &+ \frac{\beta_n^2 \operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{4\alpha_{nm}} - \frac{\alpha_{nm}^2}{4\beta_n} \sin 2\beta_n q - \frac{A_{nm} \beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} q - \frac{A_{nm} \alpha_{nm}}{\beta_n} \sin^2 \beta_n q. \quad (27)
 \end{aligned}$$

(19), (20) masala xos funksiyalarining ortonormal sistemasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$Y_{nm}(y) = \frac{1}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \tilde{Y}_{nm}(y), \quad (28)$$

bu yerda $\tilde{Y}_{nm}(y)$ (26) formula bilan topiladi, norma $\|\tilde{Y}_{nm}\|$ (27) formuladan, β_n xos qiymatlari esa (25) tenglikdan olinadi.

Topilgan bir o'lchovli spektral masalalarning (15), (16) va (19), (20) xos funksiyalari (17) va (28) asosida quyidagi xos funksiyalarni tuzamiz:

$$v_{nm}(x, y) = X_{nm}(x) Y_{nm}(y), \quad (29)$$

ular

$$\lambda_{nm} = d_m^2 + \beta_n^2 \quad (30)$$

xos qiymatlariga mos keladi, bunda d_m va β_n mos ravishda (18) va (25) formulalardan topiladi.

(2)–(5) masala yechimini formal ravishda qator yig'indisi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{nm}(t) v_{nm}(x, y), \quad (31)$$

bu yerda

$$u_{nm}(t) = \iint_D u(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy. \quad (32)$$

(32) tenglikni $t \in (0, T)$ bo'yicha ikki marta differensiallaymiz va (1) tenglamaga qo'yamiz, natijada quyidagini olamiz:

$$\begin{aligned}
 &\iint_D u_{tt}(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy + \alpha^2 \iint_D (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) v_{nm}(x, y) dx dy \\
 &\iint_D q(t) u_t(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy = \iint_D F(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Chegaraviy shartlar (2) va (11), (12) ni hisobga olib, bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned}
 &\iint_D u_{tt}(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_D u(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy = u_{nm}''(t), \\
 &\iint_D q(t) u_t(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy = q(t) \frac{\partial}{\partial t} \iint_D u(x, y, t) v_{nm}(x, y) dx dy = q(t) u_{nm}'(t), \\
 &\iint_D u_{xxxx} v_{nm}(x, y) dx dy = d_m^4 \iint_D u v_{nm}(x, y) dx dy, \\
 &\iint_D u_{yyyy} v_{nm}(x, y) dx dy = \iint_D u(x, y) X_{nm}(x) [2C_0 Y_{nm}''(y)
 \end{aligned}$$

$$+(\lambda_{mn}^2 - C_0^2)Y_{mn}(y)]dx dy = 2d_m^2 \iint_D uX_{mn}(x)Y_{mn}(y)dx dy + (\lambda_{mn}^2 - d_m^4) \iint_D uv_{mn}(x,y)dx dy,$$

$$\iint_D u_{xy}v_{mn}(x,y)dx dy = -d_m^2 \iint_D u(x,y)X_{mn}(x)Y_{mn}(y)dx dy.$$

Topilgan integral qiymatlarini (33) tenglikka qo'yib, $u_{mn}(t)$ ga nisbatan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani olamiz:

$$u_{mn}''(t) + \alpha^2 \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) + q(t)u_{mn}'(t) = F_{mn}(t), \quad (34)$$

bu yerda

$$F_{mn}(t) = \iint_D F(x,y,t)v_{mn}(x,y)dx dy.$$

(34) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$u_{mn} = a_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t (F_{mn}(s) - q(s)u_{mn}'(s)) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad (35)$$

bu yerda $\omega_{mn} = \alpha \lambda_{mn}$, a_{mn} va b_{mn} — ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Noma'lum a_{mn} va b_{mn} larni aniqlash uchun boshlang'ich shartlar (3) va (32) formuladan foydalanamiz:

$$u_{mn}(0) = \iint_D u(x,y,0)v_{mn}(x,y)dx dy = \iint_D \varphi(x,y)v_{mn}(x,y)dx dy = \varphi_{mn}, \quad (36)$$

$$u_{mn}'(0) = \iint_D u_t(x,y,0)v_{mn}(x,y)dx dy = \iint_D \psi(x,y)v_{mn}(x,y)dx dy = \psi_{mn}. \quad (37)$$

(35) dagi nomalum koeffitsiyentlarni, boshlang'ich shartlar (37) va (38) shatlardan foydalanib quyidagicha topamiz:

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}}.$$

Topilgan a_{mn} va b_{mn} qiymatlarni (35) formulaga qo'yib, funksiyalarning aniq ko'rinishini olamiz:

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t q(s)u_{mn}'(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad (38)$$

(38) integral ostida $u_{mn}'(t)$ ishtirok etmoqda. Shuning uchun (38) tenglamani t bo'yicha differensiallaymiz va $u_{mn}'(t)$ ga nisbatan quyidagi integral tenglamani olamiz

$$u_{mn}'(t) = -\alpha \lambda_{mn} \varphi_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \psi_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \int_0^t (F_{mn}(s) - q(s)u_{mn}'(s)) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds. \quad (39)$$

Endi, biz $u_{mn}(t)$, $u_{mn}'(t)$ va $u_{mn}''(t)$ funksiyalar uchun quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

1-lemma. Faraz qilaylik, $q \in C[0, T]$, barcha $\forall t \in [0, T]$ va yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi baholar

o'rinli:

$$|u_{mn}(t)| \leq |\varphi_{mn}| + \frac{|\psi_{mn}|}{\alpha \lambda_{mn}} + \frac{t}{\omega_{mn}} \|F_{mn}\|_{C[0, T]} + \frac{t \|q\|_{C[0, T]}}{\omega_{mn}} (\alpha \lambda_{mn} |\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t \|F_{mn}\|_{C[0, T]}) \exp(t \|q\|_{C[0, T]}), \quad (40)$$

$$|u_n'(t)| \leq (\alpha \lambda_{mn} |\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t \|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t \|q\|_{C[0,T]}), \quad (41)$$

$$|u_n''(t)| \leq \|F_{mn}\|_{C[0,T]} + \alpha^2 \lambda_{mn}^2 \left[|\varphi_{mn}| + \frac{|\psi_{mn}|}{\alpha \lambda_{mn}} + \frac{t}{\omega_{mn}} \|F_{mn}\|_{C[0,T]} + \frac{t \|q\|_{C[0,T]}}{\omega_{mn}} (\alpha \lambda_{mn} |\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t \|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t \|q\|_{C[0,T]}) \right] + \|q\|_{C[0,T]} (\alpha \lambda_{mn} |\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t \|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t \|q\|_{C[0,T]}). \quad (42)$$

Isbot. Dastlab, (39) integral tenglamaning ikkila tomondan modul olamiz

$$|u_n'(t)| = \left| -\alpha \lambda_{mn} \varphi_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \psi_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds - \int_0^t q(s) u_{mn}'(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds \right|.$$

So'ng baholaymiz:

$$|u_n'(t)| \leq \alpha \lambda_{mn} |\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t \|F_{mn}\|_{C[0,T]} + \|q\|_{C[0,T]} \int_0^t |u_{mn}'(s)| ds.$$

Gronoull integral tengsizligiga asosan, yuqoridagidan (41) bahoni olamiz.

Endi (38) tenglamadan foydalanib, quyidagini olamiz

$$|u_n(t)| = \left| \varphi_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \sin[\omega_{mn}(t-s)] F_{mn}(s) ds + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \sin[\omega_{mn}(t-s)] q(s) u_n'(s) ds \right| \leq |\varphi_{mn}| + \frac{|\psi_{mn}|}{\alpha \lambda_{mn}} + \frac{t}{\omega_{mn}} \|F_{mn}\|_{C[0,T]} + \frac{t \|q\|_{C[0,T]}}{\omega_{mn}} |u_n'(\tau)|.$$

Yuqoridagi tengsizlikda (41) tengsizlikdan foydalanib 2-lemmadagi (40) tengsizlikni olamiz. (24) tenglamadan foydalangan holda, biz $u_n''(t)$ ga nisbatan (42) bahoni oldik.

Faraz qilaylik, $u_n(t)$ va $\tilde{u}_n(t)$ funksiyalar (34), (36), (37) Koshi masalasining turli yechimlari bo'lsin.

Bunda $u_n(t)$ (34), (36), (37) Koshi masalasining yechimi, $\tilde{u}_n(t)$ esa bu tenglamaning $\tilde{\varphi}_{mn}$, $\tilde{\psi}_{mn}$ va $\tilde{F}_{mn}(t)$ funksiyalari bilan o'zgartirilgan holdagi yechim:

$$\tilde{u}_{mn}(t) = \tilde{\varphi}_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \frac{\tilde{\psi}_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \tilde{F}_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t q(s) \tilde{u}_{mn}'(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds. \quad (43)$$

(43) tenglamaning t bo'yicha differensialsi esa

$$\tilde{u}_n'(t) = -\alpha \lambda_{mn} \tilde{\varphi}_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \tilde{\psi}_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + \int_0^t \tilde{F}_{mn}(s) \cos[\omega_{mn}(t-s)] ds + \int_0^t \tilde{q}(s) \tilde{u}_{mn}'(s) \cos[\omega_{mn}(t-s)] ds. \quad (44)$$

$u_{mn}(t) - \tilde{u}_{mn}(t)$ va $u_{mn}'(t) - \tilde{u}_{mn}'(t)$ ayirmalarni tuzib, dastlab (39) va (44) integral tenglamalar yordamida quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz:

$$u_{mn}'(t) - \tilde{u}_{mn}'(t) = -\alpha \lambda_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t (\varphi_{mn} - \tilde{\varphi}_{mn}) + \cos \alpha \lambda_{mn} t (\psi_{mn} - \tilde{\psi}_{mn}) + \int_0^t (F_{mn}(s) - \tilde{F}_{mn}(s)) \cos[\omega_{mn}(t-s)] ds + \int_0^t \cos[\omega_{mn}(t-s)] \tilde{q}(s) (u_{mn}'(s) - \tilde{u}_{mn}'(s)) ds$$

$$+ \int_0^t \cos[\omega_{mn}(t-s)](q(s)-\tilde{q}(s))u'_{mn}(s)ds. \quad (45)$$

Shundan so'ng, (38) va (43) integral tenglamalar yordamida $u_{mn}(t)-\tilde{u}_{mn}(t)$ ayirmaga nisbatan quyida integral tenglamani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} u_{mn}(t)-\tilde{u}_{mn}(t) &= \cos\alpha\lambda_{mn}t (\varphi_{mn}-\tilde{\varphi}_{mn}) + \frac{\sin\alpha\lambda_{mn}t}{\alpha\lambda_{mn}} (\psi_{mn}-\tilde{\psi}_{mn}) \\ &+ \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t (F_{mn}(s)-\tilde{F}_{mn}(s)) \sin[\omega_{mn}(t-s)]ds + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t \tilde{q}(s) (u'_{mn}(s)-\tilde{u}'_{mn}(s)) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds \\ &+ \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t u'_{mn}(s) (q(s)-\tilde{q}(s)) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds. \end{aligned} \quad (46)$$

So'ngra (45) tenglamadan foydalanib, $u'_n(t)-\tilde{u}'_n(t)$ ayirmani baholab, $|u'_{mn}(t)-\tilde{u}'_{mn}(t)|$ uchun quyidagi chiziqli integral tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)-\tilde{u}'_{mn}(t)| &\leq \alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}-\tilde{\varphi}_{mn}| + |\psi_{mn}-\tilde{\psi}_{mn}| + t\|F_{mn}-\tilde{F}_{mn}\|_{C[0,T]} \\ &+ t\|q-\tilde{q}\|_{C[0,T]} (\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t\|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t\|q\|_{C[0,T]}) + \|\tilde{q}\|_{C[0,T]} \int_0^t |u'_{mn}(s)-\tilde{u}'_{mn}(s)| ds. \end{aligned}$$

Gronoull integral tengsizligiga ko'ra quyidagi bahoni olamiz

$$\begin{aligned} |u'_{mn}(t)-\tilde{u}'_{mn}(t)| &\leq [\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}-\tilde{\varphi}_{mn}| + |\psi_{mn}-\tilde{\psi}_{mn}| + t\|F_{mn}-\tilde{F}_{mn}\|_{C[0,T]} + t\|q-\tilde{q}\|_{C[0,T]} \\ &\times (\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t\|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t\|q\|_{C[0,T]})] \exp(t\|\tilde{q}\|_{C[0,T]}). \end{aligned} \quad (47)$$

Xuddi shunday, (35) tenglamadan foydalanib, $u_{mn}(t)-\tilde{u}_{mn}(t)$ ayirmani baholab, $|u_{mn}(t)-\tilde{u}_{mn}(t)|$ uchun quyidagi chiziqli integral tengsizlikni keltirib chiqaramiz

$$\begin{aligned} |u_{mn}(t)-\tilde{u}_{mn}(t)| &\leq |\varphi_{mn}-\tilde{\varphi}_{mn}| + \frac{|\psi_{mn}-\tilde{\psi}_{mn}|}{\alpha\lambda_{mn}} + \frac{t}{\omega_{mn}} \|F_{mn}-\tilde{F}_{mn}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{t\|q-\tilde{q}\|_{C[0,T]}}{\omega_{mn}} (\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t\|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t\|q\|_{C[0,T]}) \\ &+ \frac{t\|\tilde{q}\|_{C[0,T]}}{\omega_{mn}} [\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}-\tilde{\varphi}_{mn}| + |\psi_{mn}-\tilde{\psi}_{mn}| + t\|F_{mn}-\tilde{F}_{mn}\|_{C[0,T]} + t\|q-\tilde{q}\|_{C[0,T]} \\ &\times (\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + t\|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(t\|q\|_{C[0,T]})] \exp(t\|\tilde{q}\|_{C[0,T]}). \end{aligned} \quad (48)$$

Bu baholar teskari masalani tadqiq qilishda qo'llaniladi.

So'ngra, hosil qilingan integral tenglama (38) ni (31) ga qo'yib, $u(x,t)$ funksiyasiga nisbatan quyidagini topamiz

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos\alpha\lambda_{mn}t + \frac{\psi_{mn}}{\alpha\lambda_{mn}} \sin\alpha\lambda_{mn}t + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)]ds \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t q(s)u'_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds \right) v_{mn}(x,y), \end{aligned} \quad (49)$$

Dastlab, $u(x,t)$ funksiyaning uzluksizligini isbotlaymiz. (49) qatorning $\Omega_T := \{(x,t): 0 \leq x \leq 1, t \in [0,T]\}$ sohasida tekis yaqinlashuvini isbotlaymiz. Bu qator barcha $(x,t) \in \Omega_T$ lar uchun quyidagi sonli qator bilan majorantlanadi:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}| + \frac{|\psi_{mn}|}{\alpha\lambda_{mn}} + \frac{T}{\omega_{mn}} \|F_{mn}\|_{C[0,T]} + \frac{T\|q\|_{C[0,T]}}{\omega_{mn}} (\alpha\lambda_{mn}|\varphi_{mn}| + |\psi_{mn}| + T\|F_{mn}\|_{C[0,T]}) \exp(T\|q\|_{C[0,T]}) \right). \quad (50)$$

Oxirgi qatorning yaqinlashuvini ta'minlash uchun quyidagi lemmani keltiramiz:

Lemma 3 *Quyidagi shartlar berilgan bo'lsin:*

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &\in C_{x,y}^{2,2}(\bar{D}), \quad \varphi(0,y) = \varphi(p,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ \varphi^{(2,0)}(x,0) &= \varphi^{(2,0)}(x,q) = \varphi^{(2,1)}(x,0) = \varphi^{(2,1)}(x,q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p; \\ \psi(x,y) &\in C_{x,y}^{1,1}(\bar{D}), \quad \psi(0,y) = \psi(p,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ \psi^{(1,0)}(x,0) &= \psi^{(1,0)}(x,q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p; \\ F(x,y,t) &\in C(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^{1,1}(\bar{D}), \quad F(0,y,t) = F(p,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T; \\ F_x(x,0,t) &= F_x(x,q,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

U holda quyidagi baholar o'rinli:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{M_1}{d_m^2 \beta_n^2}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{M_2}{d_m \beta_n}, \quad \|F_{mn}\| \leq \frac{M_3}{d_m \beta_n}. \quad (51)$$

Proof. (36) dagi integralni x o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta bo'laklab integrallaymiz. U holda

$$\varphi_{mn} = \frac{1}{d_m^2} \iint_D \varphi_{(x,y)}^{(2,0)} v_{nm}(x,y) dx dy = \frac{1}{d_m^2} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y) dy. \quad (52)$$

Ichki integralni yana ikki marta bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y) dy = \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}^{(1)}(y) \Big|_0^q - \int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y) Y_{nm}^{(1)}(y) dy,$$

bu yerda

$$\begin{aligned} Y_{nm}^{(1)}(y) &= \int \tilde{Y}_{nm}(y) dy = \frac{1}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \frac{1}{ch\alpha_{nm}q - \cos\beta_n q} [sh\alpha_{nm}q \sin\beta_n y - \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} ch\alpha_{nm}y \cos\beta_n q \\ &+ \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} ch\alpha_{nm}(q-y) - \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n} \cos\beta_n(q-y) + sh\alpha_{nm}y \sin\beta_n q - \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n} ch\alpha_{nm}q \sin\beta_n y] = \frac{1}{\beta_n} \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y); \end{aligned}$$

$\bar{Y}_{nm}^{(1)}(y)$ funksiya katta n va m larda chegaralangan. U holda yuqoridagi tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy = -\frac{1}{\beta_n} \int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y) \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dy = -\frac{1}{\beta_n} \int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y) Y_{nm}^{(2)}(y) dy.$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} Y_{nm}^{(2)}(y) &= \int \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dy = \frac{1}{\beta_n} \frac{\alpha_{nm}}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \frac{1}{ch\alpha_{nm}q - \cos\beta_n q} [-\frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} sh\alpha_{nm}q \cos\beta_n y \\ &- \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3} sh\alpha_{nm}y \cos\beta_n q - \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3} sh\alpha_{nm}(q-y) + \sin\beta_n(q-y) + \frac{\beta_n^2}{\alpha_{nm}^2} ch\alpha_{nm}y \sin\beta_n q - ch\alpha_{nm}q \sin\beta_n y] = \frac{1}{\beta_n} \bar{Y}_{nm}^{(2)}(y); \end{aligned}$$

$\bar{Y}_{nm}^{(2)}(y)$ funksiya ham katta n va m larda chegaralangan. Bundan, $\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy$ integralni quyidagiga tengligini olamiz:

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy = \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y) \bar{Y}_{nm}^{(2)}(y) dy. \quad (53)$$

U holda (52), (53) tengliklardan foydalanib, (51) dagi birinchi qismi uchun baho olamiz:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{M_1}{d_m^2 \beta_n^2}.$$

Endi, ψ_{mn} va $F_{mn}(t)$ hadlarni ham xuddi yuqoridagidek quyidagi yozamiz:

$$\psi_{mn} = \frac{1}{d_m} \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \cos d_m x dx \int_0^q \psi^{(1,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy = \frac{1}{d_m \beta_n} \sqrt{\frac{2}{p}} \iint_D \psi^{(1,1)}(x,y) \cos d_m(x) Y_{nm}^{(1)}(y) dx dy,$$

$$F_{mn}(t) = \frac{1}{d_m \beta_n} \sqrt{\frac{2}{p}} \iint_D F^{(1,1)}(x,y,t) \cos d_m(x) Y_{nm}^{(1)}(y) dx dy,$$

bularga asosan (51) ning qolgan baholarining o'rinliligiga ishonch hosil qilamiz.

$$|\psi_{mn}| \leq \frac{M_2}{d_m \beta_n}, \quad \|F_{mn}\| \leq \frac{M_3}{d_m \beta_n}.$$

(51) baholarga ko'ra, majoranta qilingan (50) qator $m, n \geq N_0$ da, N_0 yetarlicha katta natural son, quyidagi yaqinlashuvchi qator bilan majorantlanadi:

$$\sum_{m,n \geq N_0} \left(\frac{M_1}{d_m^2 \beta_n^2} + \frac{M_2}{d_m \beta_n} + \frac{M_3}{d_m \beta_n} \right) \leq C_1 \sum_{m,n \geq N_0} \frac{1}{m^2 n^2}.$$

Demak, (49) funksional qator tekis va absolyut yaqinlashuvchi ekan. Bundan $u(x,y,t)$ funksiyaning mavjudligi kelib chiqadi.

Endi, yechimning yegulyarligini tekshiramiz. Ya'ni $u(x,y,t)$ yechim klassik ma'noda mavjud bo'lishini tekshiramiz. (31) qatordan hadlab differensiallash bilan quyidagi qatorlarni tuzamiz:

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}''(t) v_{mn}(x,y), \quad (54)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^4 u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} u_{yyyy} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) X_m(x) Y_{nm}^{IV}(y) \\ &= 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(t) Y_{nm}''(y) + \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_n^2 \alpha_{nm}^2 u_{mn}(t) v_{mn}(x,y), \end{aligned} \quad (56)$$

$$u_{xxyy} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(x) Y_{nm}''(y). \quad (57)$$

(54)–(57) qatorlarni tekis va absolyut yaqinlashuvchanlikka tekshirganda, xuddi shunday $(x,y,t) \in \bar{Q}$ da 1 va 2 lemmalarga asosan (54)–(57) qatorlarni majorantlaymiz va quyidagi sonli qatorni olamiz:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m^4 \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} \|F_{mn}\|_{C[0,T]} \right). \quad (58)$$

(58) qatorning yaqinlashishini ko'rsatish uchun berilgan $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ va $F(x,y,t)$ funksiyalarga qo'shimcha shartlar kerak. Shuning uchun $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ va $F(x,y,t)$ funksiyalarga qo'shimcha shartlar talab qilib quyidagi lemmani keltiramiz:

Lemma 4. Faraz qilaylik, $0 \leq y \leq q$ va $0 \leq x \leq p$ lar uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $\varphi(x,y) \in C^{10}(\bar{D})$, $\varphi(0,y) = \varphi(p,y) = 0$, $\varphi^{(2,2)}(0,y) = \varphi^{(2,2)}(p,y) = 0$;
 $\varphi^{(2,0)}(x,q) = \varphi^{(2,0)}(x,0) = \varphi^{(2,1)}(x,q) = \varphi^{(2,1)}(x,0) = 0$,
 $\varphi^{(2,4)}(x,0) = \varphi^{(2,4)}(x,q) = \varphi^{(2,5)}(x,0) = \varphi^{(2,5)}(x,q) = 0$,
 $\varphi^{(4,2)}(x,0) = \varphi^{(4,2)}(x,q) = \varphi^{(4,3)}(x,0) = \varphi^{(4,3)}(x,q) = 0$, ;
2. $\psi(x,y) \in C^6(\bar{D})$, $\psi(0,y) = \psi(p,y) = \psi^{(2,2)}(0,y) = \psi^{(2,2)}(p,y) = 0$,
 $\psi^{(2,0)}(x,q) = \psi^{(2,0)}(x,0) = \psi^{(2,1)}(x,q) = \psi^{(2,1)}(x,0) = 0$;
3. $F(x,y,t) \in C(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^6(\bar{D})$, $F(0,y,t) = F(p,y,t) = 0$,
 $F_{x,y}^{(2,2)}(0,y,t) = F_{x,y}^{(2,2)}(p,y,t) = 0$, $0 \leq t \leq T$;

$$F_{x,y}^{(2,0)}(x,0,t)=F_{x,y}^{(2,0)}(x,q,t)=F_{x,y}^{(2,1)}(x,0,t)=F_{x,y}^{(2,1)}(x,q,t)=0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

U holda quyidagi baholar o'rinli:

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{M_4}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{nm}^4}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{M_5}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2}, \quad \|F_{mn}\|_{C[0,T]} \leq \frac{M_6}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2}. \quad (59)$$

Isbot. (36) tenglikni qaraymiz. Unda x o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta bo'laklab integrallab, quyidagini olamiz:

$$\varphi_{mn} = \iint_D \varphi(x,y) v_{mn}(x,y) dx dy = -\frac{1}{d_m^2} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dx dy. \quad (60)$$

So'ngra yuqoridagi (60) tenglikning o'ng tomonidagi integralni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dx dy &= \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy \\ &= \frac{1}{\lambda_{nm}^2 - d_m^4} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)} [Y_{nm}'(y) - 2d_m^2 Y_{nm}''(y)] dy. \end{aligned}$$

Yana bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x,y) v_{mn}(x,y) dx dy \\ = \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \iint_D [\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y)] v_{mn}(x,y) dx dy. \end{aligned} \quad (61)$$

(61) tenglikning o'ng tomonidagi integralni qaraymiz va uni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} \iint_D [\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y)] v_{mn}(x,y) dx dy &= \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q [\varphi^{(2,4)}(x,y) + 2\varphi^{(4,2)}(x,y)] Y_{nm}(y) dy \\ &= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q [\varphi^{(2,8)}(x,y) - 2d_m^2 \varphi^{(2,6)}(x,y) + 2\varphi^{(4,6)}(x,y) - 4d_m^2 \varphi^{(4,4)}(x,y)] Y_n(y) dy \\ &= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \iint_D [\varphi^{(2,8)}(x,y) + 4\varphi^{(4,6)}(x,y) + 4\varphi^{(6,4)}(x,y)] v_{mn}(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

U holda (60) tenglik (61) va oxirgi tenglikni hisobga olib, quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{nm}^4} \times \iint_D [\varphi^{(2,8)}(x,y) + 4\varphi^{(4,6)}(x,y) + 4\varphi^{(6,4)}(x,y)] v_{mn}(x,y) dx dy. \quad (62)$$

Xuddi shunday (60) va (61) ga asosan:

$$\psi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \iint_D [\psi^{(2,4)}(x,y) + 2\psi^{(4,2)}(x,y)] v_{mn}(x,y) dx dy, \quad (63)$$

$$F_{mn}(t) = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2} \iint_D [F^{(2,4)}(x,y,t) + 2F^{(4,2)}(x,y,t)] v_{mn}(x,y) dx dy. \quad (64)$$

(62)–(64) tengliklardan quyidagi bahoning o'rirliligi kelib chiqadi

$$\sum_{m,n > N_0} \left(\frac{M_4}{d_m^2 \beta_n^4} + \frac{M_5}{d_m^2 \beta_n^2} + \frac{M_6}{d_m \beta_n^2} \right) \leq C_2 \sum_{m,n > N_0} \frac{1}{m^2 n^2}.$$

4-lemmaga va yuqoridagi bahoga asosan (58) qator $m,n > N_0$ da quyidagi yaqinlashuvchi qator bilan baholanadi:

$$\sum_{m,n > N_0} \left(\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4} + \frac{\alpha_{mn}^2}{d_m^2 \beta_n^2 \lambda_{mn}} \right) \leq C_2 \sum_{m,n > N_0} \frac{1}{(mn)^2}.$$

Shunday qilib, biz quyidagi teorema isbotladik:

Teorema 2. Agar $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ va $F(x,y,t)$ funksiyalar 3- va 4-lemmalar shartlarini qanoatlantirsa, u holda (2)–(5) masalasining $C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q})$ sinfida yagona yechimi mavjud bo'lib, u (49) qatorning yig'indisi bilan aniqlanadi.

ADABIYOTLAR:

1. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1966).
2. S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 3rd ed. (D. Van Nostrand, New York, 1955).
3. K. B. Sabitov, "Oscillations of a beam with clamped ends," *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiziko-Mat. Nauki* 19, 311–324 (2015).
4. K. B. Sabitov, "A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams," *Differ. Equations* 53, 86–98 (2017).
5. K. B. Sabitov and A. A. Akimov, "Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation," *Differ. Equations* 56, 621–634 (2020).
6. U. D. Durdiev, "Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation," *Differ. Equat.* 58, 37–44 (2022).
7. U. D. Durdiev, "A time-nonlocal inverse problem for the beam vibration equation with an integral condition," *Differ. Equat.* 59, 359–370 (2023).
8. S. Moaveni and R. Hyde, "Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data," *Inverse Probl. Sci. Eng.* 24, 990–1010 (2016).
9. U. D. Durdiev, "Inverse problem of determining the unknown coefficient in the beam vibration equation in an infinite domain," *Differ. Equat.* 59, 462–472 (2023).
10. K. B. Sabitov, *Plate Oscillations with Mixed Boundary Conditions*, *Russ Math.* 67, 53–65 (2023)

SIMMETRIK KO'PHADLAR VA ULARNING ELEMENTAR MATEMATIKAGA AYRIM TATBIQLARI

Ummatova Mahbuba Axmedovna,

Qo'qon davlat universiteti katta o'qituvchisi

Gofurova Mavjuda Aliyevna,

Qo'qon davlat universiteti o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada algebra kursining muhim mavzularidan biri ko'phadlar nazariyasi bo'limidagi simmetrik ko'phadlar bilan, ya'ni ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda o'zgarmaydigan ko'phadlar bilan yetarlicha tanishtirilib, antisimmetrik ko'phadlar haqidagi fikrlar va uning elementar matematikaga ayrim tatbiqlari o'rganiladi.

Kalit so'zlar: kompetensiya, algoritm, algebra, ko'phadlar nazariyasi, simmetrik ko'phadlar, o'zgaruvchi, simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema va uning natijalari, antisimmetrik ko'phadlar, n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlarning algebratik yig'indisi va ko'paytmasi.

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. В данной статье представлены достаточные сведения о симметричных многочленах в разделе теории многочленов, одной из важных тем курса алгебры, то есть многочлены, которые не изменяются при замене двух произвольных переменных, а также изучаются сведения об антисимметричных многочленах и некоторые их приложения к элементарной математике.

Ключевые слова: компетенция, алгоритм, алгебра, теория многочленов, симметричные многочлены, переменная, основная теорема о симметричных многочленах и ее результаты, антисимметричные многочлены, алгебраическая сумма и произведение симметричных многочленов от n неизвестных.

SYMMETRIC POLYNOMIALES AND SOME APPLICATIONS TO ELEMENTARY MATHEMATICS

Abstract. This article provides a sufficient introduction to symmetric polynomials in the section of polynomial theory, one of the important topics of the algebra course, that is, polynomials that do not change when we replace two arbitrary variables, and studies ideas about antisymmetric polynomials and some of their applications to elementary mathematics.

Key words: competence, algorithm, algebra, polynomial theory, symmetric polynomials, variable, the main theorem on symmetric polynomials and its results, antisymmetric polynomials, algebraic sum and product of n unknown symmetric polynomials.

Kirish. Matematika qadimdan “fanlar onasi” deya e'tirof etilgan. Chunki bu fan tafakkurda aniqlik, izchillik, tizimlilik, mantiqiy tahlil kabi muhim kompetensiyalarni shakllantiradi. Barcha tabiiy va aniq fanlarning negizida matematika yotadi. Bugun sun'iy intellekt, raqamli iqtisodiyot, zamonaviy injiniring va texnologik innovatsiyalar haqida so'z yuritilar ekan, ularning barchasining asosi bo'lib aynan matematik modellashirish, algoritmlar va tahlil vositalari xizmat qilmoqda.

Shunday ekan, har qanday islohot, har qanday strategik rejaning markazida matematika fanining rivoji turmog'i zarur.

Yurtimizda so'nggi yillarda matematika fanini rivojlantirish, uni xalqaro andozalarga mos ravishda o'qitish, yoshlarni bu sohaga qiziqtirish bo'yicha muhim islohotlar amalga oshirildi. Xususan, Prezident qarori bilan Matematika fani bo'yicha ilg'or ilmiy maktablar tashkil etildi; iqtidorli o'quvchilar uchun maxsus matematika maktablari va litseylar ochildi; nufuzli xalqaro olimpiadalar va tanlovlarda qatnashayotgan yoshlar uchun mukofotlar va grant tizimi yo'lga qo'yildi; yuqori malakali kadrlar tayyorlash bo'yicha magistratura va doktorantura dasturlariga alohida e'tibor qaratilmoqda.

Algebra kursining ko'phadlar nazariyasi bo'limida simmetrik ko'phadlar bilan, ya'ni ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda o'zgarmaydigan ko'phadlar bilan yetarlicha

tanishtirilib, simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema va uning ayrim tatbiqlari o'rganiladi.

Ushbu maqolada esa dastlab simmetrik ko'phadlar, keyin esa, nisbatan kam o'rganilgan, simmetrik ko'phadlarga juda ham yaqin bo'lgan ko'phadlar sinfi - *antisimmetrik ko'phadlar bilan tanishtirishga va ularning elementar matematikaga ba'zi tatbiqlarini ko'rib chiqiladi.*

Ta'rif. Agar ko'p noma'lumli ko'phaddagi ixtiyoriy ikkita noma'lumning o'rinlarini almashtirganda ko'phad o'zgarmasa, u holda bunday ko'phad simmetrik ko'phad deyiladi.

n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlarning algebraik yig'indisi yana n ta noma'lumli simmetrik ko'phadlar bo'ladi. Haqiqatan ham, noma'lumlarning istalgan o'rin almashtirishida har qaysi simmetrik ko'phad o'zgarmasa, ravshanki, ularning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi ham o'zgarmaydi. Masalan,

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \text{ va } f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

simmetrik ko'phadlarning quyidagi algebraik yig'indisi va ko'paytmasi yana simmetrik ko'phadlardir:

$$f_1 \pm f_2 = x_1 + x_2 + x_3 \pm x_1 x_2 x_3;$$

$$f_1 \cdot f_2 = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$$

Ta'rif. $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlardan tuzilgan simmetrik ko'phadlar asosiy (elementar) simmetrik ko'phadlar deb ataladi.

$$\tau_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\tau_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n,$$

$$\tau_n = x_1 x_2 \dots x_n \quad (1)$$

Antisimmetrik ko'phadlar ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda ishorasi o'zgaradigan ko'phadlarga aytiladi.

Avvalo, ikki o'zgaruvchili *antisimmetrik ko'phadlarni* ko'rib chiqaylik. Bunday ko'phadlarga misol tarzida, $x - y$, $x^3 - y^3$, $x^4 y - xy^4$ ko'phadlarni olishimiz mumkin. Aslida agar, masalan, $x^3 - y^3$ ko'phadda x va y o'zgaruvchilarning o'rinlarini almashtirsak, u holda ko'phad, $y^3 - x^3$ ko'rinishga o'tadi. $y^3 - x^3 = -(x^3 - y^3)$, bo'lganligi uchun $x^3 - y^3$ ko'phad *antisimmetrik ko'phaddir*. Xuddi shu kabi, $x - y$ va $xy - xy^4$ ko'phadlarning ham *antisimmetrik ko'phadlar* ekanligini isbotlash mumkin.

Uch o'zgaruvchili *antisimmetrik ko'phadlarga* misol tarzida $(x - y)(x - z)(y - z)$ ko'phadni olish mumkin. Bu ko'phadda x va y o'zgaruvchilarning o'rinlarini almashtirsak, u holda $(y - x)(y - z)(x - z) = -(x - y)(x - z)(y - z)$ ko'rinishga o'tadi. Xuddi shu kabi boshqa o'zgaruvchilar o'rnini almashtirilganda ham ko'phadning ishorasi o'zgaradi. *Antisimmetrik ko'phadlar* uchun o'rinli bo'lgan quyidagi muhim xossani keltiramiz: *antisimmetrik ko'phadning kvadrati simmetrik ko'phad bo'ladi.*

Aslida, ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda *antisimmetrik ko'phadlar* ishorasini o'zgartiradi. Lekin ko'phadning kvadratining ishorasi o'zgarmaydi. Demak, *antisimmetrik ko'phadlarning kvadratida ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda ko'phad o'zgarmaydi*, ya'ni *antisimmetrik ko'phadlarning kvadrati simmetrik ko'phaddir.*

Antisimmetrik ko'phadlarning nafaqat kvadrati, balki, ixtiyoriy ikkita *antisimmetrik ko'phadlarning* ko'paytmasi ham simmetrik ko'phaddir. Chunki, ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda har ikkala ko'phadlar ishorasini o'zgartiradi, shuning usun ko'paytmaning ishorasi o'zgarmaydi. *Antisimmetrik ko'phadni simmetrik ko'phadga ko'paytirish natijasida esa antisimmetrik ko'phad hosil bo'ladi.* Chunki, ixtiyoriy ikkita o'zgaruvchisining o'rnini almashtirganimizda bir ko'phad ishorasini o'zgartiradi, ikkinchisi esa o'zgartirmaydi, shuning uchun ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi. Ixtiyoriy *antisimmetrik ko'phad* qanday tuzilganini aniqlashtiraylik. Yuqorida keltirilgan jumla *antisimmetrik ko'phadni* qurish usulini ko'rsatib turibdi. Biror *antisimmetrik ko'phadni* ixtiyoriy simmetrik ko'phadga ko'paytiramiz va ko'paytmada *antisimmetrik ko'phadlar* hosil bo'ladi. Tabiiy savol kelib chiqadi. Biror *antisimmetrik ko'phadni* topish mumkinmiki, uni barcha simmetrik ko'phadlarga ko'paytirish natijasida barcha *antisimmetrik ko'phadlarni* hosil qilish mumkin bo'lsin. (o'zgaruvchilar soni berilgan). Bu savolga quyidagicha javob beriladi. Ikki o'zgaruvchili ko'phadlardan boshlaylik. Bu holda, izlanayotgan *antisimmetrik ko'phad* $x - y$ dan iborat bo'ladi. Boshqacha aytganda, quyidagi teorema o'rinli.

Antisimmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremani va lemmani keltiramiz.

Teorema. Ixtiyoriy ikki o'zgaruvchili $f(x,y)$ antisimmetrik ko'phad

$f(x,y)=(x-y)g(x,y)$ ko'rinishda bo'ladi, bunda, $g(x,y)$ - x va y o'zgaruvchilarning simmetrik ko'phadi.

Lemma. Agar $f(x,y)$ — antisimmetrik ko'phad bo'lsa, u holda $f(x,x) = 0$ bo'ladi.

Yoki boshqacha aytganda, x va y o'zgaruvchilar ustma-ust tushganda antisimmetrik ko'phad nolga aylanadi.

Antisimmetrik ko'phadlarning matematikaning ko'plab sohalariga tatbiqlari uchraydi. Misol tarzida, ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish, ko'phadning diskriminantini va uning tenglamalar ildizlarini tekshirishga tatbiqlari, tengsizliklarni isbotlash, ayniyatlarni isbotlash, kasr maxrajini irratsionallikdan qutqarishni keltirish mumkin. Shundan elementar matematikaga ba'zi tatbiqlarini, xususan, ko'paytuvchilarga ajratishga tatbiqlarini ko'rib o'tamiz.

Antisimmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teorema elementar algebraning bir qator masalalarni

yechimini sezilarli darajada soddalashtirish imkonini beradi. x,y,z uch o'zgaruvchili ixtiyoriy antisimmetrik ko'phad

$$T(x,y,z)=(x-y)(x-z)(y-z)$$

ko'phadga bo'linganligi uchun ixtiyoriy $f(x,y,z)$ antisimmetrik ko'phadni $f(x,y,z)=T(x,y,z)g(x,y,z)$

ko'paytuvchilarga ajratish imkoni mavjud. Bu yerda $g(x,y,z)$ simmetrik ko'phad. O'z navbatida $g(x,y,z)$ simmetrik ko'phad ham ba'zan ko'paytuvchilarga ajratilgan bo'lishi mumkin. Ta'kidlash kerakki,

$g(x,y,z)=\frac{f(x,y,z)}{T(x,y,z)}$ nisbatni topish uchun $f(x,y,z)$ antisimmetrik ko'phadni $T(x,y,z)$ kubik ko'phadga ustun

shaklida bo'lish maqsadga muvofiq emas. Xususiy qiymatlar usuli nisbatan qulayroq. Aynan $f(x,y,z)$

antisimmetrik ko'phad uchinchi darajaga ega bo'lsa, $\frac{f(x,y,z)}{T(x,y,z)}$ nisbat nolinch darajali ko'phad bo'ladi, ya'ni

son bo'ladi. $f(x,y,z)=kT(x,y,z)$ munosabat ayniyat bo'ladi, ya'ni (x,y,z) larning ixtiyoriy qiymatlarida

o'rinli bo'ladi. Shuning uchun, k sonini aniqlash uchun oxirgi tenglikga (x,y,z) ga qandaydir (o'zaro har

xil) son qiymatlarni berish yetarlidir, bundan k soni aniqlanadi. Agar $f(x,y,z)$ antisimmetrik ko'phad

to'rtinchi darajali bir jinsli ko'phad bo'lsa, u holda $\frac{f(x,y,z)}{T(x,y,z)}$ nisbat birinchi darajali bir jinsli simmetrik

ko'phad bo'ladi, ya'ni $f(x,y,z)=T(x,y,z)k\sigma_1$ (k -son) va bu yerda k noma'lumli koeffitsiyentni aniqlash

uchun x,y,z larga qandaydir son qiymatlar berish yetarli. Xuddi shunday, agar $f(x,y,z)$ 5-darajali bir jinsli

antisimmetrik ko'phad bo'lsa, u holda $\frac{f(x,y,z)}{T(x,y,z)}$ nisbat ikkinchi darajali bir jinsli simmetrik ko'phad

bo'ladi, ya'ni $k\sigma_1^2+l\sigma_2$ ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda k va l lar noma'lum koeffitsiyentlar.

$f(x,y,z)=T(x,y,z)(k\sigma_1^2+l\sigma_2)$ k va l ikkita noma'lumlarni topish uchun biz x,y,z larga ikki marta

qandaydir son qiymatlar berishimiz kerak. Agar $f(x,y,z)$ 6-darajali bir jinsli antisimmetrik ko'phad bo'lsa,

u holda $f(x,y,z)=T(x,y,z)(k\sigma_1^3+l\sigma_1\sigma_2+m\sigma_3)$, bo'ladi.

1-misol. $f(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish. Bu ko'phad yuqoridagi ta'rifga asosan, antisimmetrik ko'phad. Yana shuni aytish

mumkinki, u uchinchi darajaga ega bo'lgani uchun, $f(x,y,z)=k T(x,y,z)$ bo'ladi. k noma'lum koeffitsiyentni topish uchun $x=0, y=1, z=2$ qiymatlarni qo'yamiz. $6=-2k$ ni hosil qilib, $k=-3$ ni topamiz.

Shunday qilib,

$$f(x,y,z)=(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = -3(x-y)(x-z)(y-z) = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

2-misol. $f(x,y,z)=yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-z^2)$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish. Yuqorida aytilganlarga ko'ra,

$$f(x,y,z)=T(x,y,z)k\sigma_1 \quad (k\text{-son})$$

Ya'ni

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-z^2) = k(x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

k noma'lum koeffitsiyentni topish uchun $x=0, y=1, z=2$ qiymatlarni qo'yamiz. $k=1$ ni hosil qilib, javobni topamiz:

$$yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)+xy(x^2-z^2) = (x+y+z)(x-y)(x-z)(y-z)$$

ADABIYOTLAR:

1. В. Г. Болтянский, н. Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. Издательство Московского центра непрерывного математического образования. Москва, 2002.
2. Р.Н. Назаров, Б.Т.Тошпулатов, А.Д. Дусумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси Тошкент, Ўқитувчи. II қисм, 1995.
3. J. H.Xoijiyev, A.S. Faynleb. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, O'zbekiston, 2001.
4. Kenneth Kuttler. Elementary linear algebra. 2012, Ventus Publishing Aps, ISBN 978-87-403-0018-5.
5. Shukurovich, Madrahimov Shuhratjon, and Madrahimova Mahfuza Ahmedovna. "Measures For Monitoring And Evaluation Of Power Activity In Higher Education." JournalNX: 423-426.
6. Madrakhimov, Shukhrat Shukurovich, and Mahfuza Akhmedovna Madrakhimova. «A HERO WHO SAW THE WAR!».» 75-летию Победы Великого народа посвящается: Люди. События. Факты. 2020.
7. Madrakhimova Mahfuza Akhmedovna, and Maftuna Islomjon qizi Yakubjonova. "Criteria of monitoring and evaluation for educational activities."// Scientific Bulletin of Namangan State University 1.6 (2019): 346-347.
8. Ummatova, Mahbuba, and Temurbek Yoqubov. "Talabalar mustaqil ishlari va uni bajarishni o'rgatish metodikasidan". // Talqin va tadqiqotlar 1.22 (2023).
9. Axmedovna, Ummatova Mahbubaxon, Gofurova Mavjuda Aliyevna, and Yakubov Temurbek G'ulomjon o'g. "The sufficiency conditions for a function that is continuous over each variable to be continuous over both variables." Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 11.12 (2023): 1201-1204.
10. Axmedovna, Ummatova Maxbubaxon, and Savriddinova Madinaxon. "Matematikani o'qitishni takomillashtirishda mantiqiy testlardan foydalanish." // Interdiscipline innovation and scientific research conference. Vol. 2. No. 15. 2023.
11. Akhmedovna, Ummatova Makhbuba. "From the methodology of using nonstandard tests in the design of practical training on number theory." // Genius Repository 27 (2023): 17-22.
12. Akhmedovna, Ummatova Makhbuba. "Teaching of Numerical Systems and Their Extensions." // Genius Repository 27 (2023): 23-28.
13. Maxbubaxon, Ummatova, Muydinjanov Davlatjon, and Nematov Bexruzбек. "Affin koordinatalar sistemasida nuqtani koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtaning koordinatalarini topish usullari." // Innovative developments and research in education 2.24 (2023): 329-333.
14. Axmedovna, Ummatova Mahbuba. "Using anti-symmetrical ponyns in solving elementary mathematics problems." // Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 11.11 (2023): 507-509.
15. Sulaymonov, M. M., and M. A. Ummatova. "Kasr tartibli differensial operator ishtirok etgan integro-differensial tenglamalar uchun integral shartli masalalar." // Экономика и социум. 6-2 (109) (2023): 526-530.

16. Ummatova Maxbuba. "Matematikani o'qitishda zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalanish". // *Science web academic papers collection* (2023).
17. Ummatova Maxbuba. "Bo'linish belgilari, sonlarning umumiy bo'luvchisi va karrali mavzusi bo'yicha amaliy mashg'ulotni loyihalashda nostandart testlardan foydalanish metodikasidan". // *Science web academic papers collection* (2023).
18. Ummatova M., and M. Yakubjanova. "About the history of complex numbers."
19. Ummatova Mahbuba Axmedovna, and Olimaxon Oxunjonovna Rahmonova. "Elementar matematikada antisimmetrik ko 'phadlar". *International conference dedicated to the role and importance of innovative education in the 21st century*. Vol. 1. No. 10. 2022.
20. Axmedovna, Ummatova Mahbuba, and Ilhomjonova Shahnozaxon Ilhomjonovna. "Talimda biologiya va matematika fanlarining ozaro aloqasi haqida". // *Barqarorlik va yetakchi tadqiqotlar onlayn ilmiy jurnali* 2.12 (2022): 816-817.
21. Ummatova, Mahbuba Axmedovna, and Abdurahim Tursunboyevich Mamatqulov. "AL-Xorazmiy asarlarining amaliy ahamiyati haqida." // *International conference dedicated to the role and importance of innovative education in the 21st century*. Vol. 1. No. 10. 2022.
22. Ahmedovna, Ummatova Mahbuba, and Esonov Munavvarjon Mukimjonovich. "Methodology of performing practical independent work." *Open Access Repository* 8.12 (2022): 171-176.
23. Nosirovich, Nosirov Sobirzhon, and Ummatova Makhbuba Ahmedovna. "Automorphism of numerical systems." *Open Access Repository* .12 (2022): 197-201.
24. Ummatova, M. A. "Didactical and practical functions of math class." // *Galaxy International Interdisciplinary Research Journal* 10.12 (2022): 259-262.

PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN 3-TUR INTEGRAL SHARTLI MASALA HAQIDA

Xalilov Qobiljon Solijonovich,

Farg‘ona davlat universiteti dotsenti
qshalilov@gmail.com

Xolmatova Robiyaxon Xasanboy qizi,

Farg‘ona davlat universiteti magistranti
xolmatovarobiyaxon77@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyent qatnashgan parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun uchinchi tur integral shartli masala o‘rganilgan. Masala maxsus sohada qo‘yilib, uning yechimi mavjudligi va yagonaligi integral tenglamalar nazariyasi asosida isbotlangan. Tadqiqot jarayonida masala Volterra va Abel tipidagi integral tenglamalarga keltirilib, ularning xossalari yordamida yechimning aniqlanishi asoslab berilgan. Shuningdek, yechimni ifodalashda Grin funksiyasi va maxsus funksiyalar, xususan, Mittag–Leffler funksiyasidan foydalanilgan. Olingan natijalar parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun integral shartli masalalarni chuqurroq o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so‘zlar: parabolo-giperbolik tenglama, integral shart, Volterra integral tenglamasi, Abel integral tenglamasi, Mittag – Leffler funksiyasi, integro- differensial tenglamalari, Grin funksiyasi.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В данной статье исследуется задача с интегральным условием третьего рода для уравнения второго порядка параболо-гиперболического типа с сингулярным коэффициентом. Задача рассматривается в специальной области, а существование и единственность её решения доказываются с использованием теории интегральных уравнений. В процессе исследования задача сводится к интегральным уравнениям типа Вольтерра и Абеля, и их свойства используются для обоснования нахождения решения. Кроме того, для представления решения применяются функция Грина и специальные функции, в частности функция Миттага–Леффлера. Полученные результаты имеют важное значение для более глубокого изучения задач с интегральными условиями для уравнений параболо-гиперболического типа.

Ключевые слова: параболо-гиперболическое уравнение, интегральное условие, интегральное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Абеля, функция Миттага–Леффлера, интегро-дифференциальные уравнения, функция Грина.

THIRD-KIND INTEGRAL CONDITION PROBLEM FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

Abstract. This article investigates a third-type integral boundary value problem for a second-order parabolic-hyperbolic equation with a singular coefficient. The problem is formulated in a special domain, and the existence as well as uniqueness of its solution are proven using the theory of integral equations. In the course of the study, the problem is reduced to Volterra and Abel type integral equations, and their properties are used to justify the determination of the solution. In addition, Green’s function and special functions, in particular the Mittag–Leffler function, are applied to represent the solution. The obtained results are important for a deeper study of integral condition problems for parabolic-hyperbolic type equations.

Keywords: Parabolic-hyperbolic equation, integral condition, Volterra integral equation, Abel integral equation, Mittag–Leffler function, integro-differential equations, Green’s function.

Kirish. Aralash turdagi tenglamalarni o‘rganish XX asrning o‘rtalaridan boshlab shakllana boshlagan bo‘lib, bu yo‘nalishda respublikamiz hamda xorijiy olimlar tomonidan turli masalalar ilgari surilgan va ilmiy jihatdan tadqiq etilgan. Hozirgi kunda ham aralash turdagi tenglamalar bilan bog‘liq muammolarni o‘rganish jadal sur‘atlarda davom etmoqda. Ayniqsa, xususiyl hosilali differensial tenglamalar uchun integral shartli masalalarga bo‘lgan qiziqish tadqiqotchilar orasida tobora ortib bormoqda.

O'tgan davrda parabolo-giperbolik tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni bayon qilish va o'rganish bo'yicha A.M.Naxushev, V.A.Vragov, N.Y.Kapustin, M.S.Saloxiddinov, T.D.Jo'rayev, Y.P.Apakov, U.I.Boltayeva, A.S. Berdishev, V.A.Eleev, B.Islomov, E.T.Karimov, O.A.Repin, K.B.Sabitov, M.A. Sadibekov, A.Sopuyev, J.O.Taxirov, A.K.Urinov, T.G.Ergashov va boshqalar tomonidan muhim ilmiy natijalar olindi.

Uchinchi tur integral shartli masala dastlab A.V. Golovanchikov, I.E. Simonova va V.V. Simonov tomonidan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan va tekshirilgan. Hozirgi kunda uchinchi tur integral shartli masalalarni bayon qilish va tadqiq etishga bag'ishlangan ishlar ko'p emas. Ikkinchi tartibli aralash parabolo-giperbolik tenglama uchun A.K.Urinov va A.O.Mamanazarov, uchinchi tartibli tenglamalar uchun O.S. Zikirov va M.M.Sagdullaeva uchinchi tur integral shartli masalalarni bayon qilganlar va o'rganganlar.

xOy tekisligining $x=0$, $y=1$, $x=1$ to'g'ri chiziqlar hamda tor tebranish tenglamasining $x+y=0$, $x-y=1$ xarakteristikalar bilan chegaralangan chekli sohani D deb va ushbu $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y \leq 0)$, $AB = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$, $A \in \{(x, y) : y = y_0, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ belgilashni kiritaylik.

Ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyet qatnashgan parabolo – giperbolik tipdagi tenglama

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = 0, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y} u_y = 0, & (x, y) \in D_2 \end{cases} \quad (1)$$

D sohada berilgan bo'lib, uning yechimi $u(x, y)$ quyidagi shartlar yordamida aniqlanadi:

1-masala. Shunday $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,y}^2(D_2)$ funksiya topilsinki, u D_1 va D_2 sohada (1) tenglamaning regular yechimi hamda

$$\int_0^1 u(x, y) dx = \int_0^y u(0, t) dt + \mu_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$u(1, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2; \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1 \quad (5)$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\mu_1(y), \mu_2(y), \psi(x)$ -berilgan yetarlicha silliq funksiyalar bo'lib, $\psi(0) = \mu_1(0)$.

Teorema. Faraz qilaylik $\beta \in (0, 1/2)$ va $\psi(x) \in C^1[0, 1/2] \cap C^3(0, 1/2)$ $\mu_1(y), \mu_2(y) \in C^1[0, 1]$ $\psi(0) = \mu_1(0) = 0$ u holda 1 - masala yagona yechimga ega.

Isbot. Aytaylik, $u(x, y)$ funksiya qo'yilgan masalaning yechimi bo'lsin. Masalaning (5) sharti hamda $u(x, y) \in C(\overline{D})$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagi belgilash va farazlarni kiritaylik:

$$\left. \begin{aligned} u(x, +0) &= u(x, -0) = \tau(x), \\ \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) &= \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

D_1 sohada noma'lum funksiya $u(x, y) \in (\overline{D})$ va $u_y(x, y) \in C(D)$ ekanligini hisobga olib, (1) tenglama va (2), (3) chegaraviy shartlardan $y \rightarrow +0$ da limitga o'tsak:

$$\tau''(x) - \nu(x) = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^1 \tau(x) dx = \mu_1(0), \quad \tau(1) = \mu(0) \quad (8)$$

integral shartlar hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(2,\delta)}(0,1)$, $\delta > 1 - 2\beta$,
 $[x(1-x)]^{-2\beta} v(x) \in L(0,1)$. $[x(1-x)]^{-2\beta} v(x) \in L(0,1)$. Shunda $u(x,y)$ funksiyasi D_2 sohada
 $u_{xx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y} u_y = 0$, formula orqali aniqlanadi [8].

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau[x+y(1-2t)] [t(1-t)]^{\beta-1} dt - \gamma_2 (-y)^{1-2\beta} \int_0^1 v[x+y(1-2t)] [t(1-t)]^{-\beta} dt, \quad (9)$$

bu yerda $\gamma_1 = \Gamma(2\beta) / \Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(1-2\beta) / \Gamma^2(1-\beta)$, $\Gamma(z)$ – Eylerning gamma funksiyasi.

(9) ko‘rinishdagi $u(x,y)$ funksiyani (5) shatrga qo‘yamiz, so‘ng hosil bo‘lgan tenglikda barcha x larni $\frac{x}{2}$ ga o‘zgartirib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\gamma_1 \int_0^1 \tau(tx) [t(1-t)]^{\beta-1} dt - \gamma_2 (x/2)^{1-2\beta} \int_0^1 v(tx) [t(1-t)]^{-\beta} dt = \psi\left(\frac{x}{2}\right), 0 \leq x \leq 1$$

endi esa $z = tx$ belgilashorqali quydagi tenglika o‘tib olamiz:

$$\gamma_1 x^{1-2\beta} \int_0^x [\tau(z)] z^{\beta-1} (x-z)^{\beta-1} dz - \gamma_2 2^{2\beta-1} \int_0^x [v(z) z^{-\beta}] (x-z)^{-\beta} dz = \psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

bu tenglikni quydagicha qayta yozish mumkin:

$$2^{2\beta-1} \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{0x}^{\beta-1} [x^{-\beta} v(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} [x^{\beta-1} \tau(x)] - \psi(x/2), 0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

bu yerda $D_{ax}^\alpha \varphi(x)$ va $D_{xb}^\alpha \varphi(x)$ - kasr tartibli integro –differensial operator [8]

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt, \alpha < 0; \\ \varphi(x), \alpha = 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \varphi(t) dt, 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$D_{xb}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (t-x)^{-\alpha-1} \varphi(t) dt, \alpha < 0; \\ \varphi(x), \alpha = 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (t-x)^{-\alpha} \varphi(t) dt, 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (12)$$

(11) tenglikda $D_{0x}^{1-\beta}$ operatorni qo‘llab hamda [8] da berilgan quyidagi belgilashlarni hisobga olib;

$D_{0x}^{1-\beta} D_{0x}^{\beta-1} \varphi(x) = \varphi(x)$, $D_{0x}^{1-\beta} x^{1-2\beta} D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1} \varphi(x) = x^{-\beta} D_{0x}^{1-2\beta} \varphi(x)$,
 ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$v(x) = \lambda D_{0x}^{1-2\beta} \phi \tau(x) + f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (13)$$

bu yerda $\lambda = 2^{2\beta} \Gamma\left[\beta + \frac{1}{2}\right] / \Gamma\left[\frac{1}{2} - \beta\right]$, $f(x) = -2^{1-2\beta} x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \psi(x/2) / [\gamma_2 \Gamma(1-\beta)]$

(10) ga asosan, (12) tenglik quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$v(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau(t) dt + f(x), 0 < x < 1 \quad (14)$$

(14) tenglik D_0 va D_2 kesmada aniqlangan noma'lum $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar orasidagi munosabatni ifodalaydi. Keyin, $y \rightarrow +0$ da limitga o'tib va (6) belgilanishlarni hisobga olib, (1) tenglama hamda (2) va (3) shartlardan (7) va (8) tengliklarni hosil qilamiz. Endi (14) dan $\nu(x)$ funksiyani (7) ga qo'yib, noma'lum $\tau(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagi integro-differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\tau''(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau(t) dt = f(x), 0 < x < 1. \quad (15)$$

(15) tenglikda x ni z ga almashtirib, so'ng uni z bo'yicha $[0, x]$ oraliqda ikki marta integrallab quyidagi tenglikni hosil qilamiz;

$$\tau(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(1+2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta} \tau(t) dt = f_1(x) + c_1 x + c_2, 0 < x < 1, \quad (16)$$

bu yerda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar, $f_1(x) = \int_0^x (x-t) f(t) d(t)$.

(16) da Abelning ikkinchi tur integral tenglamasini qo'llaymiz va uning yagona yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi ;

$$\tau(x) = c_1 \frac{d}{dx} \int_0^x t E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] dt + c_2 \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] dt + f_2(x), \quad (17)$$

bu yerda $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Gamma^{-1}(\alpha n + 1)$ – Mittag-Leffler funksiyasi [7], $\alpha = 1 + 2\beta$,

$$f_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] f_1(t) dt$$

quyidagi tengliklarni hisobga olib

$$\frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] dt = E_\alpha(\lambda x^\alpha), \frac{d}{dx} \int_a^x t E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] dt = x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha),$$

ushbu ma'lum bo'lgan tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz ;

$$\frac{d}{dx} E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] = -\frac{d}{dt} E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha], \int_a^x E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] dt = (x-a) E_{\alpha,2} [\lambda(x-a)^\alpha],$$

$$f_2(x) = \int_0^x (x-t) E_{\alpha,2} [\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt, E_{\alpha,m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Gamma^{-1}(\alpha n + m), m \in \mathbb{N}$$

(17) ifodamizni yuqoridagi tengliklarni bilgan holda quyidagicha qayta yozishimiz mumkin:

$$\tau(x) = c_1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) + c_2 E_\alpha(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t) E_{\alpha,2} [\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt, \quad (18)$$

(18) tengligimizga (8) shartlarni qo'lgan holda c_1 va c_2 larni aniqlaymiz .

Bundan avval bu jarayonda kerak bo'ladigan ba'zi tengliklar va belgilashlarni kiritamiz;

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_\alpha(\lambda x^\alpha) dx &= E_{\alpha,2}(\lambda), \int_0^1 x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) dx = E_{\alpha,3}(\lambda), \\ \int_t^x (x-t) E_{\alpha,2}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t) dt &= (1-t)^2 E_{\alpha,3}(\lambda(1-t)^\alpha), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_0^1 (1-t) E_{\alpha,2}(\lambda(1-t)^\alpha) f(t) dt = I,$$

$$\int_0^1 (1-t)^2 E_{\alpha,3}(\lambda(1-t)^\alpha) f(t) dt = J,$$

$$E_{\alpha,2}^2(\lambda) - E_\alpha(\lambda) E_{\alpha,3}(\lambda) = K$$

(8) shartlar natijasida quyidagi sistemaga kelimiz, bu sistemadan c_1 ni c_2 orqali ifodalab c_2 ni aniqlaymiz.

$$\begin{cases} C_1 E_{\alpha,3}(\lambda) + C_2 E_{\alpha,2}(\lambda) + \int_0^1 (1-t)^2 E_{\alpha,3}(\lambda(1-t)^\alpha) f(t) dt = \mu_1(0), \\ C_1 E_{\alpha,2}(\lambda) + C_2 E_{\alpha,3}(\lambda) + \int_0^1 (1-t) E_{\alpha,2}(\lambda(1-t)^\alpha) f(t) dt = \mu_2(0) \end{cases} \quad (20)$$

ushbu sistema $E_{\alpha,2}^2(\lambda) - E_{\alpha}(\lambda)E_{\alpha,3}(\lambda) \neq 0$ bo'lganda yechimga ega .

$$\begin{aligned} C_1 &= \mu_2(0) \frac{1}{E_{\alpha,2}(\lambda)} - \frac{1}{E_{\alpha,2}(\lambda)} \int_0^1 (1-t) E_{\alpha,2}(\lambda(1-t)^\alpha) f(t) dt - \frac{E_{\alpha}(\lambda)}{E_{\alpha,2}(\lambda)} C_2, \\ C_2 &= \mu_1(0) \frac{E_{\alpha,2}(\lambda)}{K} - \mu_2(0) \frac{E_{\alpha,3}(\lambda)}{K} + \frac{E_{\alpha,3}(\lambda)}{K} I - \frac{E_{\alpha,2}(\lambda)}{K} J, \end{aligned} \quad (21)$$

c_1 va c_2 larni aniqlagandan so'ng $\tau(x)$ funksiyamizning (18) ko'rinishini qaytadan yozamiz .

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \left(\mu_1(0) \frac{E_{\alpha,2}(\lambda)}{K} - \mu_2(0) \frac{E_{\alpha,3}(\lambda)}{K} + \frac{E_{\alpha,3}(\lambda)}{K} I - \frac{E_{\alpha,2}(\lambda)}{K} J \right) (E_{\alpha}(\lambda x^\alpha) - \frac{E_{\alpha}(\lambda)}{E_{\alpha,2}(\lambda)} E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha)) + \\ &+ \left(\mu_2(0) \frac{1}{E_{\alpha,2}(\lambda)} - \frac{1}{E_{\alpha,2}(\lambda)} I \right) x E_{\alpha,2}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t) E_{\alpha,2}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

$\tau(x)$ funksiyamizni yuqoridagi kabi topamiz. Bunda 1- masala D_1 sohada quyidagi masalaga ekvivalent keltiriladi.

1'-masala. D_1 sohada bir jinsli

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (20)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining (2), (3) va $u(x,0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ funksiya (10) formula orqali aniqlanadi. 1' - masalaning bir qiymatli yechilishini tadqiq qilaylik.

Faraz qilaylik, $u(x,y)$ funksiya 1'-masalaning yechimi hamda

$$u(x,0) = \mu(y), 0 \leq y \leq 1; \mu(y) \in C[0,1]$$

bo'lsin. U holda (12) tenglama uchun ushbu

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1; u(0,y) = \mu(y), 0 \leq y \leq 1, u(1,y) = \mu_2(y), 0 \leq y \leq 1$$

birinchi chegaraviy masalaga ega bo'lamiz, bu yerda $\mu(y)$ - noma'lum funksiya. D_1 sohada birinchi chegaraviy masalaning yechimi $u(x,y)$ funksiya [8];

$$u(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi) G_\xi(x,y,\xi,0) d\xi + \int_0^y \mu(\eta) G_\xi(x,y,0,\eta) d\eta - \int_0^y \mu_2(\eta) G_\xi(x,y,1,\eta) d\eta \quad (21)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $G(x,y,\xi,\eta)$ - Grin funksiyasi,

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] + \exp\left[\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\}. \quad (22)$$

(21) ni (2) shartga bo'ysindirsak,

$$\int_0^1 \int_0^1 \tau(\xi) G(x,y,\xi,0) d\xi + \int_0^y \mu(\eta) G_\xi(x,y,0,\eta) d\eta - \int_0^y \mu_2(\eta) G_\xi(x,y,1,\eta) d\eta = \int_0^y \mu(\eta) d\eta + \mu_1(y), 0 \leq y \leq 1 \quad (23)$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikda belgilash kiritib, so'ngra integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$\int_0^1 \mu(\eta) d\eta \int_0^1 G_\xi(x,y,0,\eta) dx - \int_0^y \mu(\eta) d\eta = g(y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$g(y) = \mu_1(y) - \int_0^1 \left[\int_0^1 \tau(\xi) G(x,y,\xi,0) d\xi - \int_0^y \mu_2(\eta) G_\xi(x,y,1,\eta) d\eta \right] dx$$

so'ngra $\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)G = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)G_1$ tenglikni e'tiborga olsak, bunda

$$G_1(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right) \right]$$

bo'lib,

$$\int_0^1 G_\xi(x, y, 0, \eta) dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} + K_0(y, \eta), \quad (24)$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$K_0(y, \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)}\right) - \exp\left(-\frac{n^2}{y-\eta}\right) \right] \quad (25)$$

(24) ni inobatga olsak, (23) tenglama ushbu

$$\int_0^y \frac{\mu(\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} d\eta = \int_0^y k(y, \eta) \mu(\eta) d\eta - g(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (26)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $k(y, \eta) = K_0(y, \eta) - 1$

(26) tenglamaning o'ng tomonini vaqtincha ma'lum funksiya desak, u holda noma'lum $\mu(\eta)$ funksiyaga nisbatan Abel integral tenglamasi hosil bo'ladi. $g(y) \in C^1[0,1]$ va $g(0) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak, integral tenglamalar nazariyasiga ko'ra (26) tenglamani

$$\mu(y) - \int_0^y K(y, \eta) \mu(\eta) d\eta = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (27)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda

$$K(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{k(t, \eta)}{\sqrt{y-t}} dt, \quad g_1(y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(t)}{\sqrt{y-t}} dt.$$

yuqoridagi (27) integral tenglama 2-tur Volterra integral tenglamasi bo'lib, uning $K(y, \eta)$ yadrosi kuchsiz maxsuslikka ega. Berilgan $\tau(x), \mu_1(y), \mu_2(y)$ funksiyalardan foydalanib, (27) tenglamaning o'ng tomoni $[0,1]$ oraliqda uzliksiz ekanligini ko'rsatish mumkin. Ma'lumki, 2-tur Volterra integral tenglamasi yagona yechimga ega. $\mu(y)$ funksiyani topish orqali $u(x, y)$ funksiyani D_1 sohada bir qiymatli aniqlanadi. D_2 sohada masalaning yechimi $u(x, y)$ funksiya (9) formulaga asosan topiladi. $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar esa mos holda (19) va (10) formulalarga ko'ra aniqlanadi.

Xulosa. Ushbu ishda parabolo-giperbolik tipdagi singulyar koeffitsiyentli tenglama uchun integral shartli masala o'rganildi. Masala integral tenglamalar usuliga keltirilib, uning yechimining mavjudligi va yagonaligi asoslab berildi. Tadqiqot natijalari integral va nolokal shartli masalalarni o'rganishda muhim ahamiyatga ega bo'lib, aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirishga xizmat qiladi.

Aralash tipdagi differensial tenglamalarning murakkab modellarini o'rganishda yangi uslubiy yondashuvlarni shakllantirishga xizmat qiladi. Tadqiqot xulosalari gidrodinamika, gaz dinamikasi va issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlaridagi chegaraviy muammolarni matematik modellashirishda nazariy asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Халилов К.С. Задачи с интегральным для дифференциальных уравнений параболо-гиперболического типа // Фергана, 2022. – 115 с.
2. Уринов А.К., Халилов К.С. Задача с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Матем. Физика. – Белгород. 2015. №17(214). вып.40.
3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физико-математическая литература, 1959. – 232.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. – Москва: Наука, 1967. – 300 с.

5. Ўринов А.Қ. *Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.* - Тошкент: Наврӯз, 2016, 216 бет.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы.* – Москва: Наука, 1967. – 300 с.
7. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* Москва: Высшая школа, 1985. – 304 С.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* // Elsevier, 2006.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ КОМБИНАЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ $mKd\Phi(+1)$ И $mKd\Phi(-1)$

Косимова Мафтуна Улугбековна,
Самаркандский государственный университет
yusupovamaftuna140199@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения, составленного из комбинаций уравнений $mKd\Phi$ положительного и отрицательного порядка ($mKd\Phi(+1) - mKd\Phi(-1)$). Выводится аналог системы дифференциальных уравнений Дубровина, описывающая эволюцию спектральных данных, ассоциированных с соответствующим оператором Дирака. Доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина. Установлена разрешимость смешанной задачи для нелинейного уравнения $mKd\Phi(+1) - mKd\Phi(-1)$ в классе $C^5(\mathbb{R})$ периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: оператор Дирака, метод обратной спектральной задачи, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза положительного порядка ($mKd\Phi(+1)$), модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза отрицательного порядка ($mKd\Phi(-1)$), формула следов.

NOCHIZIQLI $mKdF(+1)$ VA $mKdF(-1)$ TENGLAMALAR KOMBINATSIYASIDAN TUZILGAN TENGLAMA UCHUN ARALASH MASALA

Annotatsiya. Ushbu ishda musbat va manfiy tartibli modifitsirlangan Korteveg-de Friz ($mKdF(+1) - mKdF(-1)$) tenglamalari kombinatsiyasidan tuzilgan nochiziqli tenglama uchun aralash masala o'rganilgan. Dirak operatori spektral berilganlari evolyutsiyasini tavsiflovchi Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi analogi keltirib chiqariladi. Cheksiz Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan. Nochiziqli $mKdF(+1) - mKdF(-1)$ tenglama uchun aralash masalaning yechimga egaligi davriy cheksiz zonali $C^5(\mathbb{R})$ sinfga qarashli funksiyalar sinfida o'rnatilgan.

Kalit so'zlar: dirak operatori, teskari spektral masala yechish usuli, musbat tartibli modifikatsiyalangan Korteveg-de Friz tenglamasi ($mKdF(+1)$), manfiy tartibli modifikatsiyalangan Korteveg-de Friz tenglamasi ($mKdF(-1)$), izlar formulasi.

A MIXED PROBLEM FOR AN EQUATION COMPOSED OF A COMBINATION OF NONLINEAR $mKdV(+1)$ AND $mKdV(-1)$

Abstract. In this work, considers a mixed problem for a nonlinear equation formed as a combination of the modified Korteweg–de Vries equations of positive and negative orders ($mKdV(+1) - mKdV(-1)$). An analogue of the system of Dubrovian differential equations is derived, describing the evolution of the spectral data associated with the corresponding Dirac operator. A theorem on the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovian differential equations is proved. The solvability of the mixed problem for the nonlinear equation $mKdV(+1) - mKdV(-1)$ is established in the class $C^5(\mathbb{R})$ of periodic infinite-gap functions.

Keywords: Dirac operator, inverse spectral method, modified Korteweg–de Vries equation of positive order ($mKdV(+1)$), modified Korteweg–de Vries equation of negative order ($mKdV(-1)$), trace formula.

Введение. В развитие теории рекурсивных операторов и иерархий интегрируемых нелинейных систем большой вклад был сделан в работах П.Олвера [1], где была разработана общая теория симметрий и рекурсивных операторов для нелинейных дифференциальных уравнений. Позднее было показано, что рекурсивные операторы допускают не только положительные, но и отрицательные степени. Этот подход был применён в работе Веровский [2], где исследованы отрицательные степени рекурсивного оператора КдФ-типа уравнений. Это позволило рассматривать так называемые

отрицательные потоки интегрируемых иерархий, которые существенно расширяют класс интегрируемых эволюционных уравнений. В работе [3] была построена иерархия отрицательного порядка мКдФ – типа уравнений, что позволило существенно расширить область применения этих моделей в теории интегрируемых систем.

Иерархии высокого положительного и отрицательного порядка уравнений мКдФ можно получить, используя, соответственно, следующие уравнения:

$$u_t = R^n u_x; \quad R^n u_t = u_x, \quad u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

где $R = \partial_x^2 - 4u^2 - 4u_x \partial^{-1} u$ – оператор рекурсии.

Если $n = 1$, то мы получим уравнения положительного мКдФ(мКдФ(+1)) и отрицательного мКдФ(мКдФ(-1)), соответственно:

$$u_t - u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u_{xxt} - 2(u\mu_t)_x - u_x = 0, \quad \mu_x = u^2, \quad u = u(x, t), \quad \mu = \mu(x, t).$$

Настоящая работа посвящена исследованию смешанной задачи для уравнения, представляющего собой комбинацию мКдФ(+1) и мКдФ(-1), в классе периодических бесконечнозонных функций.

Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения, составленного из комбинаций уравнений мКдФ(+1) и мКдФ(-1) вида:

$$\begin{cases} u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x + b(t)[u_{xxt} - 2(u\mu_t)_x - u_x], \\ \mu_x = u^2, \end{cases} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x + \pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \\ \mu(x, t)|_{x=0} = \beta(t), \\ [u_t(x, t) + \mu_t(x, t)]|_{x=0} = \zeta(t), \end{cases} \quad (2)$$

и условиях периодичности и гладкости

$$\begin{cases} u(x + \pi, t) = u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0), \\ \mu(x, t) \in C_{x,t}^{1,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $b(t), \beta(t), \zeta(t) \in C([0, \infty))$ – заданные действительные ограниченные функции.

Если $b(t) = 0$, то мы получим модифицированное уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ(+1)).

Основным изучаемым объектом в этой статье является разрешимость смешанной задачи (1)-(3), то есть установление минимальных требований гладкости для начальных данных $u_0(x), \beta(t)$ и $\zeta(t)$, при которых существует единственное глобальное решение этой задачи.

В данной работе предлагается алгоритм построения периодических бесконечнозонных решений $(u(x, t), \mu(x, t))$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ смешанной задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задаче для периодического самосопряженного оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u(x + \tau, t) \\ u(x + \tau, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x, \tau \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (4)$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решение уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$, соответственно.

Функция $\Delta(\lambda) \equiv \Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора $L(\tau, t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$ называются лакунами, где $\lambda_n = \lambda_n(\tau, t)$ корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$, они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $(y(0, \tau, t) = \pm y(\pi, \tau, t))$ граничной задачи для уравнения (4). Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Они совпадают с собственными значениями задачи Дирихле для системы (4) с граничными условиями $y_1(0, \tau, t) = 0$, $y_1(\pi, \tau, t) = 0$ и при этом $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 1. Числа $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$, и знаки $\sigma_n(\tau, t) = \text{sgn}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}, n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau, t)$. Спектральные параметры и границы спектра $\lambda_n = \lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$.

Определение 2. Задача нахождения спектральных данных оператора $L(\tau, t)$ называется прямой задачей, а задача восстановления потенциала $u(\tau, t)$ оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Теорема единственности. Коэффициент оператора $L(\tau, t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$.

Если с помощью начальной функций $u_0(x + \tau), x, \tau \in \mathbb{R}$, построить оператор Дирака $L(\tau, t)$, то мы увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau), n \in \mathbb{Z}$, полученной задачи не зависят от параметра τ , то есть, $\lambda_n(\tau) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры от параметра τ зависят: $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$, и являются периодическими функциями $\xi_n^0(\pi + \tau) = \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau, 0)$.

Результаты и обсуждение. Основным результатом настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть функции $b(t), \beta(t), \zeta(t)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условиям:

$$u_0(x + \pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \quad b(t), \beta(t), \zeta(t) \in C([0, \infty]), \\ |b(t)| \leq M_1, \quad |\beta(t)| \leq M_2, \quad |\zeta(t)| \leq M_3, \quad M_j > 0, j = 1, 3.$$

Тогда существует однозначно определяемые бесконечнозонные решения $(u(x, t), \mu(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0)$, смешанной задачи (1)-(3), которые определяются соответственно следующими формулами:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(x, t) h_n(\xi(x, t)), \quad (5)$$

$$\mu(x, t) = \int_0^x \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} \sigma_n(s, t) h_n(\xi(s, t)) \right)^2 ds + \beta(t), \quad (6)$$

где

$$h_n(\xi(x, t)) = \sqrt{(\xi(x, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi(x, t))} f_n(\xi(x, t)), \\ f_n(\xi(x, t)) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2n-1} - \xi(x, t))(\lambda_{2n} - \xi(x, t))}{(\xi_k(x, t) - \xi_n(x, t))^2}}. \quad (7)$$

при этом координаты

$$\xi = \xi_n(\tau, t) = (\dots, \xi_{-n}(\tau, t), \dots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_0(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \dots, \xi_n(\tau, t), \dots), \\ \sigma = \sigma_n(\tau, t) = (\dots, \sigma_{-n}(\tau, t), \dots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_0(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \dots, \sigma_n(\tau, t), \dots).$$

векторов удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} f_n(\xi) g_n(\xi), \quad (8)$$

с начальными условиями:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Здесь $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ – спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$, последовательность $g_n(\xi), n \in \mathbb{Z}$ определяются следующим образом:

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} [4\xi_n^3(\tau, t) + 2\xi_n(\tau, t)(u^2(\tau, t) + u_\tau(\tau, t) + \\ + 2b(t)\xi_n(\tau, t)(1 + u_\tau(\tau, t) + \mu_\tau(\tau, t))], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Лемма 1. Собственные значения $\lambda_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$ граничной задачи $L(\tau, t)y = \lambda y, y = (y_1, y_2), y(0) = \pm y(\pi)$ не зависят от параметров τ и t , т.е., $\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tau, t) \equiv u_t(\tau, t) + \mu_t(\tau, t) = \exp \left\{ \int_0^\tau A(s, t) ds \right\} (\zeta(t) + \\ + \int_0^\tau B(s, t) \exp \left\{ - \int_0^s A(y, t) dy \right\} ds), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{8b(t)(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t)h_n(\xi)}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)}, \\ B(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)(4\xi_n^4(\tau, t) + 2b(t)\xi_n^2(\tau, t)h_n(\xi))}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t)h_n(\xi)}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_{2n}^2}{2} - \xi_n^2(\tau, t) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя (11) и вторую формулу следов:

$$\mu_\tau(\tau, t) + u_t(\tau, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_{2n}^2}{2} - \xi_n^2(\tau, t) \right), \quad (13)$$

перепишем равенства (10) в виде:

$$\begin{aligned} g_n(\xi) = \frac{4\xi_n^3(\tau, t) + 2b(t)\xi_n(\tau, t)}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} + \frac{2\xi_n(\tau, t)}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} \cdot \\ \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2n-1}^2 + \lambda_{2n}^2}{2} - \xi_n^2(\tau, t) \right) + \frac{2b(t)\xi_n(\tau, t)}{1 + 4b(t)\xi_n^2(\tau, t)} \exp \left\{ \int_0^\tau A(s, t) ds \right\} \cdot \\ \cdot \left(\zeta(t) + \int_0^\tau B(s, t) \exp \left\{ - \int_0^s A(y, t) dy \right\} ds \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где функции $A(\tau, t)$ и $B(\tau, t)$ определены формулой (12).

Для доказательства существования и единственности решения задачи Коши (8), (9), (14) воспользуемся заменой переменных:

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Тогда мы получим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t)|_{t=0} = x^0(\tau), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} H(x) = (\dots, H_{-n}(x), \dots, H_{-1}(x), H_0(x), \dots, H_n(x), \dots), \\ H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) \bar{f}_n(\dots, \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 x_0(\tau, t), \dots) \cdot \bar{g}_n(x), \\ \sigma_n^0(\tau) = \sigma_n(\tau, t) \operatorname{sgn}\{\sin x_n(\tau, t) \cos x_n(\tau, t)\}, \\ x^0(\tau) = (\dots, x_{-n}^0(\tau), \dots, x_{-1}^0(\tau), x_0^0(\tau), \dots, x_n^0(\tau), \dots), \end{aligned}$$

$$x_n^0(\tau) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение (16) рассматривается в следующем банаховом пространстве:

$$\mathbb{K} = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots): \|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|^3) \gamma_n |x_n| < \infty \right\}.$$

Здесь $\gamma_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Известно [4], что если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию $u_0(x + \pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R})$, то для собственных значений периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака:

$$L(\tau, 0)y = \lambda y, y = (y_1, y_2)^T$$

справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_{2k-1}, \lambda_{2k} &= k + \sum_{j=1}^5 c_j \cdot k^{-j} \mp 2^{-5} |k|^{-5} |q_{2k}^5| + |k|^{-6} \xi_k^{\pm}, \\ \gamma_k &\equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^5|}{2^4 |k|^5} + \frac{\delta_k}{|k|^6}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^5|^2 &< \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \xi_k^+ - \xi_k^-. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. Справедливы следующие оценки:

$$C_1 \leq |\bar{f}_n(x)| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial \bar{f}_n(x)}{\partial x_n} \right| \leq C_3 \gamma_m, \quad (18)$$

$$|\bar{g}_n(x)| \leq C_4 (|n| + 1), \quad \left| \frac{\partial \bar{g}_n(x)}{\partial x_m} \right| \leq C^5 \frac{\gamma_m}{|n| + 1} (|m|^3 + 1), \quad (19)$$

где константы $C_j > 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$, не зависят от параметров m и n .

Лемма 4. Если начальные данные $u_0(x), \beta(t), \zeta(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условиям

$$u_0(x + \pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}), \quad b(t), \beta(t), \zeta(t) \in C([0, \infty]),$$

$$|b(t)| \leq M_1, \quad |\beta(t)| \leq M_2, \quad |\zeta(t)| \leq M_3, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

то задача Коши (16) имеет единственное глобальное решение.

Доказательство. Используя лемму 3 и оценку (17), устанавливаем справедливость неравенства

Липшица:

$$\|H(x) - H(y)\| \leq l \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}, \quad (20)$$

где

$$l = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|^3 + 1) (|n| + 1) \gamma_n < \infty, \quad (21)$$

$$C = \text{Const} > 0.$$

Кроме того, задача Коши (16) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$x(\tau, t) = x^0(\tau) + \int_0^t H(x(s, t)) ds. \quad (22)$$

Пользуясь неравенством Липшица (20) и интегральному уравнению (22), можно доказать существование и единственность решения задачи (16) при любых начальных данных. Следует отметить, что сходимость числового ряда (21) следует из оценки (17).

Хорошо известно, что коэффициент $u(\tau, t)$ оператора Дирака $L(\tau, t)$ определяется по формуле (5) однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Затем находятся функция $\mu(\tau, t)$ по формуле (6).

Лемма 5. Функция $(u(\tau, t), \mu(\tau, t)), \tau \in \mathbb{R}, t > 0$, построенная с помощью системы дифференциальных уравнений Дубровина (8), (9) и формулы следов (5), (6), удовлетворяет нелинейному уравнению (1).

Заключение. Метод обратной спектральной задачи для периодического оператора Дирака применяется для интегрирования уравнения, образованного комбинаций уравнений мКдФ(+1) и мКдФ(-1) в классе периодических бесконечнозонных функций.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Olver P.I. *Evolution equations possessing infinity many symmetries. Journal of Mathematical Physics.* 1977. Vol. 18, pp. 1212-1215.
2. Verosky J.M. *Negative power of recursion operators. Journal of Mathematical Physics.* 1991, Vol.32, pp.1733-1736.
3. Qiao Z., Strampp W. *Negative Order mKdV Hierarchy and a New Integrable Neumann-Like system. Physica A: Statistical Mechanics and its Application.* 2002, Vol.313. No. 3-4, pp.365-380.
4. Мисюра. *Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I. // Теория функций функциональный анализ и их приложения, вып. 30 (1978), 90-101. Харьков: Издательство Харьковского университета.*

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И АНОМАЛИЙ

Мухиддинова Акила Тулкин кизи,
и.о. доцента университета Ренессанс,
старший научный сотрудник Института
математики АН РУз имени В.И. Романовского
oqila1992@mail.ru

Вохидов Козимжон Хайрулло угли,
студент Ташкентского университета информационных
технологий имени Мухаммада аль-Хорезми
kozimjonnewcastle1403@gmail.com

Мирсабурова Гулбахор Мирахматовна,
и.о. доцента кафедры Математики и
естественных наук Университета Ренессанс
mirsaburovagulbahor26@gmail.com

Режаматов Хасан Фахритдин угли,
ассистент кафедры Математики и
естественных наук Университета
rezamatovhasan@gmail.com

Аннотация. Прогнозирование временных рядов и аномалий является одной из важных тем искусственного интеллекта. Когда текущее состояние зависит от всей предыстории, то очень хорошо применяются производные дробного порядка. В отличие от целочисленных производных, дробный порядок позволяет точнее описывать аномалии, смену режимов и долгосрочные зависимости, а также восстанавливать структуру данных с высокой точностью.

Ключевые слова: временные ряды и их прогнозирования, дробные производные Капуто, гамма-функция.

VAQT QATORLARI VA ANOMALIYALARNI PROGNOZLASHDA KASR TARTIBLI
HOSILALARNING QO'LLANILISHI

Annotatsiya. Vaqt qatorlari va anomaliyalarni prognozlash sun'iy intellektning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Tizimning joriy holati uning butun oldingi holatlariga bog'liq bo'lgan hollarda kasr tartibli hosilalardan foydalanish, ayniqsa, samarali natija beradi. Butun tartibli hosilalardan farqli ravishda, kasr tartibli hosilalar anomaliyalarni, rejimlar almashinuvini hamda uzoq muddatli bog'liqliklarni yanada aniqroq tasvirlash imkonini beradi. Shuningdek, ular ma'lumotlar tuzilmasini yuqori aniqlik bilan tiklashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: vaqt qatorlari va ularni prognozlash, Kaputo turidagi kasr hosila, gamma-funksiya.

APPLICATION OF FRACTIONAL DERIVATIVES FOR TIME SERIES FORECASTING
AND ANOMALY DETECTION

Abstract. Time series and anomaly forecasting is one of the key directions in artificial intelligence. In cases where the current state of a system depends on its entire history, fractional-order derivatives provide an effective modeling tool. In contrast to integer-order derivatives, fractional derivatives allow for a more accurate description of anomalies, regime changes, and long-term dependencies. Moreover, they enable high-precision reconstruction of the underlying data structure.

Keywords: time series forecasting, Caputo fractional derivative, gamma function.

Введение. В настоящее время задачи прогнозирования временных рядов и обнаружения аномалий играют важную роль в различных областях, таких как экономика, энергетика, телекоммуникации и анализ данных. Традиционные методы моделирования временных рядов часто основаны на классических дифференциальных и статистических подходах, однако они не всегда способны эффективно учитывать сложную динамику процессов и наличие долговременной памяти в данных.

Одним из перспективных подходов к решению этой проблемы является применение дробного исчисления, в частности дробных производных. Дробные производные обобщают классическое понятие производной на нецелые порядки и позволяют учитывать нелокальные свойства и эффекты памяти в исследуемых процессах.

Опасение, что учащиеся воспримут термин временной ряд именно как временный, заставило предпочесть новый для статистики и неточный по существу термин динамический ряд, ряд динамики. Неточность последнего термина состоит в том, что не каждый ряд уровней за последовательные моменты или периоды времени содержит на самом деле (отражает) динамику какого-либо признака. Термин «динамика» правильнее относить к изменениям, направленному развитию, наличию тенденции рассматриваемых во времени показателей. Временные ряды – это упорядоченные по времени наборы данных, фиксирующие изменения показателя (продажи, погода, акции) через регулярные или неравные промежутки. Они состоят из тренда (общая тенденция), сезонности (повторяющиеся колебания) и шума. Основная цель – анализ закономерностей и прогнозирование будущих значений.

Определение дробной производной Капуто порядка α (где $0 < \alpha < 1$) имеет вид:

$$D_c^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad (1)$$

Где

$\Gamma(1-\alpha)$ -Гамма функция

$f(t)$ -обычная производная

Если рассмотреть производные целого порядка, то при $\alpha=1$ выражение сводится к классической производной.

Таким образом, определение Капуто является естественным обобщением обычной производной на случай нецелого (дробного) порядка. Исторически определение производной Капуто было предложено итальянским математиком **Микеле Капуто** в середине XX века. Его подход оказался особенно полезным в прикладных задачах, поскольку допускает использование стандартных начальных условий $f(0)$, $f'(0)$ что делает производную Капуто более удобной для моделирования реальных физических процессов, чем производная Римана–Лиувилля.

Кроме того при вычислении производных дробного порядка использовалась гамма-функция. Рассмотрим её свойства. Гамма-функции или, по-другому, функции Эйлера пригодятся при вычислении сложных интегралов либо вычислении факториалов дробных чисел. Саму функцию можно написать так:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx \quad (2)$$

Свойства гамма-функции:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(z+1) = \frac{\pi}{\sin \pi z}; \quad (3)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad (4)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5)$$

Теперь посмотрим влияние производных дробного порядка в типе Капуто.

Данные и решение задач мы решали в EXEL

День t	Нагрузка	Разность
1	120	
2	125	5
3	130	5
4	128	8
5	135	7
6	180	45
7	140	40

Задача (временные ряды и анализ изменения)

В течение 7 дней наблюдали нагрузку на сервер (в условных единицах). Получены следующие данные:

для анализа и определения аномалий разности используем численную аппроксимацию, дробные производные в типе Капуто.

$$D^{0,5} f(t_n) \approx \frac{1}{\Gamma(0,5)} \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{(t_n - t_k)^{0,5}} \quad (6)$$

Рисунок 1.
Вычисление с формулой (6)



Рисунок 2.

Проведённый анализ временного ряда нагрузки сервера с использованием дробной производной Капуто порядка $\alpha=0.5$ показал высокую эффективность данного подхода при выявлении аномалий.

В отличие от обычных разностей, дробная производная учитывает **эффект памяти системы**, то есть влияние предыдущих значений нагрузки на текущее состояние. Это позволяет более точно выявлять как резкие скачки, так и скрытые изменения тренда.

В ходе расчётов было установлено:

- на **6-й день** наблюдается выраженная аномалия, связанная с резким увеличением нагрузки;
 - на **7-й день** фиксируется резкое снижение, что также отражается в значениях дробной производной;
 - в остальные дни изменения носят более плавный характер и не выходят за пределы нормы.
- Таким образом, применение дробной производной Капуто позволяет:
- повысить точность анализа временных рядов;
 - выявлять критические изменения нагрузки;
 - использовать данный метод для мониторинга и прогнозирования состояния серверных систем.

Полученные результаты подтверждают целесообразность использования методов дробного исчисления при анализе реальных технических данных.

Заключение. В данной работе был проведён анализ временного ряда нагрузки сервера с использованием дробной производной Капуто порядка $\alpha=0.5$. Рассмотренный подход позволил выявить особенности изменения нагрузки, которые трудно обнаружить при использовании классических методов дифференцирования.

В ходе исследования:

- была рассмотрена теоретическая основа дробного исчисления;
- применена численная аппроксимация дробной производной Капуто;
- выполнены расчёты на основе реальных (или приближённых к реальным) данных;
- проведён анализ полученных результатов.

Установлено, что дробная производная:

- эффективно выявляет резкие скачки и падения нагрузки;
- учитывает накопленный эффект предыдущих значений (свойство памяти);
- является более чувствительным инструментом анализа по сравнению с обычной разностью.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения данного метода для:

- мониторинга серверных систем;
- анализа сетевого трафика;
- раннего обнаружения аномалий и перегрузок.

Таким образом, методы дробного исчисления, в частности производная Капуто, представляют собой перспективный инструмент для анализа временных рядов в задачах информационных технологий и телекоммуникаций.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Подлубный И. В. *Дробное дифференцирование и интегрирование*. – Москва: Наука, 1974.
2. Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations*. – Academic Press, 1999.
3. Kenneth S. Miller, Bertram Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. – Wiley, 1993.
4. Kai Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. – Springer, 2010.
5. Anatoly A. Kilbas, Hari M. Srivastava, Juan J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. – Elsevier, 2006.
6. Richard L. Magin. *Fractional Calculus in Bioengineering*. – Begell House, 2006.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Саидова Нилуфар Мухаммадовна,

базовый докторант кафедры Дифференциальные уравнения
Бухарского государственного университета, Бухара, Узбекистан
nilufarsaidova93@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется прямая задача для интегро-дифференциального псевдогиперболического уравнения. Прямая задача сформулирована с начальными и неклассическими граничными условиями. Сначала мы анализируем соответствующую спектральную задачу, в которой устанавливаются полнота собственных функций, построение биортонормальной системы в пространстве $L_2(0,1)$ и свойства собственных функций. Применяя метод Фурье, прямую задачу сводим к интегральному уравнению второго рода типа Вольтерра. Существование и единственность его решения доказываются с помощью неравенства Гронуолла и свойств функциональных рядов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное псевдогиперболическое уравнение, неклассические граничные условия, метод Фурье, спектральная задача, существование, единственность.

INTEGRO-DIFFERENTIAL PSEVDGIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN TO'G'RI MASALANI TADQIQ ETISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada integro-differensial psevdogiperbolik tenglama uchun to'g'ri masala tadqiq qilingan. To'g'ri masala boshlang'ich va noklassik chegaraviy shartli masala hisoblanadi. Avvalo, unga mos spektral masala tadqiq qilinadi, bunda xos funksiyalarning to'laligi, $L_2(0,1)$ fazoda biortogonal sistema qurilishi hamda xos funksiyalarning xossalari isbotlanadi. Furiye usuli yordamida to'g'ri masala Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamaga keltiriladi. To'g'ri masala yechimining mavjudligi va yagonaligi Gronuall tengsizligi hamda funksional qatorlarning xossalariidan foydalanib isbotlanadi.

Kalit so'zlar: integro-differensial psevdogiperbolik tenglama, klassik bo'lmagan chegara shartlari, Furiye usuli, spektral masala, mavjudligi, yagonaligi.

A STUDY OF THE DIRECT PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION

Abstract. We study the direct problem of an integro-differential pseudo-hyperbolic equation. The direct problem is formulated with initial and nonclassical boundary conditions. First, we analyze the corresponding spectral problem, where the completeness of the eigenfunctions, the construction of a biorthogonal system in the space $L_2(0,1)$, and the properties of the eigenfunctions are established. By applying the Fourier method, the direct problem is reduced to a Volterra-type integral equation of the second kind. The existence and uniqueness of its solution are proved using Gronwall's inequality and the properties of functional series.

Keywords: integral-differential pseudo-hyperbolic equation, non-classical boundary conditions, Fourier method, spectral problem, existence, uniqueness.

Введение. Интегро-дифференциальные уравнения псевдогиперболического типа занимают важное место в современной теории дифференциальных уравнений и математической физике. Они возникают при моделировании широкого круга процессов, обладающих эффектом памяти, таких как распространение волн в вязкоупругих средах, теплоперенос в материалах с наследственными свойствами, а также в задачах теории фильтрации и биофизики.

Особый интерес представляют задачи с неклассическими граничными условиями, поскольку они позволяют более адекватно описывать реальные физические процессы, где стандартные условия (Дирихле, Неймана) оказываются недостаточными. В то же время наличие интегрального слагаемого по времени существенно усложняет анализ, так как приводит к необходимости учитывать историю процесса.

В данной работе рассматривается прямая задача для интегро-дифференциального уравнения псевдогиперболического типа с переменным коэффициентом и ядром свёртки по времени. Основной целью исследования является установление условий существования и единственности решения, а также разработка конструктивного метода его построения. Исследования многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек описываются дифференциальными уравнениями в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвёртого порядка (смотрите, например, [1-4]). В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [5, 6]. Метод разделения переменных при исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных применяется в работах многих авторов, в частности [7-9].

Теория псевдогиперболических уравнений получила значительное развитие в работах, посвящённых моделированию процессов с диссипацией и эффектами памяти. Классические псевдогиперболические уравнения впервые систематически исследовались в связи с задачами механики сплошных сред и теории фильтрации. В этих работах были установлены основные свойства решений, включая корректность постановки начально-краевых задач. [10-13].

Интегро-дифференциальные уравнения с ядром свёртки по времени широко применяются для описания процессов с наследственностью. Существенный вклад в их исследование внесли работы, в которых изучались вопросы существования, единственности и устойчивости решений для уравнений с памятью. При этом важную роль играет структура ядра интегрального оператора и его гладкостные свойства.

Метод Фурье и спектральный подход остаются одними из основных инструментов исследования линейных задач математической физики. В классических работах доказана полнота систем собственных функций для широкого класса краевых задач, что позволяет представлять решения в виде рядов Фурье. Для задач с неклассическими граничными условиями данный подход требует дополнительного анализа, связанного с построением биортогональных систем.

Неклассические граничные условия, включающие производные более высокого порядка, рассматривались в ряде работ, где показано, что такие условия приводят к несамосопряжённым спектральным задачам. В этих случаях стандартные ортогональные разложения заменяются биортогональными системами, что существенно усложняет исследование, но позволяет сохранить возможность применения спектральных методов.

Постановка задачи. В области $Q_T = \{(x,t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение:

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - u_{xx} + q(t)u = \int_0^t K(t-\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + du_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $\alpha > 0$ и $d > 0$ - заданные числа, $\varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ - достаточно гладкие функции.

Пусть $C_{x,t}^{(m,n)}(Q_T)$ обозначает пространство функций $w(x,t)$, определенных в Q_T , таких что

$$\frac{\partial^{k+l} w}{\partial x^k \partial t^l} \in C(Q_T) \quad 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq l \leq n.$$

Кроме того, $C_{x,t}^{m,n}(Q_T)$ — класс функций, m -кратно дифференцируемых по x и n -кратно дифференцируемых по t в области Q_T .

Определение. Функция $u(x,t) \in C_{x,t}^{(2,2)}(Q_T) \cap C_{x,t}^{2,0}(\bar{Q}_T)$ называется классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет следующим условиям:

- A1) $u(x,t) \in C(Q_T)$;
- A2) $\{u_{xx}(x,t), u_{tt}(x,t), u_{xtt}(x,t)\} \in C(Q_T)$
- A3) $u(x,t)$ удовлетворяет (1)-(3) в Q_T .

Исследование прямой задачи. В этом разделе мы рассмотрим задачу (1)-(3). Мы докажем существование и единственность классического решения задачи (1)-(3) с помощью метода Фурье. Вначале исследуем спектральную задачу.

Исследование спектральной задачи. Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1)-(3) методом разделения переменных, мы приходим к спектральной задаче:

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) &= 0, & y'(1) = d y(1), & d > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, спектральная задача (4) имеет только собственные функции $y_j(x) = \sqrt{2} \sin \sqrt{\lambda_j} x$, $j=0,1,2,\dots$, с положительными собственными значениями λ_j , определяемыми из уравнения $\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} = d/\lambda$, λ_j образуют монотонно возрастающую последовательность, для которой справедливо: $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$. Для больших j асимптотическая форма $\lambda_j \approx (\pi j)^2 - 2d\pi j + o(\frac{1}{j^2})$, пронумерованными в порядке возрастания. В качестве вспомогательных фактов мы будем использовать следующие утверждения, сформулированные и обоснованные в работе Н.Ю.Капустина и Е.И.Моисеева (см., с.1071, [13]).

Лемма 1. (см. [13]). Начиная с некоторого целого числа N , оценка

$$0 < \sqrt{\lambda_j} - \pi j < \frac{1}{d\pi j}$$

верно.

Следствие 1. Пусть $z_j(x) = \sqrt{2} \sin \sqrt{\mu_j} x$, для $\sqrt{\mu_j} = \pi j$, $j=1,2,\dots$. Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} \|y_j(x) - z_j(x)\|_{L_2(0,1)}^2 &< \frac{\sqrt{2}}{d^2 \pi^2 j^2}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j(x) - z_j(x)\|_{L_2(0,1)}^2 &< \frac{1}{9d^2}. \end{aligned}$$

Лемма 2. (см. [13]). Биортогональная сопряжённая система $\{v_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ к системе $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ определяется формулой:

$$v_j(x) = \sqrt{2} \frac{\left(\sin \sqrt{\lambda_j} x - \frac{\sin \sqrt{\lambda_j} \sin \sqrt{\lambda_0} x}{\sin \sqrt{\lambda_0}} \right)}{1 + d \sin^2 \sqrt{\lambda_j}}$$

Теорема 1. (Теорема Бари) (см. [14]). Пусть $\{z_j(x)\}$ — образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, а система $\{y_j(x)\} \subset L_2(0,1)$ — линейно независимая и квадратично близкая к $\{z_j(x)\}$ в $L_2(0,1)$. Тогда система $\{y_j(x)\}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Теорема 2. Система $\{y_j(x)\}$ $j = 1, 2, 3, \dots$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы, используем теорему Бари. $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ является линейно независимой системой, когда

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j y_j(x) = 0, \quad \text{в } \forall x \in (0,1) \quad C_j = 0, \quad \text{для каждого } j.$$

Фактически, каждое λ_j является уникальным значением, $\sqrt{\lambda_j} \neq \sqrt{\lambda_m}$, если $j \neq m$. Это означает, что $y_j(x)$ представляют собой синусоидальные колебания с разными частотами, линейная комбинация которых равна нулю только в том случае, если все коэффициенты равны нулю. Следовательно, $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ линейно независимы в $L_2(0,1)$.

Согласно следствию 1:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j(x) - z_j(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \infty$$

Следовательно, поскольку система $\{y_j(x)\}$ $j = 1, 2, 3, \dots$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Следствие 2. (см. [15]) Если система $y_j(x)$ $j = 1, 2, 3, \dots$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то она является полной в $L_2(0,1)$.

Лемма 3. (см. [15]) Пусть $\{v_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — биортогональные последовательности Бесселя в $L_2(0,1)$. Если одна из них полна в $L_2(0,1)$, то другая также полна в $L_2(0,1)$.

Существование и единственность решения.

Теорема 3. Пусть $K(t) \in C[0, T]$ и предположим, что выполняются условия (A1)–(A3). Тогда существует классическое решение прямой задачи (1)–(3).

Доказательство. Мы будем искать классическое решение задачи (1)–(3) в виде:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) y_j(x), \quad (5)$$

где

$$u_j(t) = \int_0^1 u(x, t) y_j(x) dx, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Затем, применяя формальную схему метода Фурье для определения неизвестного коэффициента $u_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots$) из (1)–(2), получаем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(1 + \alpha \lambda_j) u_j''(t) + \lambda_j u_j(t) - f_j(t) + u_j(t) q(t) - \int_0^t K(t-\tau) u_j(\tau) d\tau \right] y_j(x) = 0$$

или

$$u_j''(t) + \frac{\lambda_j}{(1 + \alpha \lambda_j)} u_j(t) = \frac{1}{(1 + \alpha \lambda_j)} F_j(t, u_j, q, K), \quad (7)$$

где

$$F_j(t, u_j, q, K) = f_j(t) - u_j(t) q(t) + \int_0^t K(t-\tau) u_j(\tau) d\tau$$

Условие (2) даёт

$$u_j(0) = \varphi_j, \quad u_j'(0) = \psi_j, \quad j=1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

Решая задачу Коши (7) и (8), мы находим интегральное уравнение относительно $u_j(t)$:

$$u_j(t) = \varphi_j \cos \mu_j t + \frac{1}{\mu_j} \psi_j \sin \mu_j t + \frac{1}{\mu_j (1 + \alpha \lambda_j)} \int_0^t F_j(\tau, u_j, q, K) \sin \mu_j (t-\tau) d\tau, \quad j=1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$\mu_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{1 + \alpha \lambda_j}},$$

Подставив $F_j(t, u_j, q, K)$ в (9), получим интегральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 u_j(t) = & \varphi_j \cos \mu_j t + \frac{1}{\mu_j} \psi_j \sin \mu_j t + \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} \int_0^t f_j(\tau) \sin \mu_j(t-\tau) d\tau \\
 & - \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} \int_0^t q(\tau) u_j(\tau) \sin \mu_j(t-\tau) d\tau \\
 & + \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} \int_0^t \sin \mu_j(t-\tau) \int_0^\tau K(\eta) u_j(\tau-\eta) d\eta d\tau, \quad j=1,2,\dots, \quad (10)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя два раза по t уравнение (10), получим:

$$\begin{aligned}
 u_j'(t) = & -\mu_j \varphi_j \sin \mu_j t + \psi_j \cos \mu_j t + \frac{1}{1+a\lambda_j} \int_0^t f_j(\tau) \cos \mu_j(t-\tau) d\tau \\
 & - \frac{1}{1+a\lambda_j} \int_0^t q(\tau) u_j(\tau) \cos \mu_j(t-\tau) d\tau \\
 & + \frac{1}{1+a\lambda_j} \int_0^t \cos \mu_j(t-\tau) \int_0^\tau K(\eta) u_j(\tau-\eta) d\eta d\tau, \quad j=1,2,\dots, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_j''(t) = & -\mu_j^2 \varphi_j \cos \mu_j t - \psi_j \sin \mu_j t + \frac{1}{1+a\lambda_j} f_j(t) - \frac{\mu_j}{1+a\lambda_j} \int_0^t f_j(\tau) \sin \mu_j(t-\tau) d\tau - \frac{1}{1+a\lambda_j} q(t) u_j(t) \\
 & + \frac{\mu_j}{1+a\lambda_j} \int_0^t q(\tau) u_j(\tau) \sin \mu_j(t-\tau) d\tau + \frac{1}{1+a\lambda_j} \int_0^t K(\tau) u_j(t-\tau) d\tau \\
 & - \frac{\mu_j}{1+a\lambda_j} \int_0^t \sin \mu_j(t-\tau) \int_0^\tau K(\eta) u_j(\tau-\eta) d\eta d\tau, \quad j=1,2,\dots \quad (12)
 \end{aligned}$$

Следующая лемма справедлива для существования $u_j(t)$, $u_j'(t)$ и $u_j''(t)$.

Лемма 4. Пусть $K(t), q(t) \in C[0, T]$. Следующие оценки верны для всех $t \in [0, T]$ и фиксированных $j \in N$:

$$\begin{aligned}
 |u_j(t)| \leq & \left(|\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} |f_j| \right) \\
 & \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} \left(\|q\| t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right\}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |u_j'(t)| \leq & \sqrt{\frac{\lambda_j}{1+a\lambda_j}} |\varphi_j| + |\psi_j| + \frac{1}{1+a\lambda_j} |f_j| + \left(\frac{1}{1+a\lambda_j} \left(\|q\| t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right) \\
 & \left(|\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} |f_j| \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} \left(\|q\| t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right\}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$|u_j''(t)| \leq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} + \frac{1}{1+a\lambda_j} \right) |f_j|$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} + \frac{1}{1+a\lambda_j} \right) \left(\|q\|t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right) \left(|\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} |f_j| \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} \left(\|q\|t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right\}, \quad (15)$$

где

$$\|K\|_{C[0,T]} := \max_{t \in [0,T]} |K(t)|, \quad \|q\|_{C[0,T]} := \max_{t \in [0,T]} |q(t)|.$$

Доказательство. Ясно, что $\sin \mu_j t \leq 1$, $\cos \mu_j t \leq 1$ для всех $j=1,2,\dots, t \in [0,T]$. Из этого факта и (13) можно получить оценки для $u_j(t)$:

$$|u_j| \leq |\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} |f_j| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} \int_0^t (\|q\| + \|K\|(t-\tau)) |u_j(\tau)| d\tau$$

Отсюда, исходя из неравенства Гронуолла, получаем:

$$|u_j(t)| \leq \left(|\varphi_j| + \sqrt{\frac{1}{\lambda_j} + a} |\psi_j| + \frac{t}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} |f_j| \right) \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j + a\lambda_j^2}} \left(\|q\|t + \frac{t^2}{2} \|K\| \right) \right\},$$

Проводя здесь оценки и используя (11), получаем (14). Аналогично, из (12) дифференцируя и оценивая полученное соотношение, получаем (15).

Подставив выражение (10) в (7) для определения компоненты решения задачи (1)-(3), получим:

$$u(x,t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\varphi_j \cos \mu_j t + \frac{1}{\mu_j} \psi_j \sin \mu_j t + \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} - \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} \int_0^t q(\tau) u_j(t-\tau) \sin \mu_j(\tau) d\tau + \frac{1}{\mu_j(1+a\lambda_j)} \int_0^t \sin \mu_j(\tau) \int_0^{\tau} K(\tau) u_j(\tau-\eta) d\eta d\tau \right] \sin \sqrt{\lambda_j} x \quad (16)$$

Для функции (16) покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1). Функцию (16) формально продифференцируем:

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} u_j''(t) \sin \sqrt{\lambda_j} x, \quad (17)$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j(t) \sin \sqrt{\lambda_j} x, \quad (18)$$

$$u_{ttxx}(x,t) = -\sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j''(t) \sin \sqrt{\lambda_j} x. \quad (19)$$

В рядах (17)-(19) следующие оценки верны:

$$|u(x,t)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |u_j(t)|, \quad (20)$$

$$|u_{tt}(x,t)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} |u_j''(t)|, \quad (21)$$

$$|u_{xx}(x,t)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |u_j(t)|, \quad (22)$$

$$|u_{ttxx}(x,t)| \leq \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |u_j''(t)|. \quad (23)$$

Учитывая лемму 1 и лемму 2, ряды (7), (17)-(19) при любом $(x,t) \in Q_T$ мажорируются сходящимся рядом:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (c_1 \lambda_j^3 |\varphi_j| + c_2 \lambda_j^3 |\psi_j| + c_3 \lambda_j^2 \|f_j(t)\|) \\ &= c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j^{(4)}|}{j} + c_2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\psi_j^{(4)}|}{j} + c_3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_{xxx}(t)|}{j} \\ &\leq c_1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j^{(4)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ c_3 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_{xxx}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Используя равенство Парсеваля, получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (c_1 \lambda_j^3 |\varphi_j| + c_2 \lambda_j^3 |\psi_j| + c_3 \lambda_j^2 \|f_j(t)\|) \\ &\leq c \left(\|\varphi^{(4)}\|_{L_2[0,1]} + \|\psi^{(4)}\|_{L_2[0,1]} + \|f_{xxx}\|_{L_2[0,1] \times C[0,T]} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } c = \max_{i=1,2,3} \left\{ c_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Тогда ряды (7), (17)-(19) сходятся абсолютно и равномерно на Q_T , то есть функция (1) удовлетворяет условиям (2)-(3). Следовательно, каждое нетривиальное решение прямой задачи (1)-(3), удовлетворяющее условиям задачи (2)-(3), представляется в виде ряда Фурье (7).

Следующий результат о единственности справедлив для задачи (1)-(3).

Теорема 4. Если задача (1)-(3) имеет классическое решение, то оно единственно.

Доказательство. $v_j(x)$ — функция, биортогональная к $v_j(x)$. Если предположить, что задача (1)-(3) имеет два решения, то из их разности следует следующее: из $\varphi(x) \equiv 0, \psi(x) \equiv 0, f(x,t) \equiv 0$ следует, что $\varphi_j \equiv 0, \psi_j \equiv 0, f_j(t) \equiv 0$, а оценка (13), полученная из уравнения (10), подразумевает, что $|u_j(t)| \leq 0$, что выполняется только при $u_j(t) \equiv 0$. Последнее равенство эквивалентно тому, что

$$(u(\cdot, t), v_j)_{L_2(0,1)} = 0.$$

Поскольку система $\{v_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ является полной в пространстве $L_2(0,1)$, то функция $u(x,t) \equiv 0$ в $(0,1)$ для каждого $t \in [0, T]$. Следовательно, разность между двумя предполагаемыми решениями равна нулю, таким образом, решение задачи (1)-(3) является единственным.

Заключение. В данной работе рассмотрены прямая задача для интегро-дифференциального псевдогиперболического уравнения с неклассическими граничными условиями. Сначала была

изучена спектральная часть задачи (1)–(3) и проанализированы свойства собственных функций. Затем для прямой задачи был применён метод Фурье с целью установления хорошо поставленности. Были доказаны существование и единственность решения прямой задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Akhtyamov, A. M. and Ayupova, A. R. On Solving the Problem of Diagnosing Defects in a Small Cavity in the Rod, *Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37-42 (in Russian).
2. Turbin, M. V. Investigation of Initial-Boundary Value Problem for the Herschel-Bulkley Mathematical Fluid Model, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 246-257 (in Russian).
3. Whitham, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, 1974. Benney, D. J. and Luke, J. C. Interactions of Permanent Waves of Finite Amplitude, *J. Math. Phys.* 1964, vol. 43, pp. 309-313. DOI: 10.1002/sapm1964431309.
4. Gordeziani, D. G. and Avalishvili, G. A. On the Constructing of Solutions of the Nonlocal Initial Boundary Value Problems for One-Dimensional Medium Oscillation Equations, *Matematicheskoe Modelirovaniye*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94-103 (in Russian).
5. Pulkina, L. S. A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions of the 1st Kind with Time-Dependent Kernels, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26-37. DOI: 10.3103/s1066.369x12100039
6. Ifin, V. A. The Solvability of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations, *Russian Mathematical Surveys*, 1960. vol. 15, №. 2, pp. 85- 142. DOI: 10.1070/rm1960v015n02abeh004217
7. Lazhetich, N. L. On the Existence of a Classical Solution of a Mixed Problem for a Second-Order One Dimensional Hyperbolic Equation *Differential Equations* 1998, vol. 6, no. 6, pp. 6S3-G9.
8. Chernyatin V. Obosnovanie Metoda Fre Smeshannom Zadache diva Urovnennw D Chastnukhi
9. Proizvodnykh, Moscow, Moscow State Univ., 1991, 112 p (Russian) D. K. Durdiev, J. J. Jumaev, "Inverse problem of determining the Kernel of integro-differential fractional diffusion equation in bounded domain", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 67:10 (2023), 1–13
10. D. K. Durdiev, Sh. B. Merajova, "Inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a Bessel operator", *J. Appl. Industr. Math.*, 16:3 (2022), 394–402
11. Ш. Б. Меражова, "Однозначная разрешимость начально-краевой задачи для одного смешанного интегро-дифференциального уравнения", *Изв. вузов. Матем.*, 2025, № 7, 64–71
12. A. Rahmonov, "An inverse problem for 1D fractional integro-differential wave equation with fractional time derivative", *Eurasian Math. J.*, 16:2 (2025), 74–97
13. Kapustin N. Yu., Moiseev E. I. On the convergence of spectral expansions of functions from the Holder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition, *Differential Equations*. 2000. Vol.36, Issue 8, pp. 1069 – 1074.
14. Bari N.K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. *Moskov. Gos. Univ. Uchenye Zapiski Matematika*. 1951. Vol. 148, Issue 4, pp. 69–107.
15. Stoeva D.T. On a characterization of Riesz bases via biorthogonal sequences. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2020. Vol. 26, Issue 4, pp. 1-25.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА: АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

Чай Зоя Сергеевна,

доцент Ташкентского университета информационных технологий и
Ташкентского международного педагогического университета (TIUE)

zoyachay1002@gmail.com

Муҳиддинова Акила Тулкин кизи,

и.о. доцента Университета Ренессанс,
старший научный сотрудник Института
математики АН РУз имени В.И. Романовского

oqila1992@mail.ru

Воҳидов Қозимжон Хайрулло угли,

студент Ташкентского университета информационных
технологий имени Мухаммада аль-Хорезми

Хамроева Зилола Кахрамоновна,

и.о. доцента Университета Ренессанс

Аннотация. В работе представлено систематическое исследование алгоритмов и численных методов вычисления интегралов дробного порядка с акцентом на интеграл Римана–Лиувилля. Актуальность исследования обусловлена возрастающей ролью дробного исчисления при моделировании процессов с памятью и нелокальными свойствами, возникающих в физике, инженерии, биологии и прикладных науках. В отличие от чисто теоретических исследований, в данной работе основное внимание уделено практической реализации дробных интегралов с использованием численных алгоритмов на языке Python. Классические методы численного интегрирования, включая метод трапеций, адаптированы для приближенного вычисления интегралов дробного порядка. Представлены иллюстративные численные примеры и обсуждение погрешностей, подтверждающие точность и устойчивость предложенного подхода. Полученные результаты демонстрируют, что разработанные алгоритмы могут быть эффективно использованы как в образовательных целях, так и для прикладных научных исследований.

Ключевые слова: интегрирование дробного порядка, Гамма-функция, интегралы Римана.

KASR TARTIBDAGI INTEGRALLARNI HISOBLASH: ALGORITMLAR VA USULLAR

Annotatsiya. Ushbu ishda kasr tartibli integrallarni hisoblash algoritmlari va sonli usullarini tizimli ravishda o'rganish taqdim etilgan bo'lib, asosiy e'tibor Riman–Liuvill integraliga qaratilgan. Tadqiqotning dolzarbligi kasr tartibli hisoblashning xotira effektlari va nolokal xususiyatlarga ega bo'lgan jarayonlarni modellashtirishdagi tobora ortib borayotgan ahamiyati bilan izohlanadi. Bunday jarayonlar fizika, muhandislik, biologiya va amaliy fanlarda keng uchraydi. Sof nazariy tadqiqotlardan farqli o'laroq, ushbu ishda kasr tartibli integrallarni Python dasturlash tilida amalga oshirilgan sonli algoritmlar yordamida amaliy hisoblash masalasiga asosiy e'tibor qaratilgan. Klassik sonli integrallash usullari, jumladan, trapetsiyalar usuli, kasr tartibli integrallarni taxminiy hisoblash uchun moslashtirilgan. Taklif etilgan yondashuvning aniqligi va barqarorligini tasdiqlovchi ko'rgazmali sonli misollar hamda xatoliklar muhokamasi keltirilgan. Olingan natijalar ishlab chiqilgan algoritmlar nafaqat ta'limiy maqsadlarda, balki amaliy ilmiy tadqiqotlarda ham samarali qo'llanishi mumkinligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: kasr tartibdagi integrallar, Gamma funksiyalari, Riman integrallari.

FRACTIONAL ORDER INTEGRALS CALCULATION: ALGORITHMS AND METHODS

Abstract. This paper presents a systematic study of algorithms and numerical methods for computing fractional-order integrals, with particular emphasis on the Riemann–Liouville integral. The relevance of the study is motivated by the increasing importance of fractional calculus in modeling processes with memory effects and nonlocal properties arising in physics, engineering, biology, and applied sciences. Unlike purely theoretical investigations, this work focuses on the practical implementation of fractional integrals using numerical algorithms developed in the Python programming language. Classical numerical integration

techniques, including the trapezoidal rule, are adapted to approximate fractional-order integrals. Illustrative numerical examples and a detailed discussion of approximation errors are provided, confirming the accuracy and stability of the proposed approach. The obtained results demonstrate that the developed algorithms can be effectively employed for both educational purposes and applied scientific research.

Keywords: integration of fractional order, Gamma functions, Riemann integrals.

Введение. Дробное исчисление, обобщающее классические операции дифференцирования и интегрирования на нецелые порядки, в последние десятилетия привлекает большое внимание исследователей. Это обусловлено его способностью адекватно описывать процессы с эффектами памяти, наследственности и аномальной диффузии, которые не могут быть корректно описаны с использованием моделей классического целочисленного порядка.

Методы дробного исчисления находят широкое применение в различных областях науки и техники, включая задачи вязкоупругости, теорию управления, обработку сигналов, эпидемиологическое моделирование, а также моделирование сложных динамических систем. Благодаря своим свойствам дробные модели позволяют более точно учитывать долговременные зависимости и нелокальные эффекты, возникающие в реальных физических процессах.

Несмотря на значительное количество теоретических исследований в области дробного анализа, практическая реализация алгоритмов вычисления дробных интегралов и их использование в вычислительных экспериментах остаются актуальной задачей. Численные методы дробного исчисления сравнительно редко рассматриваются в стандартных учебных курсах, что обусловлено как математической сложностью соответствующих операторов, так и ограниченной доступностью удобных вычислительных инструментов.

Целью настоящей работы является исследование численных алгоритмов вычисления интегралов дробного порядка и их программная реализация на языке Python. В работе рассматривается интеграл Римана-Лиувилля и методы его численного приближения на основе классических схем интегрирования.

Научная новизна работы заключается в разработке наглядного и воспроизводимого алгоритма численного вычисления дробных интегралов, основанного на применении классических методов численного интегрирования, а также в создании программной реализации, позволяющей использовать предложенный подход как инструмент для научных исследований и образовательных целей. Особое внимание уделяется анализу точности вычислений и исследованию сходимости используемых численных схем.

В заключение отметим, что структура статьи организована следующим образом. В следующем разделе рассматриваются теоретические основы дробных интегралов. Далее описываются численные методы их вычисления и программная реализация предложенных алгоритмов. В заключительной части приводятся результаты вычислительных экспериментов и обсуждаются полученные результаты.

К сожалению, в учебных заведениях редко обучают решению интегралов дробного порядка. Чтобы сделать эту тему более доступной, мы объединили теорию с программированием и написали код на языке Python. Для реализации использовались методы Х. Холмгрена и Б. Римана для вычисления интегралов дробного порядка. Формула выглядит следующим образом (см. [1]-[4]):

$$I^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x f(t) \cdot (x-t)^{\alpha-1} dt; x > 0 \quad (1)$$

где Γ - гамма функция: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx$;

α - порядок интегрирования;

$f(t)$ – функция, определённая на $[0, \infty)$.

Формулу (1) мы хотели доказать следующим образом.

$$D I f = \frac{dx}{dy} \int_0^x f(y) dy = f.$$

Кроме того, нам известно, что для $\forall m \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$(D I)^m = J.$$

Сначала определим интеграл m -го порядка:

1-ого порядка:

$$I = \int_0^x f(y) dy,$$

2-ого порядка:

$$I^2 f(x) = I[I f] = \int_0^x [I f](y) dy = \int_0^x \int_0^y f(t) dt dy;$$

3-го порядка:

$$I^3 f = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt.$$

Заметив закономерность в них, получаем общую формулу:

$$I^m f = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x f(t) (x-t)^{m-1} dt,$$

а связанную с $\frac{1}{(m-1)!}$ проблему мы решили с помощью гамма-функции. Таким образом, получили формулу (1).

История интегрирования дробного порядка связана с именами Х. Холмгрена и Б. Римана. Риман получил эту формулу из формулы Лиувилля. Кроме того, уравнение Абеля тоже играет большую роль в развитии теории интегрирования дробного порядка. Оно имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^x f(t) \cdot (x-t)^{\alpha-1} dt = f(x) \quad (2)$$

Оно было в комплексном пространстве для аналитических функций:

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}} dt \quad (3)$$

В 1917 году в книге «The General Theory of Operators» математик Г. Вейл [5], разработал формулу интегрирования дробного порядка для периодических функций.

Здесь использовалась Гамма-функция. Рассмотрим ее свойства. Гамма-функции или по-другому функции Эйлера применяются либо при вычислении сложных интегралов, либо при вычислении факториалов дробных чисел. Саму функцию можно написать так:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx \quad (4)$$

Свойства гамма-функции:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \cdot \Gamma(z+1) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}; \\ \Gamma(z+1) &= z \Gamma(z); \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned}$$

Для проверки корректности и эффективности предложенного алгоритма были проведены вычислительные эксперименты с использованием тестовых функций, для которых известны аналитические значения дробных интегралов.

1. Численные эксперименты и анализ результатов

Мы взяли функцию в виде $y=t^2$. Давайте проведём численные эксперименты для точности и сходимости.

Для неё аналитическое значение дробного интеграла имеет вид:

$$I^\alpha [t^2](t) = \frac{t^{2+\alpha}}{\Gamma(3+\alpha)} \quad (5)$$

Численные эксперименты

Расчёты проводились на отрезке $[0, 2]$ с 401 точкой.

Результаты для $t = 2$:

α	Аналитическое значение	Численное значение	Абс. погрешность	Отн. погрешность (%)
0.3	≈ 1.8352	≈ 2.777	≈ 0.942	≈ 51.3
0.5	≈ 1.7022	≈ 3.092	≈ 1.390	≈ 81.7

α	Аналитическое значение	Численное значение	Абс. погрешность	Отн. погрешность (%)
0.7	≈ 1.5580	≈ 3.010	≈ 1.452	≈ 93.2

Высокие значения погрешности объясняются сингулярностью ядра $(t-s)^{\alpha-1}$ при

$s \rightarrow t$ и использованием простого метода трапеций без специальной обработки особенности. Для повышения точности рекомендуется увеличить число узлов ($N > 5000$), применять квадратуры высшего порядка или использовать методы типа Grünwald–Letnikov.

$f(t)$	α -порядок	Аналитическое решение
1	0,7	$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
t	0,5	$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2,7)} t^{1,7} = 0,0000181924 t^{1,7}$
t^2	1,3	$\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4,3)} t^{3,3} = 2,239697 t^{3,3}$

Полученные результаты численного интегрирования были сопоставлены с соответствующими аналитическими решениями. Такое сравнение позволило оценить точность разработанного алгоритма и определить степень его соответствия теоретическим значениям.

Проведённые расчёты подтвердили работоспособность алгоритма, однако выявили значительную погрешность при малых α из-за сингулярности ядра. Это ожидаемое поведение для базовой реализации метода трапеций. Полученные результаты могут служить хорошей отправной точкой для дальнейшего улучшения алгоритма.

Для более детальной оценки точности вычислений была проведена количественная оценка погрешности численного метода. Абсолютная погрешность определялась как разность между аналитическим и численным значениями интеграла:

$$E = |I_{exact} - I_{num}|$$

Проведённый анализ показал, что при уменьшении шага интегрирования наблюдается устойчивое уменьшение величины погрешности. Это свидетельствует о сходимости используемого численного метода и подтверждает корректность реализованного алгоритма.

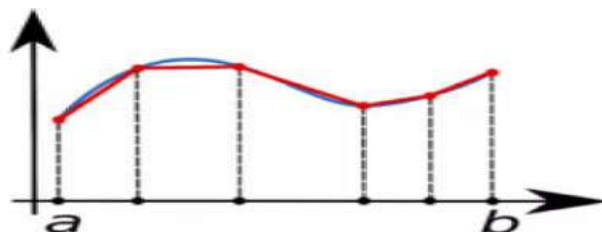
Студент затем может самостоятельно задавать порядок и место переменной. В итоге мы получим определённый интеграл дробного порядка. Разберёмся в нашем коде:

```
import numpy as np
import math
def rl_integral(f, t, alpha):
    n = len(t)
    result = np.zeros(n)
    for i in range(1, n):
        s = t[:i]
        if len(s) == 0:
            continue
        ds = t[i] - s
        kernel = ds ** (alpha - 1) / math.gamma(alpha)
        integrand = f(s) * kernel
        result[i] = np.trapz(integrand, s)
    return result
# Тест
t = np.linspace(0, 2, 401)
f = lambda x: x**2
alpha = 0.5
num = rl_integral(f, t, alpha)
exact = t**(2 + alpha) / math.gamma(3 + alpha)
print("Аналитическое (t=2):", exact[-1])
print("Численное (t=2): ", num[-1])
```

```
print («Погрешность:    », abs(num[-1] - exact[-1]))
```

Метод трапеций – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$$



А это - формулы метода трапеции.

Следует отметить, что методы дробного исчисления находят широкое применение в различных областях науки и техники. В частности, они используются при моделировании процессов аномальной диффузии в физике, при описании динамических систем с эффектами памяти в биологии, а также при анализе вязкоупругих свойств материалов в инженерных задачах.

В связи с этим разработанные алгоритмы и программные средства могут быть использованы не только в образовательной практике, но и при проведении прикладных научных исследований.

Заключение. В настоящей работе рассмотрены основы дробного интегрирования Римана-Лиувилля, и предложен простой численный алгоритм его приближённого вычисления на языке Python. Разработанный подход основан на классическом методе трапеций и конволюционной схеме, что делает его доступным для понимания студентами и начинающими специалистами.

Проведённые вычислительные эксперименты подтвердили работоспособность алгоритма, однако выявили необходимость дальнейшего повышения точности за счёт учёта сингулярности ядра и применения более совершенных квадратурных формул.

Полученный программный код открыт, прост в использовании и может быть успешно применён в учебном процессе вузов Узбекистана для изучения элементов дробного исчисления, а также в начальных научных исследованиях, связанных с моделями памяти и нелокальными эффектами.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
2. Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus*. Academic Press, 1974.
3. Diethelm K. et al. *Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods* // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2005. Vol. 194. P. 743–773.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
5. Weyl, H. *The General Theory of Operators*. Princeton: Princeton University Press, 1917.
6. SciPy Documentation: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/special.html>
7. NumPy Documentation: <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.html>

НЕСМЕЩЁННАЯ И ε - СМЕЩЁННАЯ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФфуЗИИ

Тожиёв Тохир Халимович,

доцент кафедры Информационных технологий

Ферганского государственного университета,

кандидат технических наук

Исмоилова Дилрабо Сидикжоновна,

старший преподаватель кафедры Информационных

технологий Ферганского государственного университета

dilrabohismoilova59@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется задача Коши для обобщённого уравнения неанотропной диффузии. Построены несмещённые и смещённые оценки решения на основе марковских цепей и метода Монте-Карло. Доказаны свойства мартингалности и конечность дисперсии оценок. Полученные результаты могут быть использованы для численного решения многомерных задач математической физики.

Ключевые слова: задача Коши, неанотропная диффузия, марковская цепь, метод Монте-Карло, несмещённая оценка.

UNBIASED AND BIASED ESTIMATES FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF ANISOTROPIC DIFFUSION

Abstract. This paper studies the Cauchy problem for a generalized anisotropic diffusion equation. Unbiased and biased estimators of the solution are constructed using Markov chains and the Monte Carlo method. Martingale properties and finiteness of the estimator variance are proved. The obtained results can be applied to numerical solutions of multidimensional problems in mathematical physics.

Keywords: Cauchy problem, anisotropic diffusion, Markov chain, Monte Carlo method, unbiased estimator.

ANIZOTROP DIFFUZIYANING UMUMLASHTIRILGAN TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASINI YECHISHDA SILJIMAGAN VA SILJIGAN BAHOLAR

Annotatsiya. Ushbu ishda umumlashtirilgan anizotrop diffuziya tenglamasi uchun Koshi masalasi o'rganiladi. Markov zanjirlari va Monte-Karlo usuli asosida yechimning siljimagan va siljigan baholari qurilgan. Baholarning martingallik xossalari hamda dispersiyaning chekli ekanligi isbotlangan. Olingan natijalar matematik fizikaning ko'p o'lchovli masalalarini sonli yechishda qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: Koshi masalasi, anizotrop diffuziya, Markov zanjiri, Monte-Karlo usuli, siljimagan baho.

Введение. Рассмотрим задачу Коши в классической постановке в $(n+1)$ мерном пространстве R^{n+1} в слое $\Omega = R^n \times [0, T]$

$$(L_1 u)(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{ij=1}^k \alpha^{ij} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^l \beta_j^m x^j \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^m} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in R^n, \quad (2)$$

где α^{ij} и β_j^m ($i = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, k, m = 1, 2, \dots, l$) постоянные коэффициенты, $n = k + l$.

Пусть $\alpha = (\alpha^{ij})$ - $k \times k$ матрица, $\beta = (\beta_j^m)$ - $l \times k$ матрица.

Предлагаем:

- матрица $\alpha = (\alpha^{ij})$ симметрична и положительно определена.
- матрица $\beta = (\beta_j^m)$ такая что, $l \times l$ матрица Грамма $\left(\omega = (\beta\alpha\beta^T)^{-1}\right)$ положительно определена (невырождена).

Функции $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ будем считать непрерывными в R^n . В предположении существования единственности решения задач (1)-(2) построим алгоритм для его численной реализации.

Для дальнейшего будут удобны следующие обозначения. Введем (в блочной записи) $n \times n$ матрицы. Эти матрицы имеют следующий вид:

$$a = a(s) = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2^T & m_3 \end{pmatrix}, \quad q = q(s) = a^{-1}(s),$$

$$C(S) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -s\beta_l & I \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad d(\rho) = \begin{pmatrix} \rho^{1/2} I_k & 0 \\ 0 & \rho^{3/2} I_l \end{pmatrix},$$

блок $m_1 = \frac{1}{4s} [\alpha^{-1} + 3\beta^T \omega \beta]$ размера $k \times k$, блок $m_2 = \frac{3}{2s^2} \beta^T \omega$ размера $k \times l$, блок m_2^T

размера $l \times k$, $m_3 = \frac{3}{s^3} \omega$ размера $l \times l$, матрицы $I_k, 0, \beta, I_l$ аналогичных размеров. Здесь и далее

I_r - $r \times r$ единичная матрица, $d(\rho)$ - диагональная матрица $s = t - \tau$.

Лемма 1. Матрицы $a(s)$ и $q(s)$ при $s > 0$ положительно определены.

Доказательства. Легко проверить, что матрица $q(s)$ в блочном разбиении имеет вид:

$$q = q(s) = s \begin{pmatrix} 4\alpha & -2s\alpha\beta^T \\ -2s\beta\alpha & \frac{4}{3}s^2\omega^{-1} \end{pmatrix} = a^{-1}(s) = a$$

Достаточно доказать положительную определённость матрицы $\frac{1}{4s} q(s)$. Соответствующая ей

квадратичная форма от переменных $\xi \in R^k$ (R^k - k - мерное евклидово пространство строк) и $\eta \in R^l$ имеет вид:

$$K = \xi\alpha\xi^T - s\xi\alpha\beta^T\eta^T + \frac{s^2}{3}\eta\beta\alpha\beta^T\eta^T = \left(\xi - \frac{1}{2}s\eta\beta\right)\alpha\left(\xi - \frac{1}{2}s\eta\beta\right)^T + \frac{1}{12}\eta(\beta\alpha\beta^T)\eta^T$$

Видим, что она равна сумме двух квадратичных форм с невырожденными матрицами Грамма α и $\beta\alpha\beta^T$ и поэтому $K \geq 0$. Равенство $K = 0$ влечет равенства $\eta = 0$ и $\xi - \frac{1}{2}s\eta\beta = 0$, т.е. Лемма доказана.

Из доказанного следует, что матрица a является симметричной и положительно определённой. Это означает, что квадратичная форма $xax^T \geq 0$ для произвольного $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, поэтому матрица a представима в виде произведения некоторой матрицы b на её транспонированную b^T , а именно $a = bb^T$.

Тогда $Z(x, t; y, \tau)$ - фундаментальное решение уравнение (1) с сингулярностью в точке (y, τ) имеет вид:

$$Z(x, t; y, \tau) = \pi^{-n/2} \|a\|^{1/2} (t - \tau)^{-\gamma/2} \exp \left\{ -(y - Cx)^T d \left(\frac{1}{t - \tau} \right) \text{ad} \left(\frac{1}{t - \tau} \right) (y - Cx) \right\} \quad (3)$$

где $\|a\| = \det(a)$, $\gamma = k + 3l$.

С помощью фундаментального решения определим в R^{n+1} области (шароиды) следующим образом. Пусть число (параметр) $r > 0$.

Область

$$B_r(x, t) = \left\{ (y, \tau) : Z(x, t; y, \tau) > \pi^{-n/2} \|a\|^{1/2} r^{-\gamma}, t > \tau \right\}$$

будем называть шароидом радиуса r с центром в точке (x, t) . $B_r(x, t)$ можно переписать в виде:

$$B_r(x, t) = \left\{ (y, \tau) : (y - Cx)^T d \left(\frac{1}{t - \tau} \right) \text{ad} \left(\frac{1}{t - \tau} \right) (y - Cx) \leq \frac{\gamma}{2} \ln \frac{r^2}{t - \tau} \right\} \quad (4)$$

Из (4) видно, что τ удовлетворяет следующим условиям: $\tau < t$, $\tau > t - \tau^2$. Каждое сечение шароида горизонтальной плоскостью $\tau = \text{const}$, $t - \tau^2 < \text{const} < t$, является n -мерным эллипсоидом с центром в точке $(e^{-(t-\tau)\beta} x, \tau)$. Если $\rho < r$, то $B_\rho(x, t) \subset B_r(x, t)$. При $r \rightarrow 0$ $B_r(x, t)$ и $\partial B_r(x, t)$ монотонно стягиваются к центру (x, t) .

Поэтому существует такое $r > 0$ что при $(x, t) \in \Omega$, $\overline{B_r(x, t)} \subset \overline{\Omega}$.

Пусть $r > 0$ такое, что $\overline{B_r(x, t)} \subset \overline{\Omega}$ тогда для решения задачи (1)-(2) справедливо следующее соотношение:

$$u(x, t) = (E_r u)(x, t) + \bar{f}(x, t), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} (E_r u)(x, t) &= (\gamma / \pi)^{n/2} \int_0^1 \lambda^{\gamma-1} (\ln(1/\lambda))^{n/2} \iint_{S_1(0)} u(y(\lambda, \theta), \tau(\lambda)) n^T(\theta) 4b\alpha b^T n(\theta) ds d\lambda, \\ \bar{f}(x, t) &= \iint_{B_r(x, t)} \left[Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-n/2} \|a\|^{1/2} r^{-\gamma} \right] f(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

Здесь $S_1(0)$ ($n-1$) мерная единичная сфера с обычными ортогональными координатами $\theta = (\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n)$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$ для $2 \leq j \leq n-1$, $0 \leq \theta_j \leq 2\pi$. $H(\theta) \in S_1(0)$ единичный n -мерный вектор.

$$y(\lambda, \theta) = e^{-r^2 \lambda^2 \beta} x + (\gamma \ln(1/\lambda))^{1/2} d(r^2 \lambda^2) b^{-1} n(\theta), \quad (6)$$

$$\tau(\lambda) = t - r^2 \lambda^2.$$

Из (6) следует, что если $r(x, t) \leq t^{1/2}$, при $(x, t) \in \Omega$, то $\overline{B_r(x, t)} \subset \overline{\Omega}$.

Приступим к построению марковский цепи $\{(x^j, t^j)\}_{j=0}^\infty$, на которой будем строить несмещённую оценку решения $u(x, t)$ задачи (1)-(2).

Для $u(x, t) = 1$, применив формулу (5), получим:

$$(\gamma / \pi)^{n/2} \int_0^1 \lambda^{\gamma-1} (\ln(1/\lambda))^{n/2} d\lambda \iint_{S_1(0)} n^T(\theta) 4b\alpha b^T n(\theta) ds = 1$$

Отсюда следует, что ядро интегрального уравнения (5) можно рассматривать как плотность распределения.

Рассмотрим интеграл:

$$J = \int_0^1 \lambda^{\gamma-1} (\ln(1/\lambda))^{n/2} d\lambda.$$

Сделав замену переменных $\lambda = e^{-\rho/\gamma}$, получим:

$$J = \frac{1}{\gamma^{(1+n/2)}} \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^{n/2} d\rho = \frac{\Gamma(1+n/2)}{\gamma^{(1+n/2)}}$$

где $\Gamma(\bullet)$ - гамма функция. Теперь можем представить $(E_r u)(x, t)$ следующим образом:

$$(E_r u)(x, t) = \int_0^\infty P_1(\rho) d\rho \int_{S_1(0)} P_2(H) u(y(e^{-\rho/\gamma}, \theta), \tau(e^{-\rho/\gamma})) d\rho$$

где $P_1(\rho)$ - плотность гамма-распределённой случайной величины с параметром $(1+n/2)$, $P_2(H) = H^T 4B\alpha B^T H / \gamma \sigma_n$.

Для наших целей будем моделировать случайный вектор с полным распределением

$$P_2(H) = P_2(H_1, H_2, \dots, H_n) = \frac{1}{\gamma \sigma_n} \sum_{ij=1}^n K_{ij} H_i H_j \chi_{S_1(0)}(H), \quad (7)$$

где $\chi_{S_1(0)}(H)$ - индикатор множества $S_1(0)$, σ_n - поверхность единичной сферы, K_{ij} - элементы матрицы $K = 4b\alpha b^T$ размера - $n \times n$. Так как $H_1, H_2, \dots, H_n$ являются координатами единичного вектора и $H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_n^2 = 1$ получим $H^T K H \leq \mu_1$, где μ_1 - наибольшее собственное значение матрицы K . Тогда можно моделировать случайный вектор с плотностью распределения 3.5.7 методом Неймана. Приведём алгоритм моделирования.

Алгоритм:

1) Моделируется $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ изотропный вектор и γ_2 - равномерно распределённая в $(0, 1)$ случайная величина;

2) $E = \mu_1 \gamma_1$;

3) Если $\left(\sum_{ij=1}^n K_{ij} \omega_i \omega_j \right) / \gamma \geq E$, то ω принимается, иначе повторяется пункт 1).

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ - последовательность независимых гамма распределённых случайных величин с параметром $(1+n/2)$, $\{\omega^j\}_{j=1}^\infty$ - последовательность независимых с плотностью распределения $P_2(H)$.

Определим в Ω цепь Маркова $\{x^j, t^j\}_{j=0}^\infty$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$x^0 = x, t^0 = t, t^j = t^{j-1} (1 - \exp(-2\xi_j / \gamma)),$$

$$x_i^j = x_i^{j-1} + t_{j-1} \exp(-\xi_j / \gamma) \xi_j^{1/2} \sum_{m=1}^n b_{im} \omega_i^j, \quad (8)$$

$$x_{k+p}^j = x_{k+p}^{j-1} - t_{j-1} \exp(-2\xi_j / \gamma) \sum_{c=1}^k \beta_{pc} x_c^j + t_{j-1}^{3/2} \exp(-3\xi_j / \gamma) \xi_j^{1/2} \sum_{v=1}^n b_{k+p,v} \omega_i^j,$$

$$\text{где } i=1,2,\dots,k, \quad p=1,2,\dots,l, \quad j=1,2,\dots \quad r(x^{j-1}, t^{j-1}) = (t_{j-1})^{1/2} \quad \text{соотношения} \quad (8)$$

получены из формулы (6). Теперь формулу (5) мы можем записать в следующем виде:

$$u(x^{j-1}, t^{j-1}) = E_{(x^{j-1}, t^{j-1})} u(x^j, t^j) + \bar{f}(x^{j-1}, t^{j-1}) \quad (9)$$

Определим последовательность случайных величин $\{\eta_l\}_{l=0}^\infty$ следующим равенством:

$$\eta_l = \sum_{j=1}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + u(x^l, t^l) \quad (10)$$

где (y^j, τ^j) случайная точка шароида $B_r(x, t)$ при фиксированных (x^j, t^j) , имеющая в нём плотность распределения:

$$\frac{\left[Z(x^j, t^j; y, \tau) - \|a\|^{1/2} \pi^{-n/2} r^{-\gamma} \right]}{h(x^j, t^j)}, \text{ где}$$

$$h(x, t) = \iint_{B_r(x, t)} \left[Z(x^j, t^j; y, \tau) - \|a\|^{1/2} \pi^{-n/2} r^{-\gamma} \right] dy d\tau.$$

Взяв $u(x, t) = t$ и применив формулу (2.9) для $j=1$, из (2.8) получим:

$$\begin{aligned} h(x, t) &= E_{(x, t)} \exp(-2\xi / \gamma) = \frac{r^2(x, t)}{\Gamma(1+n/2)} \left(\frac{\gamma}{\gamma+2} \right)^{1+n/2} \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{n/2} d\eta = \\ &= r^2(x, t) \left(\frac{\gamma}{\gamma+2} \right)^{1+n/2} \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\{\mathfrak{F}_l\}_{l=0}^\infty$ - последовательность σ - алгебр, порождённая случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ последовательностью векторов $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^l$ и случайными точками $(y^0, \tau^0), (y^1, \tau^1), \dots, (y^{l-1}, \tau^{l-1})$, $u_{f, \varphi}(x, t)$ - решения задачи (1)-(2), соответствующие заданным f, φ .

Теорема 1. а) Последовательность $\{\eta_l\}_{l=0}^\infty$ образует мартингал. Из определения последовательности σ - алгебр $\{\mathfrak{F}_l\}_{l=0}^\infty$.

б) Если $u_{f^2, 0}(x, t) < +\infty$ и $u_{|f|, 0}(x, t) < +\infty$, то η_l является квадратично интегрируемой.

Доказательство: Сперва докажем, что $\{\eta_l\}_{l=0}^\infty$ образует мартингал. Из определения $\mathfrak{F}_l$ видно, что η_l является $\mathfrak{F}_l$ - измеримой. Далее

$$\begin{aligned}
 E_{(x,t)}(\eta_{l+1} / \mathfrak{F}_l) &= E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^l \left(h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + u(x^{l+1}, t^{l+1}) \right) / \mathfrak{F}_l \right) = \\
 &= E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^{l-1} \left(h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + h(x^l, t^l) f(y^l, \tau^l) + u(x^{l+1}, t^{l+1}) \right) / \mathfrak{F}_l \right) = \\
 &= E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) / \mathfrak{F}_l \right) + E_{(x,t)} \left(h(x^l, t^l) f(y^l, \tau^l) / \mathfrak{F}_l \right) + \\
 &+ E_{(x,t)} \left(u(x^{l+1}, t^{l+1}) / \mathfrak{F}_l \right)
 \end{aligned}$$

Так как $\sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j)$ является $\mathfrak{F}_l$ – измеримой, то из свойств условного

математического ожидания следует, что

$$E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) / \mathfrak{F}_l \right) = \sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j).$$

А т.к $h(x^l, t^l) - \mathfrak{F}_l$ – измерима и $f(y^l, \tau^l)$ не зависит от $\mathfrak{F}_l$ то

$$E_{(x,t)} \left(h(x^l, t^l) f(y^l, \tau^l) / \mathfrak{F}_l \right) = h(x^l, t^l) E_{(x,t)} f(y^l, \tau^l).$$

Далее и $u(x^{l+1}, t^{l+1})$ не зависит от $\mathfrak{F}_l$ и поэтому

$$E_{(x,t)} \left(u(x^{l+1}, t^{l+1}) / \mathfrak{F}_l \right) = E_{(x,t)} \left(u(x^{l+1}, t^{l+1}) \right), \text{ тогда имеем:}$$

$$E_{(x,t)}(\eta_{l+1} / \mathfrak{F}_l) = \sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + h(x^l, t^l) E_{(x,t)} f(y^l, \tau^l) + E_{(x,t)} u(x^{l+1}, t^{l+1}).$$

Используя формулы (9) и (10), получим:

$$E_{(x,t)}(\eta_{l+1} / \mathfrak{F}_l) = \sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + u(x^l, t^l) = \eta_l.$$

Отсюда следует, что $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\mathfrak{F}_l\}_{l=0}^{\infty}$. Докажем, что

$$E_{(x,t)} \eta_l^2 \leq \infty. \text{ Достаточно показать, что}$$

$$I = E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^{l-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) \right)^2 < +\infty$$

Разбивая I на два слагаемых I_1, I_2

$$\begin{aligned}
 I &= E_{(x,t)} \left(\sum_{j=0}^{l-1} h^2(x^j, t^j) f^2(y^j, \tau^j) \right) + \\
 &+ 2E_{(x,t)} \sum_{j=0}^{l-2} \sum_{k=j+1}^{l-1} h(x^j, t^j) h(x^k, t^k) f(y^j, \tau^j) f(y^k, \tau^k),
 \end{aligned}$$

покажем конечность I .

Из (10) и условия $r^2(x, t) \leq t$ получим, что $h(x, t) \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma + 2}\right)^{1+n/2} t$ и поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= 2E_{(x,t)} \sum_{j=0}^{l-2} \sum_{k=j+1}^{l-1} h(x^j, t^j) h(x^k, t^k) f(y^j, \tau^j) f(y^k, \tau^k) \leq \\ &\leq 2E_{(x,t)} \sum_{j=0}^{l-2} \sum_{k=j+1}^{l-2} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) h(x^k, t^k) f(y^k, \tau^k) \leq \\ &\leq 2E_{(x,t)} \sum_{j=0}^{l-2} \sum_{k=j+1}^{l-1} h(x^j, t^j) |f(y^j, \tau^j)| h(x^k, t^k) |f(y^k, \tau^k)| \leq \\ &\leq 2E_{(x,t)} \sum_{j=0}^{l-2} h(x^j, t^j) |f(y^j, \tau^j)| u_{|f|,0}(x^j, t^j) \leq \\ &\leq 2 \left(\max_{x \in R^n, t > \tau} u_{|f|,0}(x, \tau) \right) u_{|f|,0}(x, t) < +\infty \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теперь покажем один из способов оценки по одному случайному узлу величины

$$\bar{f}(x, t) = \iint_{B_r(x, t)} \left[Z(x, t; y, \tau) - \pi^{-n/2} \|a\|^{1/2} r^{-\gamma} \right] f(y, \tau) dy d\tau.$$

Лемма (2). Для функции $\bar{f}(x, t)$ справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= (\gamma / (\gamma + 2))^{(1+n/2)} r^2 E f(y(\xi, \zeta, \omega), \tau(\xi, \zeta)), \text{ где} \\ y(\xi, \zeta, \omega) &= \\ &= e^{-r^2 \exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right) \zeta^{2/\gamma} \beta} x + \left(\frac{\gamma}{\gamma+2} \xi\right)^{1/2} a \left(r^2 \exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right) \zeta^{2/\gamma} b^{-1} \omega \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tau(\xi, \zeta) = t - \exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right) \zeta^{2/\gamma}.$$

Здесь ξ - гамма, распределённая случайная величина с параметром $(n/2)$, ζ - бетта распределённая случайная величина с параметром $(2/\gamma, 2)$ и ω - случайный единичный вектор.

Доказательства: введём область

$$B_r = \left\{ (y, \tau) : y^T d(1/\tau) a d(1/\tau) y < \frac{\gamma}{2} \ln r^2 / \tau, \tau > 0 \right\}$$

получающуюся, очевидно, зеркальным отображением шароидов $B_r(0, 0)$ относительно плоскости $\tau = 0$. Эти области также будем называть шароидами (радиуса r). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{\|a\|^{1/2}}{\pi^{n/2} r^\gamma} \iint_{B_r} \left[r^\gamma \tau^{-\gamma/2} \exp(-y^T d(1/\tau) a d(1/\tau) y) - 1 \right] \times \\ &\times f(e^{-\tau \beta} x + y, t - \tau) dy d\tau \end{aligned}$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных интегрирования (y, τ) на (ρ, λ, θ) по формулам:

$$y = (\gamma \ln(1/\lambda))^{1/2} d(\tau) b^{-1} H(\theta), \quad \tau = \lambda^2 \rho^2.$$

Несложные вычисления показывает, что

$$dyd\tau = \|a\|^{-1/2} \gamma^{n/2} \lambda^{\gamma+1} (\ln(1/\lambda))^{(n-2)-1} \rho^{\gamma+1} d\rho d\lambda ds$$

$$r^\gamma \tau^{-\gamma/2} \exp(-y^T d(1/\tau) a d(1/\tau) y) = r^\gamma \rho^{-\gamma}.$$

Область интегрирования преобразуется в цилиндр $(0 \leq \rho \leq r) \times (0 \leq \lambda \leq 1) \times S_1(0)$.

Отсюда получим:

$$\bar{f}(x, t) = \frac{\gamma^{n/2}}{\pi^{n/2} r^\gamma} \int_0^r \rho (r^\gamma - \rho^\gamma) d\rho \int_0^1 \lambda^{\gamma+1} (\ln(1/\lambda))^{n/2-1} d\lambda \times$$

$$\times \iint_{S(0)} f\left(e^{-\lambda^2 \rho^2 \beta} x + (\gamma \ln(1/\lambda))^{1/2} d(\rho^2 \lambda^2) b^{-1} H(0), t - \lambda^2 \rho^2\right).$$

Сначала во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\lambda = e^{-Z/\gamma+2}$, затем во внешнем интеграле $\rho = v^{1/\gamma} r$ и тогда, получим:

$$\bar{f}(x, t) = \frac{r^2}{\gamma \pi^{n/2}} \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{n/2} \int_0^1 v^{2/\gamma-1} (1-v) dv \int_0^1 e^{-z} z^{n/2-1} dz \times$$

$$\times \iint_{S(0)} f(y, (z, v, h(\theta)), \tau(z, v)) ds = r^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} \int_0^1 P_1(v) dv \int_0^\infty P_2(z) dz \times$$

$$\times \int_{S_{\mathbb{H}(0)}} P_3(h) f(y, (z, v, h(\theta)), \tau(z, v)) ds = r^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} Ef(y, (\xi, \zeta, \omega), \tau(\xi, \zeta)),$$

где ξ - случайная величина с плотностью распределения $P_2(z) = \frac{e^{-z} z^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)}$ - (гамма-

распределение), ζ - случайная величина с плотностью распределения $P_1(v) = \frac{v^{2/\gamma-1} (1-v)}{B(2/\gamma, 2)}$, ω -

случайный вектор с плотностью распределения $P_3(h(\theta)) = 1/\sigma_n$ ($\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(2/\gamma, 2)}$ - поверхность

единичной сферы). Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о вычислительной реализуемости оценки (10). Возьмем ε достаточно малым и рассмотрим $(\partial\Omega)_\varepsilon = (R^n \times [0, \varepsilon])$.

Пусть $N_\varepsilon = \min\{l : (x^l, t^l) \in (\partial\Omega)_\varepsilon\}$ - момент первого попадания процесса (x^l, t^l) в $(\partial\Omega)_\varepsilon$ т.е. N_ε - момент остановки процесса (марковский момент).

Лемма 3. Имеет место неравенство: $E_{(x,t)} N_\varepsilon \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2} \frac{t}{\varepsilon}$;

Доказательство. Взяв $u(x, t) = t$ и применив формулы (10) и (11) получим:

$$t = u_{1,0}(x, t) \geq E_{(x,t)} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1} h(x^j, t^j) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right) E_{(x,t)} \sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1} r^2(x^j, t^j).$$

Из определения $r(x, t)$ следует что $r^2(x^j, t^j) = \{t^j\} \geq \varepsilon$.

Отсюда получим, что $t \geq \left(\frac{\gamma}{\gamma + 2} \right)^{1+n/2} \varepsilon E_{(x,t)} N_\varepsilon$. Следовательно $E_{(x,t)} N_\varepsilon \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma + 2} \right)^{1+n/2} \frac{t}{\varepsilon}$.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы (1). Тогда η_{N_ε} является несмещённой оценкой для $u(x, t)$. Дисперсия её конечна.

Доказательство. Из теоремы (1) следует, что η_l квадратично интегрируема и отсюда η_l является равномерно интегрируемой и $N_\varepsilon < +\infty$. Далее момент остановки процесса является марковским моментом. Поэтому согласно теореме Дуба “О преобразовании свободного выбора” и формуле 3.5.9 $E\eta_{N_\varepsilon} = E\eta_l = u(x, t)$, т.е. η_{N_ε} является несмещённой оценкой для $u(x, t)$. Из определения случайных величин η_{N_ε} и η_∞ видно, что $D\eta_{N_\varepsilon} \leq D\eta_\infty$. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \eta_\infty^2 &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} h(x^i, t^i) f(y^i, \tau^i) + u(x^\infty, t^\infty) \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} h(x^i, t^i) f(y^i, \tau^i) \right)^2 + \\ &+ 2u(x^\infty, t^\infty) \sum_{i=0}^{\infty} h(x^i, t^i) f(y^i, \tau^i) + u^2(x^\infty, t^\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} h^2(x^i, t^i) f^2(y^i, \tau^i) + \\ &+ 2 \sum_{i=0}^{\infty} h(x^i, t^i) f(y^i, \tau^i) \sum_{j=i+1}^{\infty} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + 2u(x^\infty, t^\infty) \sum_{i=0}^{\infty} h(x^i, t^i) f(y^i, \tau^i) + \\ &+ u^2(x^\infty, t^\infty) \\ E_{(x,t)} \eta_\infty^2 &= \left(\frac{\gamma}{\gamma + 2} \right)^{1+n/2} tu_{f^2,0}(x, t) + 2 \left(\max_{x \in R^n, \tau < t} u_{|f|,0}(x, \tau) \right) \times \\ &\times u_{|f|,0}(x, t) + 2u_{0,\varphi}(x, t) u_{|f|,0}(x, t) + u_{0,\varphi^2}(x, t). \end{aligned}$$

$$D\eta_\infty = E\eta_\infty^2 - (E\eta_\infty)^2 = E\eta_\infty^2 - u^2(x, t) < +\infty \text{ т.е. } D\eta_{N_\varepsilon} < +\infty.$$

Из η_{N_ε} стандартным способом строится смещённая, но практически реализуемая оценка $\eta_{N_\varepsilon}^*$.

Пусть $\phi_1(x, 0) = \varphi(x)$ $x \in R^n$ и (x, t^*) - ближайшая к (x, t) точка $\partial\Omega$. В оценки

$$\eta_{N_\varepsilon} = \sum_{j=0}^{N_\varepsilon-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + u(x^{N_\varepsilon}, t^{N_\varepsilon})$$

заменяем $u(x, t^{N_\varepsilon})$ на $\phi_1(x, t^{*N_\varepsilon})$ и получаем:

$$\eta_{N_\varepsilon}^* = \sum_{j=0}^{N_\varepsilon-1} h(x^j, t^j) f(y^j, \tau^j) + \phi_1(x, t^{*N_\varepsilon}).$$

Теорема 3. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица и $A(\varepsilon)$ модуль непрерывности $u(x, t)$. Тогда случайная величина $\eta_{N_\varepsilon}^*$ является смещённой оценкой для $u(x, t)$. $D\eta_{N_\varepsilon}^*$ ограниченная функция параметра ε .

Доказательство. Так как $E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon} = u(x, t)$, то

$$\left| u(x, t) - E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon}^* \right| = \left| E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon} - E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon}^* \right| = \left| E_{(x,t)} u(x, t^{N_\varepsilon}) - E_{(x,t)} \phi_1(x, t^{*N_\varepsilon}) \right| \leq$$

$$\leq E_{(x,t)} \left| u(x, t^{N_\varepsilon}) - u(x, t^{*N_\varepsilon}) \right| = A(\varepsilon),$$

т.е. $\eta_{N_\varepsilon}^*$ - смещённая оценка (смещение которой не превосходит $A(\varepsilon)$)

$$\begin{aligned} D\eta_{N_\varepsilon}^* &= E_{(x,t)} \left(\eta_{N_\varepsilon}^* - E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon}^* \right)^2 = E_{(x,t)} \left(\eta_{N_\varepsilon}^* - \eta_{N_\varepsilon} + \eta_{N_\varepsilon} - u(x, t) + u(x, t) - E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon}^* \right)^2 \leq \\ &\leq 4E_{(x,t)} \left(\eta_{N_\varepsilon} - u(x, t) \right)^2 + 4E_{(x,t)} \left(\eta_{N_\varepsilon}^* - \eta_{N_\varepsilon} \right)^2 + 4E_{(x,t)} \left(u(x, t) - E_{(x,t)} \eta_{N_\varepsilon}^* \right)^2 \leq \\ &\leq 4E_{(x,t)} \left(\phi_1(x, t^{*N_\varepsilon}) - u(x^{N_\varepsilon}, t^{N_\varepsilon}) \right)^2 + 4D\eta_{N_\varepsilon} + 4A^2(\varepsilon) \leq 8A^2(\varepsilon) + 4D\eta_{N_\varepsilon} < +\infty. \end{aligned}$$

доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ермаков С.М., Расулов А.С., Бакоев М.Т., Веселовская А.Я. Избранные алгоритмы метода Монте-Карло. Ташкент: Университет. 1992, 130 с.
2. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.А. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984, 206 с.
3. Купцов Л.П. О свойстве среднего для обобщённого уравнения А.Н. Колмогорова I. // Дифф. Уравнения. 1983, Т. XIX, №2, с. 285-304.
4. Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. Москва. Наука. 1985. 222 с.
5. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Ситатистика случайных процессов. М.: Наука, 1975, 696 с.
6. Мильштейн Г.Н. Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциальных уравнений. // Теория вероятностей и её применения. 1985. Т. XXX, Вып.4. С. 706-721.
7. Мильштейн Г.Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. // Теория вероятностей и её применения. Т.40. вып.3, 1995. С.657-665.
8. Расулов А.С., Бакоев М.Т. Решение смешанной задачи для некоторых квазилинейных параболических уравнений методы Монте-Карло. // Тез. Докл. I-й Всемирн. Конгр. Общества Бернулли 7-14 сентября. 1986 Г. Ташкент. С 473.
9. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. Новосибирск. Наука. 1989, 280 с.
10. Сабельфельд К.К. Вероятностные представления для систем эллиптических уравнений // Докл. РАН. 1995. т.341, №1, с.594-598.
11. Тожиев Т.Х. Стохастические методы аппроксимации решения первой краевой задачи для обобщённого уравнения неизотропной диффузии. // Деп. в ГФ НТИ ГКНТ № 2654-Уз 97.
12. Rasulov A.S., Bakoev M.T. Monte-Carlo approach to solution semilinear nonisotropic diffusion equation // Uzbek mathematical journal. 2018. Т. 3. С. 1-9.
13. Бакоев М.Т., Тожиев Т.Х. Метод Монте-Карло для решения задачи Коши для обобщённого уравнения неизотропной диффузии // Узбекский математический журнал. Ташкент. 1996. Т. 3. С. 15-23.
14. Ermakov S.M., Nekrutkin V.V., Sipin A.S. Random processes for classical equation of mathematical physics. Kluwer: Kluwer academic publishers, 1989.
15. Купцов Л.П. О фундаментальных решениях некоторых вырожденных параболических уравнений второго порядка // Математические заметки. 1982. Т. Т.31. № 4. С. 559-570.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Мухиддинова Акила Тулкин кизи,
и.о. доцента Университета Ренессанс,
старший научный сотрудник Института
математики АН РУз В.И. Романовского
oqila1992@mail.ru

Вохидов Козимжон Хайрулло угли,
студент Ташкентского университета информационных
технологий имени Мухаммада аль-Хорезми

Рахмонова Дилафруз Шавкатдин кизи,
кафедра Математики и естественных
наук Университета «Ренессанс»
rahmonovadilafruz32@gmail.com

Режаматов Хасан Фахритдин угли,
ассистент кафедры Математики и
естественных наук Университета «Ренессанс»
rezamatovhasan@gmail.com

***Аннотация.** При решении экономических задач мы опираемся на заранее разработанные планы, которые формируются с использованием методов математического моделирования. Под математическим моделированием понимается процесс поиска решения задачи с помощью числовых и формальных методов. Математика занимает ключевое место в анализе и оптимизации экономических процессов. В этой статье будет рассмотрена разработка программы, предназначенной для решения экономических задач на основе математического моделирования.*

***Ключевые слова:** математическое моделирование, актуальные вопросы экономики, язык C++.*

IQTISODIY MASALALARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH

***Annotatsiya.** Iqtisodiy masalalarni yechishda biz oldindan ishlab chiqilgan rejalarga tayanamiz, bu rejalar matematik modellash tirish usullari yordamida shakllantiriladi. Matematik modellash tirish – bu masalani sonli va formal usullar yordamida yechish jarayonidir. Matematika iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilish va optimallashtirishda muhim o‘rin tutadi. Ushbu maqolada iqtisodiy masalalarni matematik modellash tirish asosida yechishga mo‘ljallangan dastur yaratish ko‘rib chiqiladi.*

***Kalit so‘zlar:** matematika modellashuvi, iqtisodiyotning dolzarb masalalari, C++ tili, dastur.*

MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC PROBLEMS

***Abstract.** When solving economic problems, we rely on pre-developed plans that are formed using mathematical modeling methods. Mathematical modeling is the process of solving a problem through numerical and formal methods. Mathematics plays a key role in analyzing and optimizing economic processes. This article discusses the development of a program designed to solve economic problems based on mathematical modeling.*

***Keywords:** mathematical modeling, current economic issues, C++ language, program.*

***Введение.** Математическое моделирование служит ключевым инструментом для анализа экономических процессов. Оно позволяет визуализировать сложные экономические проблемы и находить оптимальные решения через формализацию зависимостей. Особое значение здесь имеет линейная алгебра, которая даёт возможность выражать взаимосвязи между экономическими показателями через системы уравнений.*

Нами разработана специализированная программа, автоматизирующая решение таких задач. Она анализирует входные данные, строит математические модели и вычисляет экономически обоснованные результаты. Этот подход не только ускоряет расчёты, но и минимизирует риски субъективных ошибок.

Применение математических методов в экономике обеспечивает точность прогнозирования и способствует принятию взвешенных управленческих решений. Внедрение подобных программных решений открывает новые возможности для оптимизации ресурсов и повышения эффективности экономических систем.

Транспортная задача. Уголь, добываемый на нескольких месторождениях, направляется различным потребителям, таким как заводы, электростанции и другие предприятия. Известны объёмы добычи угля на каждом месторождении за определённый период, например, за месяц, а также потребности каждого из потребителей за тот же срок. Кроме того, имеются данные о расстояниях между месторождениями и пунктами потребления, а также о состоянии транспортных путей и условиях доставки.

Исходя из этих параметров, можно рассчитать стоимость перевозки одной тонны угля от любого месторождения до любого потребителя. На основании этих расчётов необходимо разработать оптимальный план транспортировки угля, который позволит минимизировать общие затраты на перевозку.

Такой подход помогает эффективно распределять ресурсы, снижать транспортные расходы и обеспечивать бесперебойное снабжение предприятий. В современных условиях, учитывая динамику цен на топливо и изменения в инфраструктуре, оптимизация логистики становится особенно актуальной задачей для предприятий угледобывающей и энергетической отраслей. Применение математических моделей и специализированных программ позволяет принимать взвешенные решения и существенно повышать экономическую эффективность перевозок.

Имеются два месторождения M_1, M_2 и три потребителя Π_1, Π_2, Π_3 . Количество угля в M_1 и M_2 - соответственно A_1 и A_2 . Запросы потребителей Π_1, Π_2, Π_3 пусть будут B_1, B_2, B_3 . Считаем, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $A_1 + A_2 = B_1 + B_2 + B_3$; (такое предположение вполне естественно). Заданы числа C_{ij} ($i=1, 2; j=1, 2, 3$), представляющие стоимость перевозки тонны угля из M в Π . Необходимо определить шесть чисел $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}$, где X_{ij} – поставка угля, предназначенное j -му потребителю.

Составим таблицу:

	Π_1	Π_2	Π_3	Всего отправлено
M_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	A_1
M_2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	A_2
Всего доставлено	B_1	B_2	B_3	

Общее количество угля, вывезенное из M_1 , должно равняться A_1 . Отсюда получаем условие:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = A_1$$

Аналогичное условие должно выполняться для M_2 :

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = A_2$$

Общее количество угля, доставленное в Π_1 , должно равняться B_1 :

$$X_{11} + X_{21} = B_1$$

Аналогично получаем условия:

$$X_{12} + X_{22} = B_2,$$

$$X_{13} + X_{23} = B_3.$$

Для упрощения задачи, мы воспользуемся новыми данными. Допустим, для нашей программы нужно определить число выездов – введём новый коэффициент C :

$$\begin{cases} C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 = A_1 \\ C_4 X_4 + C_5 X_5 + C_6 X_6 = A_2 \\ C_1 X_1 + C_4 X_4 = B_1 \\ C_2 X_2 + C_5 X_5 = B_2 \\ C_3 X_3 + C_6 X_6 = B_3 \end{cases}$$

Для кода вводятся все X, A, B , затем находим C . Если мы найдем C_i , можно определить общий расход.

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<string>
using namespace std;
```

```
int main()
{
```

```

int X[10], C[10], B[3],m,A1,A2;
string S1, S2, S3, S4, S5;
cout<<"Откуда(Адрес 1) : ";
getline(cin,S1);
cout<<" \nОткуда(Адрес 2) ";
getline(cin,S3);

cout<<"\nКуда1 : ";

getline(cin,S2);
cout<<" \nКуда2: ";
getline(cin,S4);
cout<<" \nКуда3: ";
getline(cin,S5);
cout<<"\nРасстояние(на км): "; cin>>m;
double d=m*8000/10;
cout<<"\nСредняя стоимость 1литра бензина 8000 сум";
cout<<"\n Для вас стоимость один раз:"<<d<<" сум";
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S1<<" на "<<S2<<endl;
cin>>X[0];
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S1<<" на "<<S4<<endl;
cin>>X[1];
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S1<<" на "<<S5<<endl;
cin>>X[2];
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S3<<" на "<<S2<<endl;
cin>>X[3];
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S3<<" на "<<S4<<endl;
cin>>X[4];
cout<<"\nВведите количество(тон) угля от "<<S3<<" на "<<S5<<endl;
cin>>X[5];
cout<<"\nВведите количество(тон) товар из : "<<S1<<" ";
cin>>a1;
cout<<"\nВведите количество(тон) товар из : "<<S3<<" ";
cin>>a2;
cout<<"\nВведите общий товар для : "<<S2<<" ";
cin>>B[0];
cout<<"\nВведите общий товар для : "<<S4<<" ";
cin>>B[1];
cout<<"\nВведите общий товар для : "<<S5<<" ";
cin>>B[2];
C[0]=(B[0]-X[3])/X[0];
C[1]=(B[1]-X[4])/X[1];
C[2]=(B[2]-X[5])/X[2];
C[3]=(B[0]-X[0])/X[3];
C[4]=(B[1]-X[1])/X[4];
C[5]=(B[2]-X[2])/X[5];
int S,F=0;
for(int i=0; i<6; i++){
F+=C[i];}
S=F*d;
cout<<" \nВаш расход : "<<S<<" сум";
return 0;
}

```

```

Output
/ tnp/MPAyEzbHbN.o
Откуда(Адресс 1) : Angren
Откуда(Адресс 2) : Fargona
Куда1: Tashkent
Куда2: Olmaliq
Куда3: Parkent
Расстояние(на км): 1157
Средняя стоимость 1-литра бензина 8000 сум
Для вас стоимость один раз: 925600 сум
Введите количество(тон) угля от Angren до Tashkent; 5
Введите количество(тон) угля от Angren до Olmaliq; 10
Введите количество(тон) угля от Angren до Parkent; 15
Введите количество(тон) угля от Fargona до Tashkent; 30
Введите количество(тон) угля от Fargona до Olmaliq; 20
Введите количество(тон) угля от Fargona до Parkent; 10
Введите количество(тон) товар из Angren 68
Введите количество(тон) товар из Fargona 62
Введите общий товар для Tashkent 50
Введите общий товар для Olmaliq 40
Введите общий товар для Parkent 40
Ваш расход : 11107200 сум

=== Code Execution Successful ===

```

Закключение. В данной статье подробно проанализировано, каким образом математическое моделирование способствует эффективному решению экономических задач различной сложности. Математическое моделирование позволяет выявить ключевые аспекты проблемы, структурировать данные и представить их в виде формальных моделей, что значительно облегчает процесс анализа. При этом программирование выступает неотъемлемым вспомогательным инструментом, обеспечивающим точность, корректность и автоматизацию вычислений, что особенно важно при работе с большими объёмами информации и сложными системами.

Разработанная в рамках исследования программа предназначена для предварительного планирования затрат, связанных с производственными процессами. Это позволяет организациям заранее оценить финансовые и ресурсные потребности, что является критически важным для рационального распределения средств и оптимизации работы в любой отрасли экономики. Использование подобных инструментов помогает минимизировать издержки, повысить прозрачность планирования и улучшить контроль над выполнением производственных задач.

Кроме того, применение математического моделирования и программных решений способствует снижению рисков, связанных с человеческим фактором и ошибками в расчётах. Это особенно актуально в условиях быстро меняющейся экономической среды, где своевременные и обоснованные решения играют ключевую роль в достижении конкурентных преимуществ. Внедрение таких технологий позволяет предприятиям адаптироваться к новым вызовам, улучшать качество управления и повышать общую эффективность деятельности.

Таким образом, интеграция математического моделирования и программирования в экономическую практику открывает широкие возможности для анализа, прогнозирования и

оптимизации процессов, что способствует устойчивому развитию и повышению конкурентоспособности предприятий.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие - М.: ИНФРА-М, 1999. - 356 с.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Математика в экономике: Учебник: ч. 1-М.: Финансы и статистика, 2000.
3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для ВТУЗов: В 2-х ч.: Изд-во «Высшая школа», 2000.
4. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учеб. Пособие/ А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова, Е.И.Шилкина и др.-Мн.: Высш. шк., 2001.- 284 с.
5. Новикова Татьяна Валерьевна: Элементы линейной алгебры и линейного программирования в экономике. Методическая разработка.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ СЛОЖНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Умматова Махбуба Ахмедовна,

старший преподаватель кафедры Математики
Кокандского государственного университета

Аннотация. В данной статье рассматривается одна из относительно молодых, но интересных областей математики — главный объект математической логики — язык символов и рассуждений. Сначала приводятся краткие и основные факты об истории математической логики, затем описываются основные типы логических операций — такие как отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность — и рассматриваются сложные рассуждения, сформированные на их основе с использованием логических связей и их типов. Представлены и проанализированы таблицы истинности. Описаны дизъюнктивные суждения, строгие и нестрогие дизъюнктивные суждения, конъюнктивные суждения, строгие и нестрогие конъюнктивные суждения, суждения об эквивалентности и отрицании. Приведены несколько примеров сложных рассуждений, сформированных с использованием связей на естественном языке.

Ключевые слова: математическая логика, символический язык, рассуждения, история математической логики, основные типы логических операций, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, логические связи, сложные рассуждения, таблицы истинности, дизъюнктивное предложение, строгое и нестрогое дизъюнктивное предложение, конъюнктивное предложение, строгое и нестрогое конъюнктивное предложение, эквивалентное и отрицательное предложение.

MURAKKAB BAYONOTLARNI O'RGANISH METODIKASI

Annotatsiya. Ushbu maqolada matematikaning nisbatan yosh, biroq qiziqarli sohalaridan biri — matematik mantiqning asosiy obyekt bo'lmish ramzlar va mulohazalar tili ko'rib chiqiladi. Avvaliga matematik mantiq tarixiga oid qisqacha asosiy faktlar keltiriladi, so'ngra inkor, konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya, ekvivalentlik kabi mantiqiy amallarning asosiy turlari tavsiflanadi hamda ular asosida mantiqiy bog'lovchilar va ularning turlari yordamida shakllantirilgan murakkab mulohazalar tahlil qilinadi. Chinlik jadvallari taqdim etilgan va tahlil qilingan. Dizyunktiv, qat'iy va noqat'iy dizyunktiv mulohazalar, konyunktiv, qat'iy va noqat'iy konyunktiv mulohazalar, ekvivalentlik va inkor mulohazalari bayon etilgan. Tabiiy tildagi bog'lovchilar yordamida shakllantirilgan murakkab mulohazalarga bir nechta misollar keltirilgan.

Kalit so'zlar: matematik mantiq, ramziy til, mulohazalar, matematik mantiq tarixi, mantiqiy amallarning asosiy turlari, inkor, konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya, ekvivalentlik, mantiqiy bog'lovchilar, murakkab mulohazalar, chinlik jadvallari, dizyunktiv mulohaza, qat'iy va noqat'iy dizyunktiv mulohaza, konyunktiv mulohaza, qat'iy va noqat'iy konyunktiv mulohaza, ekvivalentlik va inkor mulohazasi.

METHODOLOGY FOR THE STUDY OF COMPLEX STATEMENTS

Abstract. This article examines one of the relatively young yet interesting fields of mathematics and the main object of mathematical logic: the language of symbols and reasoning. It begins by providing a brief overview of the history of mathematical logic, then describes the main types of logical operations—such as negation, conjunction, disjunction, implication, and equivalence. The article also considers complex statements formed on the basis of these operations using logical connectives and their types. Truth tables are presented and analyzed. Disjunctive propositions, strict and non-strict disjunctive propositions, conjunctive propositions, strict and non-strict conjunctive propositions, and propositions of equivalence and negation are described. Several examples of complex statements formed using connectives in natural language are provided.

Keywords: mathematical logic, symbolic language, reasoning, history of mathematical logic, main types of logical operations, negation, conjunction, disjunction, implication, equivalence, logical connectives, complex statements, truth tables, disjunctive proposition, strict and non-strict disjunctive proposition, conjunctive proposition, strict and non-strict conjunctive proposition, proposition of equivalence, proposition of negation.

Введение. Логика – это неотъемлемая часть курса алгебры, наука о формах и законах правильного мышления. Она появилась приблизительно в IV веке до н. э. в Древней Греции. Её создателем считается знаменитый древнегреческий философ и ученый Аристотель. Как видим, логике примерно 2,5 тысячи лет. Однако она до сих пор сохраняет своё практическое значение. Многие науки и искусства Древнего мира навсегда ушли в прошлое и представляют для нас только «музейное» значение, интересны исключительно как памятники старины, но некоторые из них пережили века, и в настоящее время мы продолжаем ими пользоваться. К их числу относятся геометрия Евклида (в школе мы изучаем именно её) и логика Аристотеля, которая также называется традиционной логикой. В XIX веке появилась и стала быстро развиваться символическая (или математическая) логика. В традиционной логике для исследования правильного мышления используется естественный язык (тот, на котором мы говорим, пишем, читаем), а в символической логике – искусственный язык, или язык символов, подобный языку математики. Символическая логика – достаточно специфическая и непростая наука, её можно рассматривать как раздел математики и информатики. Аристотелевская логика, напротив, будучи более широкой, представляет собой своего рода универсальную науку: её освоение одинаково полезно и даже необходимо каждому человеку, независимо от того, какие области знания и предметы являются для него более близкими – социально-гуманитарные, естественно-математические или технические.

В зависимости от союза, с помощью которого простые суждения соединяются в сложные, выделяется пять видов сложных суждений: конъюнктивные, дизъюнктивные, имплицативные, эквивалентные и отрицательные суждения.

Конъюнктивное суждение (конъюнкция) – это сложное суждение с соединительным союзом И, который обозначается в логике условным знаком « $\wedge$ ». С помощью этого знака конъюнктивное суждение, состоящее из двух простых суждений, можно представить в виде формулы: $a \wedge b$ (читается «а и b»), где а и b – это два каких-либо простых суждения. Например, сложное суждение: Сверкнула молния, и загредел гром – является конъюнкцией (соединением) двух простых суждений: Сверкнула молния и Загредел гром. Конъюнкция может состоять не только из двух, но и из большего числа простых суждений. Например: Сверкнула молния, и загредел гром, и пошёл дождь ($a \wedge b \wedge c$).

Дизъюнктивное суждение (дизъюнкция) – это сложное суждение с разделительным союзом ИЛИ. Вспомним, что, говоря о логических операциях сложения и умножения понятий, мы отмечали неоднозначность этого союза – он может использоваться как в нестрогом (неисключающем) значении, так и в строгом (исключающем). Неудивительно поэтому, что дизъюнктивные суждения делятся на два вида: нестрогая и строгая дизъюнкция соответственно.

Нестрогая дизъюнкция – это сложное суждение с разделительным союзом ИЛИ в его нестрогом (неисключающем) значении, который обозначается знаком « $\vee$ ». С помощью этого знака нестрогое дизъюнктивное суждение, состоящее из двух простых суждений, можно представить в виде формулы: $a \vee b$ (читается «а или b»), где а и b – это два простых суждения. Например, сложное суждение: Он изучает английский, или он изучает немецкий является нестрогой дизъюнкцией (разделением) двух простых суждений: Он изучает английский и Он изучает немецкий. Эти суждения друг друга не исключают, ведь возможно изучать и английский, и немецкий одновременно, поэтому данная дизъюнкция является нестрогой.

Строгая дизъюнкция – это сложное суждение с разделительным союзом ИЛИ в его строгом (исключающем) значении, который обозначается знаком « $\vee_*$ ». С помощью этого знака строгое дизъюнктивное суждение, состоящее из двух простых суждений, можно представить в виде формулы: $a \vee_* b$ (читается «или а, или b»), где а и b – это два простых суждения. Например, сложное суждение: Он учится в 9 классе, или он учится в 11 классе является строгой дизъюнкцией (разделением) двух простых суждений: Он учится в 9 классе, Он учится в 11 классе. Обратим внимание на то, что эти суждения друг друга исключают, ведь невозможно одновременно учиться и в 9, и в 11 классе (если он учится в 9 классе, то точно не учится в 11 классе, и, наоборот), в силу чего данная дизъюнкция является строгой.

Как нестрогая, так и строгая дизъюнкции могут состоять не только из двух, но и из большего числа простых суждений. Например: Он изучает английский, или он изучает немецкий, или он изучает французский ($a \vee b \vee c$); Он учится в 9 классе, или он учится в 10 классе, или он учится в 11 классе ($a \vee_* b \vee_* c$).

Имплицативное суждение (импликация) – это сложное суждение с условным союзом ЕСЛИ...ТО, который обозначается знаком « $\Rightarrow$ ». С помощью этого знака имплицативное суждение, состоящее из двух простых суждений, можно представить в виде формулы: $a \Rightarrow b$ (читается «если а, то b»), где а и b – это два простых суждения. Например, сложное суждение: Если вещество является

металлом, то оно электропроводно представляет собой импlicative суждение (причинно-следственную связь) двух простых суждений: Вещество является металлом и Вещество электропроводно. В данном случае эти два суждения связаны таким образом, что из первого вытекает второе (если вещество – металл, то оно обязательно электропроводно), однако из второго не вытекает первое (если вещество электропроводно, то это вовсе не означает, что оно является металлом).

Первая часть импликации называется основанием, а вторая – следствием; из основания вытекает следствие, но из следствия не вытекает основание. Формулу импликации: $a \Rightarrow b$, можно прочесть так: «если a , то обязательно b , но если b , то не обязательно a ».

Эквивалентное суждение (эквиваленция) – это сложное суждение с союзом ЕСЛИ...ТО не в его условном значении (как в случае с импликацией), а в тождественном (эквивалентном). В данном случае этот союз обозначается знаком « $\Leftrightarrow$ », с помощью которого эквивалентное суждение, состоящее из двух простых суждений, можно представить в виде формулы: $a \Leftrightarrow b$ (читается «если a , то b , и если b , то a »), где a и b – это два простых суждения. Например, сложное суждение: Если число является чётным, то оно делится без остатка на 2 – представляет собой эквивалентное суждение (равенство, тождество) двух простых суждений: Число является чётным и Число делится без остатка на 2. Нетрудно заметить, что в данном случае два суждения связаны так, что из первого вытекает второе, а из второго – первое: если число чётное, то оно обязательно делится без остатка на 2, а если число делится без остатка на 2, то оно обязательно чётное.

Понятно, что в эквиваленции (в отличие от импликации) не может быть ни основания, ни следствия, так как две её части являются равнозначными суждениями.

Отрицательное суждение (отрицание) – это сложное суждение с союзом НЕВЕРНО, ЧТО, который обозначается знаком « $\neg$ ». С помощью этого знака отрицательное суждение можно представить в виде формулы: $\neg a$ (читается «неверно, что a »), где a – это простое суждение. Здесь может возникнуть вопрос: где же вторая часть сложного суждения, которую мы обычно обозначали символом b ? В записи $\neg a$, уже присутствуют два простых суждения: a – это какое-то утверждение, а знак « $\neg$ » – его отрицание. Перед нами как бы два простых суждения – одно утвердительное, другое отрицательное. Пример отрицательного суждения: Неверно, что все мухи являются птицами.

Союзов в естественном языке много, но все они по смыслу сводятся к рассмотренным пяти видам, и любое сложное суждение относится к одному из них. Например, сложное суждение: Уж полночь близится, а Германа всё нет – является конъюнкцией, потому что в нём союз A употребляется в роли соединительного союза И . Сложное суждение: Посеешь ветер, пожнёшь бурю, в котором вообще нет союза, является импликацией, так как два простых суждения в нём связаны условным союзом ЕСЛИ...ТО.

Приведём ещё несколько примеров сложных суждений с различными союзами естественного языка, которые выступают в роли нескольких рассмотренных нами логических союзов.

Живое существо является человеком только тогда, когда оно обладает мышлением (эквиваленция).

Человечество может погибнуть то ли от истощения земных ресурсов, то ли от экологической катастрофы, то ли в результате третьей мировой войны (нестрогая дизъюнкция).

Вчера он получил двойку не только по математике, но ещё и по русскому (конъюнкция).

Он не готовился к занятиям или систематически прогуливал их (нестрогая дизъюнкция).

Любое сложное суждение является истинным или ложным в зависимости от истинности или ложности входящих в него простых суждений. Ниже приведена таблица истинности всех видов сложных суждений в зависимости от всех возможных наборов истинностных значений двух входящих в них простых суждений. Таких наборов всего четыре:

- оба простых суждения истинные;
- первое суждение истинное, а второе ложное;
- первое суждение ложное, а второе истинное;
- оба суждения ложные.

Таблица 1.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \underline{\vee} b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a$
И	И	И	И	Л	И	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	
Л	И	Л	И	И	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	Л	И	И	

Как видим, конъюнкция ($a \wedge b$) истинна только тогда, когда истинны оба простых суждения, входящих в неё. Надо отметить, что конъюнкция, состоящая не из двух, а из большего количества простых суждений, также истинна только в том случае, когда истинны все входящие в неё суждения. Во всех остальных случаях она является ложной.

Нестрогая дизъюнкция ($a \vee b$), наоборот, истинна во всех случаях за исключением того, когда оба входящих в нее простых суждения ложны. Нестрогая дизъюнкция, состоящая не из двух, а из большего количества простых суждений, также ложна только тогда, когда ложны все входящие в неё простые суждения. Строгая дизъюнкция ($a \underline{\vee} b$) истинна только тогда, когда одно входящее в неё простое суждение истинно, а другое ложно. Строгая дизъюнкция, состоящая не из двух, а из большего количества простых суждений, истинна только в том случае, если истинно только одно из входящих в неё простых суждений, а все остальные ложны.

Импликация ($a \Rightarrow b$) ложна только в одном случае, – когда её основание является истинным, а следствие ложным. Во всех остальных случаях она истинна.

Эквиваленция ($a \Leftrightarrow b$) истинна тогда, когда два составляющих её простых суждения истинны, или же когда они оба являются ложными. Если одна часть эквиваленции истинна, а другая ложна, то эквиваленция ложна.

Проще всего определяется истинность отрицания: когда утверждение (a) истинно, его отрицание ($\neg a$) ложно; когда утверждение (a) ложно, его отрицание ($\neg a$) истинно.

Заключение. Итак, здравого смысла и жизненного опыта, как правило, достаточно для того, чтобы ориентироваться в различных затруднительных ситуациях. Но если к нашему здравому смыслу и жизненному опыту добавить ещё и логическую культуру, то мы от этого только выиграем. Конечно, всех проблем логика не решит, но помочь в жизни она, несомненно, может.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ummatova, Mahbuba, and Temurbek Yoqubov. "Talabalar mustaqil ishlari va uni bajarishni o'rgatish metodikasidan." // Talqin va tadqiqotlar 1.22 (2023).
2. Axmedovna, Ummatova Mahbubaxon, Gofurova Mavjuda Aliyevna, and Yakubov Temurbek G'ulomjon o'g. "The sufficiency conditions for a function that is continuous over each variable to be continuous over both variables." // Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 11.12 (2023): 1201-1204.
3. Axmedovna Ummatova Maxbubaxon, and Savriddinova Madinaxon. "Matematikani o'qitishni takomillashtirishda mantiqiy testlardan foydalanish." // Interdiscipline innovation and scientific research conference. Vol. 2. No. 15. 2023.
4. Akhmedovna Ummatova Makhbuba. "From the methodology of using nonstandard tests in the design of practical training on number theory." // Genius Repository 27 (2023): 17-22.
5. Akhmedovna Ummatova Makhbuba. "Teaching of Numerical Systems and Their Extensions." // Genius Repository 27 (2023): 23-28.
6. Ummatova Maxbubaxon Muydinjanov Davlatjon, and Nematov Bexruzбек. "Affin koordinatalar sistemasida nuqtani koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtaning koordinatalarini topish usullari." // Innovative developments and research in education 2.24 (2023): 329-333.
7. Nosirov Sobirzhon Nosirovich, and Ummatova Makhbuba Ahmedovna. "Automorphism of numerical systems." // Open Access Repository 8.12 (2022): 197-201.
8. Ummatova, M. A. "Didactical and practical functions of math class." // Galaxy International Interdisciplinary Research Journal 10.12 (2022): 259-262.
9. Ахмедовна, Умматова Махбуба. "Роль задач теории чисел при повышении математических знаний учащихся." // Ученый XXI века 1-2 (2017).

10. Умматова, М., Г. Ахмедова, and О. Махмудова. "Практическая направленность в обучении математике." // Теория и практика современных гуманитарных и естественных наук. 2014.
11. Ummatova M., and Yakubjanova M. "About the history of complex numbers."
12. Гусев Д.А. «Удивительная логика». – М.: Просвещение, 1999.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПОСРЕДСТВОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Хайитова Хилола Гафуровна,
преподаватель кафедры «Математический анализ»,
Бухарского государственного университета
xilola_xayitova@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлены одно из основных понятий дифференциального исчисления – линейные интегральные уравнения, а также некоторые методы их решения. Рассматриваются также методы решения интегральных уравнений типов Фредгольма и Вольтерры. Анализируется теорема Фредгольма и её приложения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, ядро, симметричная функция, линейное пространство.

METHOD OF DETERMINANTS IN FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

Abstract. This article presents one of the fundamental concepts of differential calculus – linear integral equations, as well as several methods for solving them. Methods for solving Fredholm and Volterra type integral equations are also considered. The Fredholm theorem and its applications are analyzed.

Key words: integral equation, kernel, symmetric function, linear space.

FREDGOLM INTEGRAL TENGLAMALARINI DETERMINANTLAR ORQALI HISOBLASH USULI

Annotatsiya. Ushbu maqolada differensial hisobning asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan chiziqli integral tenglamalar hamda ularni yechishning ayrim usullari keltirilgan. Shuningdek, Fredgolm va Volterra turidagi integral tenglamalarni yechish usullari ham ko'rib chiqilgan. Fredgolm teoremasi va uning tatbiqlari tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: integral tenglama, yadro, simmetrik funksiya, chiziqli fazo.

Введение. Интегральное уравнение вида:

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (1)$$

не содержащее искомой функции $\varphi(x)$ вне интеграла, называется интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции, x и t – действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b) , λ – числовой множитель.

Функция $K(x, t)$ называется ядром интегрального уравнения (1); предполагается, что ядро $K(x, t)$ определено в квадрате $\Omega \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в Ω , либо его разрывы таковы, что двойной интеграл:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется неоднородным; если же $f(x) = 0$, то уравнение (1) принимает вид:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (3)$$

и называется однородным.

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода дается формулой:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt, \quad (4)$$

где функция $R(x, t; \lambda)$, называемая резольвентой Фредгольма уравнения (1), определяется равенством:

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (5)$$

при условии, что $D(\lambda) \neq 0$. Здесь $D(x, t; \lambda)$ и $D(\lambda)$ – степенные ряды по λ :

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n, \quad (6)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \quad (7)$$

коэффициенты которых определяются формулами:

$$B_n(x, t) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad (8)$$

причем

$$B_0(x, t) = K(x, t).$$

Функция $D(x, t; \lambda)$ называется минором Фредгольма, а $D(\lambda)$ – определителем Фредгольма. В случае, когда ядро $K(x, t)$ ограничено или же интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt$$

имеет конечное значение, ряды (5) и (6) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ .

Резольвента

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

есть аналитическая функция от λ , кроме тех значений λ , которые являются нулями функции $D(\lambda)$. Последние суть полюсы резольвенты $R(x, t; \lambda)$.

Пример. С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

Решение. Имеем $B_0(x, t) = xe^t$. Далее,

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $B_n(x, t) = 0$. Находим коэффициенты C_n :

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0.$$

Очевидно, что и все последующие $C_n = 0$.

Согласно формулам (7) и (8) в нашем случае имеем:

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = x e^t; \quad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Таким образом,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{x e^t}{1 - \lambda}.$$

Применим полученный результат к решению интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b x e^t \varphi(t) dt = f(x) \quad (\lambda \neq 1).$$

Согласно формуле (6)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{x e^t}{1 - \lambda} f(t) dt.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получаем:

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x.$$

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). Или неоднородное линейное уравнение 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное, т.е. не равное тождественно нулю, решение.

Теорема 2. Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для сопряжённого уравнения:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt = g(x). \quad (9)$$

Однородное интегральное уравнение (2) и сопряжённое к нему уравнение:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt = 0 \quad (10)$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Замечание. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (2), то их линейная комбинация:

$$\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + C_3 \varphi_3(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x),$$

где C_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) – произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием существования решения $\varphi(x)$ неоднородного уравнения (1) во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения, т.е. функции $f(x)$, к любому решению $\psi(x)$ сопряжённого к уравнению (2) однородного уравнения (4):

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = 0. \quad (11)$$

Замечание. При выполнении условия (5) уравнение (1) будет иметь бесконечное множество решений, так как этому уравнению будет удовлетворять любая функция вида $\varphi(x) + \overline{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ – какое-нибудь решение уравнения (1), $\overline{\varphi(x)}$ – любое решение соответствующего однородного уравнения (2). Кроме того, если уравнению (5) удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то в силу линейности уравнения их разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (2).

На практике особенно важное значение имеет альтернатива Фредгольма. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1) имеет решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (2) или сопряжённое к нему уравнение (4) имеют только тривиальные решения. Отсюда в силу альтернативы следует, что уравнение (1) действительно имеет решение.

Замечания. 1) Если ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (1) симметрично, т.е.

$$K(x, t) = K(t, x),$$

то однородное сопряжением (2), соответствующим уравнению (1).

2) В случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x)$$

условие (5) ортогональности правой части этого уравнения даёт n равенств:

$$\int_a^b f(t) b_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Пример.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = e^x.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x, \quad (12)$$

где

$$C = \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13), получим:

$$C = C\lambda \int_0^1 (5t^4 - 3t^2) dt + \int_0^1 t^2 e^t dt,$$

откуда

$$C = e - 2.$$

Данное уравнение при любых λ имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \lambda(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 \varphi(t) dt = 0$$

имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Хайитова Х.Г. Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ» // Вестник науки и образования. 94:16 (2020), часть 2. С. 25-28.
2. Хайитова Х.Г., Рустамова Б.И. Метод обобщения при обучении математике в школе // Проблемы педагогики 51:6 (2020). С. 45-48.
3. Xayitova X.G'. Oliy ta'lim muassasalarida "Funksional analiz" fanini o'qitishda muammoli ta'lim metodida foydalanish // Современная психология и педагогика: проблемы, анализ и результаты, 227-230.
4. Khayitova K. The domain of convergence of the double degree series of several variables of the complex numbers // Journal of Global Research in Mathematical Archives 6:11(2019), 55-57.
5. Xayitova X.G'. O'rta maktab matematika kursida tub va murakkab sonlari o'qitishda taqqoslash metodidan foydalanish // Pedagogik mahorat. 5-son 2019-yil, 139-141.
6. Xayitova X.G'. O'rta maktabda matematika fanini o'qitishda umumlashtirish metodining afzalliklari // Pedagogik mahorat. 5-son 2020-yil, 122-1241.
7. Хайитова Х.Г. Преимущества использования метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ» // Проблемы педагогики, 2021 № 2(53). С. 46-49.
8. Xayitova X.G., Ramazonova Sh.Sh., Panjaradagi ikki o'lchamli qo'zg'alishga ega bilaplasian operatorining spektri va rezolventasi. // Science and education. Vol. 3 No. 3 (2022), 55-64.
9. Хайитова Х.Г., О числе собственных значений модели Фридрихса с двухмерным возмущением. // Наука, техника и образование. 2020. № 8 (72), 5-8.
10. Хайитова Х.Г., «Преимущества использования метода научного исследования при решении задач комбинаторики» // Научный импульс №10(100). Часть 2, Москва, 2023 г.

FUNCTIONAL ALEXANDROFF TOPOLOGY ON EXPONENTIAL SPACE

Juraev Rustam Mekhridinovich,
National University of Uzbekistan named
after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
rmjurayev@mail.ru

Abstract. In this paper, we study hyperspaces of functional Alexandroff topological spaces induced by a self-mapping. For a given functional Alexandroff space (X, τ_f) generated by a mapping $f : X \rightarrow X$, we investigate the topological properties of the hyperspace $(\exp X, \tau_{\exp f})$, where the topology is induced by the mapping $\exp f$. We compare the functional Alexandroff topology on $\exp X$ with the Vietoris topology and show that the former is strictly stronger in general. Several topological properties of the hyperspace are examined, including discreteness, connectedness, and closure structure.

Keywords: functional Alexandroff topology, hyperspace, Vietoris topology, separation axioms.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ АЛЕКСАНДРОВА НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В данной статье мы исследуем гиперпространства функциональных топологических пространств Александрова, индуцированных самим отображением. Для заданного функционального пространства Александрова (X, τ_f) , порождённого отображением $f : X \rightarrow X$, мы изучаем топологические свойства гиперпространства $(\exp X, \tau_{\exp f})$, где топология индуцирована отображением $\exp f$. Мы сравниваем функциональную топологию Александрова на $\exp X$ с топологией Виеториса и показываем, что первая в общем случае является строго более сильной. Рассматриваются различные топологические свойства гиперпространства, включая дискретность, связность и структуру замыкания.

Ключевые слова: функциональная топология Александрова, гиперпространство, топология Виеториса, аксиомы отделимости.

EKSPONENSIAL FAZODA FUNKSIONAL ALEKSANDROV TOPOLOGIYASI

Annotatsiya. Ushbu maqolada o'z-o'ziga akslantirish orqali hosil qilingan funksional Aleksandrov topologik fazolarining giperfazolari o'rganilgan. Berilgan $f : X \rightarrow X$ akslantirish yordamida hosil qilingan funksional Aleksandrov fazosi (X, τ_f) uchun, $(\exp X, \tau_{\exp f})$ giperfazosining topologik xossalari tadqiq qilingan, bu yerda topologiya $\exp f$ akslantirish orqali hosil qilingan. $\exp X$ dagi funksional Aleksandrov topologiyasi Vietoris topologiyasi bilan taqqoslangan va umumiy holda birinchisi qat'iy ravishda kuchliroq ekanligini ko'rsatilgan. Shuningdek, giperfazoning turli topologik xossalari, jumladan, diskretlik, bog'liqlik va yopilish strukturasi ko'rib chiqilgan.

Kalit so'zlar: funksional Aleksandrov topologiyasi, giperfazo, Vietoris topologiyasi, ajrimlilik aksiomalari.

Introduction. Functional Alexandroff spaces, first discussed in [6], are topological spaces whose topology is induced by some mapping. Functional Alexandroff spaces play an important role in domain theory and theory of dynamical systems. In [5], functional Alexandroff topologies, a new subclass of Alexandroff topologies on a set were introduced. Functional Alexandroff topologies have been widely studied and applied in various contexts. As demonstrated in [9], the Ulam–Kakutani–Collatz conjecture is true precisely when $\mathbb{N}$ is supercompact relative to a particular functional Alexandroff topology.

In [7] investigated partial metrizability of functional Alexandroff topological spaces. The author proved that every functional Alexandroff topology is pseudopartial metrizable and every T_0 functional

Alexandroff space is partial metrizable. The product of functional Alexandroff spaces was studied in [5], moreover, a result was obtained on functional Alexandroff topological groups that characterizes all functional Alexandroff topologies on a group making it a topological group. In [8] has been described the algebraic structure of the group $\mathfrak{Z}(X)$ for a connected homogeneous functionally Alexandroff space (X, τ_f) as a closed subgroup of $\text{Aut}(\tau)$ for a certain regular tree.

The main emphasis of this paper is placed on the exponential functor $\exp$, which plays a fundamental role in our study. In [11] has been proved that if a topological space X is an e -space, then the hyperspace $\exp X$ is also an e -space and the functor $\exp$ preserved e -continuity. The behavior of minimal tightness and functional tightness of topological spaces under the exponential functor of finite degree was investigated in [12].

Our intention in this paper is to investigate whether some topological properties of the functional Alexandroff space (X, τ_f) induced by the mapping f , are preserved in the space $(\exp X, \tau_{\exp f})$ induced via $\exp f$. In the first section, we present some preliminary terminology needed for the later development. The second section is devoted to the hyperspace of functional Alexandroff topological spaces.

Preliminaries. A functional Alexandroff topology on a set X induced by the mapping $f : X \rightarrow X$, to be the topology whose closed sets are $\{A \subseteq X : f(A) \subseteq A\}$. One can see that arbitrary unions of closed sets are closed. We denote this topology by τ_f , i.e.

$$\tau_f = \{U \subseteq X : f(X \setminus U) \subseteq X \setminus U\}.$$

We recall that under the topology τ_f , X is called the functional Alexandroff space (induced by f) [6].

It is known that the mapping $f : (X, \tau_f) \rightarrow (X, \tau_f)$ is closed continuous (see, [3]), i.e. each closed subset F of X the subsets $f(F)$ and $f^{-1}(F)$ are closed in X .

A topological space X is called Alexandroff if for any $x \in X$ there exists a smallest open neighborhood of x (in other words the intersection of any nonempty collection of open sets is open). For more details on Alexandroff spaces we refer the interested reader to [1],[4].

Proposition 1. Every functional Alexandroff topological space is Alexandroff space.

Proof. Let (X, τ_f) be a functional Alexandroff space induced by f . It is enough to prove that an arbitrary union of closed subsets of X is closed in X . Consider an arbitrary family

$$\gamma = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

of closed subsets of X . Prove that

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$$

is closed in X for each $\alpha \in \Lambda$, it follows that

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f(F_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha.$$

Proposition 1 is proved.

In a functionally Alexandroff space (X, τ_f) , we denote by $(X, \leq_f)$ the corresponding set equipped with the specialisation quasi-order. Then for any $x \in X$, the closure of x is the orbit

$$\downarrow \{x\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

and the smallest open neighborhood of x is

$$V_f(x) = \uparrow \{x\} = \{y \in X : \text{there exists } n \in \mathbb{N} \text{ such that } f^n(y) = x\},$$

where $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (see [3],[6]).

A topological space X is called homogeneous if for any points $x, y \in X$ there exists a homeomorphism $f : X \rightarrow X$ such that $f(x) = y$. If a topological space X is homogeneous, then the local topological properties of each point are preserved. For example local density (likewise: character, pseudocharacter, tightness and etc.) of any point of a considered space is constant. If (X, τ_f) is a functionally Alexandroff space generated by f and $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, we say that $x \in X$ has period p if

$$x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)$$

are distinct and $f^p(x) = x$, and we say that f has a cycle of length p or a p -cycle. A point with period 1 is a fixed point of f and is easily seen to be a minimal point in $(X, \leq_f)$.

In the following, a necessary condition for the mapping f to be surjective is given.

Proposition 2 (see [10]). If (X, τ_f) is homogeneous, then f is a surjective map.

The following proposition provides a characterization of homeomorphisms in functional Alexandroff spaces.

Proposition 3 (see [10]). Suppose (X, τ_f) is a functionally Alexandroff space and $f : X \rightarrow X$ has no cycles. Let $q : X \rightarrow X$ be a bijection. Then q is a homeomorphism if and only if $q \circ f = f \circ q$.

Hyperspace of functional Alexandroff space. Denote by $\exp X$ the set of all nonempty closed subset of topological T_1 -space X . The family B of all sets in the form of

$$O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{F \in \exp X : F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_j \neq \emptyset, j=1, 2, \dots, n\},$$

where $U_1, U_2, \dots, U_n$ is a sequence of open subsets of X , generates the topology on $\exp X$. This topology is called the Vietoris topology (further we denote this topology by τ_v). The set $\exp X$ with the Vietoris τ_v topology is called the exponential space or the hyperspace of the space X . Denote by $\exp_n X$ the set of all non-empty closed subsets of X of cardinality not greater than the natural number n , i.e.

$$\exp_n X = \{F \in \exp X : |F| \leq n\}.$$

Put

$$\exp_\omega X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n X, \exp_c X = \{F \in \exp X : F \text{ is compact in } X\}.$$

It is clear that

$$\exp_n X \subseteq \exp_\omega X \subseteq \exp_c X \subseteq \exp X$$

for any topological space X [2].

Let X be a non empty set and let $f : X \rightarrow X$ be a mapping. We define topological space (X, τ_f) .

The set of all non-empty closed subsets of X we denote by $\exp X$. For $F \in \exp X$ put

$$\exp f(F) = f(F)$$

and we define the mapping

$$\exp f : \exp X \rightarrow \exp X.$$

It is easy to show that the mapping $\exp f$ is correctly defined. Let $\tau_{\exp f}$ be a functional Alexandroff topology on $\exp X$ induced by $\exp f$. Then the following relation is hold:

$$\tau_{\exp f} = \{G \subseteq \exp X : \text{every } F \in (\exp X) \setminus G \text{ yields } f(F) \notin G\}.$$

So we have two topological spaces $(\exp X, \tau_v)$ and $(\exp X, \tau_{\exp f})$. The question arises: Are these topologies the same? The following example shows that these topologies do not coincide.

Example 1. Let $X = \{a, b, c\}$ and let $f : X \rightarrow X$ be a mapping defined by the rule

$$f(a) = f(b) = f(c) = a.$$

In this case we have $\tau_f = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{b\}, \{c\}\}$. Let's number its elements:

$$U_1 = \emptyset, U_2 = X, U_3 = \{b, c\}, U_4 = \{b\}, U_5 = \{c\}.$$

Then $\exp X = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Functional Alexandroff topology on $\exp X$ induced by $\exp f$ is

$$\tau_{\exp f} = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9\},$$

where

$$\begin{aligned} G_1 &= \emptyset, G_2 = \{\{a, c\}, X\}, G_3 = \{\{a, b\}, X\} \\ G_4 &= \{\{a, b\}, \{a, c\}\}, G_5 = \{X\}, G_6 = \{\{a, c\}\}, \\ G_7 &= \{\{a, b\}\}, G_8 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, X\}, G_9 = \exp X. \end{aligned}$$

Now we will construct Vietoris topology.

$$\begin{aligned} O\langle U_3 \rangle &= O\langle U_4 \rangle = O\langle U_5 \rangle = O\langle U_3, U_4 \rangle = O\langle U_4, U_5 \rangle = O\langle U_3, U_5 \rangle = O\langle U_3, U_4, U_5 \rangle = G_1, \\ O\langle U_2, U_4 \rangle &= O\langle U_2, U_3, U_4 \rangle = G_2, O\langle U_2, U_5 \rangle = O\langle U_2, U_3, U_5 \rangle = G_3, \\ O\langle U_2, U_4, U_5 \rangle &= O\langle U_2, U_3, U_4, U_5 \rangle = G_5, O\langle U_2, U_3 \rangle = G_8, O\langle U_2 \rangle = G_9. \end{aligned}$$

The last case we have $\tau_V = \{G_1, G_2, G_3, G_5, G_8, G_9\}$. Therefore $\tau_{\exp f} = \tau_V$.

Theorem 1. Functional Alexandroff topology on $\exp X$ induced by $\exp f$ is stronger than the Vietoris topology on $\exp X$.

Proof. Let $U_1, U_2, \dots, U_n$ be open sets in (X, τ_f) . It is enough to show that

$$O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \in \tau_{\exp f}.$$

Take an arbitrary element $F \in (\exp X) \setminus O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. In this case we have $F \not\subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ or there

exists $j \in \overline{1, n}$ such that $F \cap U_j = \emptyset$. Firstly we consider a case $F \not\subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Then

$$F \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset \text{ implies } f(F) \cap f(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset.$$

Since U_i is open in X for all $j \in \overline{1, n}$ it follows the set $X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ is closed and

$$f(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i. \text{ Therefore } f(F) \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \neq \emptyset. \text{ It means that } f(F) \not\subset \bigcup_{i=1}^n U_i, \text{ i.e.}$$

$$f(F) \notin O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle.$$

Now we consider the case $F \cap U_j = \emptyset$ for some $j \in \overline{1, n}$. Since F is a closed subset of X we have

$$f(F) \subseteq F \text{ and } f(F) \cap U_j = \emptyset.$$

So $f(F) \notin O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$. Theorem 1 is proved.

Theorem 2. Let (X, τ_f) be a topological space induced by $f: X \rightarrow X$. If (X, τ_f) is T_1 -space, then $(\exp X, \tau_{\exp f})$ is discrete topological space.

Proof. Let (X, τ_f) be a T_1 -space. Then for every point $x \in X$ a subset $\{x\}$ is closed in X , i.e.

$$f(\{x\}) \subseteq \{x\} \text{ yields } f(x) = x. \text{ We have } f \equiv id_X. \text{ In this case } \exp f \equiv id_{\exp X}. \text{ We prove that for each}$$

$F \in \exp X$ a subset $\{F\}$ is open in $(\exp X, \tau_{\exp f})$. Since $\exp f$ is identity mapping it follows that

$$\exp f(\exp X \setminus \{F\}) = \exp X \setminus \{F\}.$$

Therefore $\exp X \setminus \{F\}$ is closed in $(\exp X, \tau_{\exp f})$. Hence $\{F\}$ is open subset of $(\exp X, \tau_{\exp f})$.

Theorem 2 is proved.

REFERENCES:

1. Alexandroff, P. *Discrete Raume*, Mat. Sb 44 (1937), No. 3, 501--519.
2. Fedorchuk, V. V. *Covariant functors in a category of compacta, absolute retracts and Q-manifolds*, Uspekhi Matematicheskix Nauk, 36 (1981), No 3, 177-195.
3. Echi, O. *The categories of flows of Set and Top*, Topology and its Applications, 159 (2012), No 9, 2357-2366.

4. Arenas, F. G. Alexandroff spaces, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 68 (1999), No. 1, 17-25.
5. Shirazi, F. A. Z.; Golestani, N. More about functional Alexandroff topological spaces, *Scientia Magna* 6 (2010), No. 4, 64-69.
6. Shirazi, F. A. Z.; Golestani, N. Functional Alexandroff spaces, *Haset. J. Math. Stat.* 40:2 (2011), 515-522.
7. Pajoohesh, H. T_0 -functional Alexandroff topologies are partial metrizable, *Appl. Gen. Topol.* 25 (2024), No. 2, 305-319.
8. Lazaar, S.; Richmond, T.; Sabri, H. The autohomeomorphism group of connected homogeneous functionally Alexandroff spaces, *Comm. Algebra* 47 (2019), No 9, 3818-3829
9. Guale, A.; Vielma, J. A topological approach to the Ulam-Kakutani-Collatz conjecture, *Topology Appl.* 256 (2019), 1-6.
10. Lazaar, S.; Richmond, T.; Sabri, H. Homogeneous functionally Alexandroff spaces, *Bull. Aust. Math. Soc.* 97(2) (2018), 331–339.
11. Beshimov, R. B.; Georgiou, D. N.; Juraev, R. M.; Manasipova, R. Z., Sereti, F. Some topological properties of e -space and description on τ -closed sets, *Filomat* 39:8 (2025), 2625-2637.
12. Georgiou, D. N.; Mamadaliev, N. K.; Juraev, R. M. A note on functional tightness and minitightness of space of the G -permutation degree, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 64 (2023), 97-108.

FINDING THE LOCAL PARAMETRIC EXPANSION OF A THREE-DIMENSIONAL
NONLINEAR ALGEBRAIC SYSTEM AROUND SMALL SINGULARITIES

Soleev Akhmadjon Soleevich,

Department of Algebra and Geometry, Samarkand State University
named after Sharof Rashidov, Samarkand 140104, Uzbekistan
asoleev@yandex.ru

Kurdashov Shakhridin Makhmud ugli,

Department of Algebra and Geometry, Samarkand State University
named after Sharof Rashidov, Samarkand 140104, Uzbekistan
9223shahriddin@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to the problem of finding local parametric representations of nonlinear algebraic systems near singular points. At points where the Jacobian matrix becomes degenerate, the implicit function theorem cannot be applied directly. Therefore, a new approach combining the methods of Newton polyhedra, Minkowski sums, and power geometry is proposed for studying the local properties of the solution set. The effectiveness of the proposed method in describing the local structure of solutions near singularities and obtaining explicit parametrizations is demonstrated through illustrative examples.

Keywords: nonlinear algebraic systems, singular points, Newton polyhedra, power geometry, Minkowski sum, Puiseux series.

НАХОЖДЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В
ОКРЕСТНОСТИ МАЛЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Аннотация. Данная работа посвящена задаче нахождения локального параметрического вида системы нелинейных алгебраических уравнений в окрестности особых точек. В точках вырождения матрицы Якоби (якобиана) теорема о неявной функции не может быть применена напрямую. Поэтому для изучения локальных свойств множества решений предлагается новый метод, сочетающий в себе методы многогранника Ньютона, суммы Минковского и степенной геометрии. На примерах показано, что данный метод эффективен для описания локальной структуры решений и получения точной параметризации в окрестности особенностей.

Ключевые слова: алгебраические кривые, особые точки, многогранник Ньютона, степенная геометрия, сумма Минковского, ряд Пуассона.

UCH O'LCHAMLI NOCHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI KICHIK
MAXSUSLIKLAR ATROFIDA LOKAL PARAMETRIK YOYILMASINI TOPISH

Annotatsiya. Ushbu ishda nochiziqli algebraik tenglamalar sistemasining maxsus nuqtalari atrofida lokal parametrik ko'rinishini topish masalasiga bag'ishlangan. Yakobian matritsasi degeneratsiyaga uchraydigan nuqtalarda oshkormas funktsiya haqidagi teorema bevosita qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun yechimlar to'plamining lokal xossalari o'rganishda Nyuton ko'pyoqligi, Minkovskiy yig'indisi va darajali geometriya metodlarini uyg'unlashtiruvchi yangi metod taklif etiladi. Ushbu metod orqali maxsusliklar atrofida yechimlarning lokal tuzilishini tavsiflash va aniq parametrizatsiyani olishda samarali ekanligi misollar orqali ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: algebraik chiziqlar, maxsus nuqtalar, Nyuton ko'pyoqligi, darajali geometriya, Minkovskiy yig'indisi, Puiseux qatori.

Introduction. Modern problems in mathematics, physics, and engineering are often described by systems of nonlinear algebraic equations. In particular, the study of complex surfaces defined in three-dimensional space, trajectories of spatial mechanisms, and thermodynamic equilibrium states directly requires the solution of such systems. However, one of the main obstacles in studying nonlinear algebraic systems is the presence of singular points. At singular points, the Jacobian of the system becomes zero, causing the classical implicit function theorem to lose its validity. This leads to bifurcation of solutions, non-existence of solutions, or infinitely many solutions. In the three-dimensional case, reducing such singularities to a local parametric form is crucial for understanding the behavior of the system in critical regimes and for stability analysis. Therefore, developing alternative methods that provide explicit parametric representations of solution branches is of great importance. Methods such as the Newton polyhedron [1], Minkowski sum [2], and Bruno's power geometry [3-5] provide effective tools for identifying leading terms near singularities and simplifying algebraic systems. In recent years, Soleev [3, 6-7] and Batkhin [5, 8] have applied Newton

polyhedron and power geometry methods to algebraic equations and proposed algorithmic approaches for local parametrization problems.

In this work, based on these approaches, a new algorithmic method is proposed for computing local parametric expansions of algebraic systems near their singularities. This method is widely applicable to solving algebraic problems arising in theoretical physics. In some cases, the practical application of the proposed algorithm is limited to hand calculations; however, this approach enables the automation of singularity analysis. All computations are performed using the Maple system. In the study of singularities of polynomial systems, the notions of the support and the Newton polyhedron are fundamental. In the study of local properties of algebraic curves and higher-dimensional algebraic structures, Newton polyhedra, Puiseux series, and power geometry methods play a central role. This direction was further developed by Sathaye, Kouchnirenko, Khovanskii, and Teissier.

Kouchnirenko estimated the complexity of singular points in terms of degree, while Khovanskii obtained bounds for the number of solutions of algebraic systems using Newton polyhedra. Teissier studied singularity structures using gradient systems and linear combinations of gradients. Kollár systematically developed the theory of resolution of singularities in a broad and comprehensive framework. The problem of determining singular points of rational algebraic curves and constructing their local parametric representations was effectively addressed by Chen using symbolic computation.

Bernardi analyzed singular points of rational plane curves using projection techniques and symbolic methods. Canino applied the Newton-Puiseux algorithm to identify singular points of plane curves. These approaches provide a modern algorithmic framework for local parametric expansions and singularity analysis. All the above methods are reflected in the works of Bruno, Soleev, and Batkhin, which form the basis of modern power geometry approaches to singularity analysis and local parametrization of algebraic systems [3-9].

This work is a natural continuation of the studies presented in [11–13]. We propose a method for computing local parametric expansions near small singularities of the following system of nonlinear algebraic equations to an arbitrary degree of accuracy

$$f_i(x) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, m = n - 1) \quad (1)$$

The proposed method consists of the following key steps [11-13]:

Step 1. Determination of the support sets $D(f_i)$ for each $f_i(x)$;

Step 2. Computation of the Minkowski sum for the Newton polyhedral $\Gamma(f_i)$;

Step 3. Construction of the common Newton-Minkowski polyhedron $\Gamma(f)$ for the system;

Step 4. Identification of all faces $\Gamma_j^{(d)}$ of the Newton-Minkowski polyhedron $\Gamma(f)$;

Step 5. Selection of points corresponding to each face $\Gamma_j^{(d)}$;

Step 6. Construction of a system of linear inequalities for a normal vector P ;

Step 7. Solution of the obtained system of linear inequalities using the Motzkin-Burger algorithm, which yields the generators of the normal cone $K_j^{(d)}$;

Step 8. Extraction and analysis of the reduced systems corresponding to the obtained normal cone $K_j^{(d)}$;

Step 9. Application of degree transformations;

Step 10. Recursive construction of a formal parametric expansion, followed by successive transformations back to the original variables to obtain a local parametric solution of the form $x_i(t)$. Finally, the implicit function theorem is applied where necessary.

In this setting, the cone of interest is $K = \{p < 0\}$, and the local parametric expansions of the algebraic curve near singularities $x^{(0)}$ are described and fully analyzed using the following system of two nonlinear algebraic equations in three variables

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

where,

$$f_1 = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_1 x_2^2 x_3, \quad f_2 = x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3 + x_2 x_3$$

Consequently, for system (1), using the supports of f_1 and f_2 , the corresponding Newton polyhedra can be represented as shown in Fig.1.

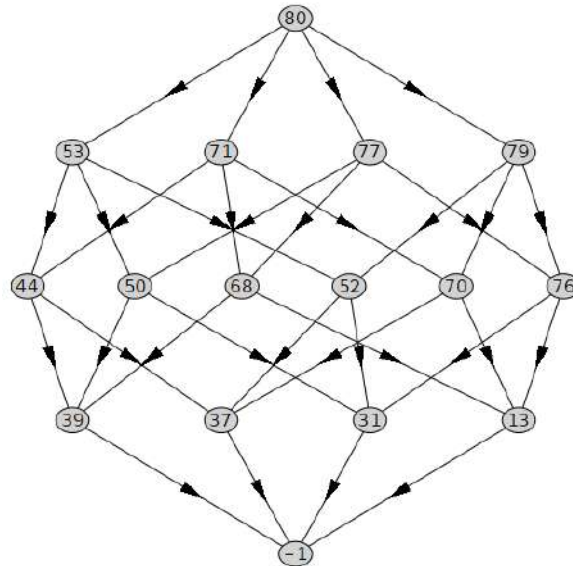


Figure 1. Newton polyhedra $\Gamma(f_1)$ and $\Gamma(f_2)$

Now we compute the Minkowski sum of the support sets of the polynomials f_1 and f_2 , and construct the corresponding Newton-Minkowski polyhedron. The resulting geometric structure is illustrated in Fig.2. In this representation, the full three-dimensional polyhedron is located at the top level, while the lower levels correspond respectively to two-dimensional faces, edges, vertices, and, at the lowest level, the empty set. This hierarchical structure reflects the combinatorial geometry of the Newton-Minkowski construction and plays a key role in identifying dominant terms and singular behavior of the system near the origin.

Above, the process of constructing a new Newton-Minkowski polyhedron for the polynomial system using the Minkowski sum and preparing it for local parametric analysis is illustrated. Since computing all geometric elements of a three-dimensional polyhedron (vertices, edges, and faces) manually is highly complicated, Maple packages were used. With the aid of Maple [10], the faces of the polyhedron were analyzed, and all possible two-dimensional faces were determined. As a result, the normal vectors corresponding to all two-dimensional faces of the polyhedron are represented as follows

$$N_{11439} = \left[-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], N_{17253} = [-1, -1, -2], N_{17901} = \left[-1, -\frac{3}{2}, -1\right], N_{39547} = [0, 0, 1],$$

$$N_{39989} = [-1, -2, -1], N_{41013} = [-1, -2, -3], N_{99897} = [1, 1, 1], N_{119577} = [0, 1, 0],$$

$$N_{123261} = [-1, -1, -3], N_{131237} = [0, 1, 1], N_{137999} = [1, 0, 1].$$

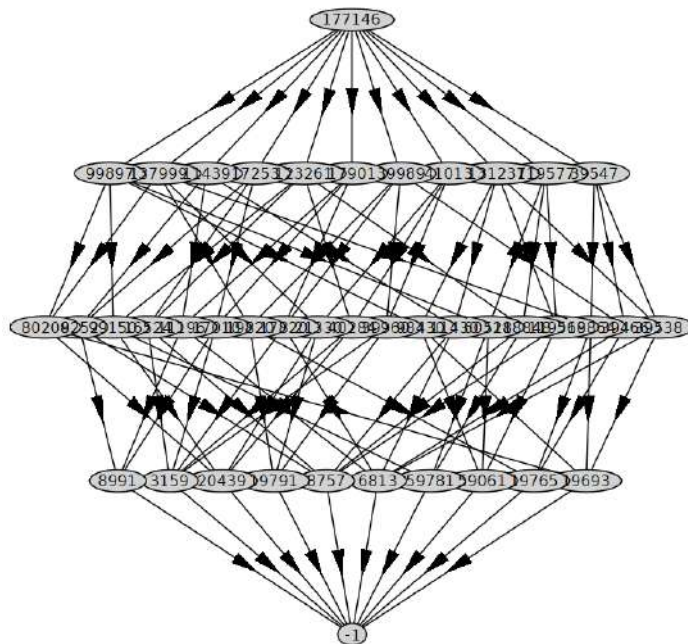


Figure 2. Newton-Minkowski polyhedron

Although geometrically many normal vectors exist, not all of them lead to physically or mathematically meaningful solutions. After the selection process, it was determined that only two normal directions belong to the cone of the problem

$$N_{39989} = [-1, -2, -1] \text{ and } N_{123261} = [-1, -1, -3]$$

The main property of the selected normals is that the corresponding reduced systems (3) and (4) possess nonzero, i.e., nontrivial, solutions. For the remaining normals, the system may lead only to the trivial zero solution or to contradictions. For the normal vector N_{39989} , the reduced system takes the form

$$\begin{cases} \hat{f}_1 tr39989 = (x_1 + x_3)(x_1^4 - x_1^3 x_3 + x_1^2 x_3^2 - x_1 x_3^3 + x_3^4) \\ \hat{f}_2 tr39989 = x_3 (x_1^3 + x_2) \end{cases} \quad (3)$$

and for the normal vector N_{123261} ,

$$\begin{cases} \hat{f}_1 tr123261 = (x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + x_2^4) \\ \hat{f}_2 tr123261 = x_2 (x_1^3 + x_3) \end{cases} \quad (4)$$

These reduced systems form the basis for constructing local parametric expansions near the singular points of the original algebraic system. Based on the geometric structure of the reduced systems (3) and (4), the following unimodular matrices α_1 and α_2 can be chosen

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

For system (3), the degree transformation corresponding to the matrix α_1 is given by

$$y_1 = \frac{x_1}{x_3}, y_2 = \frac{x_2}{x_1^2}, y_3 = \frac{1}{x_3} \quad (5)$$

while the inverse transformation takes the form

$$x_1 = \frac{y_1}{y_3}, x_2 = \frac{y_1^2 y_2}{y_3^2}, x_3 = \frac{1}{y_3} \quad (6)$$

After applying the degree transformation (6) together with the corresponding reductions, the reduced system (3) becomes

$$\begin{cases} \hat{g}_1 = y_1^5 + 1 \\ \hat{g}_2 = y_1^2 (y_2 + 1) \end{cases} \quad (7)$$

As a result, the complete solution of system (7) is

$$Y_1^0 = \{y_1^0 = -1, y_2^0 = -1\}$$

These results demonstrate the possibility of determining parametric solutions of the algebraic system and analyzing them through Newton polyhedra. The root Y_1^0 corresponds to one branch of the desired algebraic curve. After applying the degree transformation (6), performing reductions similar to those in (7), and introducing the substitution $y_3 = \frac{1}{t}$ system (2) is transformed into the following system

$$\begin{cases} g_1 = \frac{y_1^{10} y_2^5}{y_3^5} + \frac{y_1^5 y_2^2}{y_3} + y_1^5 + 1 \\ g_2 = \frac{y_1^3 y_2}{y_3^2} + \frac{y_1^2 y_2}{y_3^2} + y_2 + 1 \end{cases} \quad (8)$$

Substituting

$$y_1 = -1 + z_1, y_2 = -1 + z_2, y_3 = z_3$$

into system (8), we obtain the following system

$$\begin{cases} h_1 = t^5 z_1^{10} z_2^5 + \dots + t z_2^2 + 10 z_1^3 + 5 t z_1 + 2 t z_2 - 10 z_1^2 - t + 5 z_1 \\ h_2 = t^2 z_1^3 z_2 - t^2 z_1^3 - 2 t^2 z_1^2 z_2 + 2 t^2 z_1^2 + t^2 z_1 z_2 - t^2 z_1 + z_2 \end{cases} \quad (9)$$

For system (9), the computations yield the following first terms of the expansion

$$z_1(t) = 0.0137149328736646 + 0.129074407852671 \cdot t + \dots,$$

$$z_2(t) = -0.0268262083952215 + 0.0863511823504431 \cdot t + \dots.$$

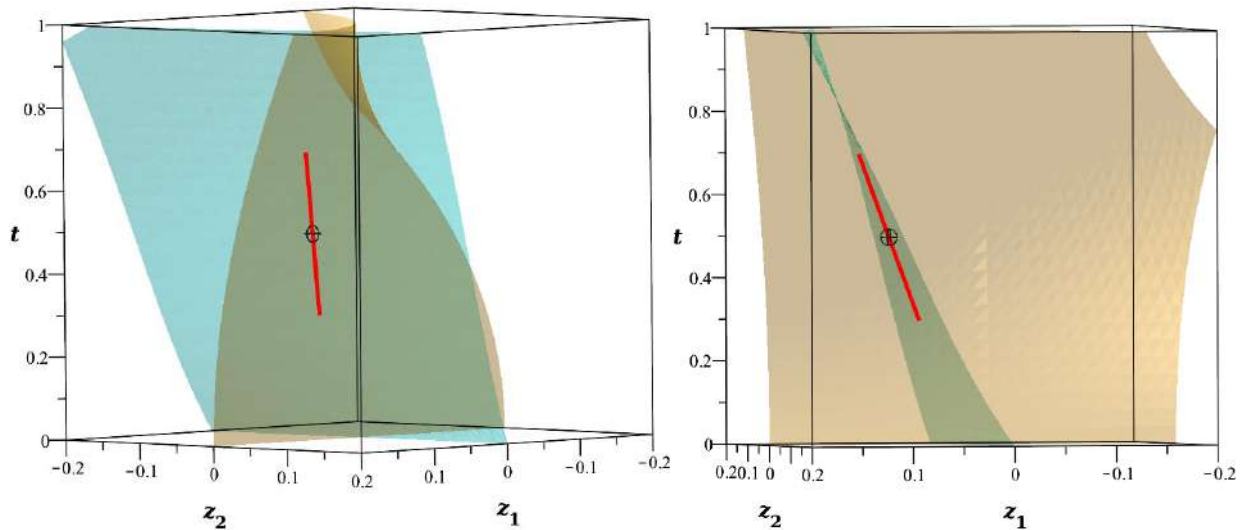


Figure 3. Curve $h(z_1, z_2, t)$

The complicated nonlinear algebraic system was successfully linearized, and its local behavior near the point $t = 0,5$ was completely analyzed through graphical representations of the parametric expansions. The intersection curve of the surfaces h_1 and h_2 in space represents the actual solution trajectory of the system. As shown in the graph, the computed red straight line coincides exactly with this trajectory at the point $t = 0,5$, confirming the high accuracy of the obtained local parametric expansion (Fig.3). Now, returning step by step to the original coordinates, we obtain

$$x_1(t) = 0.1290744079 (t - 7.641213182) t + \dots,$$

$$x_2(t) = 0.001438628207 (t - 7.641213182)^2 (t - 11.89128139)^2 t + \dots, x_3(t) = t$$

These parametric expressions describe the local branch of the solution of the original nonlinear algebraic system near the singular point.

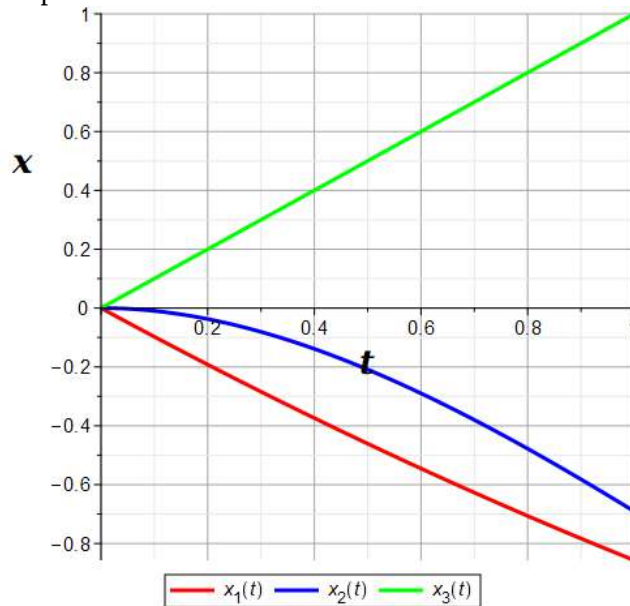


Figure 4. Curve $f(x_1, x_2, x_3)$

The complicated nonlinear system was successfully linearized, and its local dynamics near the point $t=0,5$ were determined. The intersection of the surfaces shown in the graph confirms the geometric correctness of the computed parametric expansions.

Result. The local parametric expansion of a nonlinear algebraic system near small singularities has been analyzed using the proposed method. For each equation, the Newton polyhedron was constructed, and their Minkowski sum was used to obtain the global Newton-Minkowski polyhedron of the system. The normal cone of this polyhedron allowed the identification of the leading reduced system. Using the reduced system, the local structure of solutions, their branches, and parametric expansions were determined. It was

shown that, through degree transformations, the solutions near small singularities can be obtained step by step. Thus, the obtained parametric expansions and dynamic analysis not only simplify the mathematical model of the complex system but also provide insight into the stabilization of its future behavior.

Conclusion. In this work, an algorithm based on Newton-Minkowski and power geometry methods is developed, which enables the computation of local parametric expansions of nonlinear algebraic systems near small singularities to an arbitrary degree of accuracy. The obtained results can be applied to the analysis of high-degree and multivariable algebraic systems, as well as to parametrization problems and the improvement of computer algebra methods. The solution of system (4) is carried out in the same manner as for system (3).

REFERENCES:

1. Newton, I. *Method of Fluxions*. – London, 1711.
2. Minkowski, H. *Geometrie der Zahlen*. – Leipzig: B.G. Teubner, 1896. 240 p.
3. Bruno, A. D., Soleev, A. S. Local uniformization of branches of a space curve and Newton polyhedra *Algebra i Analiz*. – 1991. Vol. 3, No. 1. – P. 67–102.
4. Bruno, A. D. *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations*. – Elsevier, 2000.
5. Bruno, A. D., Batkhin, A. B. Asymptotic forms of solutions to systems of nonlinear partial differential equations // *Universe*. – 2023.
6. Soleev, A. Power geometry in solving nonlinear problems // *Uzbek Mathematical Journal*. – 2020. – No. 3. – P. 120–127.
7. Soleev, A. Newton Polyhedron in local resolution of singularities of an algebraic curve. *Global and Stochastic Analysis* Vol. 8 No. 3 (December, 2021) Special Issue: Modern Stochastic Models and Problems of Actuarial Mathematics.
8. Batkhin, A.B. A real variety with boundary and its global parameterization. *Program. Comput. Softw.* 2017, 43, 75–83.
9. Bruno, A. D., Azimov, A. A. Local parametrization of algebraic curves using Newton polyhedra. *Axioms*, 12 (2023).
10. Thompson, I. *Understanding Maple*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
11. Kurdashov, Sh. Finding the branches of an algebraic curve in three-dimensional space // *AIP Conference Proceedings*. – 2025. – Vol. 3377. – 030011. – DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0299626>
12. Soleev A, Kurdashov Sh., Algorithm for computing the Newton-Minkowski polyhedron, *Proceedings of the Republican Scientific-Practical Conference “Digital Transformation: Perspectives of Telecommunications, Artificial Intelligence, and Innovative Technologies”* (Samarkand, May 12–13, 2026), Tashkent University of Information Technologies Named After Muhammad Al-Khwarizmi Samarkand Branch, 2026, vol. II.
13. Kurdashov Sh., Solving an algebraic equation., «Advanced Science and Technology» Turin Polytechnic University in Tashkent, April 22-23, 2025, 141-142.

BO'LAKLI UZLUKSIZ ARGUMENTLI NOCHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMA
UCHUN KOSHI MASALASI

Xolikov Suyunjon Xamroqul o'g'li,

Navoiy davlat universiteti Matematika kafedrası dotsenti

xolikovsuyunjon@gmail.com

Keldiyorova Mohinur Nuritdin qizi,

Osiyo xalqaro universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada butun qism funksiyasi orqali aniqlanuvchi bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglama uchun Koshi masalasi tadqiq etiladi. Qaralayotgan tenglamada noma'lum funksiya $y(t)$ ning uzluksiz argumentdagi qiymati bilan bir qatorda $y([t])$ ko'rinishidagi bo'lakli uzluksiz argumentdagi qiymati ham ishtirok etadi. Bu holat masalani klassik oddiy differensial tenglamalardan farqli ravishda bo'laklar bo'yicha tahlil qilish zaruratini yuzaga keltiradi. Maqolada tenglama har bir $[n, n + 1)$ oraliqda oddiy differensial tenglamaga keltirilib, yechimning aniq formulasi hosil qilinadi. Shuningdek, yechimning butun nuqtalardagi qiymatlari uchun rekurrent munosabat chiqariladi. Topilgan yechimning berilgan tenglama va boshlang'ich shartni qanoatlantirishi bevosita tekshiriladi.

Kalit so'zlar: bo'lakli uzluksiz argument, Bernulli differensial tenglamasi, Koshi masalasi, rekurrent formula.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С
КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

Аннотация. В данной статье исследуется задача Коши для дифференциального уравнения с кусочно-непрерывным аргументом, задаваемым функцией целой части. В рассматриваемом уравнении наряду со значением неизвестной функции $y(t)$ при непрерывном аргументе участвует также значение $y([t])$ при кусочно-непрерывном аргументе. Это обстоятельство отличает данную задачу от классических обыкновенных дифференциальных уравнений и приводит к необходимости покомпонентного анализа решения на соответствующих промежутках. В статье уравнение на каждом промежутке $[n, n + 1)$ сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, для которого получена явная формула решения. Кроме того, выведено рекуррентное соотношение для значений решения в целых точках. Непосредственно проверяется, что найденное решение удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению и начальному условию.

Ключевые слова: кусочно-непрерывный аргумент, дифференциальное уравнение Бернулли, задача Коши, рекуррентная формула.

THE CAUCHY PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH
PIECEWISE CONTINUOUS ARGUMENT

Abstract. In this paper, the Cauchy problem for a differential equation with piecewise continuous argument defined by the greatest integer function is investigated. In the considered equation, together with the value of the unknown function $y(t)$ at the continuous argument, the value $y([t])$ at the piecewise continuous argument is also involved. This feature distinguishes the problem from classical ordinary differential equations and requires a piecewise analysis of the solution. The equation is reduced to an ordinary differential equation on each interval $[n, n + 1)$, and an explicit formula for the solution is obtained. Furthermore, a recurrent relation for the values of the solution at integer points is derived. It is directly verified that the obtained solution satisfies both the given differential equation and the initial condition.

Keywords: piecewise continuous argument, Bernoulli differential equation, Cauchy problem, recurrent formula.

Kirish. Diskret va uzluksiz jarayonlarning o'zaro bog'liqligini ifodalovchi differensial tenglamalar zamonaviy differensial tenglamalar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Ko'plab amaliy masalalarda jarayonning o'zgarishi faqat ayni vaqtdagi holatga emas, balki uning ma'lum diskret vaqt

nuqtalaridagi qiymatlariga ham bog'liq bo'ladi. Bunday holatlar biologik tizimlar, iqtisodiy modellar, texnik boshqaruv jarayonlari, impulsli sistemalar, raqamli signallarni qayta ishlash va diskret kuzatuv asosida boshqariladigan dinamik sistemalarda uchraydi. Shu nuqtayi nazardan, argumenti butun qism funksiyasi orqali berilgan differensial tenglamalar alohida ahamiyatga ega. Bunday tenglamalarda noma'lum funksiya bir vaqtning o'zida ham uzluksiz argumentda, ham diskret xarakterga ega bo'lgan argumentda qatnashadi. Natijada tenglama oddiy differensial tenglamalar va ayirmali tenglamalar orasidagi bog'lovchi matematik model sifatida namoyon bo'ladi.

Bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar nazariyasining shakllanishida K. L. Cooke va J. Wiener ishlari muhim rol o'ynaydi. Ularning bo'lakli uzluksiz argumentli, kechikishli tenglamalarga bag'ishlangan ishida bunday tenglamalarning boshlang'ich qiymat masalalari, yechimning mavjudligi va dinamik xossalari o'rganilgan. Bu ish keyingi tadqiqotlar uchun asosiy nazariy manbalardan biri bo'lib xizmat qiladi.

[2] ishda S.M. Shah va J. Wiener tomonidan ilgarilovchi argumentli bo'lakli-o'zgaras differensial tenglamalar o'rganilgan. Ular bunday tenglamalar impulsli tenglamalar, yuklangan tenglamalar va ayniqsa, ayirmali tenglamalar bilan uzviy bog'liqligini ko'rsatgan. Mazkur yondashuv bo'lakli argumentli tenglamalarning har bir birlik oraliqda uzluksiz dinamikaga, oraliqlar chegarasida esa diskret dinamikaga ega ekanini asoslab beradi. [3] ishda A.R. Aftabizadeh, J. Wiener va J. M. Xu ishlarida bo'lakli-o'zgaras argumentli kechikuvchi tenglamalar uchun tebranish va davriy yechimlar tadqiq qilingan. Bu yo'nalish yechimlarning sifat xossalari o'rganishda muhim bo'lib, rekurrent bog'lanishlardan kelib chiqadigan davriylik, tebranish va barqarorlik masalalariga e'tibor qaratadi. [4] ishda J. Wiener va K. L. Cooke tomonidan sistemalar uchun bo'lakli-o'zgaras argumentli differensial tenglamalarda tebranish hodisalari tekshirilgan. Bu ishlar bitta skalyar tenglama bilan cheklanib qolmay, ko'p o'lchamli sistemalarda ham bo'lakli argumentning dinamikaga ta'siri muhim ekanini ko'rsatadi. [5] ishda J. Wienerning funksional differensial tenglamalarning umumlashgan yechimlari, jumladan, bo'lakli-uzluksiz argumentli tenglamalar tizimli bayon qilingan. Bu ishda bo'lakli argument tipidagi tenglamalar nazariy, hisoblash va amaliy jihatdan muhim yo'nalish sifatida ko'rsatiladi.

[6]-[8] ishlarda M. U. Akhmet tomonidan bo'lakli uzluksiz argumentli tenglamalarning umumlashgan turlari, dinamik sistemalar hamda gibrid uzluksiz-diskret modellar chuqur tadqiq qilingan. Bu ishlar klassik [t] tipidagi argumentdan kengroq sinflarga olib chiqadi.

Shuningdek, [9]-[11] ishlarda avftorlarning ishlari funksional differensial tenglamalar, kechikuvchi argumentlar, tebranish va ayirmali tenglamalar nazariyasini rivojlantirishda muhim manba hisoblanadi.

Mavjud adabiyotlarda bo'lakli uzluksiz argumentli differensial tenglamalar asosan chiziqli, kechikuvchi, ilgarilovchi yoki sistemalar ko'rinishida o'rganilgan. Biroq Bernulli tipidagi maxsus nochiziqli tenglamalarga bo'lakli-o'zgaras argumentni kiritish orqali hosil bo'ladigan rekurrent struktura alohida tadqiqot obyekti sifatida yetarlicha ochib berilmagan.

Ushbu ishda qaralayotgan tenglama klassik Bernulli tenglamasidan farq qiladi. Klassik Bernulli tenglamasida koeffitsiyentlar odatda t ga yoki $y(t)$ ga bog'liq bo'lsa, bu yerda $y([t])$ hadining mavjudligi sababli har bir $[n, n + 1)$ oraliqda $y(n)$ qiymati parametr sifatida qatnashadi. Natijada uzluksiz yechim formulasidan tashqari, $y_n = y(n)$ qiymatlari uchun maxsus rekurrent formula hosil bo'ladi. Masalaning dolzarbligi shundaki, bunday tenglamalar uzluksiz Bernulli dinamikasi bilan diskret kvadratik iteratsiyani bog'laydi. Bu esa yechimning mavjudligi, yagonaligi, chegaralanganligi, o'sishi yoki so'nishi kabi masalalarni nafaqat differensial tenglama orqali, balki rekurrent tenglama yordamida ham o'rganish imkonini beradi.

Mazkur tadqiqotning yana bir muhim jihati shuki, yechim har bir bo'lakda aniq formula orqali yoziladi. Bu formula asosida y_n ketma-ketlik uchun rekurrent munosabat olinadi va keyinchalik yechimning bahosi chiqariladi. Bunday yondashuv maqolani nazariy jihatdan ham, amaliy hisoblashlar nuqtayi nazaridan ham ahamiyatli qiladi.

Quyidagi Koshi masalasini qaraymiz:

$$\begin{cases} y'(t) + ay(\beta(t))y(t) = by^2(t), \\ y(0) = A. \end{cases} \quad (1)$$

Bunda $a, b, A \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $0 \leq b \leq a$, $A > 0$, $\beta(t) = [t]$ esa t sonining butun qismi.

Agar $t \in [n, n + 1)$ bo'lsa, u holda $[t] = n$, $y([t]) = y(n)$.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$c_n = y(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

U holda har bir $[n, n + 1)$ oraliqda (1)-tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y'(t) + ac_n y(t) = by^2(t), \quad y(n) = c_n. \quad (2)$$

Demak, Koshi masalasi oraliqlar bo'yicha ketma-ket yechiladigan masalaga keltiriladi. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

fiksirlangan bo'lsin va $t \in [n, n + 1)$ oraliqda $c_n = y(n)$ o'zgarmas son sifatida qaraladi. (2) tenglamani yechamiz:

$$y'(t) + ac_n y(t) = by^2(t).$$

Quyidagi almashtirishni kiritamiz:

$$z(t) = \frac{1}{y(t)}, \quad (3)$$

$$z'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)},$$

(2) tenglamani $y^2(t)$ ga bo'lamiz:

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} + ac_n \frac{1}{y(t)} = b,$$

$$z'(t) - ac_n z(t) = -b. \quad (4)$$

hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama. Boshlang'ich shart

$$z(n) = \frac{1}{y(n)} = \frac{1}{c_n} \quad (5)$$

ko'rinishga ega.

(4) tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$z(t) = \frac{b}{ac_n} + Ce^{ac_n t}.$$

(5) shartdan

$$\frac{1}{c_n} = \frac{b}{ac_n} + Ce^{ac_n n}$$

kelib chiqadi. Bundan C topsak:

$$C = \frac{1 - \frac{b}{a}}{c_n} e^{-ac_n n}.$$

$$z(t) = \frac{1}{c_n} \left[\left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{ac_n(t-n)} + \frac{b}{a} \right].$$

Demak, (3) tenglikka ko'ra

$$y(t) = \frac{c_n}{\left(1 - \frac{b}{a}\right) e^{ac_n(t-n)} + \frac{b}{a}}, \quad t \in [n, n + 1). \quad (6)$$

Yechimning keyingi oraliqdagi boshlang'ich qiymatini topish uchun

(6) tenglikdan $t = n + 1$ deb olamiz. U holda

$$c_{n+1} = y(n + 1)$$

va

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_n} + \frac{b}{a}}, \quad c_0 = A. \quad (7)$$

bu rekurrent formula tugun nuqtalaridagi qiymatlarni ketma-ket aniqlaydi.

$$c_1 = \frac{c_0}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_0} + \frac{b}{a}},$$

$$c_2 = \frac{c_1}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_1} + \frac{b}{a}},$$

... ..

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_{n-1}} + \frac{b}{a}}.$$

Bundan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$c_{n+1} = \Phi(c_n)$$

$$c_n = \Phi^n(A)$$

$$\Phi(x) = \frac{x}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ax} + \frac{b}{a}}.$$

Yuqoridagilarni e'tiborga olsak (1) masalaning umumiy yechimi quyidagicha aniqlanadi.

$$y(t) = \frac{\Phi^{[t]}(A)}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{a\Phi^{[t]}(A)(t-[t])} + \frac{b}{a}}. \quad (8)$$

Endi (8) ko'rinishida aniqlangan yechimni masalani qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

Avvalo, $n = 0$ uchun $t = 0$ bo'lganda $c_0 = A$ va

$$y(0) = \frac{c_0}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)e^0 + \frac{b}{a}} = \frac{A}{1 - \frac{b}{a} + \frac{b}{a}} = A.$$

Demak, boshlang'ich shart bajariladi.

Endi quyidagi belgilaymiz:

$$E(t) = \left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_nt} + \frac{b}{a} \quad (9)$$

U holda

$$E'(t-n) = ac_n \left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{ac_n(t-n)}$$

Endi $E(t-n)$ dan foydalanib,

$$E'(t-n) = ac_n \left(E(t-n) - \frac{b}{a}\right) = ac_n E(t-n) - bc_n,$$

$$y(t) = \frac{c_n}{E(t-n)}, \quad y^2(t) = \frac{c_n^2}{E^2(t-n)} \quad (10)$$

(9) va (10) dan quyidagi tenglik o'rinli

$$y'(t) = -\frac{c_n(ac_n E(t-n) - bc_n)}{E^2(t-n)} = -a\frac{c_n^2}{E(t-n)} + b\frac{c_n^2}{E^2(t-n)}.$$

Shu sababli

$$y'(t) = -ac_n y(t) + by^2(t).$$

Bu esa (1) tenglamani aynan o'zi ekanligi kelib chiqadi.

$$y'(t) + ac_n y(t) = by^2(t)$$

Demak topilgan funksiya har bir $[n, n + 1)$ oraliqda tenglamani qanoatlantiradi. Bundan tashqari, (8)-formula bo'yicha $c_{n+1} = y(n + 1)$ tanlangani uchun yechim tugun nuqtalarda uzluksiz davom ettiriladi.

Xulosa. Maqolada bo'lakli uzluksiz argument qatnashgan noxiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasi o'rganildi. Butun qism argumentining xossasi yordamida masala har bir $[n, n + 1)$ oraliqda oddiy differensial tenglamaga keltirildi. Yechimning bo'laklar bo'yicha aniq formulasi, tugun qiymatlari uchun rekurrent munosabat va umumiy tasviri olindi.

ADABIYOTLAR:

1. K.L. Cooke and J. Wiener, *Retarded differential equations with piecewise constant delays*, // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 99(1) (1984), 265–297.
2. S. M. Shah and J. Wiener, *Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations*, // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 6 (1983), 671–703.
3. A. R. Aftabizadeh, J. Wiener and J. M. Xu, *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*, // *Proceedings of the American Mathematical Society*, 99(4) (1987), 673–679.
4. J. Wiener and K. L. Cooke, *Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument*, // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 137(1) (1989), 221–239.
5. J. Wiener, *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
6. M. U. Akhmet, *On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized type*, // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336(1) (2007), 646–663.
7. M. U. Akhmet, *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*, Springer, New York, 2010.
8. M. U. Akhmet, *Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models*, Atlantis Press, Paris, 2011.
9. J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977.
10. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
11. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.

HAQIQIY KO'RSATKICHLI BERNULLI TENGSIKZLIGINING KVADRATIK KUCHAYTIRILGAN VARIANTLARI VA ULARNING KO'P O'ZGARUVCHILI UMUMLASHMALARI

Yodgarov Samat Jo'rayevich,

Toshkent amaliy fanlar universiteti katta o'qituvchisi

Abdurahmatova Mohidil Olim qizi,

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti talabasi

Omonov Olim Isoqovich,

O'zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o'qituvchisi

anoraolimovna2007@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada haqiqiy ko'rsatkichli klassik Bernulli tengsizligining kvadratik hadlar yordamida kuchaytirilgan variantlari tadqiq etiladi. Xususan, $(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2$ ko'rinishdagi tengsizlik uchun optimal konstanta masalasi o'rganiladi. Parametr $\alpha \geq 2$ bo'lgan holatda tengsizlikning optimal konstantasi $C_\alpha^{\max} = \alpha - 1$ ekanligi qat'iy isbotlanadi. Shuningdek, tadqiqot doirasida ushbu tengsizlikning ko'p o'zgaruvchili umumlashmalari ham keltirib chiqariladi.

Kalit so'zlar: bernulli tengsizligi, optimal konstanta, kvadratik kuchaytirish, haqiqiy ko'rsatkich, ko'p o'zgaruvchili umumlashma.

КВАДРАТИЧНЫЕ УСИЛЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ БЕРНУЛЛИ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ И ИХ МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Аннотация. В данной статье исследуются квадратичные усиления классического неравенства Бернулли с вещественным показателем. В частности, рассматривается задача определения оптимальной константы в неравенстве вида $(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2$. Строго доказано, что при $\alpha \geq 2$ оптимальная константа имеет вид $C_\alpha^{\max} = \alpha - 1$. Кроме того, в рамках настоящего исследования получены многомерные обобщения данного неравенства.

Ключевые слова: неравенство Бернулли, оптимальная константа, квадратичное усиление, вещественный показатель, многомерное обобщение.

QUADRATIC REFINEMENTS OF BERNOULLI INEQUALITIES WITH REAL EXPONENTS AND THEIR MULTIVARIATE GENERALIZATIONS

Abstract. This paper investigates quadratic refinements of the classical Bernoulli inequality with a real exponent. In particular, the problem of determining the optimal constant in the inequality $(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2$ is studied. For the parameter range $\alpha \geq 2$, it is rigorously proven that the optimal constant is given by $C_\alpha^{\max} = \alpha - 1$. Furthermore, multivariate generalizations of this inequality are derived within the scope of this study.

Keywords: Bernoulli inequality, optimal constant, quadratic refinement, real exponent, multivariate generalization.

Kirish. Klassik analizda funksiyalarning asimptotik xulqini hamda ularning chiziqli yaqinlashishdan og'ishlarini baholashda Bernulli tengsizligi fundamental ahamiyat kasb etadi. Ushbu tengsizlik dastlab J.Bernulli nomi bilan bog'liq bo'lib, keyinchalik ko'plab matematiklar tomonidan umumlashtirilgan va turli yo'nalishlarda rivojlantirilgan. Klassik ko'rinishda Bernulli tengsizligi

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{1}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bu yerda $x > -1$ va $n \in \mathbb{N}$. Mazkur tengsizlikning analitik xossalari D.S.Mitrinovich, J. E. Pecharich va boshqa olimlarning ilmiy ishlarida batafsil o'rganilgan [1].

Ushbu tengsizlik ixtiyoriy haqiqiy ko'rsatkichlar uchun umumlashtirilganda, ko'rsatkichning qiymatiga qarab tengsizlik ishorasi o'zgarishi kuzatiladi.

1-Teorema. Faraz qilaylik, $x > -1$ ($x \neq 0$) va $\alpha \in \mathbb{R}$ bo'lsin. U holda $[1, 2]$:

i) Agar $\alpha < 0$ yoki $\alpha > 1$ bo'lsa, u holda $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$ qat'iy tengsizlik o'rinli bo'ladi.

ii) Agar $0 < \alpha < 1$ bo'lsa, tengsizlik teskarisiga o'zgaradi: $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$.

So'nggi yillarda Bernulli tengsizligining yangi isbotlari va yanada kuchliroq variantlari ishlab chiqilmoqda. Xususan, Christophe Chesneau tomonidan 2024-yilda Bernulli tengsizligi uchun cheksiz ko'paytma asosidagi yangi yondashuv taklif qilindi [4]. Ushbu yondashuv Seidel formulasi yordamida

$$\frac{\alpha x}{(1+x)^\alpha - 1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+(1+x)^{2^{-k}}}{1+(1+x)^{2^{2-k}}} \quad (2)$$

ko'rinishdagi yangi cheksiz ko'paytma yoyilmasini hosil qiladi va undan Bernulli tengsizligi tabiiy ravishda kelib chiqadi. Muallif, shuningdek, tengsizlikning yangi kuchaytirilgan variantlarini ham keltirgan.

Bernulli tengsizligi va uning umumlashmalari matematik analizda funksiyalarni baholash, qatorlarning yaqinlashuvini tekshirish, differensial tenglamalarda yechimlarni baholash hamda ehtimollar nazariyasida limit jarayonlarni o'rganishda muhim vosita hisoblanadi. Shu sababli ushbu tengsizlik nafaqat klassik analizning fundamental natijalaridan biri, balki zamonaviy matematik tadqiqotlarda ham dolzarb ahamiyat kasb etmoqda.

Mazkur maqolaning maqsadi – haqiqiy ko'rsatkichli klassik Bernulli tengsizligini kvadratik hadlar yordamida global kuchaytirish, parametr $\alpha \geq 2$ bo'lgan holatda asimptotik og'ishni aniqlovchi eng katta mumkin bo'lgan (optimal) $C_{\alpha}^{\max} = \alpha - 1$ konstantasini analitik jihatdan qat'iy isbotlash hamda olingan natijalarni ko'p o'zgaruvchili umumlashmalar ko'rinishiga o'tkazishdan iboratdir.

Quyidagi teorema haqiqiy ko'rsatkichli Bernulli tengsizligining optimal konstanta yordamida global kvadratik aniqligini ta'minlaydi.

2-teorema. Agar $\alpha \geq 2$ va $t > -1$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + (\alpha - 1)t^2. \quad (3)$$

Isbot. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$H(t) = (1+t)^\alpha - 1 - \alpha t - (\alpha - 1)t^2. \quad (4)$$

Ushbu funksiyaning $H(t) \geq 0$ ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Ma'lumki, $H(0) = 0$. Endi funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$H'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha - 2(\alpha - 1)t,$$

$$H''(t) = \alpha(\alpha - 1)(1+t)^{\alpha-2} - 2(\alpha - 1).$$

Demak,

$$H''(t) = (\alpha - 1)[\alpha(1+t)^{\alpha-2} - 2].$$

1-hol: $t \geq 0$ bo'lsin. Bu holda $1+t \geq 1$ bo'ladi. Chunki $\alpha \geq 2$, demak

$$(1+t)^{\alpha-2} \geq 1.$$

Shuning uchun:

$$H''(t) \geq (\alpha - 1)(\alpha - 2) \geq 0. \quad (5)$$

Demak, $H'(t)$ o'suvchi funksiya bo'ladi. Bundan tashqari $H'(0) = 0$ bo'lganligidan $H'(t) \geq 0$ ($t \geq 0$) bo'ladi.

Demak, $H(t)$ ham o'suvchi va $H(0) = 0$ ekanligidan:

$$H(t) \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

bo'ladi.

2-hol: $-1 < t < 0$ bo'lsin. Tengsizlikni polinom tipidagi shaklga keltirish uchun $\lambda = 1+t$ almashtirishni kiritamiz. Shunda $0 < \lambda < 1$ va $t = \lambda - 1$ bo'ladi.

Quyidagi tengsizlikni isbotlashimiz kerak:

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + (\alpha - 1)t^2 \quad (7)$$

Ushbu tengsizlikka $t = \lambda - 1$ ni quysak quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\lambda^\alpha \geq 1 + \alpha(\lambda - 1) + (\alpha - 1)(\lambda - 1)^2. \quad (8)$$

(8) ni o'ng tomonini soddalashtiramiz:

$$1 + \alpha(\lambda - 1) + (\alpha - 1)(\lambda - 1)^2 = (\alpha - 1)\lambda^2 + (2 - \alpha)\lambda. \quad (9)$$

Demak, quyidagini isbotlashimiz kerak:

$$\lambda^\alpha \geq (\alpha - 1)\lambda^2 + (2 - \alpha)\lambda. \quad (10)$$

Buning uchun quyidagi funktsiyani qaraymiz:

$$u_\alpha(\lambda) = \lambda^\alpha - (\alpha - 1)\lambda^2 - (2 - \alpha)\lambda. \quad (11)$$

Buni quyidagicha yozamiz:

$$u_\alpha(\lambda) = \lambda(\lambda^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\lambda + \alpha - 2). \quad (12)$$

Qavs ichidagini ifodani belgilaymiz:

$$v_\alpha(\lambda) = \lambda^{\alpha-1} - (\alpha - 1)\lambda + \alpha - 2. \quad (13)$$

Endi $v_\alpha(\lambda)$ ning hosilasini topamiz:

$$v'_\alpha(\lambda) = (\alpha - 1)\lambda^{\alpha-2} - (\alpha - 1) = (\alpha - 1)(\lambda^{\alpha-2} - 1). \quad (14)$$

Chunki $0 < \lambda < 1$ va $\alpha \geq 2$ bo'lgani uchun $\lambda^{\alpha-2} \leq 1$.

Demak,

$$v'_\alpha(\lambda) \leq 0. \quad (15)$$

Shuning uchun $v_\alpha(\lambda)$ kamayuvchi funktsiya. Bundan tashqari,

$$v_\alpha(1) = 1 - (\alpha - 1) + \alpha - 2 = 0. \quad (16)$$

Demak, $0 < \lambda < 1$ da $v_\alpha(\lambda) \geq v_\alpha(1) = 0$. Shunday qilib, $v_\alpha(\lambda) \geq 0$. $\lambda > 0$ bo'lgani uchun $u_\alpha(\lambda) = \lambda v_\alpha(\lambda) \geq 0$ bo'ladi. Ya'ni, $\lambda^\alpha \geq (\alpha - 1)\lambda^2 + (2 - \alpha)\lambda$.

Demak,

$$H(t) \geq 0, \quad -1 < t < 0.$$

Shu bilan $-1 < t < 0$ hol ham isbotlandi. Teorema isbotlandi.

1-ta'rif. Agar

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2$$

tengsizlik barcha $t > -1$ lar uchun bajarilib, $C > C_\alpha^{\max}$ bo'lgan har qanday konstanta uchun ushbu tengsizlik kamida bitta nuqtada buzilsa, $C_\alpha^{\max}$ konstanta optimal konstanta deyiladi,

3-teorema. Faraz qilaylik, $\alpha \geq 2$. Agar shunday $C \in \mathbb{R}$ konstanta mavjud bo'lib,

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2, \quad t > -1 \quad (17)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $C \leq \alpha - 1$ ($C_\alpha^{\max} = \alpha - 1$) bo'ladi.

Isbot. Optimal konstantani aniqlash uchun barcha $t > -1$ ($t \neq 0$) lar uchun quyidagi funktsiyani kiritamiz:

$$f_\alpha(t) = \frac{(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t}{t^2}. \quad (18)$$

Agar asosiy

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + Ct^2$$

tengsizlik barcha $t > -1$ lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda $C \leq f_\alpha(t)$ shart bajarilishi kerak. Demak, barcha konstantalar uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$C \leq \inf_{t > -1, t \neq 0} f_\alpha(t). \quad (19)$$

Shuning uchun optimal konstantani topish masalasi $f_\alpha(t)$ funktsiyasining infimumini aniqlashga keladi.

Tekshirishni osonlashtirish maqsadida $u = 1 + t$ almashtirish kiritamiz. U holda $u > 0$ va $t = u - 1$ bo'ladi. Natijada funktsiya quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f_\alpha(u) = \frac{u^\alpha - \alpha(u-1) - 1}{(u-1)^2} = \frac{u^\alpha - \alpha u + \alpha - 1}{(u-1)^2}. \quad (20)$$

Funksiyaning monotonligini tekshirish uchun u bo'yicha hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} f_{\alpha}(u) &= \frac{(\alpha u^{\alpha-1} - \alpha)(u-1)^2 - (u^{\alpha} - \alpha u + \alpha - 1) \cdot 2(u-1)}{(u-1)^4} = \\ &= \frac{(\alpha u^{\alpha-1} - \alpha)(u-1) - 2(u^{\alpha} - \alpha u + \alpha - 1)}{(u-1)^3} = \\ &= \frac{(\alpha - 2)u^{\alpha} - \alpha u^{\alpha-1} + \alpha u + 2 - \alpha}{(u-1)^3} = \frac{H_{\alpha}(u)}{(u-1)^3}, \end{aligned} \quad (21)$$

bu yerda suratdagi ifoda quyidagicha belgilanadi:

$$H_{\alpha}(u) = (\alpha - 2)u^{\alpha} - \alpha u^{\alpha-1} + \alpha u + 2 - \alpha.$$

Endi $H_{\alpha}(u)$ funksiyasining ishorasini tahlil qilamiz. Avvalo, funksiya va uning birinchi tartibli hosilasi $H'_{\alpha}(u) = \alpha[(\alpha - 2)u^{\alpha-1} - (\alpha - 1)u^{\alpha-2} + 1]$ ning $u = 1$ nuqtadagi qiymatlarini tekshiramiz:

$$H_{\alpha}(1) = 0, \quad H'_{\alpha}(1) = 0. \quad (22)$$

Funksiyaning ikkinchi hosilasini hisoblaymiz:

$$H''_{\alpha}(u) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)u^{\alpha-3}(u - 1).$$

Teorema shartiga ko'ra $\alpha > 2$ bo'lgani uchun $\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) > 0$ bo'ladi. U holda ikkinchi hosilaning ishorasi faqat $(u - 1)$ ga bog'liq:

$$a1) 0 < u < 1 \Rightarrow H''_{\alpha}(u) < 0,$$

$$b1) u > 1 \Rightarrow H''_{\alpha}(u) > 0.$$

Bundan xulosa qilish mumkinki, $H'_{\alpha}(u)$ funksiya $(0, 1)$ oraliqda qat'iy kamayuvchi, $(1, \infty)$ oraliqda esa qat'iy o'suvchi. Biroq $H'_{\alpha}(1) = 0$ bo'lganligi sababli, $u = 1$ nuqta funksiyaning global minimumi hisoblanadi. Demak:

$$a2) 0 < u < 1 \Rightarrow H'_{\alpha}(u) > 0,$$

$$b2) u > 1 \Rightarrow H'_{\alpha}(u) > 0.$$

Natijada $H_{\alpha}(u)$ funksiya butun $(0, \infty)$ oraliqda qat'iy o'suvchi ekanligi ma'lum bo'ladi. $H_{\alpha}(1) = 0$ shartidan foydalanib, uning ishorasini aniqlaymiz:

$$a3) 0 < u < 1 \Rightarrow H_{\alpha}(u) < 0,$$

$$b3) u > 1 \Rightarrow H_{\alpha}(u) > 0.$$

Endi maxrajdagi $(u - 1)^3$ ifodaning ishorasini hisobga olamiz:

$$a4) 0 < u < 1 \Rightarrow (u - 1)^3 < 0,$$

$$b4) u > 1 \Rightarrow (u - 1)^3 > 0.$$

Shuning uchun har ikkala holatda ham surat va maxraj bir xil ishoraga ega bo'ladi:

$$\frac{d}{du} f_{\alpha}(u) > 0. \quad (23)$$

Demak, $\alpha > 2$ bo'lganda $f_{\alpha}(t)$ funksiyasi $t \in (-1, \infty)$ oraliqda qat'iy o'suvchi bo'ladi.

Funksiya qat'iy o'suvchi bo'lgani sababli, uning infimumi aniqlanish sohasining chap chegarasida hosil bo'ladi. Chegaraviy holatni hisoblaymiz:

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} f_{\alpha}(t) = \lim_{s \rightarrow -1+0} \frac{(1+t)^{\alpha} - 1 - \alpha t}{t^2}.$$

Bu yerda $t \rightarrow -1+0$ da $(1+t)^{\alpha} \rightarrow 0$, $(-1-\alpha t) \rightarrow \alpha - 1$ va $t^2 \rightarrow 1$. Shuning uchun:

$$\inf_{t > -1, t \neq 0} f_{\alpha}(t) = \lim_{t \rightarrow -1+0} f_{\alpha}(t) = \alpha - 1.$$

Demak, $C \leq \inf_{t > -1, t \neq 0} f_{\alpha}(t)$ shartga ko'ra $C \leq \alpha - 1$.

Boshqa tomondan, 2-teoremada $C = \alpha - 1$ bo'lganda ushbu

$$(1+t)^{\alpha} \geq 1 + \alpha t + (\alpha - 1)t^2$$

tengsizlik isbotlangan. Shuning uchun,

$$C_{\alpha}^{\max} = \alpha - 1.$$

Qo‘shimcha ravishda, agar $\alpha = 2$ bo‘lsa, u holda funksiya doimiy qiymat qabul qiladi:

$$f_2(t) = \frac{(1+t)^2 - 1 - 2t}{t^2} = 1.$$

Bu holda ham $C_2^{\max} = 1 = \alpha - 1$ ekanligi o‘z tasdig‘ini topadi.

Demak, $\alpha - 1$ optimal konstanta hisoblanadi. Teorema isbotlandi.

1-natija. Faraz qilaylik, $\alpha \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ va $1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (\alpha - 1) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 \quad (24)$$

Isbot. Agar $t = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ deb belgilasak, u holda shartga ko‘ra

$$1 + t > 0.$$

2-teoremaga ko‘ra, har qanday $t > -1$ uchun

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + (\alpha - 1)t^2.$$

Endi t o‘rniga $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ ni qo‘yamiz. Natijada:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (\alpha - 1) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2.$$

Natija isbotlandi.

2-natija. Agar $\alpha \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ va $1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2(\alpha - 1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j. \quad (25)$$

Isbot. Ma’lumki,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \quad (26)$$

Boshqa tomondan, 1-natija ga ko‘ra,

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (\alpha - 1) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2$$

Endi (26) tenglikni (24) ga qo‘ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2(\alpha - 1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

Natija isbotlandi.

Mazkur maqolada klassik Bernulli tengsizligining kvadratik kuchaytirilgan variantlari tadqiq qilindi. $\alpha \geq 2$ holatda

$$(1+t)^\alpha \geq 1 + \alpha t + (\alpha - 1)t^2$$

tengsizlikning o‘rinliliigi va $\alpha - 1$ konstantaning optimal ekanligi qat’iy isbotlandi. Shuningdek, ushbu tengsizlikning ko‘p o‘zgaruvchili umumlashmalari ham olindi. Olingan natijalar qavariq analiz, funksional analiz va operatorlar nazariyasida qo‘llanish imkoniyatiga ega.

ADABIYOTLAR:

1. Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M. *Classical and New Inequalities in Analysis*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
3. Beckenbach E. F., Bellman R. *Inequalities*. — Berlin: Springer-Verlag, 1961.

4. Chesneau C. *A new proof and refinements of Bernoulli's inequality* // *Mathematics*. — 2024. — Vol. 12, No. 5. — P. 1–12.
5. Azlarov T.A., Mansurov H. (1986, 1989). *Matematik analiz (1 va 2-qismlar)*. T.: O'qituvchi.
6. Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., & G'ulomov R. (1993, 1995). *Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami (1 va 2-qismlar)*. T.: O'zbekiston.
7. Зорич, А. (1981). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. (1979). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
9. Фихтенгольц Г.М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Т. 1–3)*. М.: Физ-матгиз.
10. Демидович Б.П. (1972). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука.
11. Кубрякцев Л.Д., Кумасов А.Д., Шеглов В.И., Шабунин М.И. (1984, 1986). *Сборник задач по математическому анализу (Т. 1–2)*. М.: Наука.
12. Виноградова И.А., Олехник С.Н., & Садовничий В.А. (1988). *Задачи и упражнения по математическому анализу (Т. 1)*. Издательство Московского Университета.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

*Эрмamatова Зухро Эрмamatовна,
и.о. доцента университета Зармед, PhD
Ахмадова Мадина Туйчибой кизи,
базовый докторант Самаркандского
государственного педагогического института
Эрмamatова Бибихожар Эрмamatовна,
магистрант Самаркандского государственного
университета имени Шарофа Рашидова*

Аннотация. При решении электромагнитных граничных задач важным является вывод интегральных представлений. В работе рассматривается задача аналитического продолжения, т.е. модифицированная интегральная формула Страттона-Чу для решения однородной системы уравнений Максвелла в ограниченной области. При этом используются электромагнитные поля как фундаментальные решения однородной системы уравнений Максвелла. Исключением векторов магнитного или электрического полей из системы уравнений Максвелла, приводим к векторному уравнению Гельмгольца для одного из этих полей. Тогда для решения векторного уравнения Гельмгольца справедлива интегральная формула. Учитывая тесную взаимосвязь между акустическими и электромагнитными волнами, строится приближённое решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Ключевые слова: векторная уравнения Гельмгольца, интегральная формула, уравнения Максвелла, аналитическое продолжение.

INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF THE VECTOR HELMHOLTZ EQUATION IN BOUNDED DOMAIN

Abstract. When solving electromagnetic boundary value problems, deriving integral representations is important. This paper considers the problem of analytic continuation, i.e., a modified Stratton-Chu integral formula for solving a homogeneous system of Maxwell's equations in a bounded domain. In this case, electromagnetic fields are used as fundamental solutions to the homogeneous system of Maxwell's equations. By eliminating the vectors of either the magnetic or electric fields from the system of Maxwell's equations, we obtain a Helmholtz vector equation for one of these fields. Then, the integral formula for solving the Helmholtz vector equation is valid. Taking into account the close relationship between acoustic and electromagnetic waves, an approximate solution to this problem is constructed based on the Carleman matrix method.

Key words: vector Helmholtz equation, integral representation, Maxwell equation, analytic continuation.

CHEGARALANGAN SOHADA GELMGOLTS VEKTOR TENGLAMASI YECHIMINING INTEGRAL KO'RINISHI

Аннотация. Elektromagnit chegaraviy masalalarni yechishda integral tasvirlarni hosil qilish muhim ahamiyatga ega. Ushbu maqolada analitik davom ettirish masalasi, ya'ni chegaralangan sohada bir jinsli Maksvell tenglamalari sistemasini yechimi uchun modifitsirlangan Stratton-Chu integral formulasi ko'rib chiqiladi. Elektromagnit maydonlar Maksvell tenglamalarining bir jinsli sistemasining fundamental yechimlari sifatida ishlatiladi. Maksvell tenglamalar sistemasidan magnit yoki elektr maydon vektorlarini chiqarib tashlab, biz ushbu maydonlardan biri uchun Gel'mgolts vektor tenglamasini hosil qilamiz. U holda, Gel'mgolts vektor tenglamasining yechimi uchun ham integral formula o'rinli bo'ladi. Akustik va elektromagnit to'lqinlar o'rtasidagi uzviy bog'lanshni hisobga olgan holda, bu masalaning taqribiy yechimi Karleman matritsasi usuli yordamida quriladi.

Калит so'zlar: Gel'mgolts vektor tenglamasi, integral tasvir, Maksvell tenglamasi, analitik davom.

Введение. Уравнение Гельмгольца представляет собой особый вид эллиптических уравнений, особенно важный в некоторых практических физических приложениях, связанных с распространением волн и вибрационными явлениями. Оно часто используется для описания [3]: вибрации конструкции, задачи акустической полости, радиационной волны, рассеяния волны, задачи теплопроводности в рёбрах, теории Дебая-Хюккеля, линеаризации уравнения Пуассона-Больцмана и других. В последнее время было проведено много исследований по проблеме Коши для уравнений Гельмгольца, например работы [12]–[15] относятся к аналитическим решениям; а [7]–[9], [4], [10] – к численным решениям. Для получения более обширной информации о задаче Коши для уравнения Гельмгольца можно обратиться к [9].

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в трёхмерном пространстве R^3 с границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Интегральная формула однородной системы уравнений Максвелла в ограниченной области

Цель исследования заключается в изучении задачи распространения волн в однородной изотропной среде R^3 с электрической проницаемостью ε , магнитной проницаемостью μ и проводимостью σ_1 .

В основе теории электромагнитных полей, изучаемых геофизиками, лежат уравнения Максвелла [2, с.38- 40]:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}^e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = q + q^e, \quad (4)$$

где $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ и $\vec{H}$ обычно называют

$\vec{E}$ – напряжённость электрического поля;

$\vec{D}$ – электрическая индукция;

$\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля;

$\vec{B}$ – магнитная индукция;

∇ – дифференциальный оператор набла, при этом:

$$\nabla \times \vec{E} \equiv \text{rot } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) \vec{k}$$

означает ротор вектора $\vec{E}$;

$$\nabla \cdot \vec{E} \equiv \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \text{ означает дивергенцию вектора } \vec{E}.$$

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{E}] \equiv \text{rot rot } \vec{E}, \quad \nabla [\nabla \cdot \vec{E}] \equiv \text{grad div } \vec{E}, \quad \nabla \cdot \nabla \cdot \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} \equiv \Delta \vec{E}.$$

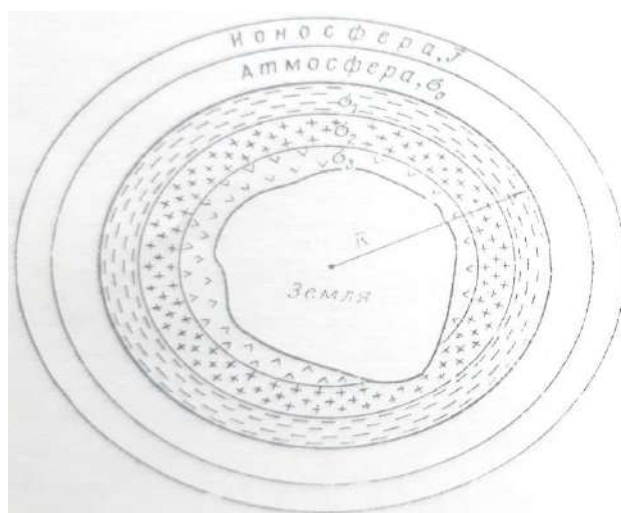


Рисунок 1. Сферическая слоисто-однородная модель Земли

Из уравнений Максвелла (1)–(4) можно видеть, что электромагнитные свойства среды характеризуются тремя электромагнитными параметрами ε , μ и σ_1 .

Рассмотрим модель Земли радиуса R , построенную из однородных сферических слоёв с электропроводностью σ_{1j} (j – номер слоя). Земля окружена однородной проводящей атмосферой, электропроводность которой σ_0 (рис. 3). Модель возбуждается произвольно распределённым ионосферным током с плотностью J .

Электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ в такой слоисто-однородной модели может быть описано с помощью двух скалярных функций U^H и U^E , удовлетворяющих уравнению Гельмгольца:

$$\Delta U^{H,E} + \lambda_i^2 U^{H,E} = 0,$$

где $\lambda_i = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_i}$, $\text{Re}\lambda_i > 0$.

Электромагнитную волну с частотой ω будем описывать векторами напряжённости электрического и магнитного полей:

$$\vec{E}(x,t) = (\varepsilon + i\sigma\omega)^{-1/2} \vec{E}(x) e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}(x,t) = \mu^{-1/2} \vec{H}(x) e^{-i\omega t}.$$

Из системы уравнений Максвелла с произвольной зависимостью от времени:

$$\nabla \times \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma \vec{E} \quad (5)$$

имеем, что зависящие от пространственных координат части полей $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла в гармоническом режиме [5; стр. 123]:

$$\nabla \times \vec{E} - ik\vec{H} = 0; \quad \nabla \times \vec{H} + ik\vec{E} = 0, \quad (6)$$

где волновое число k задается выражением $k^2 = (\varepsilon + \frac{i\sigma_1}{\omega})\mu\omega^2$. Выберем знак величины k

так, чтобы выполнялось условие $\text{Im}k \geq 0$.

Определение 1. Вектор-функции $\vec{E}(y) = (E_1(y), E_2(y), E_3(y))$ и $\vec{H}(y) = (H_1(y), H_2(y), H_3(y))$ называются регулярными решениями системы (6) в Ω , если $E_i(y), H_i(y) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $i = 1, 2, 3$ и удовлетворяют системе (6).

Обозначим через $M(\Omega)$ пространство всех регулярных в Ω решений системы (2).

Задача 1. Выразить электромагнитные поля E, H в некоторой области Ω через значения E, H на внутренней стороне поверхности $\partial\Omega$, ограничивающей эту область.

Сформулируем следующие теоремы, отвечающие указанной задаче.

Теорема 1 ([11; стр. 124], [6; стр. 232-235]). Пусть $\vec{E}, \vec{H} \in M(\Omega)$. Тогда имеют место формулы Стрэттона-Чу:

$$\begin{aligned} \nabla \times \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(y), \vec{E}(y)] \Phi_{\sigma}(y, x; k) dS_y - \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(y), \vec{H}(y)] \Phi_{\sigma}(y, x; k) dS_y = \\ = \begin{cases} -\vec{E}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \\ \nabla \times \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(y), \vec{H}(y)] \Phi_{\sigma}(y, x; k) dS_y + \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(y), \vec{E}(y)] \Phi_{\sigma}(y, x; k) dS_y = \\ = \begin{cases} -\vec{H}(y), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Phi_{\sigma}(y, x; \lambda)$ определяется формулой [12]:

$$\Phi_{\sigma}(y, x; \lambda) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma(i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3)^2}}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3} \right] \frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad (8)$$

и, выделяя мнимую часть подынтегрального выражения в (8), получим:

$$2\pi^2 e^{\sigma x_3^2 + \sigma \alpha^2 - \sigma y_3^2} \cdot \Phi_{\sigma}(y, x; \lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{\sigma}(y, x; u)}{u^2 + r^2} e^{-\sigma u^2} ch(\lambda u) du, \quad (9)$$

где

$$\varphi_{\sigma}(y, x; u) = \cos \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2} - (y_3 - x_3) \frac{\sin \tau \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad \tau = 2\sigma y_3. \quad (10)$$

Можно показать, что при преобразовании:

$$\begin{aligned} r = |y - x|, \quad r^2 = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2, \\ (y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2})(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}) = r^2 + u^2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} = \\ = -\frac{1}{2i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \left(\frac{1}{y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - \frac{1}{y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \right) = \frac{1}{r^2 + u^2}, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ch(\lambda u)}{r^2 + u^2} du = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos(i\lambda u)}{r^2 + u^2} du = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\lambda|y-x|}}{|y-x|} \equiv \Phi_0(y, x; \lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

то есть, функция $\Phi_{\sigma}(y, x; \lambda)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца:

$$\Phi_{\sigma}(y, x; \lambda) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3} \right] \frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i\lambda|y-x|}}{|y-x|} \equiv \Phi_0(y, x; \lambda). \quad (12)$$

Используя эти тождества, мы получим выражение для классического фундаментального решения уравнения Гельмгольца.

Из результатов работы [12] вытекает

Определение 2. Функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$, определяемая (8), называется функцией Карлемана, если представима в виде:

$$C_m \Phi_\sigma(y, x; \lambda) = \Phi_0(y, x; \lambda) + g_{\lambda, \sigma}(y, x), \quad (13)$$

где $g_\lambda(y, x)$ – функция класса $C^\infty(R^3)$ и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца по переменной y при любом $\sigma \geq 0$, $\Phi_0(y, x; \lambda)$ – классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_0 - \lambda^2 \Phi_0 = 0, \quad y \in \Omega, \\ \int_T \left(|\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n} \right| \right) dS_y \leq C(\lambda, \Omega) \sigma \exp(-\sigma x_n^2), \quad (14)$$

где $C(\lambda, \Omega)$ – постоянная, $\Phi_0(y, x; k)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, то есть

$$\Phi_0(y, x; k) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}, \quad r = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Эти формулы, предложенные Х.Хэнлом [16; стр.35] называются *модифицированными интегральными формулами Стрэттона-Чу*.

Пусть $\vec{a} \in R^3$ представляет собой постоянный вектор. Тогда

$$\vec{E}_m(x) := \nabla_x \times \vec{a} \Phi_\sigma(y, x), \\ \vec{H}_m(x) := \frac{1}{ik} \nabla_x \times \vec{E}_m(x), \quad x \in R^3 \setminus \{y\}, \quad (15)$$

представляет собой электромагнитное поле магнитного диполя расположенного в точке $y \in R^3$, и удовлетворяет системе уравнений Максвелла (6). Аналогично

$$\vec{H}_e(x) := \nabla_x \times \vec{a} \Phi_\sigma(y, x), \\ \vec{E}_e(x) := \frac{1}{ik} \nabla_x \times \vec{H}_e(x), \quad x \in R^3 \setminus \{y\}, \quad (16)$$

представляет собой электромагнитное поле, возбуждаемое электрическим диполем. Формула (7) дает представление для произвольного решения уравнений Максвелла в виде электрических и магнитных диполей, распределенных по граничной поверхности.

Согласно [1] имеем

Определение 3. Электромагнитные поля (15) и (16) называются фундаментальными решениями системы уравнений Максвелла (6).

Определение 4. Матрицами фундаментальных решений системы (2) называются симметричная матрица $E(y, x; k)$ для вектора $\vec{E}(x)$:

$$E(y, x; k) = \|E_{ij}(y, x; k)\|_{3 \times 3}, \quad (17)$$

где $E_{ij}(y, x; k) = \frac{\partial^2 \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} k^2 \Phi_0(y, x; k)$, и антисимметричная матрица

$H(y, x; k)$ для вектора $\vec{H}(x)$:

$$H(y, x; k) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_3} & -\frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_2} & -\frac{\partial \Phi_0(y, x; k)}{\partial x_1} & 0 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

С помощью матриц $E(y, x; k)$ и $H(y, x; k)$ формулы Стрэттона-Чу (7) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= - \int_{\partial\Omega} H(y, x; k) [\vec{n}(y), \vec{E}(y)] dS_y + \frac{1}{ik} \int_{\partial\Omega} E(y, x; k) [\vec{n}(y), \vec{H}(y)] dS_y, \quad x \in \Omega, \\ \vec{H}(x) &= - \int_{\partial\Omega} H(y, x; k) [\vec{n}(y), \vec{H}(y)] dS_y - \frac{1}{ik} \int_{\partial\Omega} E(y, x; k) [\vec{n}(y), \vec{E}(y)] dS_y, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Интегральная формула векторной уравнений Гельмгольца в ограниченной области

Рассматривается задача аналитического продолжения решения векторного уравнения Гельмгольца в пространственной ограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши. При решении электромагнитных граничных задач является важным вывод интегральных представлений. Если исключить векторы или магнитного, или электрического полей из системы уравнений Максвелла (1), то это приводит к векторному уравнению Гельмгольца для одного из этих полей. Учитывая тесную взаимосвязь между акустическими и электромагнитными волнами строится приближённое решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Справедливо следующее утверждение: если декартовы компоненты решений системы уравнений Максвелла дважды непрерывно дифференцируемы, то выполняется тождество:

$$\nabla \times [\nabla \times \vec{E}] \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \nabla [\nabla \cdot \vec{E}].$$

Теорема 2. ([5; стр. 126]). Пусть $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – решения уравнений Максвелла. Тогда дивергенции $\vec{E}$ и $\vec{H}$ равны нулю, и они удовлетворяют векторным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

Обратно, пусть $\vec{E}$ (или $\vec{H}$) является решением векторного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условию $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (или $\nabla \cdot \vec{H} = 0$). Тогда $\vec{E}$ и $\vec{H} := \frac{1}{ik} \nabla \times \vec{E}$ (или $\vec{H}$ и $\vec{E} := \frac{1}{ik} \nabla \times \vec{H}$) удовлетворяют системе уравнений Максвелла.

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности Ляпунова S , лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Обозначим для области Ω с границей $\partial\Omega$ класса C^2 линейное пространство векторных полей:

$$\mathbb{F}(\Omega) := \left\{ \vec{E} : \bar{\Omega} \rightarrow C^3 \mid \vec{E} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \nabla \cdot, \nabla \times \vec{E} \in C(\bar{\Omega}) \right\}.$$

Теорема 3. ([5; стр. 132-133]). Пусть вектор-функция $\vec{E}(y) \in \mathbb{F}(\Omega)$ — решение векторного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Тогда справедливо интегральное представление:

$$\begin{aligned} & \nabla \times \int_{\partial\Omega} [\vec{n}(y), \vec{E}(y)] \Phi_\sigma(y, x; \lambda) dS_y - \nabla \cdot \int_{\partial\Omega} (\vec{n}(y), \vec{E}(y)) \Phi_\sigma(y, x; \lambda) dS_y - \\ & - \int_{\partial\Omega} \left\{ [\nabla \times \vec{E}(y), \vec{n}(y)] + \vec{n}(y) \nabla \cdot \vec{E}(y) \right\} \Phi_\sigma(y, x; \lambda) dS_y = \begin{cases} -\vec{E}(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ определяется из (1.2.6).

Пусть $\vec{e} \in R^3$ — постоянный вектор; определим векторные поля, удовлетворяющие векторному уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(x) &:= \nabla_x \times \vec{e} \Phi_\sigma(y, x; \lambda), \\ \vec{E}_2(x) &:= \vec{e} \Phi_\sigma(y, x; \lambda), \\ \vec{E}_3(x) &:= \nabla_x \Phi_\sigma(y, x; \lambda), \quad x \in R^3 \setminus \{y\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда теорема 2 даёт интегральное представление любого решения векторного уравнения Гельмгольца с помощью полей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$, где $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ определяется из (12), (13).

Задача 2. (задача Коши для векторного уравнения Гельмгольца). Определить векторное поле $\vec{E}(y) \in \mathbb{F}(\Omega)$ (т.е. векторное поле $\vec{E}(y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, у которого $\nabla \cdot \vec{E}(y), \nabla \times \vec{E}(y) \in C(\bar{\Omega})$) удовлетворяющее векторному уравнению Гельмгольца в Ω и граничному условию

$$[\vec{n}(y), \vec{E}(y)] = \vec{f}(y), \quad \nabla \cdot \vec{E}(y) = g(y), \quad y \in S, \quad (21)$$

$g(y) \in C^{0,\alpha}(S)$ — заданная функция, $\vec{f}(y) \in \mathcal{A}^{0,\alpha}(S)$ — заданное касательное поле.

Замечание 1. Задача 2 эквивалентна задаче 1. То есть справедлива аналог теоремы 1 для векторного уравнения Гельмгольца с условием (21).

Из соотношения $\Delta \nabla \cdot \vec{E}(y) = \nabla \cdot \Delta \vec{E}(y)$ видно, что для любого решения $\vec{E}$ векторного уравнения Гельмгольца $\nabla \cdot \vec{E}$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца. Справедлива

Лемма 1. Пусть вектор — функция $\vec{E}(y)$ удовлетворяет условию теоремы 3. Тогда справедлива формула

$$\nabla \cdot \vec{E}(x) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \nabla \cdot E(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x; \lambda)}{\partial n} - \Phi_\sigma(y, x; \lambda) \frac{\partial \operatorname{div} E(y)}{\partial n} \right\} dS_y, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

где $\tilde{S}$ обозначает поверхность, параллельную $\partial\Omega$, разделяющую точку x от $\partial\Omega$. В частности, $\nabla \cdot \vec{E}$ удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца в Ω .

Замечание 2. Из леммы 1 вытекает, что $\nabla \cdot \vec{E}$ является решением скалярного уравнения Гельмгольца.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближённых решениях граничных задач. — М.: Наука, 1989. — 350 с.

2. Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. – М.: Научный мир, 2007. – 712 с.
3. Hào D.N., Lesnic D., *The Cauchy problem for Laplace's equation using the conjugate gradient method*, IMA J. Appl. Math. 2000. 65. – P. 199–217.
4. Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Шишенин М.А. О численном решении обратной задачи термоакустики // Сиб. журн. вычисл. матем. 2013. Т. 16, № 1. – С. 39–44.
5. Ковтунов Д.А. Моделирование обратных граничных задач стационарной тепловой конвекции высоковязкой жидкости: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2010. – 160 с.
6. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
7. Marin L., Lesnic D., *The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations*, Comput. Struct. 2005. 83. – P. 267–278.
8. Marin L., *Boundary element-minimal error method for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations*, Comput. Mech. 2009. 44. – P. 205–219.
9. Marin L., *An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation*, Comput. Mech. 2010. 45. – P. 665–677.
10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. — М.: Издательство ЛКИ, 2009. — 480 с.
11. Colton D, Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. - Springer New York Heidelberg Dordrecht London Science + Business Media New York, 2013. – 405 p.
12. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца // Докл. РАН. 1997. – Т. 357. – №3. – С. 320-323.
13. Qin H.H., Wei T., Shi T., *Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation*, J. Comput. Appl. Math. 2009. 224. – P.39–53.
14. Qin H.H., Wei T., *Two regularization methods for the Cauchy problems of the Helmholtz equation*, Appl. Math. Model. 2010. 34. – P. 947–967.
15. Wei T., Qin H. H, Shi R., *Numerical solution of an inverse 2D Cauchy problem connected with the Helmholtz equation*, Inverse Probl. 2008. 24. – P. 1–18.
16. Хенл Х., Мауэ П., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.:Мир, 1964. – 428 с.

TURLI SANOQ SISTEMALARIDA BO'LINISH BELGILARI

Madirimov Mamatsoli,

O'zbekiston Milliy pedagogika universiteti professori

Nurillayev Muzaffar Eshnazarovich,

O'zbekiston Milliy pedagogika universiteti dotsenti

Rizayev Rustam Kobilovich,

O'zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o'qituvchisi

Jabborov Muhammadi Musurmon o'g'i,

O'zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o'qituvchisi

rrqobilovich@umail.uz

Annotatsiya. Mazkur maqolada turli pozitsion sanoq sistemalarida sonlarning bo'linish belgilarini aniqlash masalalari yoritilgan. Sanoq sistemalarining nazariy asoslari, sonlarning asos bo'yicha yozilishi va raqamlar yig'indisi bilan bog'liq xossalar tahlil qilingan. Paskal alomatining ixtiyoriy asosli sanoq sistemalari uchun umumiy teoremasi bayon etilib, uning isboti hamda amaliy qo'llanilishi ko'rsatib berilgan. Shuningdek, qiymat koeffitsiyentlarining davriyligi o'rganilgan va o'nlik hamda ikkilik sanoq sistemalarida bo'linuvchanlikni tekshirishga oid misollar keltirilgan. Tadqiqot natijalari sonlar nazariyasi, diskret matematika va kompyuter arifmetikasida bo'linish belgilarini umumiy nazariy asosda o'rganish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: sanoq sistemasi, bo'linish belgisi, Paskal alomati, pozitsion sanoq sistemasi, sonlar nazariyasi, taqqoslama, modulyar arifmetika, raqamlar yig'indisi, bo'linuvchanlik, kompyuter arifmetikasi.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы определения знаков деления чисел в различных позиционных системах счисления. Анализируются теоретические основы систем счисления, запись чисел по основанию и свойства, связанные с суммой чисел. Формулируется общая теорема о знаке Паскаля для систем счисления с произвольным основанием, приводятся её доказательство и практическое применение. Также изучается периодичность значений коэффициентов, и приводятся примеры проверки делимости в десятичных и двоичных системах счисления. Результаты исследования позволяют изучать знаки деления в теории чисел, дискретной математике и компьютерной арифметике на общетеоретической основе.

Ключевые слова: система счисления, знак деления, знак Паскаля, позиционная система счисления, теория чисел, сравнение, модульная арифметика, сумма чисел, делимость, компьютерная арифметика.

DIVISIBILITY CRITERIA IN DIFFERENT NUMERAL SYSTEMS

Abstract. This article discusses the issues of determining the division signs of numbers in various positional number systems. The theoretical foundations of number systems, the writing of numbers by base, and the properties associated with the sum of numbers are analyzed. The general theorem of Pascal's sign for number systems with an arbitrary base is stated, its proof and practical application are shown. Also, the periodicity of value coefficients is studied and examples of checking divisibility in decimal and binary number systems are given. The results of the research allow us to study division signs in number theory, discrete mathematics, and computer arithmetic on a general theoretical basis.

Keywords: number system, division sign, Pascal's sign, positional number system, number theory, comparison, modular arithmetic, sum of numbers, divisibility, computer arithmetic.

Kirish. Bugungi kunda raqamli iqtisodiyotga o'tish jarayonida algoritmlar nazariyasi va hisoblash tizimlari uchun zarur bo'lgan nazariy asoslarni, xususan, sonlar nazariyasining tatbiqiy jihatlarini o'rganish zarurati tobora ortib bormoqda.

Mazkur yo'nalishlardan biri sifatida turli sanoq sistemalarini o'rganish va ulardagi bo'linish belgilarini aniqlash masalasi alohida ilmiy va amaliy ahamiyatga ega. Ma'lumki, o'nlik sanoq sistemasida bo'linish belgilarining mavjudligi arifmetik hisoblashlarni soddalashtiradi. Biroq zamonaviy hisoblash tizimlari asosan

ikkilik, sakkizlik va o'n oltilik sanoq sistemalari bilan ishlaydi. Shu sababli, ushbu sistemalarda sonlarning bo'linuvchanlik belgilarini umumiy nazariy asosda tadqiq qilish, Paskal alomati kabi universal teoremlarni ixtiyoriy g asosli sistemalar uchun umumlashtirish ilmiy jihatdan dolzarb masaladir.

Har qanday pozitsion sanoq sistemasining asosi sifatida $g > 1$ natural soni olinadi. Agar sanoq sistemasi asosi g bo'lsa, undagi raqamlar to'plami $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ ko'rinishida bo'ladi. Ixtiyoriy natural N sonining g asosli sistemadagi yozuvini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$N = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

Bunda a_i — sistema raqamlari, g — sistema asosi bo'lib, ushbu ifoda sonning razryadlar bo'yicha yoyilmasi hisoblanadi.

Sanoq sistemalarining fundamental xossalardan biri — bu sonning tanlangan asosda yagona ko'rinishda ifodalanishidir. Ya'ni, berilgan g asosi uchun a_i raqamlar to'plami yagona tarzda aniqlanadi. Buni isbotlash uchun teskari faraz qilib, ikkita turli yoyilma mavjud deb olsak, g ularning ayirmasi nolga teng bo'lishi va natijada har bir xona birligidagi raqamlar o'zaro teng bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, N sonini g -asosli sistemada ifodalaganda, raqamlar soni $n+1$ ga teng bo'ladi va bu yerda $n = [\log_g(N)]$ munosabati o'rinalidir.

Sanoq sistemasida har bir raqam o'z pozitsiyasiga ko'ra qiymatga ega. Masalan, eng o'ngdagi a_0 raqami birliklar xonasini (g^0), keyingi a_1 raqami esa g -lar xonasini (g^1) anglatadi. Ixtiyoriy a_i raqamini topish uchun quyidagi matematik formuladan foydalaniladi:

$$a_i = \left[\frac{N}{g^i} \right] \pmod{g}$$

Bu formula sonni qismlarga bo'lish va qoldiq olish orqali uning istalgan xona birligidagi raqamini aniqlash imkonini beradi. Masalan, ikkilik sanoq sistemadagi $(11010)_2$ sonini o'nlik sistemaga o'tkazishda har bir raqam 2 ning mos darajalariga ko'paytirilib, natijada 26 soni hosil qilinadi.

Sonlar nazariyasida bo'linish belgilarini isbotlashda raqamlar yig'indisi ($S(N)$) muhim rol o'ynaydi. Taqqoslamaning asosiy teoremlardan biriga ko'ra, g asosli sanoq sistemadagi ixtiyoriy N soni o'zining raqamlar yig'indisi bilan $(g-1)$ moduli bo'yicha taqqoslanadi:

$$N \equiv S(N) \pmod{g-1}$$

Bundan kelib chiqadiki, son $(g-1)$ ga bo'linishi uchun uning raqamlar yig'indisi ham shu songa bo'linishi shart. Xuddi shunday, "kuchaytirilgan yig'indi" (sonning juft o'rinda turgan raqamlari yig'indisi bilan toq o'rinda turgan raqamlari yig'indisining ayirmasi) uchun

$$N \equiv S_p(N) \pmod{g+1}$$

taqqoslamasi o'rinni. Bu xossalalar o'nlik sistemadagi 9 va 11 ga bo'linish belgilarining umumlashtirilgan ko'rinishidir.

Murakkabroq bo'linish belgilarini tekshirishda raqamlarni guruhlariga ajratish usuli qo'llaniladi. Agar sonning raqamlarini o'ngdan chapga qarab k tadan guruhlasak, u holda

$$N \equiv M \pmod{g^k - 1}$$

munosabati bajariladi (bu yerda M — guruhlar yig'indisi). Masalan, o'nlik sistemada sonning 999 ga bo'linishini tekshirish uchun uni uch tadan raqamli guruhlariga ajratib qo'shish kifoya.

Sonlarning bo'linuvchanlik nazariyasida ixtiyoriy pozitsion sanoq sistemalari uchun umumiy hisoblash qonuniyatlarini ishlab chiqish muhim amaliy va nazariy ahamiyatga ega. Bu yo'nalishdagi fundamental tadqiqotlar XVII asrning birinchi yarmida fransuz matematigi va faylasufi Blezy Paskal tomonidan boshlab berilgan. Paskal o'zining "*Traité d'Arithmétique*" nomli risolasida istalgan pozitsion sanoq sistemasida o'rinni bo'lgan bo'linishning umumiy prinsipini bayon etdi. Garchi muallif o'z davrida ushbu qonuniyatni geometrik usullar yordamida asoslagan bo'lsa-da, XIX-XX asrlarga kelib Karl Fridrix Gaussning taqqoslamalar nazariyasi hamda berilgan modul bo'yicha taqqoslama yordamida ushbu alomat qat'iy matematik shaklga keltirildi.

Paskal alomatining matematik modelini shakllantirishda ixtiyoriy g ($g \geq 2$) asosli sanoq sistemasida berilgan N sonini ko'rib chiqamiz:

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g$$

Bu yerda a_i koeffitsiyentlari $0 \leq a_i < g$ shartni qanoatlantiruvchi sanoq sistemasi raqamlaridir. Pozitsion yozuv qonuniyatiga ko'ra, ushbu sonni asosning darajalari bo'yicha ko'phad ko'rinishida ifodalashi bizga ma'lum:

$$N = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + a_1 \cdot g + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \cdot g^i$$

1-ta'rif. Berilgan N sonining ixtiyoriy musbat butun d bo'luvchiga qoldiqsiz bo'linishini aniqlovchi $W(N)$ funksiyasi quyidagi ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiya sifatida aniqlanadi:

$$W(N) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot r_i$$

bu yerda r_i koeffitsiyentlari sanoq sistemasini asosi g ning darajalarini d moduliga ko'ra bo'lgandagi qoldiqlari, ya'ni vazn koeffitsiyentlaridir:

$$r_i \equiv g^i \pmod{d} \quad \text{yoki} \quad r_i = g^i \pmod{d}$$

1-teorema (Paskal alomatining umumiy teoremasi). Ixtiyoriy g asosli sanoq sistemasida yozilgan N soni va ixtiyoriy musbat butun d bo'luvchi uchun quyidagi taqqoslama har doim o'rinlidir:

$$N \equiv W(N) \pmod{d}$$

Isboti. Pozitsion sanoq sistemasining ta'rifiga asosan N sonining qiymati uning raqamlari va mos darajali asoslari ko'paytmalari yig'indisiga teng. Modulyar arifmetikaning fundamental xossalariga ko'ra, agar ikki son bir xil modul bo'yicha taqqoslanuvchi bo'lsa, ularni ixtiyoriy butun songa ko'paytirish va o'zaro hadma-had qo'shish taqqoslama munosabatini o'zgartirmaydi.

Vazn koeffitsiyentlarining ta'rifidan quyidagi munosabat mavjud:

$$g^i = r_i \pmod{d}$$

Ushbu taqqoslamaning ikkala qismini sonning mos raqami a_i ga ko'paytiramiz:

$$a_i \cdot g^i \equiv a_i \cdot (r_i \pmod{d})$$

Hosil bo'lgan ifodalarni i indeksining 0 dan n gacha bo'lgan barcha qiymatlari uchun hadma-had jamlaymiz:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot g^i \equiv \sum_{i=0}^n a_i \cdot r_i \pmod{d}$$

Taqqoslamaning chap qismi N sonining analitik ifodasini, o'ng qismi esa vaznli yig'indi funksiyasi $W(N)$ ni ifodalaydi. Bundan:

$$N \equiv W(N) \pmod{d}$$

munosabat kelib chiqadi. Mazkur taqqoslamadan ko'rinib turibdiki, N soni d bo'luvchiga bo'linganda qanday qoldiq bersa, $W(N)$ yig'indi ham xuddi shunday qoldiq beradi. Xususan, N soni d ga qoldiqsiz bo'linadi faqat va faqatgina uning qiymat yig'indisi d ga qoldiqsiz bo'linsa, ya'ni $W(N) \equiv 0 \pmod{d}$

sharti bajarilsa. Teorema to'liq isbotlandi.

Katta tartibli sonlar bilan amallar bajarishda qiymat koeffitsiyentlarini cheksiz hisoblash talab etilmaydi. Bu qonuniyat qoldiqlarning o'ziga xos algebraik xossasiga asoslanadi.

2-teorema (Qiymat koeffitsiyentlarining davriyligi). Qaralayotgan sanoq sistemasining asosi g va bo'luvchi d uchun aniqlanadigan $\{r_0, r_1, r_2, \dots\}$ qoldiqlar ketma-ketligi har doim davriy xarakterga ega bo'ladi.

Isboti. Taqqoslama moduli d bo'lganligi sababli, har qanday butun sonni d ga bo'lganda hosil bo'ladigan qoldiqlar to'plami cheklidir va u $R = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ ko'rinishida bo'ladi. To'plam elementlari soni aniq d taga teng. Dirixle prinsipiga ko'ra, agar ketma-ketlikning ko'rib chiqilayotgan elementlari soni d dan ortsa, undagi qiymatlar albatta takrorlanishi shart.

Demak, shunday p va q indekslar mavjudki ($p < q$), ularda $r_p = r_q$ tengligi bajariladi. Bu esa quyidagi taqqoslamaning o'rinli ekanligini anglatadi:

$$g^p \equiv g^q \pmod{d}$$

Ushbu taqqoslamaning ikkala qismini g^k (bu yerda $k \geq 0$) ifodaga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$g^{p+k} \equiv g^{q+k} \pmod{d}$$

Bu munosabat ketma-ketlikning ma'lum bir elementdan boshlab to'liq takrorlanishini, ya'ni davriyligini isbotlaydiki, uning eng kichik musbat davri $T = q - p$ ko'rinishida aniqlanadi. Sanoq

sistemi asosi va modul o'zaro tub bo'lgan holda $EKUB(g, d) = 1$, davr har doim $r_0 = 1$ elementdan boshlanadi va sof davriy ketma-ketlikni hosil qiladi.

Paskal alomatining universal tabiati shundaki, elementar matematikada qo'llaniladigan barcha xususiy bo'linish qoidalarini ushbu umumiy alomatning xususiy ko'rinishlaridir. Quyida taqqoslamalar asosida kelib chiquvchi asosiy natijalarni ko'rib chiqamiz.

1 - natija ($d = g - 1$ holati). Sanoq sistemi asosidan bir birlikka kichik bo'lgan songa bo'linishni tekshirishda (masalan, o'nlik sanoq sistemasida 9 ga bo'linish) $g \equiv 1 \pmod{g-1}$ munosabati o'rinlidir. Taqqoslama xossasiga ko'ra, uning ixtiyoriy darajasi uchun ham

$$g^i \equiv 1^i \equiv 1 \pmod{g-1}$$

To'g'ri taqqoslama bo'ladi. Demak, barcha qiymat koeffitsiyentlari birga teng bo'ladi:

$$r_0 = r_1 = \dots = r_n = 1$$

U holda qiymatli yig'indi funksiyasi sonning raqamlari yig'indisiga aylanadi:

$$W(N) = a_0 + a_1 + \dots + a_n = S(N)$$

Bundan kelib chiqadiki, son $g - 1$ ga bo'linishi uchun uning raqamlari yig'indisi $g - 1$ ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli.

2 - natija ($d = g + 1$ holati). Sanoq sistemi asosidan bir birlikka katta bo'lgan songa bo'linishda (masalan, o'nlik tizimda 11 ga bo'linish) $g \equiv -1 \pmod{g+1}$ taqqoslamasi o'rinli bo'ladi. Bu holda darajali asoslar uchun qiymat koeffitsiyentlari quyidagi ishora almashinuvchi ko'rinishni oladi:

$$r_i \equiv (-1)^i \pmod{g+1}$$

Natijada vaznli yig'indi ishorasi almashinuvchi raqamlar yig'indisini ifodalaydi:

$$W(N) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = S_p(N)$$

Son faqat va faqatgina uning o'ngdan chapga qarab hisoblangan ishora almashinuvchi raqamlar yig'indisi $g + 1$ ga bo'lingandagina qoldiqsiz bo'linadi.

3 - natija. Agar g asosining d moduli bo'yicha aniqlangan eng kichik musbat davri T ga teng bo'lsa, u holda sonning raqamlarini o'ngdan chapga qarab T tadan guruhlab, alohida guruhlarga ko'rinishida qo'shish hisoblash vaqtini sezilarli darajada qisqartiradi. Son quyidagi ko'rinishda guruhlanadi:

$$N = (D_m D_{m-1} \dots D_1 D_0)$$

bu yerda har bir D_i qiymati T ta raqamdan tashkil topgan mustaqil son. Paskal teoremasining chiziqli xossasiga ko'ra, quyidagi algebraik munosabat o'rinli bo'ladi:

$$N \equiv D_0 + D_1 + D_2 + \dots + D_m \pmod{d}$$

Ushbu usul o'nlik sanoq sistemasida 999 yoki 1001 kabi murakkab modullarga bo'linishni tekshirishni ko'p xonali sonlarni qo'shish amaliga keltirish imkonini beradi.

Paskal alomatining amaliy samaradorligini va turli asoslardagi ishchi xarakterini ko'rsatish uchun aniq matematik misollarni tahlil qilamiz. Pozitsion sanoq sistemalarida sonlarning bo'linuvchanligini aniqlash uchun ishlatiluvchi matematik usuli.

1-masala. O'nlik sanoq sistemasida ($g = 10$) berilgan $N = (3241)_{10}$ sonining $d = 7$ ga bo'linishini Paskal alomati orqali tekshiring.

Yechish: Birinchi qadamda, $r_0 \equiv 10^0 \pmod{7}$ qoldiqlari orqali qiymat koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$i = 0: r_0 \equiv 10^0 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$i = 1: r_1 \equiv 10^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$i = 2: r_2 \equiv 10^2 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$(3 \times 10) \equiv 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$i = 3: r_3 \equiv 10^3 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$2 \times 10 \equiv 6 \pmod{7}$$

Keyingi qadamda takrorlanish hosil bo'ladi. Davr uzunligi $T = 6$ bo'lib, asosiy koeffitsiyentlar ketma-ketligi $\{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$ ko'rinishida bo'ladi.

Berilgan sonning raqamlarini o'ngdan chapga qarab mos koeffitsiyentlarga ko'paytirib, qiymatli yig'indini hisoblaymiz:

$$W(3241) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 1 + 12 + 4 + 18 = 35$$

7 modulga ko'ra taqqoslama orqali tekshirib ko'rishimiz mumkin:

$$35 \equiv 0 \pmod{7}$$

Qiyamatli yig'indi 7 ga qoldiqsiz bo'lingani sababli, Paskal teoremasiga asosan $N = 3241$ soni ham 7 ga qoldiqsiz bo'linadi.

2-masala. Ikkiilik sanoq sistemasida ($g = 2$) berilgan $N = (11011)_2$ sonining $d = 5$ ga bo'linishini tekshiring.

Yechish: Ikkiilik asosning 5 moduliga ko'ra qiymat koeffitsiyentlarini aniqlaymiz:

$$r_i \equiv 2^i \pmod{5}.$$

Hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} r_0 &\equiv 2^0 \equiv 1 \pmod{5}, \\ r_1 &\equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{5}, \\ r_2 &\equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{5}, \\ r_3 &\equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 3 \pmod{5}, \\ r_4 &\equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Demak, qiymat koeffitsiyentlari quyidagi davriy ketma-ketlikni hosil qiladi:

$$\{1, 2, 4, 3\},$$

bu yerda davr uzunligi $T = 4$.

Endi, son raqamlarini o'ngdan chapga qarab belgilaymiz:

$$N = (11011)_2, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1.$$

Qiyamatli yig'indini hisoblaymiz:

$$W(N) = \sum_{i=0}^4 a_i r_i = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1 + 2 + 0 + 3 + 1 = 7$$

5 asosga taqqoslamaga ko'ra:

$$N \equiv W(N) \pmod{5} \text{ shuning uchun } N \equiv 7 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Demak, $(11011)_2$ soni 5 ga qoldiqsiz bo'linmaydi.

Xulosa qilib ayganda, Paskal alomati ixtiyoriy asosli pozitsion sanoq sistemalarida sonlarning bo'linuvchanligini aniqlovchi eng yuqori umumiylikga ega universal qoidadir. U sonlar nazariyasining klassik qonuniyatlarini va zamonavoy hisoblash matematikasi sohasini o'zaro bog'lovchi, samaradorligi yuqori bo'lgan mukammal matematik model hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti. "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-son Qarori. – Toshkent, 2020-yil 7-may.
2. Al-Xorazmiy, Muhammad ibn Muso. Hind hisobi haqida risola. – Toshkent: Fan, 1983.
3. Гаусс К.Ф. Арифметические исследования. – Москва: Наука, 1959.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – Москва: Наука, 1981.
5. Гельфонд А.О. Теория чисел. – Москва: Наука, 1971.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Москва: Наука, 1975.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – Москва: Физматлит, 2000.
8. Гаишков С.Б. Системы счисления и их применение. – Москва: МЦНМО, 2004.
9. Кнут Д. Искусство программирования. Том 2: Получисленные алгоритмы. – Москва: Вильямс, 2007.
10. Прасолов В.В. Задачи по алгебре и теории чисел. – Москва: МЦНМО, 2006.
11. Бухштаб А.А. Теория чисел. – Москва: Просвещение, 1966.
12. Нечаев В.И. Элементы криптографии. Основы теории защиты информации. – Москва: Высшая школа, 1999.
13. Лежандр А.М. Теория чисел. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
14. Шарыгин И.Ф. Дискретная математика. – Москва: Дрофа, 2005.
15. Яглом И.М., Яглом А.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – Москва: Наука, 1975.
16. Ahmedov A., Xasanov A. Algebra va sonlar nazariyasi. – Toshkent: Tafakkur-Bo'stoni, 2016.
17. Jo'rayev T. Oliy algebra kursi. – Toshkent: O'qituvchi, 2007.

18. Karimov Sh. *Sonlar nazariyasiga kirish*. – Toshkent: Yangi asr avlodi, 2015.
19. Sodiqov Y., Abdullayev A. *Sonlar nazariyasi va uning tatbiqlari*. – Toshkent: Universitet, 2018.
20. To'rayev B. *Diskret matematika va matematik mantiq*. – Toshkent: Voris-nashriyot, 2020.
21. Xudoyberganov G', Aliyev R. *Matematikaning diskret usullari*. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2019.
22. Qosimov A. *Kongruensiyalar nazariyasi va uning qo'llanilishi*. – Toshkent: Universitet, 2021.
23. Abdurahmonov N. *Sanoq sistemalari va kompyuter arifmetikasi*. – Toshkent: Innovatsion rivojlanish nashriyoti, 2022.
24. Azlarov T., Mansurov H. *Matematik analiz asoslari*. – Toshkent: O'qituvchi, 1994.

TENSOR PRODUCT OF VECTOR SPACES AND SOME PROPERTIES

Nurillaev Muzaffar Eshnazarovich,

Head of the department of Mathematics,
National Pedagogical University of Uzbekistan
nurillaev_muzaffar@mail.ru

Rizaev Rustam Kobilovich,

Senior teacher the department of Mathematics,
National Pedagogical University of Uzbekistan

Fayziev Aslbek Sirojiddin ugli,

First-year Master's student in Teaching Methodology
of Exact and Natural Sciences (Mathematics)

Abstract. The tensor product is one of the most important constructions in modern linear algebra and abstract algebra. It provides a framework for studying bilinear mappings by converting them into linear mappings. Tensor products play a significant role in many branches of mathematics, including differential geometry, representation theory, algebraic topology, and quantum mechanics. This paper presents the definition of the tensor product of vector spaces, discusses its construction through the universal property, and examines several fundamental properties and applications. The tensor product offers a powerful tool for understanding multilinear structures and establishing connections between different mathematical concepts.

Keywords: tensor product, vector space, bilinear mapping, universal property, multilinear algebra, basis, dimension.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

Аннотация. Тензорное произведение является одной из важнейших конструкций современной линейной и абстрактной алгебры. Оно предоставляет удобный аппарат для исследования билинейных отображений посредством их сведения к линейным отображениям. Тензорные произведения играют значительную роль во многих разделах математики, включая дифференциальную геометрию, теорию представлений, алгебраическую топологию и квантовую механику. В данной работе рассматривается определение тензорного произведения векторных пространств, его построение на основе универсального свойства, а также изучаются некоторые фундаментальные свойства и приложения. Тензорное произведение является мощным инструментом для исследования мультилинейных структур и установления связей между различными математическими концепциями.

Ключевые слова: тензорное произведение, векторное пространство, билинейное отображение, универсальное свойство, мультилинейная алгебра, базис, размерность.

VEKTOR FAZOLARINING TENZOR KO'PAYTMASI VA UNING AYRIM XOSSALARI

Annotatsiya. Tensor ko'paytma zamonaviy chiziqli algebra va abstrakt algebraning eng muhim konstruksiyalaridan biridir. U bilinear akslantirishlarni chiziqli akslantirishlarga keltirish orqali ularni o'rganish uchun qulay nazariy asos yaratadi. Tensor ko'paytmalar matematikaning differensial geometriya, tasvirlar nazariyasi, algebraik topologiya va kvant mexanikasi kabi ko'plab sohalarida muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqolada vektor fazolarning tensor ko'paytmasi ta'rifi keltiriladi, uning universal xossa asosidagi qurilishi bayon qilinadi hamda asosiy xossalari va tatbiqlari ko'rib chiqiladi. Tensor ko'paytma ko'p chiziqli (multilinear) strukturalarni o'rganish va turli matematik tushunchalar o'rtasidagi bog'lanishlarni aniqlashda kuchli vosita hisoblanadi.

Kalit so'zlar: tensor ko'paytma, vektor fazo, bilinear akslantirish, universal xossa, multilinear algebra, baza, o'lcham.

Introduction. Linear algebra is a fundamental branch of mathematics that studies vector spaces and linear transformations. While linear mappings are well understood, many mathematical problems involve

functions that depend linearly on more than one variable. Such functions are known as bilinear or multilinear mappings.

Suppose that V and W are vector spaces over a field F . A bilinear map is a function

$$B: V \times W \rightarrow U$$

that is linear in each variable separately. The direct study of bilinear mappings can be complicated because they involve two independent vector variables. To overcome this difficulty, mathematicians developed the concept of the tensor product. The tensor product transforms every bilinear mapping into an ordinary linear mapping. This property makes tensor products extremely useful in both pure and applied mathematics. Tensor products appear naturally in geometry, physics, engineering, and computer science. [4], [5]

2. Preliminaries. Before introducing tensor products, it is necessary to review some basic concepts.

A **vector space** V over a field F is a set equipped with two operations:

1. Vector addition
2. Scalar multiplication

These operations satisfy a collection of axioms such as associativity, commutativity, distributivity, and the existence of additive identities and inverses.

Examples. 1) $\mathbb{R}^n$, the set of all n -dimensional real vectors, 2) $\mathbb{C}^n$, the set of all n -dimensional complex vectors, and 3) $P_n(F)$, the vector space of all polynomials of degree at most n .

Bilinear Mappings. Let V , W , and U be vector spaces over a field F .

A function

$$B: V \times W \rightarrow U$$

is called **bilinear** if it satisfies the following conditions:

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w),$$

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2),$$

$$B(\alpha v, w) = \alpha B(v, w),$$

$$B(v, \beta w) = \beta B(v, w)$$

for all vectors $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, and scalars $\alpha, \beta \in F$.

The tensor product is specifically designed to study such mappings.

3. Main part.

The tensor product of two vector spaces is defined through a universal property.

Let V and W be vector spaces over the same field F . A tensor product of V and W is a vector space denoted by $V \otimes W$ together with a bilinear map

$$\tau: V \times W \rightarrow V \otimes W$$

such that for every vector space U and every bilinear map

$$B: V \times W \rightarrow U,$$

there exists a unique linear map

$$\tilde{B}: V \otimes W \rightarrow U$$

satisfying

$$B = \tilde{B} \circ \tau.$$

This condition is called the **universal property** of the tensor product.

The image of a pair (v, w) under the map τ is written as

$$v \otimes w.$$

Such elements are called **elementary tensors**.

The universal property guarantees that every bilinear map can be represented uniquely as a linear map on the tensor product space. The tensor product can be constructed explicitly.

First, consider the free vector space generated by all ordered pairs (v, w) where $v \in V$ and $w \in W$.

Next, impose relations expressing bilinearity:

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w),$$

$$(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2),$$

$$(\alpha v, w) = \alpha(v, w),$$

$$(v, \beta w) = \beta(v, w).$$

After factoring out the subspace generated by these relations, we obtain the tensor product space $V \otimes W$.

This construction ensures that bilinearity is built directly into the structure of the tensor product. [1], [4]

Some properties of tensor products

Tensor products possess several important properties.

Bilinearity: for all vectors $v, v_1, v_2 \in V$ and $w, w_1, w_2 \in W$,

$$(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w,$$

$$v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2,$$

$$(\alpha v) \otimes w = \alpha(v \otimes w),$$

$$v \otimes (\alpha w) = \alpha(v \otimes w).$$

These identities follow directly from the defining relations.

Basis of a Tensor Product. Assume that $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ is a basis of V and

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ is a basis of W .

Then the set

$$\{v_i \otimes w_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

forms a basis of the tensor product space $V \otimes W$.

This theorem is fundamental because it allows tensor products to be studied using ordinary basis techniques.

One of the most useful properties is the dimension formula.

If V and W are finite-dimensional vector spaces, then

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Proof. Let $\dim(V) = m$ and $\dim(W) = n$. Since the basis of $V \otimes W$ contains

all tensors $v_i \otimes w_j$, there are exactly $m \times n$ such basis elements. Therefore,

$$\dim(V \otimes W) = mn.$$

The proof is complete.

Associativity. Tensor products satisfy the associative property up to natural isomorphism:

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U).$$

This means that the placement of parentheses does not affect the essential structure.

Commutativity. Tensor products are commutative up to isomorphism:

$$V \otimes W \cong W \otimes V.$$

The isomorphism is given by

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v.$$

Although the spaces are not literally equal, they are structurally equivalent.

Distributive Property. Tensor products distribute over direct sums:

$$V \otimes (W \oplus U) \cong (V \otimes W) \oplus (V \otimes U),$$

and

$$(V \oplus W) \otimes U \cong (V \otimes U) \oplus (W \otimes U).$$

This property simplifies many calculations in linear algebra and abstract algebra.

Examples for tensor products

Example 1. Consider $V = \mathbb{R}^2$ and $W = \mathbb{R}^3$. Since $\dim(V) = 2$ and $\dim(W) = 3$, the dimension formula gives $\dim(V \otimes W) = 6$. Consequently, $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$

A basis consists of $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, e_2 \otimes f_3$.

Example 2. Let $v = (1, 2)$ and $w = (3, 4)$. Then

$$v \otimes w = (1e_1 + 2e_2) \otimes (3e_1 + 4e_2).$$

Using bilinearity,

$$v \otimes w = 3(e_1 \otimes e_1) + 4(e_1 \otimes e_2) + 6(e_2 \otimes e_1) + 8(e_2 \otimes e_2).$$

This example illustrates how tensor products combine information from both vectors.

Tensor products play a fundamental role in many branches of mathematics, physics, and modern technology. They provide a powerful framework for combining algebraic structures and studying interactions

between different mathematical objects. In linear algebra, tensor products simplify the investigation of bilinear forms, multilinear mappings, and linear transformations by converting multilinear problems into linear ones. This makes them an essential tool in the study of vector spaces and their relationships. In differential geometry, tensor products are used to define tensor fields on smooth manifolds. Many important geometric objects, such as Riemannian metrics, differential forms, and curvature tensors, are naturally expressed through tensor products of tangent and cotangent spaces. Consequently, tensor products form the algebraic foundation of modern geometry and general relativity. Tensor products also have significant applications in quantum mechanics. The state space of a composite quantum system is represented by the tensor product of the state spaces of its individual components. If H_1 and H_2 are Hilbert spaces

corresponding to two quantum particles, then the state space of the combined system is given by $H_1 \otimes H_2$.

This construction is fundamental for describing quantum entanglement, one of the most important phenomena in quantum theory. In representation theory, tensor products are employed to construct new representations from existing representations of groups, rings, and algebras. They provide a systematic method for studying the structure of algebraic objects and their symmetries. Furthermore, tensor methods have become increasingly important in data science and machine learning. Modern applications include computer vision, signal processing, deep learning, recommendation systems, and multidimensional data analysis. Tensor-based techniques allow researchers to efficiently represent and process large-scale datasets with multiple dimensions, making them valuable tools in contemporary scientific computing and artificial intelligence. [6], [7]

Therefore, tensor products serve as a unifying concept that connects diverse areas of mathematics, physics, and computer science, highlighting their theoretical significance and practical usefulness.

Conclusion. The tensor product is one of the most powerful constructions in modern mathematics. It provides a universal framework for converting bilinear mappings into linear mappings and serves as the foundation of multilinear algebra. Through the universal property, tensor products simplify complex mathematical structures and make them easier to analyze. Several important properties of tensor products have been discussed, including bilinearity, associativity, commutativity, distributivity, and the dimension formula. Examples demonstrate how tensor products are constructed and used in practice. Furthermore, tensor products have numerous applications in mathematics, physics, engineering, and computer science.

Because of their broad applicability and elegant theoretical foundation, tensor products remain an indispensable tool in advanced mathematical research and scientific modeling.

REFERENCES:

1. Axler, S. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.
2. Lang, S. *Linear Algebra*. Springer, 1987.
3. Roman, S. *Advanced Linear Algebra*. Springer, 2008.
4. Dummit, D. S., and Foote, R. M. *Abstract Algebra*. Wiley, 2004.
5. Hungerford, T. W. *Algebra*. Springer, 1974.
6. Halmos, P. R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer, 1974.
7. Bourbaki, N. *Algebra I*. Springer, 1989.

MATEMATIK ANALIZ ELEMENTLARINI O‘QITISHDA HARAKATNING MO‘LJALLI ASOSINI SHAKLLANTIRISH

Madirimov Mamatsoli,

O‘zbekiston Milliy pedagogika universiteti professori

Koshnazarov Rasul Atabekovich,

O‘zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

Rajabov Ulug‘bek Tuychiyevich,

O‘zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

Omonov Olim Isoqovich,

O‘zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

Xayrullayev Davron Baxodir o‘g‘li,

O‘zbekiston Milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

rasulkoshnazarov@mail.ru

Annotatsiya. Maqolada ta’rif teorema va ta’riflarni taxlil qilishda harakatning mo‘ljalli asosi qanday amalga oshirilishi mumkinligi ko‘rib chiqilgan. Harakatning mo‘ljalli asosi bir nechta tiplarga bo‘linishi ularning farqi xar bir topshiriq uchun qaysini foydalanish muxim ekanligi yoritilib berilgan. Misol tariqasida ta’rif va teorema xamda uning taxlili HMA yordamida jadvalda tushunarli bayon etilgan.

Kalit so‘zlar: ta’rif, teorema, misol, jadval, bir o‘zgaruvchili funksiya, ketma ketlik limiti, funksiya limiti, faoliyat, harakat.

ФОРМИРОВАНИЕ ОРИЕНТИРОВОЧНОЙ ОСНОВЫ ДЕЙСТВИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Аннотация. В статье рассматривается, как может быть реализована ориентировочная основа действия при анализе определений, теорем и понятий. Ориентировочная основа действия подразделяется на несколько типов; раскрываются их различия, а также обосновывается, какой тип целесообразно использовать для каждого задания. В качестве примера анализ определения и теоремы с помощью ООД представлен в таблице в понятной форме.

Ключевые слова: определение, теорема, пример, таблица, функция одной переменной, предел последовательности, предел функции, деятельность, действие.

FORMATION OF THE ORIENTING BASIS OF ACTION IN TEACHING ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Abstract. The article examines how the orienting basis of action can be implemented in the analysis of definitions, theorems, and concepts. The orienting basis of action is divided into several types; their differences are explained, and the importance of choosing the appropriate type for each task is highlighted. As an example, the analysis of a definition and a theorem using the orienting basis of action is clearly presented in a table.

Keywords: definition, theorem, example, table, function of one variable, limit of a sequence, limit of a function, activity, action.

Kirish. Inson faoliyat usullarini va uslublarini, obyekt xossalarini, alomatlarini, hodisalar mexanizmlarini tavsiflovchi axborotni qabul qilish va qayta ishlash orqali unga mos faoliyat turlarini o‘zlashtiradi.

O‘zlashtirish fakti faoliyatni bajara olishda namoyon bo‘ladi. Bu faoliyat turli shakllarda – nutq shaklida, moddiy (predmetli) yoki aqliy-mavjud bo‘ladi, ammo u mo‘ljallovchi va bajaruvchi qismlardan tashkil topgan yagona faoliyat sifatida qoladi. Faoliyatning mo‘ljalli asosi bu aqliy harakatlar shaklida mavjud bo‘lgan bilimlardir, ko‘nikmalar esa faoliyatning nutq yoki moddiy shaklda namoyon bo‘ladigan bajaruvchi qismidir.

Shunday qilib, bilimlar va ko‘nikmalar aynan bitta, lekin turli shakllarda mavjud bo‘lgan faoliyatdir.

Aqliy harakatlarni va tushunchalarni bosqichma-bosqich shakllantirish nazariyasiga ko‘ra bilim va ko‘nikmalarni rejali shakllantirishni tashkillashtirish, ongli o‘zlashtirish tizimida harakatning mo‘ljalli asosi

(HMA) sxemalari markaziy o'rinni egallaydi. HMA ga quyidagilar kiradi: 1-faoliyat maqsadini aniq tushunish (nima hosil bo'lishi kerak);

2- dastlabki (berilgan) material bilimlarini olish (analiz ob'ekti, berilgan holda matematik fakt);

3-tadqiqot, instrumentariy bilan ishlash metodlarini egallash;

4-topshiriqning konkret rejasini va uni amalga oshirishning ketma-ketligini shakllantirish;

5-bajarilayotgan harakatlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligi haqida fikrlashga yordam beradigan nazorat topshiriqlarini egallash. Bular yaxlit holda talabaga ongli va reja asosida o'quv-kasbiy faoliyatning o'zaro shartlashgan uchta qismini-mo'ljallovchi, bajaruvchi, nazorat- bajarishga imkon beradi.

Ekspperimental tadqiqot HMA ni qo'llagan talabalarda odatdagi ta'lim usulida o'qitilgan talabalarga nisbatan afzalliklarini ko'rsatdi.

O'quv jarayonida qo'yilgan maqsadlarni amalga oshirish uchun HMA sxemalarini yaratish mustaqil ilmiy metodik masala hisoblanadi. HMA sxemalaridan foydalanish kasbiy faoliyatning zaruriy usullarini tizimli va boshqariladigan etib shakllantirishning majburiy sharti hisoblanadi.

P.Ya.Galperin tomonidan ishlab chiqilgan va N.F.Talyzina hamda uning o'quvchilari davom ettirayotgan aqliy harakatlar jarayonini bosqichma-bosqich shakllantirish nazariyasiga ko'ra, o'qish – faoliyatni rejalashtirish va amalga oshirish bo'yicha faoliyat, mo'ljallari hamda ahliy harakatlarni o'zlashtirishni anglatadi.

Aqliy harakatlar jarayonini o'rganish natijasida o'quvchilarda bilim va ko'nikmani shakllantirish uchun ular o'tishi kerak bo'lgan bosqichlarning quyidagi ketma-ketligi taklif etilgan edi:

1. O'quvchida zarur motivatsiyani paydo qilish. Bunda ichki motivatsiya tashqisiga nisbatan ishonchliroq.

Ko'p sonli zamonaviy psixologlar, pedagoglar va metodistlarning qayd etishicha (T.G.Bogdanova, K.V.Volkov, Z.I.Slepkan, E.D.Telegina, L.M.Fridman), aynan o'qishning motivatsiyasi bilimlar va mahorat tizimini shakllantirishning samaradorligini belgilaydi.

O'qishning motivatsiyasi – o'quvchilarni xatti-harakatini belgilashning murakkab doirasi bo'lib, o'quvchilarni motivatsiya doirasini o'zgartirishning asosiy manbai – bu dunyo bilan uni kengayib borayotgan aloqalarining murakkablashuvidir (N.A.Menchinskaya, G.S.Kostyuk, V.V.Davydov).

Shunday qilib, ko'nikma motivatsiyasini paydo etish talabadan o'quvchilarning o'quv faoliyatini barcha komponentlar birligida maqsadli ishlashdir, hamda o'qish motivatsiyasini rivojlantirishning asosiy yo'li o'quvchida o'z o'quv faoliyatiga faol munosabatni tarbiyalash, natijasida uni muvaffaqiyatli boshqarish uchun asos yaratish degani.

2. Harakatni mo'ljaldagi asosi chizmasini tushuntirish yoki ajratish. Harakatning mo'ljalli asosi (HMA) – “bu inson harakatni bajarish vaqtida haqiqatga tayanadigan shartlar tizimidir” [Galperin P.Ya. Umstvennye deystviya kak osnova formirovaniya mysli i truda // Voprosy psixologii, 1957.-№6.-S.58-69.].

Mazkur bosqichda o'quvchilarga harakat tarkibiga kiradigan mo'ljalli, ijrochi va nazorat operatsiyalari qanday hamda qaysi ketma-ketlikda bajarilishi ko'rsatiladi. O'qituvchi o'z aqliy harakatlarini eksteriorlashtirib, ularni o'quvchilarga moddiy yoki moddiylashtirilgan shaklda taqdim etadi. O'quvchi avval shakllantirilgan harakatlardan foydalanib, HMA ni tuzadi.

HMA ni o'quvchilar tomonidan o'zlashtirishning to'liqligi va usuliga ko'ra P.Ya.Galperin mo'ljalli asoslarning uchta turini va tegishli o'qitishning uchta turini ajratdi [Галперин П.Я. Умственные действия как основа формирования мысли и труда // Вопросы психологии, 1957.-№6.-С.58-69.].

Birinci tur HMA ning to'liqsizligi bilan tavsiflanib, harakatning va uni mahsulining namunasi ko'rinishida taqdim etilgan. HMA ning to'liqsizligi sinov va xatolarga olib keladi. Chunki harakatni bajarish usuli ko'rsatilmay, o'quvchi o'ni o'zi izlaydi. “Harakat vaziyat shartlari va sub'ektning ahvoli o'zgarishiga nisbatan juda nobarqaror hamda ... yangi vazifalarga o'tishda juda cheklangan” [Галперин П.Я. Умственные действия как основа формирования мысли и труда // Вопросы психологии, 1957.-№6.-С.58-69.].

Ikkinchisi harakatni tuluq HMA asosida bajarish bilan ajralib turadi. Ya'ni, HMA nafaqat harakat va uning mahsuli namunalaridan, balki harakatni qanday qilib to'g'ri bajarish bo'yicha batafsil ko'rsatmadan iborat. Birinci turdagi kabi, sinov va xatolar paydo bo'ladi, lekin endi ular tasodifiy hamda o'ziga xos emas.

Yangi vazifalarga o'tish ancha muhim, lekin har xil harakatlarda turlicha.

Uchinchi tur – aniq vaziyatda harakat usulini emas, balki vazifani tahlil qilishga o'qitish. To'liq HMA ning mavjudligi bunda yangi harakat hamda tushunchalarni sinov va xatolarsiz ifodalashni ta'minlaydi. “Harakatni boshidan o'zi mo'ljallangan sohaning barcha hodisalariga to'liq o'tishi kuzatiladi” [Галперин П.Я. Умственные действия как основа формирования мысли и труда // Вопросы психологии, 1957.-№6.-С.58-69.].

V.V.Davidov harakatlarning mo'ljalli asosini ikkinchi va uchinchi turlarning solishtirma tahlilini bajarib, mo'ljallangan asosning ikkinchi turi – bu hodisa darajasida, uning mohiyatning e'tiborsiz, mo'ljal

olish ekanligini ko'rsatdi. Mo'ljall olishning bunday turi empirik fikrlashni shakllantiradi. HMAning uchinchi turi – bu mohiyatga mo'ljall olish, nazariy fikrlashni shakllantirish yo'lidir. [Давыдов В.В. О двух основных путях развития мышления школьников // Материалы 4 Всесоюзного съезда Общества психологов. - Тбилиси, 1971.-С. 686-687.].

3. Harakatni moddiy yoki moddiylashtirilgan shaklda shakllantirish.

O'quvchilar harakatlarni tashqi moddiy yoki moddiylashtirilgan shaklda unga kiradigan barcha operatsiyalarni keng qamrovli bajarish bilan bajaradilar. Bunda faoliyatni moddiy shakli nutq bilan uyg'unlashib, o'quvchilar bajarilayotgan harakatni sharhlashlari lozim.

Mazkur bosqichda harakatlarni umumlashtirish maqsadida o'quvchilar bilan birga mazkur harakatni qo'llashning namunali hollarini aks ettiruvchi masalalarni yechish, lekin bir xil masalalarni ko'p soniga yo'l qo'ymaslik tavsiya etiladi, chunki bu holda harakat qisqartirilishi va avtomatlashtirilishi mumkin. O'quvchilar harakatni moddiy, keng qamrovli, materialni asosiy turlari doirasida umumlashtirilgan hamda operatsiyalarning barcha tarkibiga ko'ra ongli ravishda bajariladigan harakat sifatida o'zlashtiradilar.

4. Harakatni baland ovozda yoki yozma ravishda moddiy (yoki moddiylashtirilgan) vositalarga tayanmagan holda shakllantirish. Harakat tarkibidagi barcha operatsiyalar nutq shaklida o'zlashtirilishi lozim (boshlang'ich sinflarda baland ovozda, o'rta va yuqori sinflarda yozma qayd etish). Harakat bundan keyin umumlashtiriladi, lekin hali avtomatlashtirilgan va qisqartirilmagan bo'ladi. Quyidagi ketma-ketlik bajariladi: avval harakat "o'zining so'zi" bilan aytiladi, keyin asta - sekin ilmiy tilga o'tib, mazkur bosqichning pirovard natijasi hisoblanadi.

5. Harakatni ba'zi elementlarni ichida aytilgan holda shakllantirish. Mazkur va oldingi ikkita bosqichda o'quvchi o'ziga ma'lum bo'lgan HMA chizmasi asosida dasturning har bir qadami bajarilishini kuzatadi. Ushbu bosqichlar o'rtasida farq shundaki, moddiy (yoki moddiylashtirilgan) bosqichda o'quvchi amalda mazkur chizmadan foydalanadi va chizma uning ko'z oldida bo'ladi, keyingi bosqichlarda esa chizma olib qo'yiladi hamda o'quvchi dasturning alohida qadamlarini ovoz chiqarib yoki ichida yoddan gapirib o'tadi. Lekin, kerak bo'lganda, u chizmani ko'rish imkoniyatiga egadir.

6. Harakatni ichki, aqliy sifatida shakllantirish. "Mazkur bosqichda harakat tezkorlik bilan avtomatik holiga o'tadi, o'zini kuzatish uchun noqulayga aylanadi. Endi bu fikrlash harakati bo'lib, jarayon ko'rinmas, aql uchun esa mazkur jarayonning faqatgina mahsuli ochiq" [Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). - М.: Изд-во МГУ, 1984. - 344 с.].

Demak, bosqichlarni yuqorida keltirilgan ketma-ketligi matematik ko'nikma va mahoratni o'qitishning yuqori samaradorligini ta'minlaydigan aqliy harakatlarni shakllantirish jarayonini tashkil qilishga qo'yiladigan talablarni belgilaydi.

Faoliyatli yondashuvni amalga oshirishda mo'ljallar tizimi ta'lim mazmunining majburiy komponenti bo'lib, u kasbiy tayyorgarlik sifatini oshishiga yordam beradi. (В.В.Давыдов, Н.Ф.Талызина, С.И.Архангельский, В.П.Беспалько, И.Я.Лернер, М.Н. Скаткин, В.В.Краевский ва б.)

Orientirlar tabiati va mohiyatini tushunib olish uchun va matematik analizni o'qitishga nisbatan taxminiy sxemasini tuzish uchun harakatlarning mo'ljalli (orientirlovchi) asosini qarab chiqish lozim. Harakatlarning mo'ljalli asosi tarkibiga bilimlar kiradi, bu bilimlarsiz harakatni muvofaqiyatli bajarib bo'lmaydi. Boshqacha aytganda sub'ekt qanday harakatlarni bajarishi kerakligi, nima va qaysi tartibda bajarish kerakligini bilish zarur. Bundan tashqari, sub'ekt harakat haqida tasavvurga ega bo'lishi lozim.

Ta'lim oluvchi nafaqat matematika predmeti haqida, balki metodik xarakterdagi harakatlar haqidagi bilimlarni va bu harakatlarni tartiblash ko'nikmalarini va boshqalarni egallashi lozim. Harakatlarni mo'ljalli asos baholovchi bilimlar ham, ya'ni harakat nima uchun bajarilayotganligini bilish ham kiradi.

Harakatlarni mo'ljalli asosga (HMA) uch tipga bo'linadi va har bir tipga o'ziga xos o'qitish mos keladi.

Birinchi tip o'qitishning asosida sinov va xatolar metodi tashkil etadi. Bunda ta'lim oluvchi bajariladigan harakatlar haqida tasavvurga ega emas va qo'shimcha harakatning xarakterini ham bilmaydi. Bu orientir eng quyi pog'onasi hisoblanadi. Birinchi tipdagi HMA sxemasi to'la emas va talaba o'quv faoliyatini tarqoq boshqarish bilan xarakterlanadi. Bu degani teskari aloqa yo'q yoki juda sust ekanligini anglatadi. Odatda, birinchi tipdagi o'qitish malakasi past o'qituvchi yoki metodikani egallamagan o'qituvchi tashkil qilgan o'quv jarayoniga xos. Ammo bunday holatni yuqori malakali o'qituvchi muammoli vaziyatni yaratish maqsadida ham hosil qilish mumkin. Birinchi tipdagi HMAga mos keladigan topshiriqqa misol keltiramiz:

Ketma – ketlik va uning limiti mavzusidagi ketma – ketlik limiti ta'rifini qaraymiz.

Ta'rif. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a soni berilgan bo'lsin. Agar $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun n_0 nomer topilib, $\forall n > n_0$ larda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'laversa, a soni ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Masala. Umumiy holda ketma – ketlik limiti birga teng ekanligini isbotlang.

Talaba bu masalani yechishda o'z bilganicha chala berilgan HMA to'ldirishga harakat qiladi, o'z harakatlarining to'g'riligiga ishomaydi. U sinjd va xatolar yo'li bilan harakatlanadi. O'qituvchi esa ikki ma'noli holatda: bir tomondan masala qo'yilgan, uni yechish kerak; ikkinchi tomondan u talaba xarakatlarini nazorat qila olmaydi. Talabaning masalani to'g'ri yechishiga ishonchi yo'q. Natijada talabalarda bilimlarning past darajasi shakllanadi. Bunda, ba'zi talabalar masalani ijobiy hal qilishi istisno qilinmaydi, qolganlar o'zlashtirmovchilar qatorida qolaveradi.

Birinchi tipdagi o'qitishning an'anaviy metodikada etakchi hisoblanadi.

Ikkinchi tipdagi o'qitish HMA to'la sxemasi bilan xarakterlanadi. Bunday sxemalar bog'lanish bosqichida talabalarga tayyor ko'rinishda namuna shaklda yoki sxema shaklda beriladi. Yuqoridagi misolda HMA to'la sxema harakatlarni bajarish ketma-ketligi shakllanadi (sonning ketma – ketlik limiti ekanligi isbotlash sxemasi berilishi mumkin).

1 – sxema

Sonning ketma-ketlik limiti ekanligini isbotlang.

1. $|x_n - a|$ ayirmani tuzish;
2. $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni n ga nisbatan yechish;
3. kerak bo'lsa, tengsizlikni baholashdan foydalanish;
4. tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror natural $n_0(\varepsilon)$ sonni topish;
5. topilgan $n_0(\varepsilon)$ uchun ketma-ketlik limiti ta'rifining bajarilishini ko'rsatish.

Yuqorida aytilgan HMA sxemasini misollarda ko'rsatish lozim.

Masala. Quydagi limitni isbotlang:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n} = 1.$$

Avvalo ifodani limit qiymatidan ayiramiz:

$$\left| \frac{n-2}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-2-n}{n} \right| = \left| \frac{-2}{n} \right| = \frac{2}{n}.$$

Endi limit ta'rifidan foydalanamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin. Shunday n_0 natural son topish kerakki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\left| \frac{n-2}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsin.

Yuqorida

$$\left| \frac{n-2}{n} - 1 \right| = \frac{2}{n}$$

ekanligini ko'rdik. Demak,

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

bo'lishi uchun

$$n > \frac{2}{\varepsilon}$$

bo'lishi yetarli. Shuning uchun

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]$$

deb olish mumkin. U holda har bir $n > n_0$ uchun

$$n > \frac{2}{\varepsilon}$$

bo'ladi va bundan

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\left| \frac{n-2}{n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Bu esa limit ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n} = 1$$

ekanligini bildiradi.

Keltirilgan misoldan ko'rinadiki, HMA to'la sxemasini amalga oshirish:

- talabani har bir harakati bajarilishini nazorat qilishga;
- harakatlarni bajarishda yordam ko'rsatishga;
- talaba harakatini sxemani amalga oshirishning istalgan bosqichida baholashga imkon beradi.

Ikkinchi o'qitish tizimida o'qituvchi va talabani teskari aloqasi mavjud.

Quyida HMA to'la sxemalariga misollar keltiramiz. Bu sxemalar barcha matematik fanlarni o'qitishda foydalanish mumkin va asosiy matematik tasdiqlar va ta'riflar, teoremlar formulirovkasi, isbotlari, masalalar, masalalar echimlari va b. bilan bog'liq. Bu masalalar OTM matematika o'qitishining xususiy metodikasiga taalluqli.

Umumiy sxemani ketma – ketlik limiti ta'rifida ko'rsatamiz:

№	Umumiy holdagi harakatlar	Aniq harakatlar
1.	Belgilashlar kiritish, ularni yozish.	A) Ketma-ketlik limiti.
2.	Iloji boricha rasm, chizma chizish.	B) ε, n, n_0 tengsizliklari.
3.	Ta'rifning mantiqiy analizini bajarish. Buning uchun quyidagi savollarga javob berish kerak:	
	A) Qanday tushuncha aniqlanmoqda?	A) Ketma-ketlik limiti.
	B) Ta'rif qanday tushuncha va harakatlar yordamida aniqlanmoqda?	B) ε, n, n_0 tengsizliklari.
	V) Ta'rifda qanday alomatlar foydalanilmoqda?	V1) Ixtiyoriy ε uchun biror n_0 nomer mavjud. V2) ε — musbat son, n — cheksiz ko'p. V3) (
	G) Ta'rifdan qancha jumla ajratib olish mumkin? Har bir jumlaning alohida ayting, yozing.	G) 1) $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun n_0 topiladi. 2) $\forall n > n_0$ da (
	D) Ta'rifni struktura shaklida qanday yozish mumkin?	D) $(\forall \text{forall } \varepsilon > 0 \ \exists \text{exists } n_0 \ \forall \text{forall } n > n_0 :$
	Ye) Ta'rifni boshqacha mantiqiy ketma-ketlikda ayting.	E) a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists n_0$ topilib, $\forall n > n_0$ da (
	Misollar keltiring.	$x_n = 1, a = 1$
	Kontrmisol keltiring.	$x_n = (-1)^n, a = 0.$

Teorema formulirovkasi bilan ishlash uchun HMA.

Konkret misol sifatida yaqinlashuvchi ketma – ketlik limitining yagonaligi haqidagi teoremani olamiz.

№	Umumiy holdagi harakatlar	Aniq harakatlar
1.	Belgilashlar kiritish, zarur bo'lsa ularni yozish.	$\{x_n\}, a$
2.	Iloji boricha rasm, chizma chizish.	Ketma-ketlik hadlarining a songa yaqinlashishini tasvirlash mumkin.
3.	Teoremaning mantiqiy analizini bajarish. Buning uchun quyidagi savollarga javob berish kerak:	
	A) Qanday tushunchalar haqida gap boradi?	A) Ketma-ketlik va uning limiti haqida gap boradi.
	B) Bu tushunchalar haqida nimalar ma'lum?	B) Ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti mavjud bo'ladi: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$
	Nimani isbotlash kerak?	Ketma-ketlik limitining yagonaligini isbotlash kerak.
4.	Teoremda nechta tasdiq bor?	Teoremda bitta asosiy tasdiq bor: agar ketma-ketlik limiti mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladi.

№	Umumiy holdagi harakatlar	Aniq harakatlar
5.	Teoremani boshqacha shaklda ifodalang.	Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi.
6.	Teorema sharti va xulosasini ko'rsating.	Sharti: $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ Xulosasi: $a = b$.
7.	Teoremani qisqa ko'rinishda yozing.	Ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagona.

Ravshanki, yuqorida aytilgan, HMA sxemalarini teorema yoki ta'rifning tiplariga qarab o'zgartirish mumkin.

O'qishning uchinchi tipi ta'lim oluvchining HMA yaratish bo'yicha mustaqil faoliyati bilan xarakterlanadi. Bu o'qishning eng yuqori tipi bo'lib, uni talabalarning o'quv – tadqiqiy ishlariga, ba'zi hollarda ilmiy ishlarga mos qo'yish mumkin.

POTMdagi ta'lim jarayonida uchinchi tipdagi HMA yaratish va amalga oshirish juda murakkab masala bo'lib, hozirgi kunga qadar o'z echimini topmagan. Uni har bir fan, har bir mavzu, har bir mashg'ulot uchun metodik topshiriqlar yaratish orqali yechish mumkin.

Metodik topshiriq bu – talabani metodik harakatlarni bajarishga yo'naltiradigan topshirig'idir. Talabani mustaqil ravishda HMA yaratishi bu uning kasbiy jihatdan muhim natija bo'lib, talabani metodik tayyorgarligi darajasining yuqori ekanligini bildiradi.

Demak, matematika o'qituvchisi faoliyatining asosiy maqsadlaridan biri – bo'lg'usi matematika o'qituvchisini HMA to'la sxemasini yaratishga o'rgatishdan iborat. Bu holda HMA to'la sxemasini yaratish talaba uchun metodik topshiriq hisoblanadi. Bunday metodik topshiriqlar tizimi bo'lg'usi matematika o'qituvchisini professionalizmini shakllantirishning samarali vositasi bo'ladi. Quyidagi savol tug'iladi: Matematik analizni o'qitishda talabani HMA to'la sxemasini mustaqil tuzishga qanday o'rgatish mumkin?

Buning uchun quyidagi talablarga javob beruvchi metodik topshiriqlar tuzilishini ko'rish lozim:

1. Tizimlilik, ya'ni HMA tuzish bo'yicha har bir metodik topshiriq natijaviy maqsadga – o'qituvchini shakllantirishga – qaratilgan bo'lishi lozim;

2. Sodda topshiriqdan murakkab topshiriqqa ketma – ket o'tish;

3. Yaxlitlik (bir butunlik), bunda biz barcha matematik fanlarda HMA sxemalarini ishlab chiqishini nazarda tutamiz. Shuning uchun barcha kafedralarning hamjihatligi lozim;

4. HMA sxemalari tizimini qurishga dasturiy – maqsadli yondashuv metodidan foydalanish. Bu talabdan har bir mashg'ulot nafaqat axborot uzatish (reproduksiya), balki talabani aqliy faoliyat madaniyatini, mustaqil ishlashning metodik ko'nikmalari (malakalari)ni shakllantirishga yo'naltirilgan bo'lishi kerak. Bu so'nggi natija aqliy harakatlarni bosqichma – bosqich shakllantirishda mumkin bo'ladi.

Quyida metodik topshiriqlar sinflarini qaraymiz. Bu sinflar talabalarga tayyor HMA to'la sxemasini foydalanishdan o'zlari tomonidan tuzilgan yangi HMA to'la sxemalariga o'tishga yordam beradi.

Birinchi sinf – HMA tayyor standart to'la sxemalarini analiz qilish. Bunda HMA to'la sxemasining har bir bandining mohiyati va o'rni aniqlashtiriladi. Tahlilni bajarishda quyidagi savollar qaratiladi:

Agar sxemadan bir, ikki yoki bir nechta bandlarini olib tashlasa, u holda sxema haqida nima deyish mumkin? U to'raligicha qoladimi? Qaysi bandlarni chiqarib tashlash mumkin emas? Bunda nima sodir bo'ladi? Berilgan sxemada bandlar o'rnini almashtirish mumkinmi, bunda nima bo'ladi?

Ikkinchi sinf. Berilgan matematik holat uchun yozilgan to'la bo'lmagan, sxema asosida to'la sxemani qurish.

Masalan, sonning ketma – ketlik limiti ekanligini isbotlang sxemasida 1, 2, 4, 5 bandlarni u to'la bo'ladigan qilib yangi bandlar bilan to'ldirishni taklif qilish mumkin. Bu topshiriqning to'g'ri echimi tengsizlikni yechishda baholashdan foydalanish hisoblanadi.

Uchinchi sinf – HMA to'la sxemasini tanish. Bu holda talabaga HMA to'la sxemasi taklif etiladi, lekin qaysi matematik jumla taalluqli ekanligi aytilmaydi. Talaba bu jumlaning tayanch so'zlar yoki sxemaning vazifasiga ko'ra aniqlashi lozim.

Masalan,

- 1) funksiyaning kesmada uzluksiz ekanligini tekshiramiz;
- 2) funksiyaning kesma uchlaridagi qiymatlari ishoralarini aniqlaymiz;
- 3) aniqlangan ishoralarga qarab xulosa chiqaramiz.

To'rtinchi sinf – to'la bo'lmagan sxemani tanish va uni to'la sxemaga qadar to'ldirish. Talabaga to'la bo'lmagan sxema taklif etiladi, lekin qaysi jumlagi taalluqli ekanligi aytilmaydi. Talaba bu jumlangi topishi va sxemani to'ldirishi lozim.

Masalan, kasr funksiya maxraji va surati limitlarini hisoblaymiz. Agar maxraji va surati 0 ga intilsa, u holda surat va maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

Beshinchi sinf – berilgan HMA umumlashtirilgan matematik jumla uchun umumlashtirish.

Masalan, funksiyani elementar usullar bilan mo'ljallangan HMA to'la sxemasini funksiya limiti va uzluksizligi materiallardan foydalanib to'ldiramiz.

Oltinchi sinf – biror sinfga taalluqli matematik jumla uchun tuzilgan HMA to'la sxemasini ikkinchi sinfga taalluqli bo'lgan HMA bilan taqqoslash.

Yettinchi sinf – HMA to'la sxemasini mustaqil tuzish.

HMA sxemalari bilan bog'liq bo'lgan metodik topshiriqlarni bajarishda talabalarda tafakkurning asosiy shakllari: analiz, sintez, umumlashtirish, taqqoslash, induksiya, deduksiya, analogiya, abstraktlashtirish, konkretlashtirish, klassifikatsiyalash, modellashtirish va b. rivojlanadi.

Yuqorida aytilgan sxemalar va metodik topshiriqlar sinflaridan 1, 2, 3 lar analizni rivojlantirishga, 5 umumlashtirishni, analogiyani rivojlantirishga 6 metodik topshiriqlar yordam beradi.

HMA sinflarini murakkabligi va foydalanish maqsadigi qarab, saralab chiqish mumkin. Masalan, birinchi kursda asosan HMA tayyor to'la sxemalari qaratiladi. Ularni o'rganish va mustahkamlash amalga oshiriladi. Bunda talabalarda boshlang'ich kasbiy ko'nikmalar shakllanadi. Yuqori kurslarga o'tishi bilan ikkinchi tip o'qishdan uchinchi tipga o'tish masalalari qaratiladi. O'qishini tugatish jarayonida ko'pgina talabalar murakkab ijodiy topshiriqlarni yechishga qodir bo'ladi. Quyidagilarni xulosalash mumkin:

- HMA to'la sxemasini ishlab chiqish matematik jumlangi tanlashga bog'liq emas (murakkabligi, qaysi matematik fanga tegishli ekanligiga bog'liq emas);

- HMA sxemalari bilan bog'liq metodni topshiriqlarni bajarish faoliyatida talabalarining tafakkuri rivojlanishiga va matematik materialdan o'zlashtirishga imkon beradi;

- Maxsus matematik fanlarini o'rganish jarayonida HMA sxemalari bilan bog'liq metodik topshiriqlarni bajarish bo'yicha talaba faoliyati uning metodik ko'nikma va malakalarini rivojlantirishga imkon beradi;

- Matematikani o'rganish jarayonida HMA to'la sxemasini yaratish bo'yicha talaba faoliyati talabaning ijodiy o'sishiga va bilim sifatini oshishiga imkon beradi.

Xulosa. Shunday qilib, matematik analizni o'rganishda HMA sxemasini yaratish matematik analizning tanlangan mavzusini, o'qitishga kontekstli yondashuvning predmetli tashkil etuvchisini amalga oshirishga imkon beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Вербицкий А.А. Контекстное обучение в компетентностном подходе // Высшее образование в России. №11, 2006. с.39-45

2. Эрднеев П.М., Эрднеев Б.П. Укрепление дидактических единиц в обучении математике. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.

3. Эрднеев П.М. УДЕ как технология обучения. – М.: Просвещение, 1992. – 287 с

4. Ястребов А.В. Научное мышление и учебный процесс – параллели и взаимосвязи. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 1997. – 137 с.

MICROLOCAL ANALYSIS OF THE WAVE FRONT SET FOR DISTRIBUTIONS WITH
COMPACT SUPPORT

Juraqulov Abdulla Juraqul ugli,
Assistant at the Samarkand Branch of
the Tashkent University of Information Technologies
named after Muhammad al-Khwarizmi
abdullajuraqulov4@gmail.com
Juraqulov Umar Juraqul ugli,
Teacher at School No.28 of Ishtixon District
umarjoraqulov273@gmail.com

Abstract. This research investigates the fundamental properties of distributions, emphasizing their characterization through Fourier analysis. The study introduces and examines key mathematical constructs, such as asymptotic vanishing and non-vanishing cones, to define the wave front set of a distribution. By exploring the intersection of topological and functional attributes, this work establishes a formal mathematical basis for understanding the underlying structure of wave fronts.

Keywords: distribution theory, Fourier analysis, Asymptotic cones, Wave front set, Microlocal analysis.

KOMPAKT TASHUVCHILI TAQSIMOTLAR TO'LQIN FRONTINING MIKROLOKAL
TAHLILI

Annotatsiya. Ushbu tadqiqot taqsimotlarning fundamental xossalarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, ularning Furiye tahlili orqali xarakterlanishiga alohida e'tibor qaratadi. Taqsimotning to'lqin frontini aniqlash uchun maqolada asimptotik nol va asimptotik nolmas konuslar kabi muhim matematik konstruksiyalar kiritilgan va tahlil qilingan. Taqsimotlarning topologik va funksional xususiyatlari kesishishini o'rganish orqali ushbu ish to'lqin frontlarining ichki tuzilishini tushunish uchun qat'iy matematik asos yaratadi.

Kalit so'zlar: taqsimotlar nazariyasi, Furiye tahlili, Asimptotik konuslar, To'lqin fronti, Mikrolokal tahlil.

МИКРОЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО ФРОНТА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С
КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ

Аннотация. В данной статье рассматриваются некоторые свойства пространства распределений, в частности, их анализ посредством преобразования Фурье, понятия конусов направлений асимптотического нуля и асимптотических ненулевых направлений, а также такой важный математический объект, как волновой фронт распределения. Основное внимание уделяется топологическим и функциональным свойствам распределений, что позволяет глубоко исследовать структуру волнового фронта на строгой математической основе.

Ключевая слова: Распределение, Преобразование Фурье, Асимптотически нулевое направление, Ненулевой асимптотический конус направлений, Волновой фронт, Обратное преобразование Фурье.

Introduction. This paper investigates the concept of the wave front set for distributions in the space $\mathcal{E}'(X)$ within the framework of microlocal analysis. The primary focus is on examining the smoothness of distributions in the dual space of $\mathcal{E}(X)$ through the asymptotic behavior of their Fourier transforms at infinity. A closed set consisting of asymptotic non-vanishing directions of the distribution on the unit sphere is defined, through which the wave front set is established. This construction is presented using simplified versions of the definitions proposed by Lars Hörmander. Estimates derived from the Paley–Wiener–Schwartz theorem and proofs of relevant assertions are provided. This research serves to further explore theoretical issues related to the microlocal analysis of linear differential equations.

1. Preliminaries

Let $\mathcal{E}(X)$ denote the topological linear space of infinitely differentiable functions defined on an open set $X \subset \mathbb{R}^n$, equipped with the topology of uniform convergence of the functions and all their derivatives on any compact set in X . The dual of this space is denoted by $\mathcal{E}'(X)$, and this space coincides with the space of distributions with compact support in X .

According to Theorem 2.3.1 in [1], $\mathcal{E}'(X)$ can be identified with the distributions in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ whose support is located in X . Therefore, if X is an arbitrary open subset of $\mathbb{R}^n$, the notation $\mathcal{E}'(X)$ denotes distributions in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ with support contained solely in X .

If $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, we can verify whether the distribution u belongs to $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ via its Fourier transform $\hat{u}$. It is known that if $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, then the following inequality holds. This fact is based on Lemma 7.1.3 in [1].

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Conversely, if the above inequality (1) holds for $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, then $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, which is proved using the inverse Fourier transform [1, p. 181]. We define the set S_{n-1} as the unit sphere in the space $\mathbb{R}^n$ centered at the origin. That is, $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Definition: Suppose $V \subset S_{n-1}$ is an open set on the sphere (with respect to the induced topology). If for any open set $U \subset \subset V$ and $\forall N \in \mathbb{N}$ there exists a constant C_N such that for $\forall \omega \in U$ and any $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$|\hat{u}(\lambda\omega)| \leq \frac{C_N}{\lambda^N} \quad (2)$$

the inequality holds, then $\hat{u}$ is said to be asymptotically vanishing in V . We write this relation (2) as $\hat{u}(\lambda\omega) = O(\lambda^{-\infty})$ and assume it holds uniformly in U .

2. Main Propositions and Their Proofs

Proposition 1: If $\hat{u}$ is asymptotically vanishing in an open set $V \subset S_{n-1}$, then for any $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, (φu) is also asymptotically vanishing in V .

Proof: First, we take an arbitrary open set $U \subset \subset V$ and show that inequality (2) holds uniformly in U for $\widehat{\varphi u}$. Initially, we write the integral representation of $\widehat{\varphi u}$ and split it into two parts:

$$\widehat{\varphi u}(\lambda\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\varphi}(\eta) d\eta = \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} + \int_{|\eta| \geq c|\lambda|} \quad (3)$$

Here, the number c satisfying $0 < c < 1$ will be chosen later. We estimate the two integrals on the right-hand side of equation (3) separately. Suppose U_1 is an open set containing U and compactly embedded in V . We choose the number $0 < c < 1$ such that whenever $\left| \frac{\eta}{\lambda} \right| < c$ and for $\forall \omega \in U$,

$$\frac{\omega - \frac{\eta}{\lambda}}{\left| \omega - \frac{\eta}{\lambda} \right|} \in U_1$$

the relation holds. Then we can perform the following estimates:

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} \hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\varphi}(\eta) d\eta \right| &\leq \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} |\hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\varphi}(\eta)| d\eta \leq \\ &\leq C_N C_M \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} \left(1 + \lambda \left| \omega - \frac{\eta}{\lambda} \right| \right)^{-N} (1 + |\eta|)^{-M} d\eta \leq \\ &\leq C_N C_M \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} (1 + (1 - c)|\lambda|)^{-N} (1 + |\eta|)^{-M} d\eta \leq C_{1N} (1 + |\lambda|)^{-N} \end{aligned}$$

Thus, under the above conditions, the following estimate is valid:

$$\left| \int_{|\eta| \leq c|\lambda|} \hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\varphi}(\eta) d\eta \right| \leq C_{1N} (1 + |\lambda|)^{-N} \quad (4)$$

Next, we estimate the second integral. For $\hat{u}$, according to the Paley-Wiener-Schwartz theorem, the following inequality:

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M e^{c|Im \xi|}, \quad M \geq 0 \quad (5)$$

is valid for an arbitrary $\xi \in \mathbb{C}^n$ and is independent of C . Since $\xi \in \mathbb{R}^n$, inequality (5) takes the following form:

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M, \quad M \geq 0.$$

Now, using the last inequality above, we estimate the second integral on the right-hand side of equation (3):

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{|\eta| \geq c|\lambda|} \hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\phi}(\eta) d\eta \right| \leq C \int_{|\eta| \geq c|\lambda|} (1 + |\lambda\omega - \eta|)^M (1 + |\eta|)^{-M-N-n} d\eta \leq \\
 & \leq C \int_{|\eta| \geq c|\lambda|} (1 + |\lambda| + |\eta|)^M (1 + |\eta|)^{-M-N-n} d\eta \leq \\
 & \leq C \int_{|\eta| \geq c|\lambda| > 1} \left(1 + \left(\frac{1}{c} + 1\right) |\eta|\right)^M (1 + |\eta|)^{-M-N-n} d\eta \leq \\
 & \leq C_1 \int_{|\eta| \geq c|\lambda| > 1} |\eta|^{-N-n} d\eta \leq C_2 |\lambda|^{-N}
 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\left| \int_{|\eta| \geq c|\lambda|} \hat{u}(\lambda\omega - \eta) \hat{\phi}(\eta) d\eta \right| \leq C_2 |\lambda|^{-N} \quad (6)$$

Estimates (4) and (6) complete the proof of the proposition.

Proposition 2: Suppose $V_\alpha \subset S^{n-1}$ for $\alpha \in I$ (where I is an index set) are open sets, and for $\forall \alpha \in I$, $\hat{u}$ is asymptotically vanishing in V_α . Then $\hat{u}$ is also asymptotically vanishing in $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha$.

Proof: Suppose $\bar{U} \subset \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$ for $\alpha \in I$ (where I is an index set), and let $U \subset \subset \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$. From the compactness of the sphere S^{n-1} , the compactness of the set $U \subset \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$ follows. According to the Heine-Borel lemma, from any open cover of $\bar{U}$, we can extract a finite subcover $\bar{U} \subset \cup_{\beta=1}^N V_\beta$. According to the theorem in [3, p. 95], there exists a family of functions with the following properties:

$\omega_\beta(x) \in C_0^\infty(V_\beta)$ (i.e., $\omega_\beta(x)$ is a smooth function with compact support in V_β).

For any $x \in \bar{U}$, $\sum \omega_\beta(x) = 1$.

For any $x \in \bar{U}$, $0 \leq \omega_\beta(x) \leq 1$.

Now, we extend the function ω_β as a positively homogeneous function of degree zero as follows:

$$\tilde{\omega}_\beta(\xi) = \omega_\beta\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right), \xi \neq 0.$$

Obviously, $\tilde{\omega}_\beta(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\text{supp } \tilde{\omega}_\beta \subset \{\lambda V_\beta\}_{\lambda > 0}$, and for any $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, the following equality holds:

$$\widehat{u}(\xi) = \sum_{\beta=1}^N (\tilde{\omega}_\beta \hat{u})(\xi) \quad (7)$$

Considering that $\hat{u}$ is asymptotically vanishing in each V_β , we can easily see that $\tilde{\omega}_\beta \hat{u}$ is also asymptotically vanishing in V_β . Then, based on equation (7) above, $\hat{u}$ is also asymptotically vanishing in U . Recall that $U \subset \subset \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$ was chosen as an arbitrary open set. Thus, according to the definition, the distribution is asymptotically vanishing in the set $\cup_{\alpha \in I} V_\alpha$. The proposition is proved.

From this, it can be concluded that there exists a unique maximal open set V in S^{n-1} where $\hat{u}$ is asymptotically vanishing (i.e., if $\hat{u}$ is asymptotically vanishing in some open set W , the relation $W \subset V$ holds). Now, let $V \subset S^{n-1}$ be the maximal open set where $\hat{u}$ is asymptotically vanishing. We define the cone $\Sigma(u)$ as follows:

$$\Sigma(u) = \mathbb{R}^n \setminus \lambda V, \quad \lambda \geq 0$$

$\Sigma(u)$ is called the set of asymptotic non-vanishing directions. Now, we introduce the concept of the asymptotic non-vanishing cone of a distribution at a point. Suppose $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\phi(x_0) \neq 0$) is some function. We denote by V_ϕ the maximal open set where $\widehat{\phi u}$ is asymptotically vanishing. Now, we introduce the following open set depending on the point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and u :

$$V_{x^0} = \bigcup_{\{\phi: \widehat{\phi u} - V_\phi \text{ da asimptotik nol}, \phi(x^0) \neq 0\}} V_\phi \quad (8)$$

Definition: The following set

$$\Sigma_{x^0}(u) = \left(\lambda (S^{n-1} \setminus V_{x^0}) \right)_{\lambda > 0} \quad (9)$$

is called the asymptotic non-vanishing cone of the distribution u at the point x_0 . The above definition is equivalent to the definition given in [1, p. 253].

Definition: If $u \in \mathcal{E}'(X)$, then the closed subset of $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ defined as follows:

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \xi \in \Sigma_x(u)\}$$

is called the wave front of the distribution u . Now, we consider the problem of characterizing the asymptotic cone at a point.

Proposition 3: For a distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, the following equality holds:

$$\Sigma_{x^0}(u) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Sigma \left(\omega \left(\frac{\cdot - x^0}{\varepsilon} \right) u \right) \quad (10)$$

Here, $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and is defined as follows:

$$\omega(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 1 \\ 0, & |y| \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

Proof: According to the definition, the asymptotic non-vanishing cone of the distribution u at the point x^0 is defined by the equation:

$$\Sigma_{x^0}(u) = \left(S^{n-1} \setminus \bigcup_{\{\phi: \widehat{\phi u} - V_\phi \text{ da asymptotik nol}, \phi(x^0) \neq 0\}} V_\phi \right) \mathbb{R}_+ \quad (12)$$

We introduce the following notation:

$$\tilde{\Sigma}_{x^0}(u) = \left(S^{n-1} \setminus \bigcup_{\varepsilon} U_\varepsilon \right) \mathbb{R}_+ \quad (13)$$

where $U_\varepsilon \subset S^{n-1}$ is the maximal open set such that $\omega \left(\frac{\cdot - x^0}{\varepsilon} \right) u|_{U_\varepsilon}$ is asymptotically vanishing in U_ε . If we show the equality:

$$\Sigma_{x^0}(u) = \tilde{\Sigma}_{x^0}(u) \quad (14)$$

we will have proved the proposition. It is self-evident that the relation $\Sigma_{x^0}(u) \subset \tilde{\Sigma}_{x^0}(u)$ holds. Because for $\forall \varepsilon > 0$ $\omega \left(\frac{x - x^0}{\varepsilon} \right) \Big|_{x=x^0} = 1$. Now, we will show that $\Sigma_{x^0}(u) \supset \tilde{\Sigma}_{x^0}(u)$.

For any fixed function $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\phi(x^0) \neq 0$), there exists a number $\varepsilon > 0$ such that for any $x \in B(x^0, 4\varepsilon)$ (where $B(x^0, 4\varepsilon)$ is an open ball of radius 4ε centered at x^0), the inequality

$$|\phi(x)| \geq \frac{|\phi(x^0)|}{2} > 0 \text{ holds. Let the function } \phi_\varepsilon(x) \text{ be:}$$

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{\omega \left(\frac{x - x^0}{\varepsilon} \right)}{\phi(x)}$$

Obviously, $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $\phi_\varepsilon(x^0) = \frac{1}{\phi(x^0)} \neq 0$. If arbitrary $\omega \in V_\phi$, i.e., $(\phi u)(\lambda \omega) = O(\lambda^{-\infty})$ is asymptotically vanishing, then according to Proposition 1, the relation $\widehat{\phi u}(\lambda \omega) = O(\lambda^{-\infty})$ is valid. Taking into account that

$$\widehat{\phi u \phi_\varepsilon}(\lambda \xi) = O(\lambda^{-\infty}) \quad (16)$$

we can write equation (16) as follows:

$$(\phi \phi_\varepsilon)(x) = \omega \left(\frac{x - x^0}{\varepsilon} \right)$$

Thus, we arrive at $V_\phi \subset U_\varepsilon$. From this, it follows that for any function $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\phi(x^0) \neq 0$), we can write:

$V_\phi \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$ the relation holds. From this, we arrive at the relation:

$$\bigcup_{\phi} V_\phi \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon \quad (17)$$

Using relation (17), we arrive at the following relation:

$$\left(S^{n-1} \setminus \bigcup_{\phi} V_\phi \right) \supset \left(S^{n-1} \setminus \bigcup_{\varepsilon} U_\varepsilon \right) \quad (18)$$

From this, the relation $\Sigma_{x^0}(u) \supset \tilde{\Sigma}_{x^0}(u)$ follows. Naturally, from relations (15) and (19), equation (14) follows. The proposition is proved.

Thus, the asymptotic non-vanishing directions at a point can be determined through the dilations of a single function. These results were presented at the international scientific-theoretical conference "Current Problems of Physics, Mathematics, and Artificial Intelligence Technologies" (see [4]).

REFERENCES:

1. *Lars Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983, 1990 Printed in the USA.
2. *Vladimirov V. S., Zharinov V. V. Equations of Mathematical Physics. Textbook for universities. 2nd ed., stereotypic.* - M.: FIZMATLIT, 2004.
3. *Fedoryuk M. V. Saddle-point method.* 1977. 368p.
4. "Current problems of physics, mathematics, and artificial intelligence technologies" // International scientific-theoretical conference, Bukhara, May 16-17, 2025.

UCH NUQTALI CHEGARAVIY MASALALAR UCHUN GRIN FUNKSIYASI

Boltayev Asliddin Askar o'g'li,

Buxoro davlat universiteti dotsenti

asliddinboltayev@mail.ru

Samadova Feruzabonu Muxammadovna,

Buxoro davlat universiteti talabasi

toxtagulkarimova8@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada uch nuqtali chiziqli chegaraviy masalalar uchun Grin funksiyasini qurishning umumiy algoritmi tadqiq etilgan. Ishda chiziqli differensial operatorlarning chegaraviy shartlarini inobatga olingan holda, uchta turli ko'rinishdagi chegaraviy masalalar tahlil qilingan. Bunda birinchi hol uchun Grin funksiyasini aniq ko'rinishda qurish bosqichlari batafsil bayon etilgan va qolgan hollarda shu usul asosida natijalar keltirilgan. Taklif etilayotgan algoritm ko'p nuqtali masalalarning yechimlarini integral ko'rinishda tasvirlashda va mos spektral muammolarni o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: differensial operator, uch nuqtali chegaraviy masala, Grin funksiyasi, differensial tenglama, chegaraviy shartlar.

GREEN'S FUNCTION FOR THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Abstract. This paper investigates a general algorithm for constructing the Green's function for three-point linear boundary value problems. Taking into account the boundary conditions of linear differential operators, three distinct types of boundary value problems are analyzed. For the first case, the step-by-step procedure for the explicit construction of the Green's function is detailed, and for the remaining cases, the corresponding results are presented based on this method. The proposed algorithm serves as a foundation for representing the solutions of multi-point problems in integral form and for studying related spectral problems.

Keywords: differential operator, three-point boundary value problem, Green's function, differential equation, boundary conditions.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ТРЁХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. В данной статье исследуется общий алгоритм построения функции Грина для трёхточечных линейных краевых задач. С учётом граничных условий линейных дифференциальных операторов проанализированы три различных типа краевых задач. Для первого случая подробно изложены этапы явного построения функции Грина, а для остальных случаев приведены соответствующие результаты, полученные на основе данного метода. Предложенный алгоритм служит основой для представления решений многоточечных задач в интегральной форме и изучения соответствующих спектральных задач.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, трёхточечная краевая задача, функция Грина, дифференциальное уравнение, граничные условия.

Masalaning kelib chiqishi va qo'yilishi. Differensial tenglamalar uchun uch nuqtali chegaraviy masalalar muhandislikning ko'plab dolzarb muammolarini, xususan, sanoatda oraliq tayanchga ega elastik to'sinlarning deformatsiyasini [1], ko'p qatlamli muhitlardagi issiqlik o'tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirish natijasida vujudga kelgan [2]. Uch nuqtali chegaraviy masalaga mos modellar jarayonning nafaqat chekka nuqtalaridagi, balki obyekt ichidagi dinamik nuqtadagi holatini ham inobatga olish zaruriyatidan kelib chiqadi. Shu sababli klassik ikki nuqtali masalalardan umumiyroq hisoblanadi. Ushbu masalalarni fundamental tadqiq etish, ularning yechimlarini integral ko'rinishda tasvirlash va mos spektral masalalarni o'rganishda Grin funksiyasi usuli eng samarali usuldir.

Chiziqli ko'p nuqtali masalalarning nazariy asoslari va yechimlarining mavjudligi V.A. Il'in va E.I. Moiseev [3], C.P. Gupta [4] kabi olimlar tomonidan faol o'rganilgan. Chiziqli bo'lmagan ba'zi hollarda musbat yechimlar mavjudligi R. Ma [5] va B. Liu [6] kabi tadqiqotchilar tomonidan Grin funksiyasining xossalari yordamida ko'rsatib berilgan. Mavjud adabiyotlarda ko'p nuqtali masalalar uchun Grin

funksiyasining mavjudligi asosan isbotlangan bo'lib, turli xil chegaraviy shartlarga ega differensial operatorlar uchun ushbu Grin funksiyasini aniq analitik ko'rinishda qurishning konstruktiv algoritmlari yetarlicha yoritilmagan. Ushbu maqolada aynan uch nuqtali chegaraviy masalalar tahlil qilinib, ular uchun Grin funksiyasini qurishning universal algoritmi taklif etiladi.

Differensial operatorning Grin funksiyasi: Bizga oddiy differensial tengamalar kursidan ma'lumki [7], ixtiyoriy

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ l(u) = 0 \end{cases}$$

chegaraviy masala tirivial yechimga ega, bu yerda Lu –differensial operator, $l(u)$ –chegaraviy shartlar. Ushbu masalaga mos bir jinsli chegaraviy shartlar va bir jinslimas tenglama uchun trivial bo'lmagan yechimini topish uchun ushbu masalaning Grin funksiyasini qurish zarur. Ba'zi sodda uch nuqtali masalalar uchun Grin funksiyasini qurish algoritmini keltirsak. Bizga

$$Lu = u'''$$

differensial operator berilgan bo'lsin. Ushbu

$$Lu = 0 \quad (1)$$

$$u(0) = u'(a) = u''(1) = 0 \quad (2)$$

uch nuqtali chegaraviy masala uchun Grin funksiyasini qurish algoritmini keltiraylik, bu yerda, $0 < a < 1$ bo'lib $[0,1]$ kesmani $[0,1] = [0,a] \cup [a,1]$ kesmalarga ajratib olamiz. Bizga ma'lumki, uch nuqtali chegaraviy shartlar umumiy holda $i = 1,2,3$ uchun:

$$l_i(u) = \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) + \alpha_3 u''(0) + \beta_1 u(a) + \beta_2 u'(a) + \beta_3 u''(a) + \gamma_1 u(1) + \gamma_2 u'(1) + \gamma_3 u''(1)$$

ko'rinishida yozishda qo'yiladi. Hisoblashlar aniq va sodda bo'lishi uchun (2) xususiy holni ko'rib chiqamiz. (1), (2) chegaraviy masalaning Grin funksiyasini quyidagi:

$$G(t,s) = \begin{cases} G_1(t,s), & s \in [0,a] \\ G_2(t,s), & s \in [a,1] \end{cases} \quad (4)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $G_1(t,s)$ va $G_2(t,s)$ lar mos ravishda $[0,a]$ va $[a,1]$ oraliqlaridagi ikki nuqtali masalalarning Grin funksiyalari, ya'ni $G_1(t,s)$ funksiya:

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u(0) = u'(a) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

masalaning va $G_2(t,s)$ esa:

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ u'(a) = u''(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

masalaning Grin funksiyasi. Endi (5) masalaning Grin funksiyasini [7] adabiyotdan foydalanib topib olamiz:

(K_1) $G_1(t,s)$, $t \in [0,1]$ da uzluksiz;

(K_2) $G_1(t,s)$, $t \in [0,1]$ da uzluksiz;

(K_3) $G_1(t,s)$ funksiya $t = s$ nuqtada 1 sakrashga ega;

(K_4) $LG_1 = 0$;

(K_5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi;

shartlar o'rinli bo'lishini tekshiramiz. (K_4) shartni qanoatlantirishi uchun $G_1(t,s)$ funksiya $[0,s]$ va $(s,a]$ oraliqlarda tenglamaning yechimi bo'lishi kerak. Demak:

$$Lu = u''' = 0$$

tenglama uchun:

$$u'' = 2c$$

$$u' = 2ct + c_1$$

$$u = ct^2 + c_1t + c_2$$

yechimdan foydalanib:

$$G(t,s) = \begin{cases} A_1 t^2 + A_2 t + A_3, & 0 \leq t \leq s \\ B_1 t^2 + B_2 t + B_3, & s \leq t \leq a \end{cases} \quad (7)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Endi (K_1) shartdan:

$$A_1 s^2 + A_2 s + A_3 = B_1 s^2 + B_2 s + B_3$$

(K_2) shartdan:

$$2A_1 s + A_2 = 2B_1 s + B_2$$

(K_3) shartdan:

$$2B_1 - 2A_1 = 1$$

(K_5) shartdan esa:

$$A_1 \cdot 0^2 + A_2 \cdot 0 + A_3 = 0,$$

$$2B_1 \cdot a + B_2 = 0$$

tengliklarni olamiz. Bu yerda 5 ta chiziqli tenglama va 6 ta no'malum mavjud algebraik sistema hosil bo'ldi, bundan:

$$\begin{cases} A_1 = C - \frac{1}{2}; & A_2 = -2aC + S; & A_3 = 0; \\ B_1 = C; & B_2 = -2Ca; & B_3 = +\frac{S^2}{2} \end{cases}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ko'rinib turibdiki, (5) masalaning (7) ko'rinishidagi Grin funksiyasi:

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \left(C - \frac{1}{2}\right)t^2 - (2aC - s)t, & 0 \leq t \leq s \\ Ct^2 - 2aCt + \frac{s^2}{2}, & s \leq t \leq a \end{cases} \quad (8)$$

ko'rinishini oladi. Yuqorida keltirilgani kabi (6) masalaning $G_2(t, s)$ Grin funksiyasini ham

$$G_2(t, s) = \begin{cases} C_1 t^2 + C_2 t + C_3, & a \leq t \leq s \\ D_1 t^2 + D_2 t + D_3, & s \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

ko'rinishida qidiramiz. $(K_1) - (K_5)$ shartlaridan yuqoridagi kabi foydalanib, ushbu:

$$\begin{cases} (D_1 - C_1)s^2 + (D_2 - C_2)s + D_3 - C_3 = 0 \\ 2(D_1 - C_1) = 1 \\ 2(D_1 - C_1)s + D_2 - C_2 = 0 \\ 2C_1 a_2 + C_2 = 0 \\ 2D_1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Sistemaning yechimi

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2}; & C_2 = a_2; & C_3 = D; \\ D_1 = 0; & D_2 = a_2 - s; & D_3 = D + \frac{s^2}{2} \end{cases}$$

ko'rinishida ifodalanishini ko'rish qiyin emas. Bu yechimdan foydalanib, (9) tenglikni quyidagi ko'rinishida yozishimiz mumkin:

$$G_2(t, s) = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + a_2 t + D, & a \leq t \leq s, \\ (a_2 - s)t + d + \frac{s^2}{2}, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Endi $G(t, x)$ Grin funksiyasi $s \in [0, 1]$ da uzluksiz ekanligidan foydalaniladigan bo'lsak, $s = a$ nuqtada ham uzluksizlik bajarilishi kerak. Shu sababli $s = a$ nuqtada $G_1(t, s)$ ning $t \in [s, a]$ va $G_2(t, s)$ ning $t \in [a, s]$ oraliqlaridagi qiymatlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Demak biz ushbu:

$$-\frac{a^2}{2} + a \cdot a + D = Ca^2 - 2aC \cdot a + \frac{a^2}{2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$a^2 C + D = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik $\forall a \in (0, 1)$ da o'rinli bo'lishi uchun $C = 0$ va $D = 0$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak biz:

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & s \in [0, a) \\ G_2(t, s), & s \in (a, 1] \end{cases} = \begin{cases} s \in [0, a) : \begin{cases} ts - \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq s \\ \frac{s^2}{2}, & s \leq t \leq a \end{cases} \\ s \in (a, 1] : \begin{cases} at - \frac{t^2}{2}, & a \leq t \leq s \\ \frac{s^2}{2} - ts + at, & s \leq t \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Grin funksiyasini hosil qilamiz.

Misol 1. Ushbu

$$\begin{cases} Lu = u'''(t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = u'''(\eta) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

bir jinsli chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & s \in [0, \eta] \\ G_2(t, s), & s \in [\eta, 1] \end{cases} = \begin{cases} s \in [0, \eta] : \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s, \\ t - \frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}, & s \leq t \leq \eta, \end{cases} \\ s \in [\eta, 1] : \begin{cases} \frac{t^2}{2} - ts, & \eta \leq t \leq s, \\ -\frac{s^2}{2}, & s \leq t \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Misol 2. Quyidagi

$$\begin{cases} u'''(t) = -y(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = 0, \quad u''(\eta) = \alpha u'(1), \quad u'(1) = \beta u(1) \end{cases}$$

masalaga mos Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$G(t, s) = \begin{cases} G_1(t, s), & s \in [0, \eta], \\ G_2(t, s), & s \in [\eta, 1], \end{cases}$$

bu yerda:

$$G_1(t, s) = \begin{cases} \frac{2 + \alpha\beta - 2\beta - \alpha\beta s^2}{2(2 + \alpha\beta - 2\beta)} t^2 - \left(s + \frac{(1-\alpha)\beta s^2}{2 + \alpha\beta - 2\beta} \right) t, & s \geq t, \\ \frac{-\alpha\beta s^2}{2(2 + \alpha\beta - 2\beta)} t^2 - \frac{(1-\alpha)\beta s^2}{2 + \alpha\beta - 2\beta} t - \frac{s^2}{2}, & s \leq t \end{cases}$$

$$G_2 = \begin{cases} \frac{\alpha\beta(1-s^2)}{2(2 + \alpha\beta - 2\beta)} t^2 + \left(\frac{2-\beta}{2 + \alpha\beta - 2\beta} s - \frac{(1-\alpha)\beta}{2 + \alpha\beta - 2\beta} s^2 \right) t, & s \geq t, \\ \frac{2\beta - 2 - \alpha\beta s^2}{2(2 + \alpha\beta - 2\beta)} t^2 + \left(\frac{2-\beta}{2 + \alpha\beta - 2\beta} - \frac{(1-\alpha)\beta}{2 + \alpha\beta - 2\beta} s^2 \right) t, & s \leq t. \end{cases}$$

ADABIYOTLAR:

1. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Mechanics of Materials* // Cengage Learning, 2009.
2. Cannon J.R. *The One-Dimensional Heat Equation* // Cambridge Un. Press, 1984.
3. Aris R. *Mathematical Modeling Techniques* // Dover Publications, 1999.
4. Murray J.D. *Mathematical Biology: I. An Introduction* // Springer-Verlag, 2002.
5. Il'in V.A., Moiseev E.I. *Nonlocal boundary value problems of the first kind for a Sturm-Liouville operator* // *Differential Equations*, 1987, 23(7), 803-810.
6. Gupta C.P. *Solvability of a three-point boundary value problem for a second order ordinary differential equation* // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1982, 168(2), 540-551.
7. Naimark M. *Linear differential operators* // Frederick Ungar Publishing CO, New York, 1967.

**МНОГОТОЧЕЧНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Нуралиева Навбахор Шаймардон кизи,
старший преподаватель кафедры Математического
анализа и дифференциальных уравнений
Каршинского государственного университета,
г. Карши, Республика Узбекистан
n.navbahor2197@gmail.com

Гийосова Фарангис Улугбек кизи,
учитель средней общеобразовательной
школы № 52 Касбинского района,
Кашкадарьинская область, Республика Узбекистан
farangizgiyosova86@gmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется нелокальная по времени задача для уравнения эллиптического типа $u_{tt}(t) - Au(t) = F(t)$, т.е. начальные условия заменены нелокальными условиями: $u(0) = \alpha u(\xi) + \varphi$, $\xi > 0$; $u(t)$ ограничена при $t \rightarrow \infty$, здесь $F(t) \in C([0, \infty), H)$ — заданная функция, $\varphi \in H$ — известный элемент, α — константа. Для параметра α и функции $F(t)$ найдены критерии единственности и достаточные условия, обеспечивающие существование решения задачи. Условия существования и единственности решения были получены методом Фурье.

Ключевые слова: Задача Бицадзе-Самарского, метод Фурье, абстрактный оператор, полная система, нелокальные задачи, уравнение эллиптического типа.

**KASR TARTIBLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN UCHTA ULASH
SHARTLI CHEGARAVIY MASALA**

Annotatsiya. Ushbu ishda $u_{tt}(t) - Au(t) = F(t)$ elliptik turdagi tenglama uchun vaqt bo'yicha nolokal masala o'rganilgan, ya'ni boshlang'ich shartlar nolokal shartlar bilan almashtirilgan: $u(0) = \alpha u(t_0) + \varphi$, $t_0 > 0$; $t \rightarrow \infty$, da $u(t)$ chegaralangan, bu yerda $F(t) \in C([0, \infty), H)$ — berilgan funksiya, $\varphi \in H$ — ma'lum element, α — o'zgarmas miqdor (konstanta). α parametri va $F(t)$ funksiyasi uchun masalaning yechimi mavjudligini ta'minlaydigan yetarli shartlar va yagonalik mezonlari (kriteriylari) topilgan. Yechimning mavjudligi va yagonaligi shartlari Furiye usuli yordamida keltirib chiqarilgan.

Kalit so'zlar: Bitsadze-Samarskiy masalasi, Furiye usuli, abstrakt operator, to'liq sistema, nolokal masalalar, elliptik turdagi tenglama.

**MULTIPOINT NONLOCAL PROBLEMS FOR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH PARAMETER**

Abstract. In this paper, a nonlocal time problem for an equation of elliptic type $u_{tt}(t) - Au(t) = F(t)$ is studied, i.e., the initial conditions are replaced by nonlocal conditions: $u(0) = \alpha u(\xi) + \varphi$, $\xi > 0$; $\|u(t)\|$ is bounded, if $t \rightarrow \infty$, here $F(t) \in C([0, \infty), H)$ is a given function, $\varphi \in H$ is known element, α is constant. For the parameter α and the function $F(t)$, uniqueness criteria and sufficient conditions were found to ensure the existence of a solution to the problem. The conditions for the existence and uniqueness of the solution were derived by the Fourier method.

Key words: Bitsadze-Samarskii problem, Fourier method, abstract operator, complete system, nonlocal problems, elliptic type equation.

Введение. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, а A — неограниченный, положительный и самосопряжённый оператор, определённый на H , и A^{-1} — компактный оператор. Рассмотрим следующую нелокальную задачу:

$$\begin{cases} u_t(t) - Au(t) = F(t), & t > 0; \\ u(0) = \alpha u(\xi) + \varphi; \\ \|u(t)\| \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где $F(t) \in C([0, \infty), H)$ – заданная функция, $\varphi \in H$ – известный элемент, $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, m$; – действительные константы, ξ – неподвижная точка интервала $(0, \infty)$, $C([0, \infty), H)$ – пространство функции, непрерывной в $[0, \infty)$ и её значений из H .

Определение 1. Функция $u(t) \in C([0, \infty); H)$, обладающая свойствами $u_t(t), Au(t) \in C((0, \infty); H)$ и удовлетворяющая условиям (1), называется функцией нелокальной задачи (1).

Отличительной особенностью рассматриваемой проблемы является условие $u(0) = u(\xi) + \varphi$, которое устанавливает связь между значениями неизвестной функции внутри области и на границе области. Существует несколько исследований существования и единственности решений таких нелокальных задач, включающих эллиптические операторы в ограниченной области (см., например, [1], [2], [3], [4], [5]). Впервые такие задачи для уравнений эллиптического типа были сформулированы А.В. Бицадзе и А.А. Самарским в 1969 году (см. [1]). В работе А. Аширалиева [6] в банаховом пространстве $s5$ изучалась следующая задача:

$$\begin{cases} u_t(t) - Au(t) = F(t), & 0 \leq t \leq 1; \\ u(0) = \varphi; \\ u(1) = u(t_0) + \psi, & 0 \leq t_0 < 1. \end{cases}$$

Было доказано, что данная задача корректно поставлена в пространствах Гёльдера, и получено несколько принудительных неравенств.

В работе [7] для самосопряжённого и положительного A -оператора рассматривалась следующая задача:

$$\begin{cases} -u_t(t) + Au(t) = g(t, u(t)), & 0 < t < 1; \\ u(0) = \varphi; \\ u(1) = \sum_{j=1}^m \alpha_j u(\xi_j) + \psi \end{cases}$$

здесь, $A \geq \mu^2 I$ где $\mu > 0$ и $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m \leq 1$.

Автор доказал существование и единственность решения, используя условие Липшица для функции $g(t, v)$ и метод неподвижной точки. Единственность обеспечивается следующим условием:

$$\frac{13L}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^m |\alpha_j| \right) (1 - e^{-2\mu}) (\sqrt{\mu}) < 1,$$

Здесь – L константа Липшица.

В работе [8] было изучено следующее уравнение для нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского:

$$\begin{aligned} u_t(t) &= Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) &= \varphi, \quad u(T) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u(\xi_i) + \psi, \end{aligned}$$

где A – замкнутый линейный оператор, спектр которого расположен на положительной полуоси. Автор установил условие существования и единственности решения, используя следующую характеристическую функцию:

$$\Psi(z) = 1 - e^{-2Tz} - \sum_{i=1}^m \alpha_i (e^{-(T-\xi_i)z} - e^{-(T+\xi_i)z}).$$

Было доказано, что если функция $\Psi(z)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, то задача имеет единственное решение. Кроме того, автор доказал следующее явное условие для параметров нелокальных условий:

$$\sum_{i=1}^m (|\alpha_i| + \alpha_i) \leq 2.$$

Это условие определяет связь между нелокальными коэффициентами α_i и граничными условиями ξ_i . Если это условие выполняется, то задача Бицадзе-Самарского имеет единственное решение. При этом функция $F(t)$ должна удовлетворять следующему условию:

$$\|F(t)\| \leq Me^{\alpha t}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где M и α — положительные константы. Это условие контролирует скорость роста $F(t)$ и помогает обеспечить стабильность решения.

Аналогичная проблема была исследована в работе А. Аширалева и Е. Озтюрка [9], когда $T = 1$.

В статье исследованы условия существования и единственности решения задачи в пространствах Гёльдера, и получено следующее коэрцитивное неравенство:

$$\|u_{tt}\|_{C([0,1],H)}^2 + \|Au\|_{C([0,1],H)}^2 \leq C \left[\|F\|_{C([0,1],H)}^2 + \|A\varphi\|_H^2 + \|A\psi\|_H^2 \right],$$

где

$$\|\varphi(t)\|_{C([0,1],H)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|\varphi(t)\|_H.$$

В упомянутых выше работах существование и единственность решения задачи изучались главным образом в ограниченных областях.

Лемма 1. Для экспоненциальной функции с отрицательным аргументом для всех выполняется следующее неравенство $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{-t} < \frac{n!}{t^n}, \quad \text{for all } t > 0. \quad (2)$$

Вспомогательные проблемы

Для решения задачи (1) разделим её на две вспомогательные задачи:

$$\begin{cases} v_{tt}(t) - Av(t) = F(t), & t > 0; \\ v(0) = 0; \\ \|v(t)\| \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} w_{tt}(t) - Aw(t) = 0, & t > 0; \\ w(0) = \alpha w(\xi) + \varphi^*; \\ \|w(t)\| \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi^* \in H$ — задана функция.

Задача (3) является частным случаем задачи (1), а решение задачи (4) определяется аналогично определению 1.

Лемма 2. Пусть $\varphi^* = \varphi + \alpha v(\xi)$. Если $v(t)$ и $w(t)$ являются соответствующими решениями задач (3) и (4), то подтверждается, что функция $u(t) = v(t) + w(t)$ является решением задачи (1).

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.1.1.

Следовательно, достаточно решить вспомогательные задачи.

Результат для первой вспомогательной задачи

Задача (3) — это дифференциальное уравнение второго порядка с однородными условиями. Для задачи (3) справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $F(t) \in C([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$ и $\int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt < \infty$. Тогда задача (3) имеет единственное решение, и это решение имеет представление:

$$v(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \int_0^t sh \sqrt{\lambda_k} \eta F_k(\eta) d\eta + sh \sqrt{\lambda_k} t \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} F_k(\eta) d\eta \right] v_k.$$

Кроме того, выполняется следующее неравенство принудительного типа:

$$\|v_{tt}(t)\|^2 + \|v(t)\|_1^2 \leq 2 \left[\|F(t)\|^2 + \int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt \right], \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Поскольку система $\{V_k\}$ является полной, любое решение $v(t) \in H, t \in [0, \infty)$ задачи (3) может быть выражено в форме:

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) V_k. \quad (7)$$

Выражение (7) удовлетворяет условиям задачи (3). Заметим, что $\|v(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k(t)|^2$ и $\|v(t)\|$ ограничено при $t \rightarrow \infty$, тогда $|v_k(t)|$ также ограничено при $t \rightarrow \infty$ для всех k . Для каждого k получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} v_k''(t) - \lambda_k v_k(t) = F_k(t), & t > 0; \\ v_k(0) = 0; \\ v_k(t) \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Решение этой задачи будет построено с использованием функции Грина.

Мы записываем однородную задачу, соответствующую задаче (8):

$$\begin{cases} v_k''(t) - \lambda_k v_k(t) = 0, & t > 0; \\ v_k(0) = 0; \\ v_k(t) \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Согласно теореме о существовании функции Грина (см., например, [10], с. 119), если однородная задача (9), соответствующая задаче (8), имеет только тривиальное решение, то функция Грина $G(t, \eta)$ существует для задачи (8), и следующий интеграл даёт решение задачи (8):

$$v_k(t) = \int_0^{\infty} G(t, \eta) F_k(\eta) d\eta. \quad (10)$$

Из условий задачи (9) следует, что её решение $v_k(t) \equiv 0$.

Таким образом, функция Грина $G(t, \eta)$ существует и определяется следующим образом (см., например, [10], стр. 119):

$$G(t, \eta) = \begin{cases} c_1(\eta) z_1(t), & 0 \leq t \leq \eta; \\ c_2(\eta) z_2(t), & \eta \leq t < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь функции $c_1(\eta)$, $z_1(t)$, $c_2(\eta)$, и $z_2(t)$ определяются в следующем порядке:

$z_1(t)$ является нетривиальным решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_k''(t) - \lambda_k v_k(t) = 0, & t > 0; \\ v_k(0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

$z_2(t)$ является нетривиальным решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_k''(t) - \lambda_k v_k(t) = 0, & t > 0; \\ v_k(t) \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (13)$$

Функции $c_1(\eta)$ и $c_2(\eta)$ определяются на основе следующей системы:

$$\begin{cases} c_1(\eta) z_1(\eta) - c_2(\eta) z_2(\eta) = 0; \\ c_2(\eta) z_2'(\eta) - c_1(\eta) z_1'(\eta) = 1. \end{cases} \quad (14)$$

Подставляя решение $z_1(t) = e^{\sqrt{\lambda_k} t} - e^{-\sqrt{\lambda_k} t}$ задачи (12) и решение $z_2(t) = e^{-\sqrt{\lambda_k} t}$ задачи (13) в систему (14), получаем:

$$\begin{cases} c_1(\eta)(e^{\sqrt{\lambda_k} \eta} - e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta}) - c_2(\eta)e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} = 0; \\ c_2(\eta)\sqrt{\lambda_k} e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} + c_1(\eta)\sqrt{\lambda_k}(e^{\sqrt{\lambda_k} \eta} + e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta}) = -1. \end{cases}$$

Решая уравнение относительно неизвестных функций $c_1(\eta)$ и $c_2(\eta)$, получаем:

$$c_1(\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta}, \quad c_2(\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} (e^{\sqrt{\lambda_k} \eta} - e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta}).$$

Подставляя все полученные функции в (11), мы строим функцию Грина:

$$G(t, \eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \begin{cases} e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} (e^{\sqrt{\lambda_k}t} - e^{-\sqrt{\lambda_k}t}), & 0 \leq t \leq \eta; \\ (e^{\sqrt{\lambda_k}\eta} - e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta}) e^{-\sqrt{\lambda_k}t}, & \eta \leq t < \infty. \end{cases}$$

Теперь, используя формулу (10), мы находим решение задачи (8):

$$v_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k}t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k}t) \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} F_k(\eta) d\eta \right].$$

Исходя из вышеизложенного, записывая ряд (7), получаем формальное решение вспомогательной задачи (3):

$$v(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k}t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k}t) \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} F_k(\eta) d\eta \right] V_k. \quad (15)$$

Сначала, используя полноту системы $\{V_k\}$, мы можем продемонстрировать единственность решения задачи (3). Предположим, что (3) имеет два различных решения, $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Тогда, в силу линейности задачи (3), функция $v^*(t) = v_1(t) - v_2(t)$ удовлетворяет задаче (3), когда $F(t) \equiv 0$. Из предыдущих соображений следует, что $v^*(t) \equiv 0$, что доказывает единственность решения.

Теперь покажем, что $v_{tt}(t), Av(t) \in C([0, \infty); H)$ для этой функции.

Определим частичную сумму ряда (15) как $S_j(t)$:

$$S_j(t) = -\sum_{k=1}^j \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k}t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k}t) \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} F_k(\eta) d\eta \right] V_k.$$

Поскольку $AV_k = \lambda_k V_k$ и используя тождество Парсеваля, мы анализируем оценку нормы:

$$\|AS_j(t)\|^2 = \sum_{k=1}^j \lambda_k \left| e^{-\sqrt{\lambda_k}t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k}t) \int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} F_k(\eta) d\eta \right|^2.$$

Мы продолжаем оценку, используя неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} \|AS_j(t)\|^2 &\leq 2 \sum_{k=1}^j \lambda_k e^{-2\sqrt{\lambda_k}t} \left[\int_0^t |\sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta)| |F_k(\eta)| d\eta \right]^2 \\ &+ 2 \sum_{k=1}^j \lambda_k \sinh^2(\sqrt{\lambda_k}t) \left[\int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} |F_k(\eta)| d\eta \right]^2 \leq 2 \sum_{k=1}^j \lambda_k e^{-2\sqrt{\lambda_k}t} \int_0^t |\sinh(\sqrt{\lambda_k}\eta)|^2 d\eta \int_0^t |F_k(\eta)|^2 d\eta \\ &+ 2 \sum_{k=1}^j \lambda_k \sinh^2(\sqrt{\lambda_k}t) \int_t^\infty e^{-2\sqrt{\lambda_k}\eta} d\eta \int_t^\infty |F_k(\eta)|^2 d\eta \leq \int_0^\infty \sum_{k=1}^j \sqrt{\lambda_k} |F_k(\eta)|^2 d\eta, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получаем следующий результат:

$$\|Av(t)\|^2 \leq \int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Если $F(t) \in C([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$ и $\int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt < \infty$, то ряд $AS_j(t)$ сходится равномерно на любой $[0, T]$, $T > 0$, и каждый член этого ряда непрерывен на $[0, \infty)$. Следовательно, для предельной функции мы получаем $Av(t) \in C([0, \infty), H)$. Согласно условию задачи (3), мы имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} S_j(t) = \sum_{k=1}^j F_k(t) V_k + AS_j(t).$$

Следовательно, используя неравенство (16), получаем следующую оценку:

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} S_j(t) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^j F_k(t) V_k + AS_j(t) \right\|^2 \leq 2 \left[\sum_{k=1}^j |F_k(t)|^2 + \int_t^\infty \sum_{k=1}^j \sqrt{\lambda_k} |F_k(\eta)|^2 d\eta \right].$$

Из этого следует, что:

$$\|v_{tt}(t)\|^2 \leq 2 \left[\|F(t)\|^2 + \int_0^\infty \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt \right], \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Таким образом, получаем $v_{tt}(t) \in C([0, \infty), H)$. Из неравенств (16) и (17) следует неравенство (6). Аналогично, имеем:

$$\|S_j(t)\|^2 \leq 2 \sum_{k=1}^j \frac{1}{\lambda_k} e^{-2\sqrt{\lambda_k}t} \left[\int_0^t |sh\sqrt{\lambda_k}\eta| |F_k(\eta)| d\eta \right]^2 + 2 \sum_{k=1}^j \frac{1}{\lambda_k} sh^2 \sqrt{\lambda_k} t \left[\int_t^\infty e^{-\sqrt{\lambda_k}\eta} |F_k(\eta)| d\eta \right]^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}^3} \int_0^\infty \sum_{k=1}^j |F_k(\eta)|^2 d\eta, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу:

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}^3} \int_0^\infty \|F(t)\|^2 dt, t \geq 0$$

и, следовательно $v(t) \in C([0, \infty), H)$, . На этом доказательство теоремы 1 завершено. □

По второй вспомогательной проблеме

Начнём решать (4). В этом случае мы используем те же рассуждения, что и для задачи (3). То есть, если функция $w(t) \in H, t \in [0, \infty)$ является решением задачи (4), её, безусловно, можно записать в следующей форме разложения. $w(t) = \sum_{k=1}^\infty T_k(t) V_k$.

В данном случае неизвестные коэффициенты $T_k(t), k \geq 1$ являются решениями следующей нелокальной задачи:

$$\begin{cases} T_k'(t) - \lambda_k T_k(t) = 0, & t > 0; \\ T_k(0) = \alpha T_k(\xi) + \varphi_k^*; \\ T_k(t) \text{ is bounded, if } & t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (18)$$

где φ_k^* – коэффициенты Фурье функции φ^* . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение уравнения $T_k'(t) - \lambda_k T_k(t) = 0$ задаётся следующим образом:

$$T_k(t) = a_k e^{-\sqrt{\lambda_k}t} + b_k e^{\sqrt{\lambda_k}t}. \quad (19)$$

Для определения чисел a_k, b_k мы используем условия задачи (18):

$$a_k e^{-\sqrt{\lambda_k}t} + b_k e^{\sqrt{\lambda_k}t} \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty.$$

Из этого получаем: $b_k = 0, k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, решение задачи представлено в следующем виде:

$$T_k(t) = a_k e^{-\sqrt{\lambda_k}t}. \quad (20)$$

Используя условие нелокальности $T_k(0) = \alpha T_k(\xi) + \varphi_k^*$, получаем:

$$a_k \left(1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k}\xi} \right) = \varphi_k^*. \quad (21)$$

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ условиях

$$1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k}\xi} \neq 0 \quad (22)$$

Если выполняется условие, то неизвестные коэффициенты a_k определяются однозначно и могут быть записаны следующим образом:

$$a_k = \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k}\xi}}.$$

Таким образом, если условие (22) выполняется для всех k , то неизвестные коэффициенты a_k определяются однозначно, и задача (4) имеет единственное решение.

Если для некоторого k выполняется $1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k}\xi} = 0$, то уравнение (21) имеет решение только в том случае, если свободный член равен нулю, т. е. если $\varphi_k^* = 0$. В этом случае коэффициенты a_k остаются произвольными, и задача (4) не имеет единственного решения. Таким образом, мы приходим к следующему критерию единственности решения задачи (4):

Теорема 2. Для того чтобы задача (4) имела единственное решение, необходимо и

достаточно, чтобы условие (22) выполнялось для всех $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что условие (22) выполняется. Подставляя полученные значения a_k в (19), перепишем:

$$T_k(t) = \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t},$$

и представить общее решение в виде ряда:

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k. \quad (23)$$

Чтобы показать, что данное представление в виде ряда удовлетворяет условиям определения 1, нам необходимо оценить знаменатель данного выражения, используя приведённый ниже пример.

Нижние границы знаменателя

Нетрудно убедиться в истинности следующей леммы:

Лемма 3. Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(я) $\alpha e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi_j} < 1,$

(ii) $\alpha \leq 0.$

Тогда существует константа $c_0 > 0$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}$,

$$|1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}| \geq c_0.$$

Лемма 4. Выберем любое число α , и найдем число k_0 такое, что для всех $k > k_0$ выполняется следующая оценка:

$$|1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}| > c_0. \quad (24)$$

Доказательство. Докажем эту лемму с помощью простого рассуждения. Функция $e^{-\eta}, \eta > 0$ монотонно убывает и стремится к нулю по мере увеличения аргумента. Следовательно, выражение $\alpha e^{-\eta}$ также стремится к нулю. Используя это свойство, для достаточно больших k существует некоторый индекс k_r такой, что

$$\left| \alpha e^{-\sqrt{\lambda_{k_r}} \xi} \right| < 1.$$

Теперь возьмём наименьший такой индекс:

$$k_0 = \min\{k_r, r = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Тогда для всех $k \geq k_0$ выполняется следующее неравенство:

$$\left| 1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi} \right| > 1 - \left| \alpha e^{-\sqrt{\lambda_{k_0}} \xi} \right| = c_0.$$

На этом доказательство завершено. □

Далее мы определяем множество:

$$K_0 = \{k : k \in \mathbb{N}, \quad 1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi} = 0\}.$$

Из доказательства леммы 4 непосредственно следует следующий результат.

Лемма 5. Множество K_0 либо пустое, либо содержит конечное число элементов.

Доказательство. Из доказательства леммы 4 ясно, что если существует индекс $k \in K_0$, то обязательно $k \leq k_0$. Это означает, что K_0 является конечным множеством. Однако, согласно разделу 1, последовательность $\{\lambda_k\}$ принимает дискретные значения. Следовательно, для некоторых значений k выражение $\alpha e^{-\sqrt{\lambda_{k_r}} \xi}$ может быть больше единицы, а для других – меньше единицы. Другими словами, оно никогда не может быть точно равно единице для любого k . В этом случае множество K_0 пусто. Лемма 5 доказана. □

Результат решения второй вспомогательной задачи

Теорема 3. Пусть $\varphi^* \in H$ и предположим, что выполняется одно из следующих условий:

a) $\alpha e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi_j} < 1,$

б) $\alpha \leq 0$.

Тогда решение задачи (4) существует, является единственным и имеет вид (23). Более того, существует константа $C > 0$ такая, что выполняется следующее неравенство:

$$\|w_{tt}(t)\|^2 + \|w(t)\|_1^2 \leq Ct^{-4} \|\varphi^*\|^2, \quad t > 0. \quad (25)$$

Доказательство. Мы покажем, что функция, $w(t)$ описанная в (23), является решением задачи (4) согласно определению 1. Для этого сначала докажем, что $w_{tt}(t), Aw(t) \in C((0, \infty), H)$. Пусть $S_j(t)$ будет частичной суммой ряда (23). По определению оператора A :

$$AS_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k.$$

Согласно теории равенства Парсеваля:

$$\|AS_j(t)\|^2 = \sum_{k=1}^j \lambda_k^2 \left| \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \right|^2.$$

Мы используем оценку (2) для $n = 2$. Согласно лемме 3, мы имеем нижнюю границу для знаменателя:

$$|1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}| \geq c_0.$$

Принимая это во внимание, мы продолжаем оценку:

$$\|AS_j(t)\|^2 \leq \sum_{k=1}^j \lambda_k^2 \left| \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^j \lambda_k^2 \left| \frac{\varphi_k^*}{c_0} \frac{2}{\lambda_k t^2} \right|^2 \leq Ct^{-4} \sum_{k=1}^j |\varphi_k^*|^2.$$

где $C = \frac{2}{c_0}$. Таким образом, выполняется следующее неравенство:

$$\|Aw(t)\|^2 \leq Ct^{-4} \|\varphi^*\|^2, \quad t > 0. \quad (26)$$

Если $\varphi^* \in H$, то ряд $AS_j(t)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\epsilon, T]$, где $0 < \epsilon < T < \infty$, и каждый член этого ряда непрерывен на $(0, \infty)$. Следовательно, для его предельной функции мы получаем $Aw(t) \in C((0, \infty), H)$.

Поскольку $w_{tt}(t) = -Aw(t)$, отсюда следует, что $w_{tt}(t) \in C((0, \infty), H)$ также и, и справедлива следующая оценка:

$$\|w_{tt}(t)\|^2 \leq Ct^{-4} \|\varphi^*\|^2, \quad t > 0. \quad (27)$$

Из неравенств (26) и (27) следует неравенство (25).

Аналогичным образом получаем следующую оценку:

$$\|S_j(t)\|^2 \leq \sum_{k=1}^j \left| \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^j |\varphi_k^*|^2, \quad t \geq 0.$$

Если $\varphi^* \in H$, то ряд $S_j(t)$ сходится равномерно на любом отрезке $[0, T]$, для $t > 0$, и каждый член этого ряда непрерывен на $[0, \infty)$. Следовательно, для его предельной функции мы получаем $w(t) \in C([0, \infty), H)$.

Таким образом, согласно определению 1, функция $w(t)$ является решением (4). Теперь покажем единственность этого решения. Предположим, что (4) имеет два различных решения, обозначенных как $w_1(t)$ и $w_2(t)$. Тогда, в силу линейности задачи (4), функция $w(t) = w_1(t) - w_2(t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{cases} w_{tt}(t) - Aw(t) = 0, & t > 0; \\ w(0) = \alpha w(\xi); \\ \|w(t)\| \text{ is bounded, if } t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Пусть $w_k(t) = (w(t), V_k)$. Поскольку оператор A является самосопряженным, имеем:

$$w_k''(t) = (w_{tt}(t), V_k) = -(Aw(t), V_k) = -(w(t), AV_k) = -\lambda_k w_k(t),$$

и в соответствии с неместными условиями,

$$\begin{cases} w_k''(t) - \lambda_k w_k(t) = 0, & t > 0; \\ w_k(0) = \alpha w_k(\xi); \\ w_k(t) \text{ is bounded, if } & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Теперь перейдём к решению этой задачи. Хорошо известно, что уравнение $w_k''(t) - \lambda_k w_k(t) = 0$ имеет общее решение вида $w_k(t) = a_k e^{-\sqrt{\lambda_k} t}$. Предположим, что $a_k \neq 0$. Подставляя это в условие $w_k(0) = \alpha w_k(\xi)$, получаем:

$$\alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi} = 1. \quad (28)$$

Однако при условиях а) и б) теоремы 3 равенство (28) не выполняется ни для какого k . Отсюда следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$ мы имеем $a_k = 0$, что подразумевает $w_k(t) = 0$. Поскольку система $\{V_k\}$ является полной, отсюда следует, что $w(t) \equiv 0$.

Таким образом, теорема доказана. □

Мы смягчаем требования к решению, требуя лишь его существования. Даже при этом условии можно получить важные результаты.

Естественно, если $k \in K_0$, функции вида (23) определить невозможно. Поэтому мы предполагаем, что для выполняются следующие условия ортогональности $k \in K_0$:

$$\varphi_k^* = (\varphi^*, V_k) = 0, \quad k \in K_0. \quad (29)$$

В этом случае неизвестные коэффициенты a_k в уравнении (21) остаются произвольными. Для каждого, k принадлежащего множеству K_0 , уравнение (18) имеет решения вида (20) с произвольными коэффициентами a_k .

Следовательно, если множество K_0 непустое, общее решение уравнения (4) можно выразить следующим образом:

$$w(t) = \sum_{k \in K_0} a_k e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k + \sum_{k \notin K_0} \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k. \quad (30)$$

Поскольку в данном случае коэффициенты a_k произвольны, может существовать несколько решений. Следовательно, в этом сценарии единственность решения не требуется.

Кроме того, следует отметить, что если множество K_0 пустое, то решение единственное и принимает форму, приведенную в (23).

Теорема 4. Пусть $\varphi^* \in H$. Выполняется одно из следующих двух условий:

если K_0 является пустым множеством, то задача (4) имеет единственное решение, которое дано в форме (23);

если K_0 не является пустым множеством и условие ортогональности (29) выполняется для индексов $k \in K_0$, то задача (4) имеет решение, которое выражается в форме (30) с произвольными коэффициентами a_k .

Доказательство. Согласно лемме 5, множество K_0 может быть пустым. Предположим, что это так. Тогда решение принимает форму (23). По лемме 4 мы разложим этот ряд на две части:

$$w(t) = \sum_{k < k_0} \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k + \sum_{k \geq k_0} \frac{\varphi_k^*}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k. \quad (31)$$

Первая часть представляет собой конечную сумму. Для второго ряда легко проверить его равномерную сходимость, как показано в доказательстве теоремы 3. Здесь нижняя граница знаменателя взята из леммы 4, а именно из неравенства (24). Поскольку для всех индексов выполняется k условие $1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi} \neq 0$, единственность этого решения следует из теоремы 2.

Если множество K_0 содержит элементы, лемма 5 утверждает, что эти элементы конечны. Это означает, что решение может быть выражено в форме (30). Коэффициенты a_k определяются из уравнения (21), то есть они могут быть однозначно определены только если $\varphi_k^* = 0$ для $k \in K_0$; в противном случае они остаются произвольными константами. По условиям теоремы 3, условия ортогональности (29) выполняются для индексов $k \in K_0$, что обеспечивает $\varphi_k^* = 0$ для $k \in K_0$.

Далее мы проверяем, что функция $w(t)$ удовлетворяет условию $w_t(t), Aw(t) \in C((0, \infty), H)$. Формальное решение (30) состоит из двух частей: конечной суммы, включающей произвольные константы, и ряда, аналогичного (31). Следовательно, ряд (30) обладает теми же свойствами, что и (23). Однако, поскольку коэффициенты a_k произвольны, решение не является единственным. $\square$

Основные результаты задачи (1)

Теперь решим основную проблему (1). Предположим, что $v(t)$ и $w(t)$ являются решениями задач (3) и (4) соответственно, и пусть $\varphi^* = \varphi + \alpha v(\xi)$. В этом случае, согласно лемме 2, решение задачи (1) задается формулой $u(t) = v(t) + w(t)$. Следовательно, если выполняется условие (i) или (ii) леммы 3, решение (1) можно записать следующим образом:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi + \alpha v(\xi)}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} + v_k(t) \right] V_k, \quad (32)$$

где

$$v_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k} \eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k} t) \int_t^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} F_k(\eta) d\eta \right].$$

В этом случае единственность функции $u(t)$ следует из единственности функций $v(t)$ и $w(t)$. Наконец, мы можем применить аналогичные соображения к задаче (1), как мы это сделали для задачи (4). Однако мы перепишем условия ортогональности (29) для функций $\varphi \in H$ следующим образом:

$$\varphi_k^* = (\varphi^*, V_k) = (\varphi + \alpha v(\xi), V_k) = 0, \quad (33)$$

Поскольку проверка условия (33) затруднительна, мы можем заменить его следующим достаточным условием ортогональности:

$$(\varphi, V_k) = 0, (F(t), V_k) = 0, k \in K_0, t > 0. \quad (34)$$

Если выполняются условия (34), то выполняются и условия ортогональности (33). В этом случае, согласно лемме 4, общее решение уравнения (1), при условии, что множество K_0 непустое, может быть выражено следующим образом:

$$u(t) = \sum_{k \in K_0} a_k e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k + \sum_{k \notin K_0} \frac{\varphi + \alpha v(\xi)}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) V_k. \quad (35)$$

Поскольку коэффициенты a_k произвольны, в этом случае может быть несколько решений. Следовательно, единственность не может быть гарантирована. Более того, если множество K_0 пустое, решение единственное и принимает форму (32).

Таким образом, мы получили следующие важные результаты для основной проблемы (1):

Теорема 5. Пусть $\varphi \in H$, $F(t) \in C([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$, и предположим, что

$$\int_0^{\infty} \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt < \infty.$$

Кроме того, предположим, что выполняется одно из следующих условий:

a) $\alpha e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi_j} < 1$,

б) $\alpha \leq 0$.

Тогда решение задачи (1) существует, является единственным и имеет следующий вид:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_k + \alpha v_k(\xi)}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} + v_k(t) \right] V_k \quad (36)$$

где

$$v_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \left[e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \int_0^t \sinh(\sqrt{\lambda_k} \eta) F_k(\eta) d\eta + \sinh(\sqrt{\lambda_k} t) \int_t^{\infty} e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} F_k(\eta) d\eta \right]$$

и φ_k являются коэффициентами Фурье φ функций $F_k(\eta)$ и $F(\eta)$ соответственно.

Кроме того, выполняется следующее принудительное неравенство:

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq C[\|F(t)\|^2 + \int_0^t \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt + t^{-4}(\int_0^t \|F(t)\|^2 dt + \|\varphi\|^2)], \quad t > 0, \quad (37)$$

где

$$C = \max\{2, \frac{2}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_1} \xi}}\}.$$

Доказательство. Чтобы показать, что функция, $u(t)$ описанная в (36), является решением основной задачи (1) согласно определению 1, мы поступаем следующим образом. По теореме 3.1 и теореме 3 имеем

$$v_{tt}(t), Av(t) \in C((0, \infty), H), \quad v(t) \in C([0, \infty), H),$$

и аналогично,

$$w_{tt}(t), Aw(t) \in C((0, \infty), H), \quad w(t) \in C([0, \infty), H).$$

С учетом леммы 2 следует, что

$$u_{tt}(t), Au(t) \in C((0, \infty), H), \quad u(t) \in C([0, \infty), H).$$

Более того, согласно лемме 2, функция $u(t)$ удовлетворяет условиям задачи (1). Складывая соответственно неравенства (6) и (25) и учитывая

$$\varphi^* = \varphi + \alpha v(\xi),$$

мы получаем неравенство (37). □

Теорема 6. Для того чтобы решение задачи (1) было единственным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} \xi} \neq 0,$$

справедливо для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из доказательства теоремы 2. □

Теорема 7. Пусть $\varphi \in H$, $F(t) \in C([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$ и $\int_0^t \|F(t)\|_{\frac{1}{4}}^2 dt < \infty$

Затем, если K_0 является пустым множеством, то задача (1) имеет единственное решение, которое даётся формулой (32); если K_0 не пусто и условия ортогональности (34) выполняются для индексов $k \in K_0$, то задача (1) имеет решение, которое задается формулой (35) с произвольными коэффициентами a_k .

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теорем, доказанных для задач (3) и (4).

ЛИТЕРАТУРА:

1. A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1969. Vol. 185, Issue 4. – pp. 739–740.
2. A. Ashyralyev, E. Ozturk. On a difference scheme of fourth-order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type non-local boundary value problem // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2013. Vol. 36, Issue 8. – pp. 936–955.
3. A. Ashyralyev, E. Ozturk. The numerical solution of Bitsadze-Samarskii non-local boundary value problems with the Dirichlet–Neumann condition // Abstract and Applied Analysis. – 2012. – DOI: 10.1155/2012/730804.
4. A. Ashyralyev, E. Ozturk. On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type non-local boundary-value problem // Boundary Value Problems. – 2014. Vol. 2014, Issue 14. – DOI: 10.1186/1687-2770-2014-14.
5. A.L. Skubachevskii. Non-local elliptic problems in infinite cylinder and applications // Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. – 2016. Vol. 9, Issue 3. – pp. 847–868. – DOI: 10.3934/dcdss.2016032.
6. A. Ashyralyev. A note on the Bitsadze–Samarskii type non-local boundary value problem in a Banach space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. Vol. 344, Issue 1. – pp. 557–573. – DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.03.008.

7. E. Ozturk, Z. Nashed. *Existence and uniqueness results for Bitsadze-Samarskii type non-local boundary value problem for the semilinear elliptic equation* // *Authorea*. – 2024. – DOI: 10.22541/au.170667953.35185579/v1.
8. D.G. Orlovskii, S.I. Piskarev. *Approximation of the Bitsadze–Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the Dirichlet conditions* // *Differential Equations*. – 2013. Vol. 49, Issue 7. – pp. 895–907. – DOI: 10.1134/S0012266113070112.
9. A. Ashyralyev, E. Ozturk. *On Bitsadze–Samarskii type non-local boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness* // *Applied Mathematics and Computation*. – 2012. Vol. 219, Issue 3. – pp. 1093–1107.
10. А.Ф. Филиппов. *Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. 2-е изд., с исправлениями*. – Москва: КомКнига, 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН В МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Нуриддинов Бахтиёр Зафарович,

доцент Ташкентского химико-технологического института,
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам
nuriddinobaxtiyor1985@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется математическая постановка задачи распространения собственных (свободных) волн в многослойных вязкоупругих цилиндрических телах. Динамическое состояние системы описывается системой интегро-дифференциальных уравнений, записанных в цилиндрической системе координат. Для учёта вязкоупругих свойств материала использовано релаксационное ядро Ржаницына-Колтунова, а для приближённого вычисления интегральных членов применён метод «замораживания». В работе рассмотрена задача распространения собственных волн в условиях плоского деформированного состояния. Путём введения вспомогательной функции получено дифференциальное уравнение четвёртого порядка, описывающее исследуемый процесс. Кроме того, поставленная задача была обобщена для многослойных цилиндрических оболочек, изготовленных из ортотропного материала. Для изотропного и ортотропного случаев приведены соотношения между модулями упругости и коэффициентами Пуассона.

Ключевые слова: многослойные цилиндрические тела, собственные волны, вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнения, ядро Ржаницына-Колтунова, метод «замораживания», ортотропные оболочки, плоское деформированное состояние.

KO'P QATLAMLI SILINDRIK JISMLARDA XOS TO'LQINLAR TARQALISHI MASALASINING MATEMATIK QO'YILISHI

Annotatsiya. Uch maqolada ko'p qatlamli qovushqoq-elastik slindrik jismlarda xususiy (erkin) to'lqinlar ishlab chiqarish masalasining matematik qo'yilishi aniqlangan. Tizimning dinamik holatik koordinatalar sistemasida yozilgan integro-differential tenglamalar orqali ifodalangan. Materialning qovushqoq-elastik xususiyatini hisobga maqsadida Rjanitsin-Koltunov relaksatsiya yadrosidan foydalanilgan hamda integral hadlarni taqribiy hisoblash uchun «muzlatish» qo'llanilgan. Tadqiqotda tekis deformatsiyalanish holati uchun xususiy to'lqinlarning tarqalish masalasi ko'rib chiqish va yordamchi funktsiya kiritish orqali jarayonni tavsiflovchi to'rtinchi tartibli differens tenglama keltirib chiqarilgan. Shuningdek masala ortotrop materialdan tashkil topgan ko'p qatlamli silindrik qobiqlar uchun ham umumlashtirilgan bo'lib, izotrop va ortotrop holatlar uchun elastiklik modullari hamda Puasson koeffitsiyentlari o'rtasidagi bog'liqliklar ko'rsatib o'tilgan.

Kalit so'zlar: ko'p qatlamli silindrik jismlar, xususiy to'lqinlar, qovushqoq-elastiklik, integro-differensial tenglamalar, Rjanitsin-Koltunov yadrosi, "muzlatish" usuli, ortotrop qobiqlar, tekis deformatsiyalanish holati.

MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM OF EIGENWAVE PROPAGATION IN MULTILAYERED CYLINDRICAL BODIES

Abstract. This paper investigates the mathematical formulation of the problem of propagation of natural (free) waves in multilayer viscoelastic cylindrical bodies. The dynamic state of the system is described by a system of integro-differential equations formulated in cylindrical coordinates. To account for the viscoelastic properties of the material, the Rzhanytsyn–Koltunov relaxation kernel is employed, while the “freezing” method is applied for the approximate evaluation of the integral terms. The study considers the problem of wave propagation under conditions of plane strain. By introducing an auxiliary function, the governing equations are reduced to a fourth-order differential equation describing the investigated process. Furthermore, the formulated problem is generalized for multilayer cylindrical shells composed of orthotropic materials. Relationships between the elastic moduli and Poisson's ratios are presented for both isotropic and orthotropic cases.

Keywords: multilayer cylindrical bodies, natural waves, viscoelasticity, integro-differential equations, Rzhanitsyn-Koltunov kernel, freezing method, orthotropic shells, plane strain condition.

Введение. В современной инженерной практике, в частности при проектировании подземных сооружений (туннелей), трубопроводных систем и аэрокосмических конструкций, исследование динамического поведения цилиндрических конструкций представляет собой одну из актуальных научно-технических задач. Большинство конструкций, применяемых на практике, состоят из многослойных структур и композиционных материалов, в которых процессы распространения волн обладают рядом специфических и сложных особенностей.

В отличие от классической теории упругости, реальные материалы обладают вязкоупругими свойствами, что приводит к диссипации (затуханию) энергии волн. Для математического моделирования указанных реологических свойств целесообразно использовать теорию наследственной упругости, основанную на интегральных операторах типа Вольтерра.

Целью данной работы является разработка строгой математической модели процесса распространения гармонических собственных волн в многослойных цилиндрических телах, обладающих вязкоупругими свойствами, а также приведение поставленной задачи к форме, удобной для аналитико-численного исследования. В работе рассматривается обобщённая система уравнений с учётом межслойных контактных условий, а также ортотропных и изотропных свойств материалов.

Исследуется задача распространения свободных волн в многослойном деформируемом (вязкоупругом) цилиндрическом теле ($\kappa=1,2,...N$) (рисунок 1).

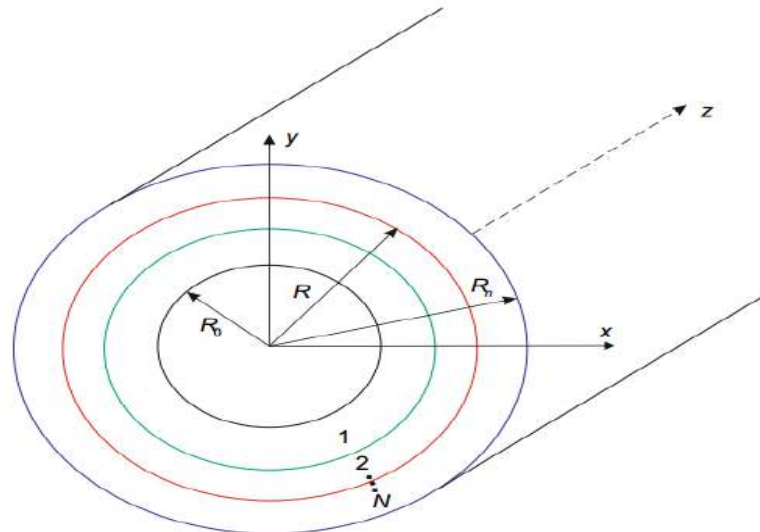


Рисунок 1. Многослойное цилиндрическое тело

Динамическое состояние механической системы определяется с помощью интегро-дифференциальных уравнений, которые приведены в цилиндрических координатах $\{r, \theta, z\}$

$$\begin{aligned} & \lambda_{0\kappa} \text{graddiv} \vec{u}(\vec{r}, t) + \mu_{0\kappa} (\nabla^2 \vec{u}(\vec{r}, t) + \text{graddiv} \vec{u}(\vec{r}, t)) - \\ & - \lambda_{0\kappa} \int_0^t R_{\lambda\kappa}(t - \tau) \text{graddiv} \vec{u}(\vec{r}, \tau) d\tau - \\ & - \mu_{0\kappa} \int_0^t R_{\mu\kappa}(t - \tau) (\nabla^2 \vec{u}(\vec{r}, \tau) + \text{graddiv} \vec{u}(\vec{r}, \tau)) d\tau = \rho_\kappa \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \\ & (\kappa = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{u}$ – вектор перемещений; $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$; $R_{\lambda\kappa}(t - \tau)$, $R_{\mu\kappa}(t - \tau)$ – ядра релаксации; $\lambda_{\kappa 0}, \mu_{\kappa 0}$ –

мгновенные модули упругости; ρ_κ – плотность среды; ν_κ – коэффициент Пуассона, которого считаем не релаксирующей величиной [109], κ – порядковой номер слоёв. В (1) интегральные члены считаются

малыми. Тогда подынтегральное выражение можно представить так: $f(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ - функция малого изменения, ω_R - реальная величина.

Используя метод замораживания [73], интегральные члены заменим приближёнными выражениями:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_\kappa[f] &= \lambda_{0\kappa} \left[1 - \int_0^\infty R_{\lambda\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{\lambda\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f, \\ \bar{\mu}_\kappa[f] &= \mu_{0\kappa} \left[1 - \int_0^\infty R_{\mu\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{\mu\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f,\end{aligned}\quad (2)$$

После сделанных предположений уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{0\kappa} \left[1 - \Gamma_{\lambda\kappa}^C(\omega_R) - i \Gamma_{\lambda\kappa}^S(\omega_R) \right] \text{graddiv} \vec{u} + \\ + \mu_{0\kappa} \left[1 - \Gamma_{\mu\kappa}^C(\omega_R) - i \Gamma_{\mu\kappa}^S(\omega_R) \right] (\nabla^2 \vec{u} + \text{graddiv} \vec{u}) = \rho_\kappa \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}R_{\lambda\kappa}(t) &= \frac{\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} R_{E\kappa}(t), \\ R_{\mu\kappa}(t) &= \frac{1}{2(1+\nu_k)} R_{E\kappa}(t),\end{aligned}$$

где $R_{E\kappa}(t)$ - ядро релаксации,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda,\mu\kappa}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda,\mu\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau \\ \Gamma_{\lambda,\mu\kappa}^S(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda,\mu\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau\end{aligned}\quad (4)$$

косинус и синус образы Фурье;

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\kappa}^C(\omega_R) &= \frac{\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} \int_0^\infty R_{E\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_{\lambda\kappa}^S(\omega_R) &= \frac{\nu_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} \int_0^\infty R_{E\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_{\mu\kappa}^C(\omega_R) &= \frac{1}{2(1+\nu_k)} \int_0^\infty R_{E\kappa}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_{\mu\kappa}^S(\omega_R) &= \frac{1}{2(1+\nu_k)} \int_0^\infty R_{E\kappa}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau.\end{aligned}$$

За ядро принимаем ядро Ржаницына-Колтунова: $R_{E\kappa}(t) = A_{E\kappa} e^{-\beta_{E\kappa} t} / t^{1-\alpha_{E\kappa}}$.

В частном случае, рассмотрим упругий или вязкоупругий деформируемый слой толщины h . Предполагается, что в каждом слое в отдельности распространяется собственная волна с частотой ω . Рассмотрим задачу плоской деформации, т.е. перемещения слоёв не зависят от z . Дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial y} \\ \rho_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(j)}}{\partial x} \quad (j=1,2,3,\dots,N).\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь u_j и g_j - смещения, соответственно, по направлениям x и y .

Теперь исследуем систему (1) для одного слоя. Тогда вместо $\sigma_{xx}^{(j)}$, $\sigma_{yy}^{(j)}$, и $\sigma_{xy}^{(j)}$ подставляем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(j)} &= \frac{E_{0j}}{1-\nu_j^2} [1 - \Gamma_{Ej}^C(\omega_R) - i\Gamma_{Ej}^S(\omega_R)] \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial g_j}{\partial y} \right), \\ \sigma_{yy}^{(j)} &= \frac{E_{0j}}{1-\nu_j^2} [1 - \Gamma_{Ej}^C(\omega_R) - i\Gamma_{Ej}^S(\omega_R)] \left(\frac{\partial g_j}{\partial y} + \nu_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xy}^{(j)} &= \frac{E_{0j}}{2(1+\nu_j)} [1 - \Gamma_{Ej}^C(\omega_R) - i\Gamma_{Ej}^S(\omega_R)] \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial g_j}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $\Gamma_{Ej}^C(\omega_R)$ и $\Gamma_{Ej}^S(\omega_R)$ определяются как (4).

После этого решение уравнения (5) с учётом (6) ищется в виде:

$$\begin{aligned}u_j &= U_j(y) e^{i(kx-\omega t)}, \\ g_j &= V_j(y) e^{i(kx-\omega t)}.\end{aligned}\quad (7)$$

где ω —круговая частота, $\omega = 2\pi V$, V —частота колебаний; $\lambda = 2\pi/\alpha$ —длина волны, c —фазовая скорость волн, $\omega = \alpha c$.

Подставим (7) в (5), тогда получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения вида:

$$\begin{aligned}L_{2j} \frac{d^2 U_j}{dy^2} - (L_{1j} \nu_j + L_{2j}) ik \frac{dV_j}{dy} + (\rho\omega^2 - L_{1j} k^2) U_j &= 0, \\ L_{1j} \frac{d^2 V_j}{dy^2} - (L_{1j} \nu_j + L_{2j}) ik \frac{dU_j}{dy} + (\rho\omega^2 - L_{2j} k^2) V_j &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Систему уравнений (2.8) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}(L_{1j} \nu_j + L_{2j}) ik \frac{dV_j}{dy} &= +(\rho\omega^2 - L_{1j} k^2) U_j + L_{2j} \frac{d^2 U_j}{dy^2} = \\ &= \left[\rho\omega^2 - L_{1j} k^2 + L_{2j} \frac{d^2}{dy^2} \right] U_j, \\ (L_{1j} \nu_j + L_{2j}) ik \frac{dU_j}{dy} &= +(\rho\omega^2 - L_{2j} k^2) V_j + L_{1j} \frac{d^2 V_j}{dy^2} = \\ &= \left[\rho\omega^2 + L_{1j} \frac{d^2}{dy^2} - L_{2j} k^2 \right] V_j,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$L_{1j} = \frac{E_{0j}}{1-\nu_j^2} \left[1 - \Gamma_{Ej}^c(\omega_R) - i\Gamma_{Ej}^s(\omega_R) \right]$$

$$L_{2j} = \frac{E_{0j}}{2(1+\nu_j)} \left[1 - \Gamma_{Ej}^c(\omega_R) - i\Gamma_{Ej}^s(\omega_R) \right]$$

После введения вспомогательной функции $\Phi_j(y)$ отношениями:

$$U_j = \left[(L_{1j} \nu_j + L_{2j}) i k \frac{d}{dy} \right] \Phi_j; \quad V_j = \left[\rho \omega^2 - L_{1j} k^2 + L_{2j} \frac{d^2}{dy^2} \right] \Phi_j \quad (10)$$

получим из (8) дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$\frac{d^4 \Phi_j}{dy^4} + L_{5j} \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} + L_{6j} \Phi_j = 0$$

где
$$L_{5j} = -2k^2 + \frac{(3-\nu_j)\omega^2}{2c_{sj}^2 \Gamma_{cj}}, \quad L_{6j} = k^2 - \frac{(3-\nu_j)\omega^2 k^2}{2c_{sj}^2 \Gamma_{cj}} + \frac{\omega^4}{c_{pj}^2 c_{sj}^2 \Gamma_{pj} \Gamma_{cj}}$$

$$c_{0pj} = \sqrt{E_j / (\rho_j (1-\nu_j))}, \quad c_{0sj} = \sqrt{G_j / \rho_j}$$

$$\Phi_j(y) = A_j e^{\alpha_j y} + B_j e^{-\alpha_j y} + C_j e^{S_j y} + D_j e^{-S_j y},$$

$$\alpha_j^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{0pj}^2} \right); \quad S_j^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{0sj}^2} \right).$$

здесь A_j, B_j, C_j, D_j - интегральные постоянные.

Если многослойное цилиндрическое тело состоит из ортотропной оболочки, тогда дифференциальное уравнение в перемещениях принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D_0}{d^2} \left[d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{D_{1212}}{D_{1111}} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{D_{1122} + D_{1212}}{D_{1111}} d \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{D_{1122}}{D_{1111}} d \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\rho_0 d^2}{D_{1111}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = -q_1, \\ \frac{D_0}{d^2} \left[\frac{D_{2222}}{D_{1111}} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{D_{1212}}{D_{1111}} d^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{D_{1122} + D_{1212}}{D_{1111}} d \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{D_{2222}}{D_{1111}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\rho_0 d^2}{D_{1111}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] = -q_2, \\ -\frac{D_0}{d^2} \left[\frac{D_{2222}}{D_{1111}} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{D_{2222}}{D_{1111}} w + K \left(d^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{D_{1122} + 2D_{1212}}{D_{1111}} 2d^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + \frac{D_{1122}}{D_{1111}} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{D_{1122}}{D_{1111}} d \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\rho_0 d^2}{D_{1111}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = -q_3. \end{aligned}$$

Здесь $D_0 = D_{1111} h_0$; $K = \frac{h_0^2}{12d^2}$, q_i — поверхностные силы, $d \approx R$ — средний радиус оболочки (см.

рис 2.1), h_0 — толщина оболочки. Для ортотропного материала зависимости (2.2) содержат четыре независимые интегральные соотношения:

$$\begin{aligned}
 B_{111k} [f] &= \frac{E_{011k}}{1 - \nu_{11k} \nu_{22k}} \left[1 - \int_0^\infty R_{E11}^{(k)}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{E11}^{(k)}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f, \\
 B_{222k} [f] &= \frac{E_{022k}}{1 - \nu_{11k} \nu_{22k}} \left[1 - \int_0^\infty R_{E22}^{(k)}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{E22}^{(k)}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f, \\
 B_{112k} [f] &= \frac{E_{011k} \nu_{22k}}{1 - \nu_{11k} \nu_{22k}} \left[1 - \int_0^\infty R_{E11}^{(k)}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{E11}^{(k)}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f, \\
 B_{112k} [f] &= \mu_{012k} \left[1 - \int_0^\infty R_{\mu12k}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau - i \int_0^\infty R_{\mu12k}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau \right] f.
 \end{aligned}$$

где E_{022k} – мгновенный модуль упругости при растяжении в направлении основы (ось φ);

E_{011k} – мгновенный модуль упругости по оси z ; μ_{012k} – мгновенный модуль сдвига, ν_{11k} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси x . Для изотропной оболочки:

$$\begin{aligned}
 B_{111k} [f] &= B_{222k} [f] = \frac{E_{0k}}{1 - \nu_0^2} [f], \\
 B_{112k} [f] &= \frac{E_{0k} \nu_{0k}}{1 - \nu_0^2} [f], \quad B_{1212k} [f] = \frac{E_{0k}}{2(1 + \nu_{0k})} [f].
 \end{aligned}$$

Заключение. В результате проведённого математического моделирования и анализа процессов распространения волн в многослойных вязкоупругих цилиндрических телах были получены следующие основные результаты и выводы:

Построена система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая динамическое состояние многослойных цилиндрических тел. Вязкоупругие свойства материала были представлены с использованием ядра Ржаницына–Колтунова.

С целью упрощения интегральных членов и облегчения решения задачи успешно применён метод «замораживания». Это позволило свести волновые уравнения к системе дифференциальных уравнений с комплексными постоянными коэффициентами.

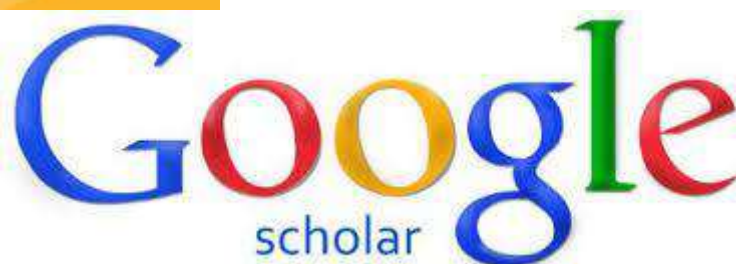
Для случая плоского деформированного состояния решение задачи искалось в виде гармонических волн. Путём введения вспомогательных функций исходная система была сведена к дифференциальному уравнению четвёртого порядка. Данный подход служит фундаментальной основой для построения дисперсионных уравнений и определения фазовых скоростей волн.

Полученные результаты были обобщены не только для изотропных сред, но и для цилиндрических оболочек, изготовленных из ортотропных материалов, при этом были учтены взаимосвязи между независимыми модулями упругости и модулями сдвига вдоль различных координатных направлений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Graff K.F. *Wave motion in Elastic solids*. Dover publications.
2. Pochhammer L. *Über die fortpflanzungs geschwindigkeiten Kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiszyylinder*.
3. Achenbach J.D. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland.
4. Chree C. *The equations of an isotropic elastic solid in polar cylindrical coordinates*.
5. Сафаров И., Нуриддинов Б., Нуриддинов З. *Распространение собственных волн в вязкоупругой цилиндрической панели переменной толщины // Лобачевский журнал математики, 2024. Т. 45. С. 1246–1253.*
6. Safarov I., Nuriddinov B., Nuriddinov Z. *Propagation of own waves in a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024. vol. 45. pp. 1246–1253 (In English). doi: 10.1134/S1995080224600663.*
7. Нуриддинов Ж. З., Нуриддинов Б. З., Очалова З. Ш. *Распространение собственных волн в плоских трехслойных средах // Изв. вузов. Математика, 2024. № 10. С. 43–51.*

8. Nuriddinov Zh. Z., Nuriddinov B. Z., Ochilova Z. Sh. *Propagation of eigenwaves in plane three-layered media* // Russian Mathematics (Iz. VUZ), 2024. vol. 68, no. 10. pp. 43–51 (In Russian). doi: 10.26907/0021-3446-2024-10-51-60.
9. Safarov I.I., Usmonov B.Sh. Juraev, S.I., Teshaev, M.K *Natural Vibrations of a Viscoelastic Three-Layer Cylindrical Body*// Russ Math. 2025, 69, 44–58 (2025). <https://doi.org/10.3103/S1066369X25700240>
10. Tursunov Bahodir, Usmonov Botir, Nuriddinov Baxtiyor, Alimov Hakim, Qurbonov Utkirbek. *Study on the oscillations of the Euler-Bernoulli beam on an elastic base*// AIP Conf. Proc. 24 February 2025; 3268 (1): 020025. <https://doi.org/10.1063/5.0260554>
11. Safarov I. I., Teshaev M. K., Nuriddinov B. Z., & Ablokulov S. Z. *Forced vibrations of hereditary deformable shell elements of aircraft structures in gas flow under influence of atmospheric turbulence*// In E3S Web of Conferences, 2023 (Vol. 401, p. 03017). EDP Sciences. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340103017>
12. Usmonov B.Sh. *A numerical solution of hereditary equations with a weakly singular kernel for vibration analysis of viscoelastic systems*// In Proceedings of the Latvian Academy of Sciences, Section B: Natural, Exact, and Applied Sciences, 2015, (Vol. 69, No. 6, pp. 326-330). DOI: 10.1515/prolas-2015-0048
13. Usmonov B.Sh. Mahmood S. A., Salah B., Jlassi K., Khudayberdieva A., Shibl M. F., Eid K. *Oxygen-enriched silicon carbide nanocrystals for efficient overall water splitting: Unveiling effect of doping and electrolyte pH* // Catalysis Today, 2025, 115471. <https://doi.org/10.1016/j.cattod.2025.115471>
14. Usmonov B.Sh. Mahmood S. A., Salah B., Jlassi K., Khudayberdieva A., Shibl M. F., Eid K. *Data on enhancing the water electrolysis performance of silicon carbide nanoparticles in various electrolytes through oxygen doping*// Data in Brief, 2025, 112023. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2025.112023>



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
29.06.2026 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish
Bukhari street, 190 B-house