



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz



E-ISSN 2181-1466

9 772181 146004



ISSN 2181-6875

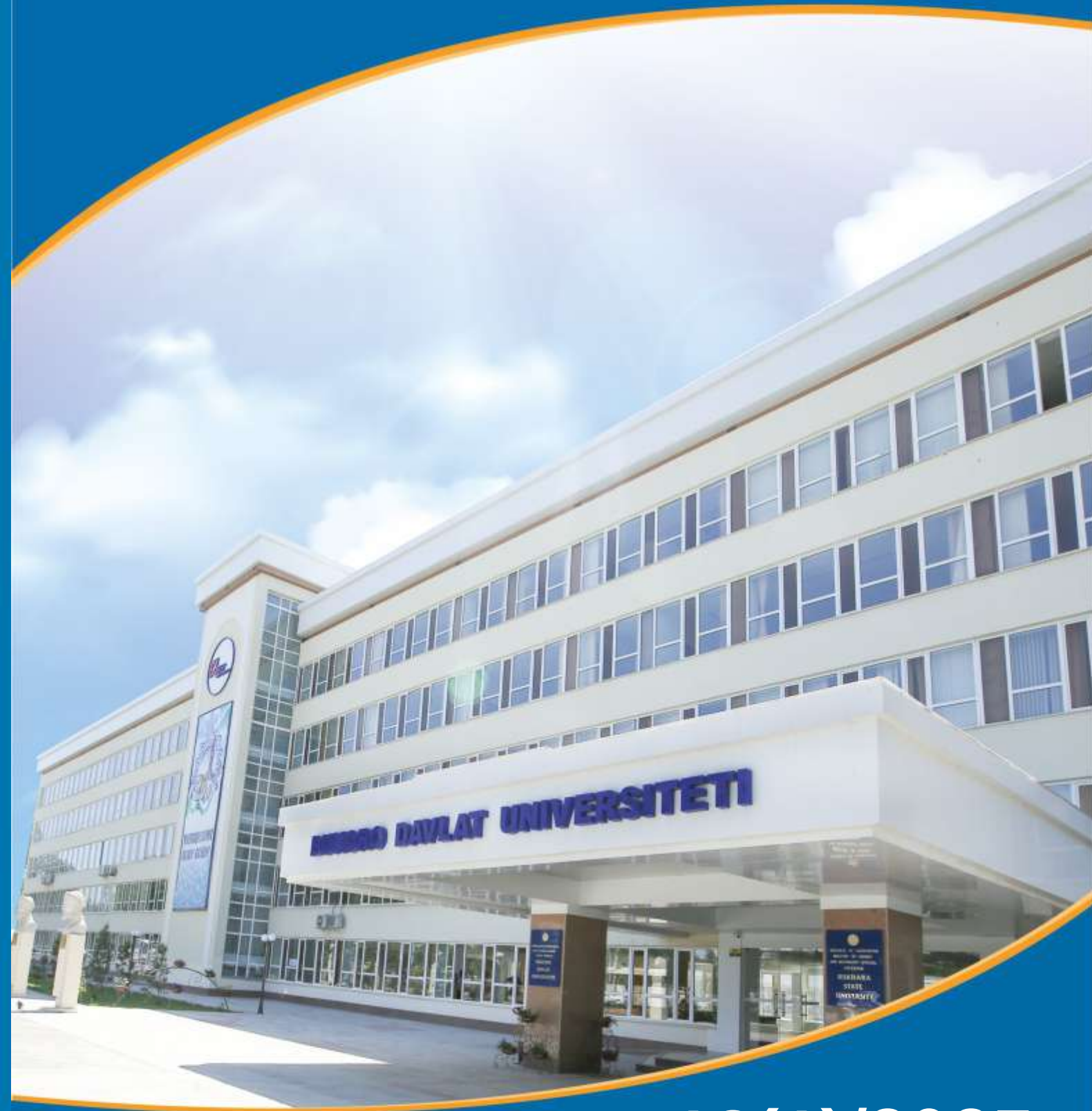
9 772181 687004

12(1)/2025

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University



BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



12(1)/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal

2025, № 12, dekabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), dotsent

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Moldova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navroz-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor

Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

SERIYA: M A T E M A T I K A

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
MATEMATIKA *** MATHEMATICS *** MATEMATIKA		
Abdullayev S.A.	3x3 matritsaning sonli tasviri	3
Abdullayev S.A.	Blok operatorli matritsalarining sonli obrazlari	8
Muxtorova Sh.N.	Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning ta'rif va talqini	12
Omonov O.I., Shog'dorova Q.S.	Qatorlarning yaqinlashishini tahlil qilishda D'Alamber alomati va unga o'xshash alomatlar	17
Utayev A.T.	Ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan V – tartibli bistoxastik operatorlar oilasi dinamikasi	24
Мамедов К.А., Жуманиязов Н., Азаматов А.Ш.	Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности в случае простых собственных значений	29
Арзикулов З.О., Абдужабборов А.А.	Автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с четырьмя переменными	40
Жабборов Н.М., Хусенов Б.Э., Бобохонов Ш.С.	Автоморфизмы и лемниската	52
Бойназаров А.Н.	Решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратом оператора Бесселя	61
Сулаймонов Ф.У., Эшдавлатов З.З., Холбоева Х.Ф.	Численное решение задачи аномального переноса вещества в трещиновато-пористой среде	68
Omonova A.N.	Initial-boundary value problem for a degenerate second order equation with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integral	74
Axmedov S.A., Ablazova K.S., Dexqonboyeva S.A.	Jarayonlar stabilligini nazorat qilishning uch komponentli tizimi	83
Baratov B.S.	On dynamics of a separable cubic stochastic operators in S^2	88
Elmuradova Kh.B.	An inverse problem of determining the kernel pseudo-integro-differential equation	94

G'iyosova F.U.	Kasr tartibli to'liqin tarqalish tenglamasi uchun aralash masala	107
Akilov J.A., Djabbarov M.S., G'aybulov Y.Sh.	Neft quduqlarini shtangli nasoslar yordamida ishlatishda gidrodinamik bosim	112
Ishankulov T., Umarov S.S.	Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasining Karleman funksiyasi	120
Kuldoshova M.J.	The controlling problem for the heat exchange equation in an inhomogenous rod	125
Muradov R.S.	Noinformativ kuzatuvlar statistik modeli uchun Kramér–Rao bahosining yangi isboti	129
Sulaymonov I.A.	Fractional parabolic systems of vector order with Riemann-Liouville fractional derivative	134
Xolliyev F.B.	Fraktal tuzilishga ega bo'lgan g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishi masalasidagi hosila tartibini tiklash	141
Даминова М.С., Шодиева С.Р., Абдижабборов М.А.	Нелокальная задача с интегральным условием склейки для нагруженного уравнения смешанного типа с дробной производной Капуто	148
Зокиров М.С.	Численное моделирование процессов плоскорадиальной фильтрации с дробными производными	155
Ikromova D.I., Xudoyberdiyev D.G'.	X_9 tipidagi maxsuslikka ega bo'lgan sirtlarda mujassamlashgan o'lchovlar Furiye almashtirishining aniq L^p bahosi	162
Джамалов С.З., Халхаджаев Б.Б.	Линейная обратная задача для уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка	168
Исломов Б.И., Абсоатова Х.Г.	Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром	178
Tursunov I.E.	Ko'p o'zgaruvchili funksiya karrali va takroriy limitlarining o'zaro munosabatlari	184
Хасанов И.И.	Задача нахождения коэффициента при нулевом порядке в одном дифференциальном уравнении с дробной производной	190
Jumaev J.J.	Investigation of direct and inverse problems for a semilinear diffusion equation with initial–boundary and overdetermination conditions	200
Babaev S.S.	General algorithm for constructing a weighted optimal quadrature formula in Hilbert space	209

3x3 MATRITSANING SONLI TASVIRI

*Abdullayev Sarvar Anvar o‘g‘li,
Buxoro davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi*

Annotatsiya. Ushbu maqolada 3×3 o‘lchamli o‘z-o‘ziga qo‘shma sonli matritsaning sonli tasviri, uning xos qiymatlari va sonli tasvir bilan spektr orasidagi bog‘liqlik o‘rganilgan. Matritsaning sonli tasviri uchun umumiy teoremlar isbotlangan hamda ayrim maxsus holatlar uchun lemma va misollar orqali aniq ifodalar keltirilgan. Natijalar orqali sonli matritsalar spektrining joylashuv oralig‘i va ularning sonli tasviri orasidagi uzviylik tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: sonli tasvir, xos qiymat, spektr, chiziqli operator, o‘z-o‘ziga qo‘shma matritsa, Gilbert fazosi, rezolventa.

ЧИСЛОВОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 3×3

Аннотация. В данной статье исследуется числовое изображение самосопряжённой числовой матрицы размера 3×3 , её собственные значения и взаимосвязь между спектром и числовым образом. Приведены и доказаны основные теоремы и леммы, а также рассмотрены конкретные примеры для специальных случаев. Полученные результаты позволяют определить взаимосвязь между спектром матрицы и интервалом её числового образа.

Ключевые слова: числовое изображение, собственные значения, спектр, линейный оператор, самосопряжённая матрица, гильбертово пространство, резольвента.

NUMERICAL RANGE OF A 3×3 MATRIX

Abstract. This article examines the numerical range of a 3×3 self-adjoint complex matrix, its eigenvalues, and the relationship between the numerical range and the spectrum. General theorems for the numerical range of a matrix are proven, and precise expressions for some special cases are provided through lemmas and examples. The results are used to analyze the connection between the location interval of the spectrum of numerical matrices and their numerical range.

Keywords: numerical range, eigenvalue, spectrum, linear operator, self-adjoint matrix, Hilbert space, resolvent.

Kirish. H Gilbert fazosi va $A: H \rightarrow H$ aniqlanish sohasi $D(A) \subset H$ bo‘lgan chiziqli operator bo‘lsin.

Ushbu

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

to‘plamga A operatorning sonli tasviri deyiladi. Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, $W(A)$ to‘plam kompleks sonlar tekisligining qismi bo‘ladi va $W(A)$ to‘plamning geometrik xossalari A operator haqida bir qancha ma’lumotlarni tavsiflaydi.

Gilbert fazosidagi chiziqli operatorning sonli tasvirni o‘rganish bunday operatorlar spektrining joylashuv o‘rnini o‘rganishdagi muhim usullardan biri hisoblanadi.

Matritsaning sonli tasviri uning barcha xos qiymatlarini o‘z ichiga oladi.

Faraz qilaylik, C kompleks sonlar to‘plami bo‘lsin. C^3 fazoda ushbu

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishidagi sonli matritsani qaraymiz, bu yerda a_{ii} , $i = 1, 2, 3$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar, a_{ij} , $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ lar esa ixtiyoriy kompleks sonlar.

M matritsaning elementlariga qo‘yilgan bunday shartlarda bu matritsa C^3 dagi chiziqli chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan operatorni ifodalaydi. Shu sababli uning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.

1-lemma. M matritsaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sonlari M matritsaning xos qiymatlaridir.

Isbot. Faraz qilaylik, M matritsa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ xos qiymatlarga ega bo'lsin. M matritsaning $\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ xos qiymatiga mos keluvchi birlik xos vektorlarni X bilan, $\max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ xos qiymatiga mos keluvchi birlik xos vektorlarni Y bilan belgilaymiz, u holda

$$(MX, X) = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad (MY, Y) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

$\|x\| = 1, \|y\| = 1$ munosabatlar o'rinlidir.

Ko'rinib turibdiki, (Mz, z) kvadratik formaning $\|z\| = 1$ birlik sfera bo'yicha eng kichik qiymati X da, eng katta qiymati esa Y erishiladi. Demak,

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

1-lemma isbot bo'ldi.

2-lemma. Agar $a_{12} = a_{23} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \max\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}]$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, $a_{12} = a_{23} = 0$ bo'lsin, u holda

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

M matritsaning xos qiymatlari

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0$$

xarakteristik tenglamaning nollari bo'ladi. Bundan esa M matritsaning xos qiymatlari $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \lambda_3 = a_{33}$ ekanligi kelib chiqadi. 1-lemmaga ko'ra,

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

3-lemma. Agar $a_{12} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{11}, \lambda_-\}, \max\{a_{11}, \lambda_+\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}$$

Isbot. Faraz qilaylik, $a_{12} = 0$ bo'lsin, u holda

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

M matritsaning xarakteristik tenglamasi esa

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - |a_{23}|^2(a_{11} - \lambda) = 0 \quad (1)$$

bo'ladi.

$$(a_{11} - \lambda)((a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - |a_{23}|^2) = 0$$

Bizga ma'lumki, xarakteristik tenglamaning yechimlari M matritsaning xos qiymatlaridir. (1)-tenglamani yechish $a_{11} - \lambda = 0$ va $\lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda - |a_{23}|^2 = 0$ tenglamani yechishga keladi.

Bundan esa,

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}.$$

Quyidagicha

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}$$

belgilash kiritaylik. 1-lemmaga ko'ra,

$$W(M) = [\min\{a_{11}, \lambda_-\}, \max\{a_{11}, \lambda_+\}]$$

4-lemma. Agar $a_{23} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{33}, \mu_-\}, \max\{a_{33}, \mu_+\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda

$$\mu_{\pm} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2}}{2}.$$

1-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaning sonli tasvirini toping.

Bu matritsa uchun

$$a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 1, a_{12} = i, a_{23} = 1+i, |a_{12}|^2 = 1, |a_{23}|^2 = 2$$

p_0, q_0 va φ_0 qiymatlarni topish formulalariga asosan

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{11}-a_{33})^2 + (a_{22}-a_{33})^2\} - |a_{23}|^2 - |a_{12}|^2 =$$

$$-\frac{1}{6}\{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2\} - 1 - 2 = -3$$

$$q_0 = a_{33}|a_{12}|^2 + a_{11}|a_{23}|^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - \frac{2}{27}(a_{11} + a_{22} + a_{33})^3 +$$

$$+ \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - |a_{23}|^2 - |a_{12}|^2)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) =$$

$$= \frac{1}{3}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 - 2)(1 + 1 + 1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-\frac{2}{27} \cdot 27 = -2 + 2 = 0$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3q_0}{2p_0}\sqrt{-\frac{3}{p_0}}\right) = \arccos\left(-\frac{3 \cdot 0}{2 \cdot (-3)}\sqrt{-\frac{3}{(-3)}}\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

ga teng.

U holda

$$\gamma_k = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 2\sqrt{-\frac{p_0}{3}}\cos\frac{\varphi_0 + 2(k-1)\pi}{3} =$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3}, \text{ bu yerdak } = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{6} = 1 + \sqrt{3}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_2 = 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = 1 + 2\cos\frac{5\pi}{6} = 1 - \sqrt{3}$$

1-teoremaga ko'ra matritsaning sonli tasviri $W(M) = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$ bo'ladi.

2-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i & 2 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani sonli tasvirini topaylik.

Bizga ma'lumki,

$$a_{11} = 1, a_{22} = 2, a_{33} = 0, a_{12} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, a_{23} = -i, |a_{12}|^2 = 4,$$

$$|a_{23}|^2 = 1$$

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(1-2)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2\} - 4 - 1 = -6$$

$$q_0 = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 - 1)(1 + 2 + 0) - \frac{2}{27} \cdot 27 - 1 \cdot 2 \cdot 0 +$$

$$+ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -3 - 2 + 1 = -4$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3 \cdot (-4)}{2 \cdot (-6)}\sqrt{-\frac{3}{(-6)}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

U holda,

$$\gamma_k = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2(k-1)\pi}{3}, \quad k = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1 + 2 = 3 \text{ ga}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_1 = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} = 1 - \sqrt{2\sqrt{3} + 4} \text{ ga teng.}$$

1-teoremaga ko'ra, matritsaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = \left[1 - \sqrt{2\sqrt{3} + 4}; 3 \right]$$

tenglik o'rinlidir.

3-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$$

matritsaning sonli tasvirini toping.

Bizga ma'lumki,

$$a_{11} = 2, a_{22} = 1, a_{33} = 3, a_{12} = i, a_{23} = -i, |a_{12}|^2 = 1, |a_{23}|^2 = 1$$

Sodda hisoblashlarni bajarib, p_0 , q_0 va φ_0 ning qiymatini topamiz:

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2\} - 1 - 1 = -3$$

$$q_0 = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 1 - 1)(2 + 1 + 3) - \frac{2}{27} \cdot 27 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5 - 22 + 18 = 1$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot (-3)}\sqrt{-\frac{3}{(-3)}}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

U holda,

$$\gamma_k = 2 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2(k-1)\pi}{3}, \quad k = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 2 + 2\cos\frac{\pi}{9}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_2 = 2 + 2\cos\frac{7\pi}{9}$$

1-teoremaga ko'ra, matritsaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = \left[2 + 2\cos\frac{\pi}{9}, 2 + 2\cos\frac{7\pi}{9} \right]$$

tenglik o'rinlidir.

Xulosa. Ushbu maqolada 3×3 o'lehamli o'z-o'ziga qo'shma sonli matritsaning sonli tasviri va uning xos qiymatlari orasidagi bog'liqlik tahlil qilindi. Matritsaning sonli tasviri orqali xos qiymatlar to'plamining joylashuv oralig'i aniqlanib, bu holat uchun umumiy teorema va lemmalar isbotlandi. Keltirilgan misollar asosida sonli tasvirning spektr bilan bevosita bog'liqligi amaliy tarzda ko'rsatildi. Olingan natijalar chiziqli operatorlar va matritsalar spektral nazariyasini yanada chuqurroq o'rganishda hamda funksional analiz masalalarida qo'llash imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Саpимсоков Т.А. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи. - 1980, 9-73-bet.
2. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand, 2009, 110-367-bet.
3. Horn R. A., Johnson Ch. R. Matrix analysis. Cambridge University Press. London, New York, New Rochelle, 1990.
4. Bhatia R. Matrix analysis. Springer-Verlag, New York, 1996.

5. Tretter C. *Spectral theory of block operator matrices and applications*. – London: Imperial College Press, 2008.
6. Rasulov T. H., Tretter C. *Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices*. Preprint, 2011, Bern, pp. 1-36.
7. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*. М.: Мир. 1982.
8. Като Т. *Теория возмущения линейных операторов*. Изд-во «Мир», Москва, 1972.
9. Rasulov T. H., G'aybullayev R. Q. 3x3 sonli matritsa xos qiymatlarining monotonligi haqida. // Buxoro davlat universiteti ilmiy axborotnomasi, 2012 yil, № 4 (48), 27-31 betlar.
10. Rasulov T. H., G'aybullayev R. Q. 3x3 sonli matritsa xos qiymatlarining ba'zi xossalari. "Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2013", Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, 15--16 aprel 2013, Namangan, 151-154 betlar.
11. Расулов Т. Х., Гайбуллаев Р. К. О монотонности собственных значений числовой матрицы 3x3. Тезисы 44-й Всероссийской молодёжной школы-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2013, С. 283-284.
12. Uzoqboyev, A., Abdullayev, S., & Abriyev, N. (2023). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. *Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук*, 3(1), 92-100.
13. Barotov, A. S., & Abdullayev, S. A. (2022, May). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. In *International scientific and practical conference on "Modern problems of applied mathematics and information technologies*.
14. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Ko'phad rezultantining tenglamalar sistemasini yechishga tadbirlari. *Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali*, 4(4).
15. Saxayev M. "Elementar matematika masalalari to'plami" I.II qismlar. «O'qituvchi», Toshkent 1970.1972. 220-236 bet.
16. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integralini. // *Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali*, 4(4).

BLOK OPERATORLI MATRITSALARNING SONLI OBRAZLARI

Abdullayev Sarvar Anvar o'g'li,

Buxoro davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada blok operatorli matritsalarning sonli, kvadratik va kubik sonli obrazlari tushunchalari hamda ularning asosiy xossalari tahlil qilinadi. Chiziqli chegaralangan operatorlarning blok shaklidagi tasviri orqali ularning spektral xususiyatlari, sonli obrazlar to'plamining chegaralanganligi va yopiq bo'lishi, shuningdek, operatorning o'z-o'ziga qo'shmalik holatlarida yuzaga keluvchi aloqalar o'rganilgan. Tadqiqot natijalari funksional analiz va operatorlar nazariyasidagi ayrim muammolarni yechishda qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: blok operatorli matritsa, chiziqli operator, sonli obraz, kvadratik sonli obraz, kubik sonli obraz, Gilbert fazosi, xos qiymat, spektr.

ЧИСЛОВЫЕ ОБРАЗЫ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Аннотация. В данной статье рассматриваются числовые, квадратные и кубические образы блочно-операторных матриц и их основные свойства. С помощью блочного представления линейных ограниченных операторов исследуются спектральные характеристики, ограниченность и замкнутость множеств числовых образов, а также их взаимосвязь в случае самосопряжённых операторов. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач функционального анализа и теории операторов.

Ключевые слова: блочно-операторная матрица, линейный оператор, числовой образ, квадратный числовой образ, кубический числовой образ, пространство Гильберта, собственные значения, спектр.

NUMERICAL RANGES OF BLOCK OPERATOR MATRICES

Abstract. This article examines the numerical, quadratic, and cubic ranges of block operator matrices and their fundamental properties. Using the block representation of bounded linear operators, the study explores spectral characteristics, the boundedness and closedness of numerical ranges, and their interrelations in the case of self-adjoint operators. The obtained results can be applied to solving certain problems in functional analysis and operator theory.

Keywords: block operator matrix, linear operator, numerical range, quadratic numerical range, cubic numerical range, Hilbert space, eigenvalue, spectrum.

Kirish. Faraz qilaylik, H_1 va H_2 lar Gilbert fazolari bo'lib, H orqali ularning to'g'ri yig'indisini belgilaymiz, $L(H)$ esa H ni H ga o'tkazuvchi chiziqli chegaralangan (uzluksiz) operatorlar fazosi bo'lsin. Bizga ma'lumki, har qanday $A \in L(H)$ operator

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

blok operatorli matritsa ko'rinishda tasvirlanadi, bu yerda

$A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, 2$ elementlar chiziqli chegaralangan operatorlar. Agar A operator uchun $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{11} = A_{22}^*$, $A_{21} = A_{21}^*$, tengliklar bajarilsa, u holda A o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi, ya'ni $A^* = A$. $(\cdot, \cdot)_i$ va $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$ lar orqali H_i fazodagi mos ravishda skalyar ko'paytma va normani belgilaymiz.

$f = (f_1, f_2) \in H$, $\|f_i\|_i = 1$, $i = 1, 2$ elementlar uchun

$$A_f = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}$$

A_f matritsaning barcha xos qiymatlari to'plamiga $A \in L(H)$ blok operatorli matritsaning (1)-ko'rinishiga mos keluvchi kvadratik sonli obrazi deyiladi va $W^2(A)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$W^2(A) = \bigcup_{\substack{\|f_i\| \\ i=1,2}} \sigma_p(A_f)$$

bu yerda, $\sigma_p(A_f)$ orqali A_f ning nuqtali spektri belgilangan. $A_f - 2 \times 2$ sonli matritsa bo'lganligi uchun $\sigma_p(A_f)$ to'plam A_f matritsaning xos qiymatlaridan iborat bo'ladi.

H Gilbert fazosining turli yoyilmalariga turli kvadratik sonli obrazlar to'g'ri keladi.

Masalan, ushbu

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

sonli matritsaning $C^2 \oplus C^2$ va $C^3 \oplus C^1$ yoyilmalariga mos kvadratik sonli obrazlar turlicha bo'ladi.

Ba'zi hollarda kvadratik sonli obrazning quyidagi ekvivalent ta'rifidan foydalanish qulaydir, bunda f_1 va f_2 lar nolmas bo'lib, normasi 1 ga teng bo'lishi shart emas.

$f_i \in H_i \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ element uchun

$$\hat{A}_f = \left(\frac{(A_{ij}f_j, f_i)_i}{\|f_i\|_i \cdot \|f_j\|_j} \right)_{i,j=2}^2$$

matritsani qaraymiz va

$$\Delta(f_1, f_2; \lambda) = \det \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 - \lambda(f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 - \lambda(f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}$$

bo'lsin.

U holda

$$W^2(A) = \bigcup_{f_i \in H_i \setminus \{0\}, i=1,2} \sigma_p(\hat{A}_f) = \{\lambda \in C: \exists f_i \in H_i \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2,$$

munosabat o'rinli.

Chiziqli operatorning kvadratik sonli obrazi hamisha uning sonli obrazida saqlanadi:

$$W^2(A) \subset W(A).$$

Agar A operator yuqori yoki quyi uchburchak ko'rinishiga ega bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ yoki } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, u holda}$$

$W^2(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22})$ tenglik o'rinlidir. Chiziqli chegaralangan blok operatorli matritsaning kvadratik sonli obrazi C kompleks sonlar to'plamining chegaralangan qism to'plami bo'ladi:

$$W^2(A) \subset \{\lambda \in C: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

Agar $\dim H < \infty$ bo'lsa, u holda $W^2(A)$ yopiq to'plam bo'ladi. Sonli obrazdan farqli ravishda kvadratik sonli obraz umuman olganda qavariq to'plam bo'lmasligi ham mumkin, bu to'plam ko'pi bilan ikkita komponentdan iborat bo'lishi mumkin.

Agar $a, b, c, d \in C$ sonlar orqali aniqlangan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sonli matritsada $a, d \in R$ va $c = \bar{b}$ bo'lsa, u holda uning xos qiymatlari

$$\lambda_1 = \max\{a, d\} + |b| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2|b|}{|a-b|} \right);$$

$$\lambda_2 = \min\{a, d\} - |b| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2|b|}{|a-b|} \right).$$

ko'rinishida tasvirlanadi.

$f_i \in H_i \setminus \{0\}$ element uchun

$$dis_A(f_1, f_2) = \left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} - \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right)^2 + 4 \frac{(A_{11}f_1, f_1)_1 \cdot (A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_1\|_1^2 \cdot \|f_2\|_2^2}$$

belgilashni kiritamiz. Agar $dis_A(f_1, f_2) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lambda_{\pm} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} + \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} - \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right)^2 + 4 \frac{(A_{11}f_1, f_1)_1 \cdot (A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_1\|_1^2 \cdot \|f_2\|_2^2}}$$

belgilashni kiritamiz. Agar o'z-o'ziga qo'shma bo'lsa, u holda $W^2(A) \subset R$ bo'ladi va

$$W^2(A) = \Lambda_-(A) \cup \Lambda_+(A)$$

tenglik o'rinaldir, bu yerda

$$\Lambda_{\pm}(A) = \left\{ \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : f_i \in H_i \setminus \{0\}, i = 1, 2 \right\}$$

Shunday qilib, chiziqli chegaralangan blok operatorli matritsalarining kvadratik sonli obrazini o'rganishda sonli matritsaning xos qiymatlari muhim o'rin egallar ekan.

Endi chiziqli operatorning kubik sonli obrazini qaraymiz. Agar operatorning spektri uchta kesishmaydigan kesmalar birlashmasidan iborat bo'lsa, u holda bu operatorning sonli obrazi ham, kvadratik sonli obrazi ham spektri yetarlicha o'rganish imkonini bera olmaydi. Quyida biz kubik sonli diopozon va uning ba'zi xossalarga to'xtalamiz.

H_1, H_2 va H_3 lar Gilbert fazolari, H esa bu fazolarning to'g'ri yig'indisi, ya'ni

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$$

bo'lsin. U holda istalgan $A \in L(H)$ operator

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ko'rinishidagi 3×3 blok operatorli matritsa kabi tasvirlanadi, bunda $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$,

$i, j = 1, 2, 3$ lar chiziqli chegaralangan operatorlar.

S orqali H dagi birlik sferani belgilaymiz, ya'ni

$$S = \{f \in (f_1, f_2, f_3) \in H : \|f_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3\}$$

$f \in S$ element uchun ushbu

$$A = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1) & (A_{12}f_2, f_1) & (A_{13}f_3, f_1) \\ (A_{21}f_1, f_2) & (A_{22}f_2, f_2) & (A_{23}f_3, f_2) \\ (A_{31}f_1, f_3) & (A_{32}f_2, f_3) & (A_{33}f_3, f_3) \end{pmatrix}$$

3×3 matritsani qaraymiz.

U holda

$$W^3(A_f) = \bigcup_{f \in S} \sigma_p(A_f)$$

to'plamga $A_{3 \times 3}$ blok operatorli matritsaning (2) ko'rinishiga mos kubik sonli obrazi deyiladi.

Ma'lumki, har bir uchun

$$\sigma_p(A_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A_f - \lambda) = 0\}.$$

tenglik o'rinaldir. Shu sababli, $W^3(A)$ to'plam uchun quyidagi ekvivalent formula o'rinni:

$$W^3(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f \in S, \quad \det(A_f - \lambda) = 0\}.$$

Chiziqli operatorning kubik sonli obrazi hamisha uning sonli obrazida yotadi, ya'ni

$$W^3(A) \subset W(A).$$

Agar A operator yuqori yoki quyi uchburchak ko'rinishda bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \text{ yoki } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, u holda $W^3(A)$ uchun

$$W^3(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22}) \cup W(A_{33})$$

tenglik o'rinlidir.

Chiziqli chegaralangan blok operatorli matritsaning kubik sonli obrazi C kompleks sonlar to'plamining chegaralangan qism to'plamidir, ya'ni

$$W^3(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Agar $\dim H < \infty$ bo'lsa, u holda $W^3(A)$ yopiq to'plam bo'ladi. Kubik sonli obraz ko'pi bilan uchta komponentlardan iborat bo'lishi mumkin.

Xulosa. Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan shuni xulosa qilish mumkinki, 3×3 blok operatorli matritsa kubik sonli obrazini o'rganishda 3×3 sonli matritsa xos qiymatlari muhim o'rin egallaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Саримсоков Т.А. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи 1980, 9-73-bet.
2. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand, 2009, 110-367-bet.
3. Horn R. A., Johnson Ch. R. Matrix analysis. Cambridge University Press. London, New York, New Rochelle, 1990.
4. Bhatia R. Matrix analysis. Springer-Verlag, New York, 1996.
5. Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications. – London: Imperial College Press, 2008.
6. Rasulov T. H., Tretter C. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Preprint, 2011, Bern, pp. 1-36.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.
8. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. Изд-во «Мир», Москва, 1972.
9. Rasulov T. H., G'aybullayev R. Q. 3×3 sonli matritsa xos qiymatlarining monotonligi haqida. // Buxoro davlat universiteti ilmiy axborotnomasi, 2012 yil, № 4 (48), 27-31 betlar.
10. Rasulov T. H., G'aybullayev R. Q. 3×3 sonli matritsa xos qiymatlarining ba'zi xossalari. "Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2013", Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, 15--16 aprel 2013, Namangan, 151-154 betlar.
11. Расулов Т. Х., Гайбуллаев Р. К. О монотонности собственных значений числовой матрицы 3×3 . Тезисы 44-й Всероссийской молодежной школа-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2013, С. 283-284.
12. Uzoqboyev, A., Abdullayev, S., & Abriyev, N. (2023). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. // Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 3(1), 92-100.
13. Barotov, A. S., & Abdullayev, S. A. (2022, May). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. In International scientific and practical conference on "Modern problems of applied mathematics and information technologies.
14. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Ko'phad rezultatining tenglamalar sistemasini yechishga tadbiqlari. // Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali, 4(4).
15. Saxayev M. "Elementar matematika masalalari to'plami" I.II qismlar."O'qituvchi" Toshkent 1970.1972. 220-236 bet.
16. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integralini. // Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali, 4(4).

TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONNING TA'RIFI VA TALQINI

Muxtorova Shohida Negmat qizi,

Qarshi davlat texnika universiteti o'qituvchisi
muxtorovashohida1998@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning nazariy asoslari, ularning matematik ta'rifi hamda ehtimollik nuqtayi nazaridan talqini yoritilgan. Tarmoqlanuvchi jarayon — bu vaqt o'tishi bilan elementlarning ko'payishi yoki yo'qolishi ehtimoli orqali rivojlanadigan tasodifiy tizim sifatida qaraladi. Maqolada bunday jarayonlarning Markov xossasi, stasionarlik, o'sish tezligi va yo'qolish ehtimoli kabi asosiy xususiyatlari tahlil qilinadi. Shuningdek, Galton–Watson modeli misolida tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning amaliy talqini va uning populyatsiya dinamikasini modellashirishdagi ahamiyati ko'rsatib o'tilgan. Tadqiqot natijalari tarmoqlanuvchi jarayonlarning biologiya, demografiya, epidemiologiya va axborot tizimlaridagi qo'llanilishini nazariy jihatdan asoslashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayon, ehtimollik modeli, Markov xossasi, Galton–Watson jarayoni, stasionarlik, populyatsiya dinamikasi.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Аннотация. В данной статье рассматриваются теоретические основы ветвящихся случайных процессов, их математическое определение и вероятностная интерпретация. Ветвящийся процесс рассматривается как стохастическая система, которая развивается во времени за счёт вероятностного размножения или исчезновения элементов. Проанализированы основные свойства таких процессов, включая марковское свойство, стационарность, скорость роста и вероятность вырождения. В качестве примера приведена модель Гальтона–Уотсона, демонстрирующая практическое применение ветвящихся случайных процессов при моделировании динамики популяций. Результаты исследования способствуют теоретическому обоснованию применения ветвящихся процессов в биологии, демографии, эпидемиологии и информационных системах.

Ключевые слова: ветвящийся случайный процесс, вероятностная модель, марковское свойство, процесс Гальтона–Уотсона, стационарность, динамика популяции.

DEFINITION AND INTERPRETATION OF THE BRANCHING RANDOM PROCESS

Abstract. This article examines the theoretical foundations of branching stochastic processes, providing their mathematical definition and probabilistic interpretation. A branching process is considered as a stochastic system that evolves over time through the probabilistic reproduction or extinction of its elements. The paper analyzes key properties such as the Markov property, stationarity, growth rate, and extinction probability. The Galton–Watson model is presented as an example to illustrate the practical interpretation of branching stochastic processes and their role in modeling population dynamics. The results of the study contribute to the theoretical justification of branching process applications in biology, demography, epidemiology, and information systems.

Keywords: branching stochastic process, probabilistic model, Markov property, Galton–Watson process, stationarity, population dynamics.

Kirish. Bu maqolada biz bir turdagi zarrachalar bilan berilgan eng sodda tur Markov tarmoqlanuvchi jarayonlarini o'rganamiz. Vaqtga nisbatan bir jinsli Markov jarayonlarini $N = \{1, 2, \dots\}$ holatlar fazosida qaraymiz. Markov jarayonining o'tish ehtimolligi $P_{ij}(t)$, $t \in T$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$P_{ij}(t) \geq 0 \quad (1)$$

barcha $i, j \in \mathbb{N}$ va $t \in T$ uchun (nomanfiylik sharti);

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1 \quad (2)$$

ixtiyoriy $i, j \in \mathbb{N}$ va $t \in T$ da (normalanganlik sharti);

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(t-u) \quad (3)$$

ixtiyoriy $i, j \in \mathbb{N}$ va $0 \leq u \leq t, u, t \in T$ (markovlik xossasi);

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{boshlang'ich shart})$$

(4).

Ta'rif 1.1.1. Agar $P_{ij}(t)$ o'tish ehtimolligi $P_{ij}(t)$ ning n -karrali taqsimot kompozitsiyasi

$$P_{ij}(t) = P_{1j}^{*i}(t) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_i=j} P_{1j_1}(t) P_{1j_2}(t) \dots P_{1j_i}(t) \quad (5)$$

(tarmoqlanish sharti)ga ega bo'lsa, Markov jarayoni $\mathbb{N}$ da tarmoqlanuvchi deyiladi, xususan, $i=0$ da (1.1.5) shart $P_{0j}(t) = \delta_{0j}$ ni bildiradi [14].

T ning qism to'plamlari nomanfiy butun sonlar to'plami $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ yoki $t \in [0, \infty)$ bo'lishi mumkin. Birinchi holatda *diskret vaqtli*, ikkinchi holatda *uzluksiz vaqtli* tarmoqlanuvchi jarayonlar haqida gapiramiz.

$t \in [0, \infty)$ uzluksiz bo'lgan holatda odatda yana qo'shimcha

$$\lim_{t \uparrow 0} P_{ii}(t) = 1 \quad (6)$$

uzluksizlik sharti ishlatiladi. (6), (1) va (2) shartlardan birdaniga har bir i uchun barcha $j \neq i$ larda bir tekis

$$\lim_{t \downarrow 0} P_{ij}(t) = 0, \quad (7)$$

(3) shartdan esa barcha $P_{ii}(t)$ o'tish ehtimolliklarining $\forall t \geq 0$ da uzluksizligi kelib chiqadi.

(5) tarmoqlanish shartlari ko'rib chiqilayotgan tarmoqlanuvchi jarayonlar sinfini Markov jarayonlaridan ajratib turadi. Bunday tanlash ikki nuqtayi nazardan asoslanadi. Bir tomondan, tarmoqlanuvchi jarayonlar fizikada, kimyoda, biologiyada, texnikada, demografiyada va boshqalarda real hodisalarning ancha keng sinfini tavsiflaydi. Boshqa tomondan, juda qulay matematik apparat bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar tarmoqlanuvchi jarayonlarni chuqur o'rganish imkonini beradi. Tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasida ularning o'ziga xos muammoli bayonlari va ularni hal qilish usullari tabiiy ravishda ajralib turadi [3].

Kelgusida biz fizik va kimyoviy hodisalar bilan bog'liq bo'lgan tarmoqlanuvchi jarayonlarining haqiqiy mazmunini aks ettiruvchi vizual terminologiyaga amal qilamiz. Bizga bir xil turdagi zarrachalar berilgan bo'lsin. Tizimning holati zarrachalar soni bilan aniqlanadi. t vaqtdagi zarrachalar sonini $X(t)$ bilan belgilaylik. Faraz qilaylik, t vaqtda bir zarracha, kelib chiqishi va boshqa zarrachalar mavjudligidan qat'iy

nazar, $P_{1n}(t)$ ehtimollik bilan n ta zarrachaga aylanadi va $\sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(t) = 1$. Bundan agar dastlabki vaqtda k ta

zarracha mavjud bo'lsa, keyin t vaqt o'tishi bilan ular $X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t) + \dots + X^{(k)}(t)$ zarrachaga aylanadi, bu yerda $X^{(i)}(t)$ - i -zarrachaning avlodlar soni, barcha $X^{(i)}(t)$, $i=1, 2, \dots, k$ lar bog'liqsiz va bir xil $P_{1n}(t) = P\{X^{(i)}(t) = n\}$ taqsimotga ega. Shunday qilib, t vaqt ichida $P_{kn}(t)$ ning k zarrachadan n ta zarrachaga o'tish ehtimoli uchun $P_{1n}(t)$ ning k -karrali kompozitsiyasi, ya'ni

$$P_{kn}(t) = P_{1n}^{*k}(t) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} P_{1n_1}(t) P_{1n_2}(t) \dots P_{1n_k}(t)$$

o'rinli.

Bundan tashqari, biz zarrachalarning o'zgarishi oldingi davrdagi tarixiga bog'liq emas, deb faraz qilganimiz uchun, $X(t)$ jarayon Markov jarayonidir, ya'ni $P_{kn}(t)$ o'tish ehtimolligi (3) shartni qanoatlantiradi [13].

Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayon — bu ehtimollik nazariyasida o'ziga xos o'rin egallagan, avlodlar bo'yicha takrorlanadigan stoxastik tizim bo'lib, uning asosiy strukturasini elementlarning mustaqil

replikatsiya mexanizmi tashkil etadi. Har bir element ma'lum ehtimollik taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy sonli avlod hosil qilishi bilan jarayonning keyingi holati aniqlanadi. Shuning uchun tarmoqlanuvchi jarayonlarning dinamikasi diskret vaqtli va tasodifiy ko'payish mexanizmiga ega bo'lgan Markov jarayoni sifatida qaraladi.

Tarmoqlanuvchi jarayonni tavsiflashda asosiy parametrlar quyidagilardan iborat:

1. Avlodlar taqsimoti

Jarayonning rivojlanishi $p_k = P(X = k)$ ehtimollik taqsimoti orqali belgilanadi. Bu taqsimot har bir element nechta avlod hosil qilishi mumkinligini ko'rsatadi. Avlodlar taqsimoti jarayonning barqarorligi va uzoq muddatli xatti-harakatini aniqlovchi asosiy omildir.

2. Matematik kutilma:

Jarayonning o'sish yoki yo'qolish holati quyidagi kutilma bilan aniqlanadi:

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Agar ($m < 1$) bo'lsa — jarayon degeneratsiyalanuvchi, ya'ni yo'q bo'lib ketadi.

Agar ($m = 1$) bo'lsa — kritik holat, jarayonning uzoq muddatli barqarorligi sezilarli darajada tasodifiylikka bog'liq.

Agar ($m > 1$) bo'lsa — jarayonning cheksiz o'sish ehtimoli mavjud bo'ladi.

3. Generatsiya funksiyasi

Tarmoqlanuvchi jarayonlarning matematik tahlilida quyidagi generatsiya funksiyasi muhim rol o'ynaydi:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Bu funksiya jarayonning avlodlar soniga oid barcha ehtimollik xususiyatlarini o'zida mujassamlashtiradi. Jarayonning asimptotik tavsifi va yo'qolish ehtimoli aynan ushbu funksiyaning qat'iy matematik xususiyatlari orqali aniqlanadi.

4. Yo'qolish ehtimoli:

Jarayonning yo'qolish ehtimoli q generatsiya funksiyasining quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi eng kichik musbat ildizidir:

$$q = G(q).$$

Bu matematik mezon jarayonning uzoq muddatli barqarorligini baholashda asosiy nazariy vosita hisoblanadi.

5. Tarmoqlanuvchi jarayonlarning qo'llanilish sohalari:

Ushbu jarayonlar ko'plab amaliy sohalarda qo'llaniladi:

Biologiya — populyatsiya o'sishini modellashtirish

Genetika — nasl zanjiri va mutatsiya jarayonlarining rivojlanishi

Epidemiologiya — infeksiya tarqalishi zanjiri

Yadroviy fizika — neytronlarning ko'payish jarayoni

Axborot tizimlari — tarmoqlanuvchi ma'lumot oqimlarining modellarini yaratish

Har bir sohada jarayonning o'ziga xos interpretatsiyasi mavjud bo'lib, ular orqali murakkab tizimlarning tasodifiy rivojlanish qonuniyatlari aniqlanadi.

6. Tarmoqlanuvchi jarayonning talqini:

Tarmoqlanuvchi jarayon nafaqat matematik model, balki tizimlarning o'z-o'zidan rivojlanishiga oid universal konsepsiya sifatida qaraladi. U tizimdagi har bir elementning mustaqil qaror qabul qilishi yoki mustaqil ko'payish mexanizmi mavjud bo'lgan holatlarni aniqlashda qo'llanadi. Shuning uchun ushbu jarayon tasodifiy tizimlarning o'z-o'zidan tashkil bo'lishi va o'sish dinamikasini tushuntiruvchi fundamental nazariy model sanaladi.

Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi XIX asrning ikkinchi yarmida yashagan angliyalik statistiklar Galton va Vatsonlar nomlari bilan bog'liq. Ular familiyalarni yo'qolib ketishi masalasini yechishda o'zlarining matematik modelini taklif etishgan. Keyinchalik bu model umumlashmasi bilan bog'liq jarayonlar (diskret vaqtli) Galton-Vatson jarayonlari deb nom oldi. Galton-Vatson jarayonining uzluksiz vaqtdi umumlashmasi esa tarmoqlanuvchi Markov jarayonlaridir. Demak, Galton-Vatson jarayoni tarmoqlanuvchi jarayonlarning eng sodda ko'rinishi ekan. Jarayonda ishtirok etayotgan alohida zarrachalar evolyusiyasi zarrachalar o'tmishi va soniga bog'liq bo'lmagan holda amalga oshadi. Bunday bog'liqsizlik real jarayonlar uchun juda kuchli chegaralanishdek tuyulsada, ko'plab holatlar uchun bunday chegaralanish mutlaqo tabiiydir. Yuqoridagi kabi masalalarni o'rganishda eng yaqin model bo'lgani uchun ham

tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi keyingi vaqtda tez suratlarda bilan rivojlanmoqda. Tarmoqlanuvchi jarayonlarni o'rganishda juda kuchli matematik apparat bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar apparatidan foydalanish imkoniyati bu rivojlanishdagi yana bir muhim mezondir. Bugungi kunga kelib, tarmoqlanuvchi jarayonlarning ko'plab modellari mavjud va rivojlanmoqda. 1957 yilda B.A.Sevastyanov tomonidan ta'riflangan immigratsiyali jarayonlar 1948 - yilda AQShlik olimlar Bellman va Xarrislar tomonidan kiritilgan zarrachalar yoshiga bog'liq jarayonlar, migratsiyali jarayonlar, diffuziyali jarayonlar, energiyali zarralar uchun tarmoqlanuvchi jarayonlar, tug'ilish va o'lim jarayonlari va hokazolar shular jumlasidandir. Deyarli barcha klassik teoremlar dastlab Galton-Vatson jarayonlari uchun isbotlangan va keyin boshqa modellar uchun umumlashtirilgan.

Uzluksiz vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlar ba'zi hollarda kimyoviy zanjir reaksiyalarining dastlabki bosqichlarini yaxshi tasvirlashi mumkin. Biror muhitda (masalan, molekularlar, ionlar, alohida atomlar va boshqalar) oz miqdordagi faol zarrachalar bo'lsin. Faraz qilaylik, reaksiya faol zarrachalar muhit zarrachalari bilan to'qnashganda sodir bo'lsin. Har bir bunday to'qnashuv natijasida ma'lum bir ehtimollik bilan ikkita faol zarracha paydo bo'lishi yoki yutilish sodir bo'lishi mumkin. Reaksiyaning dastlabki bosqichida faol zarrachalar kam bo'lgani uchun ularning bir-biri bilan to'nashuvini e'tiborsiz qoldirishimiz mumkin. So'ngra faol zarralarning har biri boshqalardan mustaqil ravishda yangi faol zarrachalarni hosil qiladi. Shuning uchun bunday reaksiyani uzluksiz vaqt bilan mos keladigan tarmoqlanish jarayoni bilan juda yaxshi tasvirlash mumkin [12].

Quyida biz illyustratsiya sifatida tarmoqlanish jarayonlarini qo'llash mumkin bo'lgan turli misollarni keltiramiz. Xususan, bir necha turdagi zarrachalar bilan berilgan tarmoqlanuvchi jarayonlar kimyoviy zanjir reaksiyalarini tavsiflash uchun ko'proq mos keladi, chunki reaksiyada odatda bir necha turdagi molekularlar yoki ularning qismlari ishtirok etadi.

Xulosa. Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning nazariy asoslarini o'rganish natijasida ushbu jarayonlarning murakkab ehtimollik tuzilmasiga ega ekani aniqlangan. Ularning rivojlanish mexanizmi har bir avlod elementlarining tasodifiy tarmoqlanish jarayoni orqali ifodalanadi, bu esa tizimning vaqt bo'yicha o'sishi yoki yo'qolish ehtimolini aniqlash imkonini beradi. Tadqiqot davomida tarmoqlanuvchi jarayonlarning Markov xossasi, stasionarlik shartlari, shuningdek, Galton-Watson modeli misolida ularning o'sish dinamikasi matematik jihatdan tahlil qilindi.

Olingan nazariy natijalar tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning matematik modellashtirish usullarini yanada takomillashtirish, ularning chegaraviy taqsimotlarini o'rganish va turli sohalarda (biologiya, demografiya, epidemiologiya, axborot tizimlari) qo'llash imkoniyatlarini kengaytirish uchun ilmiy asos yaratadi. Mazkur tadqiqot natijalari tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining rivojiga hissa qo'shadi hamda murakkab tasodifiy tizimlarni tavsiflashda yangi tahliliy yondashuvlarni shakllantirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I–II. New York: John Wiley & Sons.
2. Harris, T. E. (1963). *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
3. Athreya, K. B., & Ney, P. E. (1972). *Branching Processes*. New York: Springer-Verlag.
4. Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2001). *Probability and Random Processes*. Oxford: Oxford University Press.
5. Karlin, S., & Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press.
6. Нагорный, В. П. (1982). *Стохастические процессы и их приложения*. Москва: Наука.
7. Чистов, Н. В. (1990). **Ветвящиеся случайные процессы и их математические модели*. Москва: Наука.
8. Ходжаев, А. А. (2008). *Tasodifiy jarayonlar nazariyasi*. Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti.
9. Эргашев, М. И. (2016). *Ehtimolliklar nazariyasi va tasodifiy jarayonlar*. Toshkent: Fan va texnologiya.
10. Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*. 11th ed. Academic Press.
11. Mode, C. J. (1971). *Multitype Branching Processes: Theory and Applications*. New York: Elsevier.
12. Назаров, Б. Б. (2021). *Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning ehtimollik modellari va ularning amaliy qo'llanilishi*. – *O'zbekiston matematika jurnali*, №3, 45–56-betlar.

13. Qodirov, R. A., & Jo'rayev, Sh. M. (2019). *Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika asoslari*. Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti.
14. Karimov, U. S. (2017). *Tasodifiy jarayonlarning matematik modellari va ularning amaliy qo'llanilishi*. Toshkent: TATU nashriyoti.
15. To'xtayev, N. A. (2020). *Matematik modelashtirish va ehtimollik usullari*. Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti.

QATORLARNING YAQINLASHISHINI TAHLIL QILISHDA D’ALAMBER ALOMATI VA UNGA O‘XSHASH ALOMATLAR

Omonov Olim Isoqovich,

O‘zbekiston milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

Shog‘dorova Qunduz Samad qizi,

O‘zbekiston milliy pedagogika universiteti talabasi

qunduzshogdarova@gmail.com

Annotatsiya. Klassik D’alamber alomati — matematik analizda musbat hadli qatorlarning yaqinlashishini aniqlashda qo‘llaniladigan muhim alomatlardan biridir. Ushbu maqolada D’alamber alomatidagi limit mavjud bo‘lgan holatda uning Koshi alomati bilan ekvivalentligi isbotlanadi. Shuningdek, shunday $k \in \mathbb{N}$ son uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ limitining mavjudligi asosida qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: limit, ketma-ketlik, Shtolts teoremasi, musbat ketma-ketlik, D’alamber alomati, Koshi alomati.

ПРИЗНАК Д’АЛАМБЕРА И АНАЛОГИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ В АНАЛИЗЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Аннотация. Классический признак Д’Аламбера является одним из важных признаков в математическом анализе для определения сходимости рядов с положительными членами. В данной статье доказывается эквивалентность признака Д’Аламбера с признаком Коши в случае существования соответствующего предела. Кроме того, на основе существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ проводится анализ сходимости или расходимости ряда.

Ключевые слова: предел, последовательность, теорема Штольца, положительная последовательность, признак Д’Аламбера, признак Коши.

THE D’ALEMBERT TEST AND ITS ANALOGUES IN THE ANALYSIS OF SERIES CONVERGENCE

Abstract. The classical D’Alembert test is one of the important criteria in mathematical analysis for determining the convergence of series with positive terms. In this article, the equivalence of the D’Alembert test with the Cauchy test is proved in the case when the corresponding limit exists. In addition, based on the existence of the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ for some $k \in \mathbb{N}$, the convergence or divergence of the series is analyzed.

Keywords: limit, sequence, Stolz theorem, positive sequence, D’Alembert test, Cauchy test.

Kirish. Cheksiz qatorlar ko‘plab amaliy masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi, ilm-fan va muhandislikning turli sohalarida keng qo‘llaniladi. XVIII asrda fransuz matematigi J. D’Alamber tomonidan taklif etilgan D’Alamber alomati cheksiz qatorlarning yaqinlashishini aniqlashda asosiy usullardan biri bo‘ldi. D’Alamber limitlar nazariyasini qat’iy matematik asosda shakllantirish zarurligini ilgari suradi [10]. Aynan shu g‘oya D’Alamber alomatining rivojlanishiga olib keldi.

1.1-teorema (D'alamber alomati [1]). Agar

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (1.3)$$

mavjud bo‘lsa, u holda:

- agar $p < 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi;
- agar $p > 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi;
- agar $p = 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Bugungi kunda ham D’Alamber alomati oliy ta’lim muassasalarida matematik analiz fanining asosiy mavzularidan biri sifatida o‘qitilib kelinmoqda. Shu bilan birga, ushbu alomatning qo‘llanish doirasi cheklangan: agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

bo'lsa, qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida aniq xulosa chiqarib bo'lmaydi. Aynan mana shu noaniqlik yangi yaqinlashish alomatlar — Koshi, Raabe, Gauss, Bertrand, va boshqalar — ishlab chiqilishiga turtki bo'lgan.

1.2-teorema (Koshi alomati [1]). Agar

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \quad (1.4)$$

mavjud bo'lsa, unda:

- agar $q < 1$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi;
- agar $q > 1$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi;
- agar $q = 1$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

1834-yilda nemis matematigi J. Raabe [11] D'Alamber alomatining umumlashtirilgan shakli sifatida tanilgan Raabe alomatini taklif etdi. Shuningdek, yana bir nemis matematigi K. Gauss qatorlar nazariyasida hozirda Gauss alomati nomi bilan mashhur bo'lgan yaqinlashish alomatini ishlab chiqdi.

Ali [9] tomonidan 2008-yilda ikkinchi nisbat alomat deb nomlangan yangi alomat taklif etilgan bo'lib, u Raabe va Gauss alomatlarining o'rnida qo'llanishi mumkin. Quyidagi teorema ushbu alomatning matematik ifodasini beradi:

1.3-teorema (ikkinchi nisbat alomat). $\{a_n\}$ — musbat hadlardan iborat ketma-ketlik bo'lsin. Agar

$$L = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}$$

va

$$l = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}.$$

U holda

a) Agar $L < \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashadi.

b) Agar $l > \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashadi.

c) Agar $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida yakuniy

xulosa chiqarib bo'lmaydi.

Monoton kamayuvchi ketma-ketliklar uchun Koshining quyidagi natijasi mavjud:

1.4-teorema. $\{a_n\}$ — musbat va monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo'lsin. Shunda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ qatorning yaqinlashishi zarur va yetarli.

Keyingi holda, Ali [9] Ikkinchi nisbiy alomatda ishlatiladigan ikkita nisbatdan foydalangan holda nisbiy taqqoslash alomatining quyidagi ko'rinishini isbotlagan:

1.5-teorema (Ikkinchi nisbiy taqqoslash alomati). $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ musbat sonlardan iborat ketma-ketliklar bo'lsin. Faraz qilaylik, barcha yetarlicha katta n lar uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{b_{2n}}{b_n} \text{ va } \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{2n+1}}{b_n}.$$

U holda:

(i) agar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatori yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashadi;

(ii) agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashadi.

Ma'lumki, ko'p hollarda, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarining nisbatidan tuzilgan $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligini tadqiq etishda Shtolts teoremasidan foydalaniladi.

1.5-teorema (Shtolts [2]). Faraz qilaylik, $\{y_n\}$ — o'suvchi va limiti cheksiz ketma-ketlik bo'lsin, va $\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuchi bo'lib, uning limit qiymati a ga teng bo'lsin. Unda $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va uning limiti ham a ga teng bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = a. \quad (1.5)$$

Ushbu maqolaning maqsadi — D'Alembert alomatida limit mavjud bo'lgan taqdirda, Koshi alomatidagi limit ham mavjud bo'lishini va bu ikki alomatning o'zaro ekvivalentligini isbotlashdan iborat.

Olingan natijalar. Faraz qilaylik, $\{a_n\}$ — musbat ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Quyidagi nisbat barcha $n \in \mathbb{N}$ uchun aniqlangan bo'lsin:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1.2-teorema. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = p$ limiti mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ bo'ladi.

Isbot. Avvalo, $p \geq 0$ ekanligini e'tiborga olamiz, chunki $a_n > 0$ bo'lganda $r_n > 0$ bo'ladi. Endi ikki holatni ko'rib chiqamiz:

1-holat. $p = 0$ bo'lsin. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $r_n \rightarrow 0$ bo'lganligi sababli mavjud $n_0 \in \mathbb{N}$ shundayki $n \geq n_0$ uchun $r_n < \varepsilon$. Shundan kelib chiqib:

$$a_n = a_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} r_k \leq a_{n_0} \varepsilon^{n-n_0}.$$

Bu tengsizlikdan

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{n_0}} \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}}$$

kelib chiqadi. Ma'lumki, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} = 1$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}} = \varepsilon$, shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varepsilon.$$

Shuningdek, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy tanlanganligi sababli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$. Musbatlikdan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 0$ ekanligi ayon, demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 = p.$$

2-holat. $p > 0$ bo'lsin. Ma'lumki, har bir a_n ni oldingi hadlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (2.1)$$

Endi bu tenglikning har ikki tomonidan n -ildiz olamiz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{1/n}. \quad (2.2)$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini logarifmlab yozamiz:

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (2.3)$$

Endi ushbu ifodani tahlil qilib, Stolts teoremasini qo'llash uchun zarur shaklga keltiramiz:

$$r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Shunday qilib,

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k. \quad (2.4)$$

Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = p$ mavjud bo'lsa, unda $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln r_k = \ln p$. Endi quyidagi yig'indini qaraymiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k.$$

U holda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \frac{S_n}{n}.$$

Stolts teoremasiga ko'ra, agar $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln r_k = \ln p$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \ln p.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \ln p. \quad (2.5)$$

Shunday qilib, (2.2) va (2.5) formulalardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k \right) = \ln p.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\ln p} = p.$$

Teorema isbotlandi.

2.1-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ limitni hisoblang.

Yechish. $a_n = n!$ teng bo'lib, $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1$ ga teng. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$, 2.1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

2.2-misol. Hisoblang

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n}{(n!)^n}}.$$

Yechish. $a_n = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n}{(n!)^n}$ teng. Shunday qilib,

$$a_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} k^k}{((n+1)!)^{n+1}} = \frac{(\prod_{k=1}^n k^k) (n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^{n+1}}.$$

Nisbati

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} (n!)^n}{((n+1)!)^{n+1}}.$$

Lekin $(n+1)! = (n+1)n!$, shuning uchun

$$((n+1)!)^{n+1} = (n+1)^{n+1} (n!)^{n+1}.$$

Bularni o'rniga qo'yib, oddiylashsak:

$$r_n = \frac{(n+1)^{n+1} (n!)^n}{(n+1)^{n+1} (n!)^{n+1}} = \frac{1}{n!}.$$

Demak,

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n!}$$

bunga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ va 2.1-teoremadan yoki yuqoridagi tahlildan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

2.3-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ limitni hisoblang.

Yechish. r_n topamiz

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n}.$$

Endi $(n+1)! = (n+1)n!$ bo'lgani uchun:

$$r_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ma'lum limitga ko'ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Shuning uchun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = e.$$

2.1-teoremaga ko'ra, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = e$, u holda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

2.1-natija. Agar ushbu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ limit mavjud bo'lsa, u holda Dalamber va Koshi alomatlari ekvivalent bo'ladi.

Demak, (1.3) limit mavjud bo'lganda Dalamber va Koshi alomatlari ekvivalent bo'lib, ular qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida bir xil xulosaga olib keladi.

2.4-misol. Quyidagi qator $p = q$ bo'lishini tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Yechish. (1.5) dan ma'lumki har bir a_n oldingi hadlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^k}{(k+1)^k}. \quad (2.6)$$

Har ikki tomonidan n -ildiz olib:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^k}{(k+1)^k} \right)^{1/n}. \quad (2.7)$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini logarifmlab yozamiz:

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k^k}{(k+1)^k}. \quad (2.8)$$

Endi ushbu ifodani tahlil qilib, Stolts teoremasini qo'llash uchun zarur shaklga keltiramiz:

$$r_k = \frac{k^k}{(k+1)^k}.$$

Shunday qilib,

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k. \quad (2.9)$$

Ma'lumki, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{e}$ bo'ladi. Shunda $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_k = -1$. Endi quyidagi yig'indini qaraymiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k.$$

U holda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \frac{S_n}{n}.$$

Stolts teoremasiga ko'ra, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_k = -1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = -1.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = -1. \quad (2.10)$$

Shunday qilib, (2.8) va (2.10) formulalardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = -1.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Demak,

$$q = \frac{1}{e} < 1.$$

Dalamber mezoniga ko'ra esa:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}.$$

Demak, $p = q = \frac{1}{e}$.

2.1-izoh. Agar (1.3) limit mavjud bo'lmasa, bu holatda (1.4) limitning ham mavjud emasligini anglatmaydi.

2.5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{n}$ qatorni qaraylik, D'Alamber alomati:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2-(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2-(-1)^n}{n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n}.$$

Agar n juft bo'lsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n} = 3.$$

Agar n toq bo'lsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n} = \frac{1}{3}.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ limit mavjud emas.}$$

Koshi alomati:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-(-1)^n}{n} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-(-1)^n)^{1/n}}{n^{1/n}} = 1.$$

2.3-teorema. Agar $k \in \mathbb{N}$ shunday son topilib, ushbu

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} \quad (2.11)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

(a) agar $d < 1$ bo'lsa, (1.2) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

(b) agar $d > 1$ bo'lsa, (1.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot. (a) Faraz qilaylik, (2.11) limit mavjud bo'lin. $d < 1$ bo'lganligi sababli, shunday kichik $\varepsilon > 0$ sonni tanlash mumkinki,

$$d_0 = d + \varepsilon < 1. \quad (2.12)$$

Limit ta'rifiga ko'ra, shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} < d_0. \quad (2.13)$$

Demak,

$$a_{n+k} < d_0 a_n, \quad n > n_0. \quad (2.14)$$

Endi (2.14) tengsizlikni ketma-ket qo'llaymiz:

$$a_{n_0+k} < d_0 a_{n_0}, a_{n_0+2k} < d_0 a_{n_0+k} < d_0^2 a_{n_0}, \dots,$$

va umuman olganda, barcha $m \in \mathbb{N}$ uchun

$$a_{n_0+mk} < d_0^m a_{n_0}. \quad (2.15)$$

Endi ixtiyoriy $n > n_0$ ni qaraymiz. U holda $n = n_0 + mk + r$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $0 \leq r < k$.

(2.15) dan quyidagi baho hosil bo'ladi:

$$a_n \leq a_{n_0+mk} < d_0^m a_{n_0}. \quad (2.16)$$

Endi berilgan (1.2) qatorni quyidagi geometrik qator bilan solishtiramiz:

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_0^m a_{n_0} = a_{n_0} \sum_{m=0}^{\infty} d_0^m = \frac{a_{n_0}}{1-d_0}, \quad (2.17)$$

u $0 < d_0 < 1$ bo'lgani uchun yaqinlashuvchi bo'ladi.

(2.16) dan ko'rinadiki, a_n hadlari ushbu geometrik qator hadlari bilan chegaralangan, shuning uchun (1.2) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

(b) Faraz qilaylik,

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} > 1. \quad (2.18)$$

Demak, limit ta'rifiga ko'ra, shunday musbat son $\varepsilon > 0$ va natural son n_0 topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} > 1 + \varepsilon.$$

Bu tengsizlikdan:

$$a_{n+k} > (1 + \varepsilon)a_n. \quad (2.19)$$

Endi (2.19) ni ketma-ket m marta qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} a_{n_0+k} &> (1 + \varepsilon)a_{n_0}, \\ a_{n_0+2k} &> (1 + \varepsilon)a_{n_0+k} > (1 + \varepsilon)^2 a_{n_0}, \\ &\dots, \\ a_{n_0+mk} &> (1 + \varepsilon)^m a_{n_0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Endi $a_{n_0} > 0$ bo'lgani uchun (2.20) dan quyidagini olamiz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_0+mk} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_0} (1 + \varepsilon)^m = +\infty.$$

Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

Demak, $p > 1$ bo'lsa, a_n hadlari nolga intilmaydi. Shuning uchun (1.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2.2-izoh. Agar $d = 1$ bo'lsa, (1.2) qatorning yaqinlashishini aniqlash uchun boshqa usul qo'llanadi.

2.3-izoh. Agar $k = 1$ bo'lsa, D'alambertning klassik alomatiga aylanadi.

Xulosa. Maqolada D'Alamber va Koshi alomatlari o'rtasidagi bog'liqlik isbotlandi. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mavjud bo'lsa, bu ikki alomat ekvivalentligi ko'rsatildi. Shuningdek, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = d$ bo'lganda, $d < 1$ uchun qator yaqinlashishi, $d > 1$ uchun esa uzoqlashishi isbotlandi. Bu natijalar D'Alamber alomatining qo'llanish doirasini kengaytiradi va qatorlarning yaqinlashishini tahlil qilishda yangi imkoniyatlar yaratadi.

ADABIYOTLAR:

1. Azlarov T.A., Mansurov H. (1986, 1989). *Matematik analiz (1 va 2-qismlar)*. T.: O'qituvchi.
2. Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., & Gulomov R. (1993, 1995). *Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami (1 va 2-qismlar)*. T.: O'zbekiston.
3. Зорич, А. (1981). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. (1979). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
5. Фихтенгольц Г.М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Т. 1–3)*. М.: Физ-матгиз.
6. Демидович Б.П. (1972). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука.
7. Кубрякцев Л.Д., Кумасов А.Д., Шеглов В.И., Шабунин М.И. (1984, 1986). *Сборник задач по математическому анализу (Т. 1–2)*. М.: Наука.
8. Виноградова И.А., Олехник С.Н., & Садовничий В.А. (1988). *Задачи и упражнения по математическому анализу (Т. 1)*. Издательство Московского Университета.
9. Ali, S. (2008). The m th Ratio Test: New Convergence Tests for Series. *Amer. Math. Monthly*.
10. d'Alembert, J. (1768). *Réflexions sur les Suites Divergentes ou Convergentes*. *Opuscules Mathématiques ou Mémoires sur Différens Sujets de Géométrie*.
11. Raabe, J. (1834). Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.
12. Tong, J. (1994). Kummer's Test Gives Characterization for Convergence or Divergence of all Positive Series. *Amer. Math. Monthly*.

IKKI O'LCHAMLI SIMPLEKSDA ANIQLANGAN V — TARTIBLI BISTOXASTIK OPERATORLAR OILASI DINAMIKASI

Utayev Azizbek Toyir o'g'li,

Qarshi davlat universiteti

Matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi

azizbekutayev42@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ish ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan nochiziqli bistoxastik operatorlar dinamikasini o'rganishga bag'ishlangan. Ikki o'lchamli simpleksda V — tartibli bistoxastik operatorlarning aniq bir oilasi qurilgan. Ushbu operatorlarning invariant to'plamlar va qo'zg'almas nuqtalar xossalari o'rganilgan. Ko'rib chiqilayotgan operatorlar oilasi uchun qo'zg'almas nuqtalar to'plami va traektoriyalarning xatti-harakati tavsiflovchi teorema shakllantirilgan va isbotlangan.

Kalit so'zlar: qo'zg'almas nuqta, stoxastik operator, bistoxastik operator, simpleks, majorizatsiya.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА БИСТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ V ГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Аннотация. Данное исследование посвящено изучению динамики нелинейных бистохастических операторов, определённых на двумерном симплексе. На двумерном симплексе построено конкретное семейство бистохастических операторов порядка V . Исследованы свойства инвариантных множеств и неподвижных точек этих операторов. Для рассматриваемого семейства операторов сформулирована и доказана теорема, описывающая множество неподвижных точек и поведение траекторий.

Ключевые слова: неподвижная точка, стохастический оператор, бистохастический оператор, симплекс, мажоризация.

DYNAMICS OF THE FAMILY OF V — TH ORDER BISTOCHASTIC OPERATORS DEFINED ON A TWO-DIMENSIONAL SIMPLEX

Abstract. This work is devoted to the study of the dynamics of nonlinear bistochastic operators defined on a two-dimensional simplex. A specific family of bistochastic operators of order V on the two-dimensional simplex is constructed. The properties of the invariant sets and fixed points of these operators are investigated. A theorem describing the set of fixed points and the behavior of trajectories for the considered family of operators is formulated and proven.

Keywords: fixed point, stochastic operator, bistochastic operator, simplex, majorization.

Kirish. Tabiatshunoslik, aholi genetikasi, tur populyatsiyasi va boshqa ko'plab sohalarda jarayonning vaqt o'tishi bilan o'zgarishini modellashtirish muhim ahamiyatga ega. Bunday jarayonlarni o'rganishda diskret vaqtli dinamik sistemalarlar nazariyasi asosiy vositadir. Shu o'rinda, stoxastik operatorlar orqali ifodalangan diskret dinamik sistemalar alohida o'rin tutadi, chunki ular ehtimollik taqsimotlarining evolyutsiyasini tavsiflash imkonini beradi.

Stoxastik operatorlar orasida, barcha kordinatalari bo'yicha simmetrik xususiyatga ega bo'lgan bistoxastik operatorlar alohida o'rganiladi. Ushbu operatorlar majorizatsiya tushunchasi bilan chambarchas bog'liq bo'lib, ma'lum bir tartibni saqlab qolish xususiyatiga ega. Shuning uchun ularni o'rganish nafaqat matematik, balki qo'llash jihatidan ham muhimdir.

Ikki o'lchamli simpleks - bu uch komponentli ehtimollik taqsimotlarining to'plami bo'lib, eng soddagi chiziqli bo'lmagan dinamikani o'rganish uchun qulay model hisoblanadi. Ushbu maqolada ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan, ma'lum bir tartibdagi chiziqli bo'lmagan bistoxastik operatorlarning bir oilasi qaraladi.

Ishning asosiy maqsadi shu operatorlar oilasi uchun invariant to'plamlarni, operatorning qo'zg'almas nuqtalar to'plamini topish va boshlang'ich shartga bog'liq ravishda traektoriyalarning xatti-harakatini (ya'ni limit xossasini) aniqlashtirishdan iborat. Isbotlangan teorema orqali, ko'rib chiqilayotgan operatorlar dinamikasining barcha asosiy xususiyatlari to'liq tavsiflanadi.

Asosiy ta'rif va tushunchalar. Bizga $N_{\leq q} = \{1, 2, 3, \dots, q\} \subset N$ (bu yerda $q \in N$) to'plam va berilgan bo'lsin.

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j \geq 0, j \in N_{\leq m}\}$$

to'plamga $\mathbb{R}^m$ dagi $m-1$ o'lchamli simpleks deyiladi. $S_{>}^{m-1}$ orqali S^{m-1} simpleksning ichki nuqtalari to'plamini belgilaymiz, ya'ni

$$S_{>}^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j > 0, j \in N_{\leq m}\}.$$

S^{m-1} simpleksning chegarasini ∂S^{m-1} orqali belgilaymiz. $e_k = (e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_m^{(k)})$, ($k \in N_{\leq m}$) orqali S^{m-1} simpleksni uchini belgilaymiz, ya'ni

$$e_k^{(k)} = 1 \text{ va } e_j^{(k)} = 0 \text{ barcha } j \neq k, k \in N_{\leq m} \text{ uchun.}$$

Elementlari haqiqiy sonlardan tashkil topgan $m \times m$ kvadrat matritsani $A = (a_{ij})$ orqali belgilaymiz.

Agar A - $m \times m$ kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{ij} \geq 0, \forall i, j \in N_{\leq m}$ va $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1, j \in N_{\leq m}$ tengliklar

o'rinli bo'lsa, u holda A stoxastik matritsa deyiladi. S_n orqali $n \in N$ ta elementning o'rin almashtirishlari guruppasini belgilaymiz.

Tarif 1.1. Ixtiyoriy $\nu \in N$ uchun, quyidagi operator

$$S : x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)) \in \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

ν -tartibli stoxastik operator deyiladi, agar $S \geq \theta$ va

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad k \in N_{\leq m} \quad (1.1.1)$$

bu yerda

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} \geq 0, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad k = \overline{1, m} \quad (1.1.2)$$

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = P_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(\nu)}, k}, \quad k = \overline{1, m} \quad (1.1.3)$$

ixtiyoriy $\pi \in S_m$ o'rin almashtirish uchun, va

$$\sum_{k=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = 1, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}. \quad (1.1.4)$$

Yuqoridagi (1.1.2) - (1.1.4) shartlardan

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^\nu, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ko'rinib turibdiki, S operator S^{m-1} simpleksni o'zini o'ziga akslantiruvchi operatordir. $\nu=1$ bo'lganda S operator chiziqli stoxastik operator deyiladi, $\nu=2$ bo'lganda S operator kvadratik stoxastik operator deyiladi, $\nu=3$ bo'lganda S operator kubik stoxastik operator deyiladi va hokazo. $S^{[\nu]}$ orqali ν - tartibli stoxastik operatorni belgilaymiz.

Elementlari haqiqiy sonlardan tashkil topgan $m \times m$ kvadrat matritsani $A = (a_{ij})$ orqali belgilaymiz.

Agar A - $m \times m$ kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j = \overline{1, m} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1,$

$\forall i, j = \overline{1, m} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1, \quad \forall i, j = \overline{1, m}$ tengliklar o`rinli bo`lsa, u holda A matritsa bistoxastik

matritsa deyiladi. Ba`zan bistoxastik matritsa,  $\mathbb{R}^m$  dagi bistoxastik operator deb ham ataladi. Ko`rishimiz mumkinki chiziqli bistoxastik operator uchun $A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ munosabat o`rinli bo`ladi.

Endi umumiy holda bistoxastik operator ta`rifini kiritaylik. Ixtiyoriy $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ uchun quyidagi $X \downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[m]})$ ga X ning qayta tartiblanishi deyiladi, bu yerda $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[m]}$.

**Ta`rif 1.2.** Faraz qilaylik,  $X, Y \in S^{m-1}$  bo`lsin. Agar barcha $k = \overline{1, m-1}$ uchun $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, u holda X element Y ga majorizatsiyalashgan (kattalashgan) deyiladi va $X \prec Y$ ko`rinishida belgilanadi.

**Ta`rif 1.3.** Agar  $V$ -tartibli stoxastik operator uchun  $S^{[V]} X \prec X, \forall X \in S^{m-1}$ . munosabat o`rinli bo`lsa, V -tartibli bistoxastik operator deyiladi.

V -tartibli bistoxastik B operatorni $B^{[V]}$ ko`rinishida belgilaymiz.

S^2 Simpleksda bistoxastik operatorlar oilasi.

Lemma 1. Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}$ va ixtiyoriy $\alpha_j \in (0; 1), j = \overline{1, m}$ uchun $\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 < \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ tengsizlik o`rinli bo`ladi.

Lemma 2. Agar $|a| < 1$ bo`lsa, u holda ixtiyoriy  $h(x) = ax + b$  va ixtiyoriy  $x_0 \in R$  uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(x_0) = \frac{b}{1-a}$  tenglik o`rinli bo`ladi.

Quyidagi $B_{\alpha^{[1]}}^{[1]} : S^2 \rightarrow S^2$ chiziqli bistoxastik operatorlar oilasini qaraylik

$$B_{\alpha^{[1]}}^{[1]} : \begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_3, \\ x_3' = (1-\alpha)x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha \in (0, 1)$.

Bizga ikkita $B_{\alpha_1^{[1]}}^{[1]}, B_{\alpha_2^{[1]}}^{[1]}$ chiziqli bistoxastik operatorlar oilasi berilgan bo`lsin. Bu operatorlar yordamida quyidagi  $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]} = x_1 B_{\alpha_1^{[1]}}^{[1]} + (x_2 + x_3) B_{\alpha_2^{[1]}}^{[1]}$  kvadratik stoxastik operatorni hosil qilamiz, ya`ni

$$B_{\alpha^{[2]}}^{[2]} : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_2' = \alpha^{[2]} x_2 + (1-\alpha^{[2]})x_3, \\ x_3' = (1-\alpha^{[2]})x_2 + \alpha^{[2]} x_3 \end{cases}$$

Bu yerda $\alpha^{[2]}(x_1) = x_1 \alpha_1^{[1]} + (1-x_1) \alpha_2^{[1]}$ ga teng. $\alpha^{[2]}(x_1)$ parameter $x \in S^2$ ning birinchi kordinatasiga bog`liq funksiya bo`lib, $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]}$ operator dinamikasini o`rganayotganimizda o`zgarmas son

vazifasini bajaradi, chunki $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]}$ operatorning $x \in S^2$ ga ta'siri x ning dastlabki kordinatasini qo'zg'almas qoldiradi. Lemma 1 ga ko'ra $|\alpha^{[2]}| < 1$.

Huddi shu metodni davom ettirish natijasida, V -tartibli bistoxastik $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]} = x_1 B_{\alpha_1^{[\nu-1]}}^{[\nu-1]} + (x_2 + x_3) B_{\alpha_2^{[\nu-1]}}^{[\nu-1]}$ operatorni hosil qilamiz, ya'ni

$$B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]} : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3)^{\nu-1}, \\ x_2' = \alpha^{[\nu]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))x_3, \\ x_3' = (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))x_2 + \alpha^{[\nu]}(x_1)x_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Bu yerda $\alpha^{[\nu]}(x_1) = x_1 \alpha_1^{[\nu-1]}(x_1) + (x_2 + x_3) \alpha_2^{[\nu-1]}(x_1)$ ga teng. $\alpha^{[\nu]}(x_1)$ funksiya $x \in S^2$ ning faqat dastlabki kordinatasiga bog'liq bo'lganligi uchun, $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}$ operator dinamikasini o'rganayotganimizda o'zgarmas son vazifasini bajaradi, chunki $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}$ operatorning $x \in S^2$ ga ta'siri x ning dastlabki kordinatasini qo'zg'almas qoldiradi. Lemma 1 ga ko'ra $|\alpha^{[\nu]}(x_1)| < 1$.

Teorema 1. Ixtiyoriy $\tau \in [0;1]$ va $\nu \in \mathbb{N}$ uchun, $S_\tau = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, x_1 = \tau\}$ to'plam, $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}$ operatorning invariant to'plamdir.

2. $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}$ operatorning S^2 simpleksdagi qo'zg'almas nuqtalari to'plami, uchlari e_1 va $u^{(0)} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo'lgan kesmadan iborat.

3. Ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]})$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}(n)(x^{(0)}) = \left(x_1^{(0)}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: 1) 3.1 – operatoridan ko'rishimiz mumkinki, $x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3) = x_1$ tenglik o'rinli. Bundan kelib chiqadiki S_τ to'plam, 3.1 operator uchun invariant to'plamdir.

2) 3.1 operatorning qo'zg'almas nuqtasi

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_1 + x_2 + x_3)^{\nu-1}, \\ x_2 = \alpha^{[\nu]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))x_3, \\ x_3 = (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))x_2 + \alpha^{[\nu]}(x_1)x_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

sistemaning yechimi demakdir. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ va $\alpha^{[\nu]}(x_1) \in (0,1)$ ekanligini hisobga olsak, 3.2 sistemaning yechimi $x_2 = x_3$ tenglikni qanoatlantiruvchi S^{m-1} simpleksning nuqtalaridan iborat ekanligi kelib chiqadi. Demak, $B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}$ operatorning S^{m-1} simpleksdagi qo'zg'almas nuqtalari to'plami, uchlari e_1 va $u^{(0)} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo'lgan ko'pyoqdan iborat.

3) Ko'rinib turibdiki, Ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]})$ uchun, $x_1^{(n)} = x_1^{(0)}$ tenglik o'rinli. Operatorning keyingi kordinatasi uchun

$$x_2' = \alpha^{[\nu]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))x_3 = (2\alpha^{[\nu]}(x_1) - 1)x_2 + (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))(1 - x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $h(x_2) = (2\alpha^{[\nu]}(x_1) - 1)x_2 + (1 - \alpha^{[\nu]}(x_1))(1 - x_1)$ deb belgilaylik.
 $\alpha^{[\nu]}(x_1) \in (0; 1) \Rightarrow |2\alpha^{[\nu]}(x_1) - 1| < 1$ tengsizlik va lemma 2 ga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(x_2) = \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}.$$

Demak, ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]})$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{\alpha^{[\nu]}}^{[\nu]}(n)(x^{(0)}) = \left(x_1^{(0)}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2} \right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. ■

Xulosa. Ushbu ishda ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan, ma'lum bir tartibdagi chiziqli bo'lmagan bistoxastik operatorlarning aniq bir oilasi qurildi va ularning dinamik xossalari o'rganildi.

Quyidagi asosiy natijalar isbotlandi: Operator uchun $x_1 = \tau$, $\tau \in [0, 1]$ shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziq invariant to'plam ekanligi ko'rsatildi. Bu shuni anglatadiki, agar tizim boshlang'ich holatda ushbu to'g'ri chiziqli joylashsa, u butunlay shu to'plamda qoladi. Operatorning qo'zg'almas nuqtalari to'plami kontinum quvvatli to'plam ekanligi isbotlandi.

Har qanday boshlang'ich nuqta uchun operatorning qo'llanishi natijasida hosil bo'lgan ketma-ketlik simpleksning ichiga, aniqrog'i, dastlabki koordinataga bog'liq ravishda qo'zg'almas nuqtalarga yaqinlashishi ko'rsatildi. Bu esa, dinamikaning uzoq muddatli xatti-harakati to'g'risida aniq tasavvur beradi. Olingan natijalar ko'rib chiqilayotgan bistoxastik operatorlar oilasi dinamikasini to'liq tavsiflash imkonini beradi va chiziqli bo'lmagan stoxastik operatorlar nazariyasiga muhim hissa hisoblanadi.

REFERENCES:

1. Lyubich Yu.I. *Mathematical Structures in Population Genetics*. - Kiev: Naukova Dumka, 1983. - 296 p. (in Russian).
2. Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. *On Cubic Operators Defined on a Finite-Dimensional Simplex*. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2004. Vol. 56. No. 10. P. 1424-1433.
3. Rozikov U.A., Zhamilov U.U. *Volterra Quadratic Stochastic Operators of a Bisexual Population*. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63. No. 7.
4. Rozikov U.A., Zhamilov U.U. *F-Quadratic Stochastic Operators*. *Mathematical Notes*. 2008. Vol. 83. No. 4. P. 606-612.
5. Zhamilov U.U., Rozikov U.A. *On the Dynamics of Strictly Non-Volterra Quadratic Stochastic Operators on the Two-Dimensional Simplex*. *Sbornik: Mathematics*. 2009. Vol. 200. No. 9. P. 81-94.
6. Shahidi F.A. *On Biostochastic Operators Defined on a Finite-Dimensional Simplex*. *Siberian Mathematical Journal*. March-April, 2009. Vol. 50. No. 2. P. 463-468.
7. Prasolov V.V. *Polynomials*. MTSNMO. 2nd ed., 336 (2001). (in Russian).
8. Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U. *Quadratic Stochastic Operators and Processes: Results and Open Problems*. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*. 2011. Vol. 14. No. 2. P. 279-335.
9. Jamilov U.U., Khamraev A.Yu., Ladra M. *On a Volterra Cubic Stochastic Operator*. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2018. Vol. 80. No. 2. P. 319-334.
10. Mamurov B. J., Rozikov U. A. *On Cubic Stochastic Operators and Processes*. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 697. 012017.
11. Mukhamedov F., Ganixodjaev N. *Quantum Quadratic Operators and Processes*. *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 2133. Nov. 12. 2015.
12. Nickalls, R.W.D. *Vieta, Descartes and the Cubic Equation*. *Mathematical Gazette*. 2006. Vol. 90. P. 203-208.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МКДФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Мамедов Кудрат Алламович,
доцент кафедры “Точные науки”
университета Маъмун, к. ф.-м.н.
mqudrat1969@gmail.com

Жуманиязов Низом,
доцент кафедры “Точные науки”
университета Маъмун, (PhD)
nizomjon_ursu@mail.ru

Азаматов Азизбек Шавкатович,
доцент кафедры “Точные науки”
университета Маъмун, (PhD)
azizbek_shavkatovich@gmail.com

Аннотация. В данной работе изучается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности, в случае простых собственных значений соответствующей спектральной задачи. Исследуется эволюция данных рассеяния для связанного несамосопряжённого оператора Дирака, возникающего при интегрировании данного уравнения. Особое внимание уделено корректности постановки задачи Коши. Выводятся эволюции данных рассеяния несамосопряжённого оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, в случае конечной плотности. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений и при решении некоторых задач физики плазмы.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКДФ), оператор Дирака, решение Йоста, собственное значение, собственная функция, данные рассеяния, класс функций, имеющих конечную плотность.

MKDF TENGLAMANI ODDIY XUSUSIY QIYMATLAR HOLIDAGI CHEKSIZLIK FUNKSIYALARI SINFIGA O'Z-O'ZI BO'LGAN MANBA BILAN INTEGRATRIYA

Annotatsiya. Ushbu ishda moslangan manbali modifitsirlangan Korteveg–de Friz (mKdF) tenglamasini chekli zichlikli funksiyalar sinfiga sochilish nazariyasining teskari masala usulida karrasiz xos qiymatlar holidagi o'rganiladi. Tenglamani integrallash jarayonida paydo bo'ladigan o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan Dirak operatori uchun sochilish nazariyasi berilganlarining evolyutsiyasi tadqiq etiladi. Koshi masalasining korrektiligiga alohida e'tibor berilgan. Potensial moslangan manbali modifitsirlangan Korteveg–de Friz (mKdF) tenglamasining chekli zichlikli funksiyalar sinfiga yechimi bo'lgan o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan Dirak operatori uchun karrasiz xos qiymatlar holidagi sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi keltirib chiqarilgan. Olingan natijalarni chiziqli operatorlarning spektral nazariyasida, plazma fizikasining ba'zi masalalarini yechishda kelib qoladigan matematik fizikaning nochoziqli tenglamalarini integrallashda qo'llash mumkin.

Kalit so'zlar: sochilish nazariyasining teskari masalasi, modifitsirlangan Korteveg–de Friz tenglamasi (mKdF), Dirak operatori, Yost yechimi, xos qiymat, xos funksiyasi, sochilish nazariyasining berilganlari, chekli zichlikli funksiyalar sinfi.

INTEGRATION OF THE MKDF EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE CLASS OF FINITE DENSITY FUNCTIONS IN THE CASE OF SIMPLE EIGENVALUES

Abstract. This work investigates the Cauchy problem for the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of functions of finite density, in the case of simple eigenvalues of the corresponding spectral problem. The evolution of the scattering data is studied for the associated non-

selfadjoint Dirac operator that arises in the integration of this equation. The study devotes significant attention to ensuring that the Cauchy problem is correctly posed. The evolution formulas for the scattering data of the non-selfadjoint Dirac operator with simple eigenvalues are derived, where the potential is a solution of the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the finite-density case. The obtained results may be applied in the spectral theory of linear operators, in mathematical physics for the integration of nonlinear equations, and in solving certain problems of plasma physics.

Keywords: inverse scattering problem method, modified Korteweg-de Vries equation (mKdV), Dirac operator, Jost solution, eigenvalue, eigenfunction, scattering data, class of functions having finite density.

Введение. Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

встречается при решении некоторых задач физики плазмы. В работе [1] это уравнение было проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния для системы Дирака. Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начало с работы [2], в которой он представлен как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза.

Применение метода обратной задачи для уравнения мКдФ опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака вида:

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x, t) \\ -u(x, t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

на всей оси. Обратная задача рассеяния для оператора Дирака изучалась в работах М.Г.Гасимова, Б.М.Левитана [3], В.Е.Захарова, А.Б.Шабата [4], И.С.Фролова [5], Л.П.Нижника, А.Б.Хасанова [6], Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [7] и др.

Применение метода обратной задачи рассеяния для оператора Дирака к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений изучалось в работах М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла и Х.Сигура [8], В.Е.Захарова, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [9], В.К.Мельникова [10], А.Б.Хасанова, У.А.Хоитметова [11], Г.У.Уразбоева, А.Б.Хасанова [12], Г.У.Уразбоева, К.А.Мамедова [13], А.Б.Хасанова, К.А.Мамедова [14] и др. Именно в работе [10] был введен термин «самосогласованный источник». Самосогласованность источника понимается в том смысле, что правая часть рассматриваемого эволюционного уравнения является комбинацией собственных функций соответствующей спектральной задачи, потенциал которой есть решение рассматриваемого эволюционного уравнения.

Отметим, также, что в работе Ж.Леона и А.Латифи [15] приведена конкретная физическая задача, которая сводится к решению уравнения КдФ с источником.

В связи с применением к конкретным физическим задачам возникла необходимость рассмотрения нелинейных эволюционных уравнений не только в классе «быстроубывающих» функций, но в классах функций специального вида, а именно периодических, ступенчатых, имеющих конечную плотность и др.

Следует отметить, что в работе А.Б.Яхшимуратова, М.М.Хасанова [16] было интегрировано уравнение мКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций, а в случае конечной плотности, т.е. в случае $u(x, t) \rightarrow c$ при $|x| \rightarrow \infty$, $c \in \mathbb{R}$ изучалась в работах Н.Н.Романовой [17], К.А.Мамедова [18] и др.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2), \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (1)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $u_0(x) \rightarrow c$ при $x \rightarrow \pm\infty$, $c \in \mathbb{R}$. Здесь начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)-c|dx < \infty; \quad (3)$$

2) Оператор $L(0)$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$.

В рассматриваемой задаче $\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1} \Phi_{k2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (4)$$

Здесь $A_k(t)$ заданные, непрерывные, ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \text{ при } \xi_k = -\xi_n. \quad (5)$$

Предполагаем, что функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u(x, t)-c| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (6)$$

Основная цель данной работы – получить представление для решения $u(x, t)$, $\Phi_{k1}(x, t)$, $\Phi_{k2}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, задачи (1)–(5) в классе функций (6), в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Задача рассеяния. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_{1x} + i\xi y_1 = u(x)y_2, \\ y_{2x} - i\xi y_2 = -u(x)y_1, \end{cases} \quad (7)$$

на всей оси $(-\infty < x < \infty)$, с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u(x)-c|dx < \infty, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Видно, что с помощью оператора

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

и вектор-функции $y = (y_1, y_2)^T$ систему (7) можно переписать в виде:

$$Ly = \xi y. \quad (9)$$

При условии (8) система уравнений (9) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\begin{aligned} \phi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \bar{\phi}(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} -\frac{i(\xi - p)}{c} \\ -1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \psi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}(x, \xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ i(\xi - p) \\ c \end{pmatrix} e^{ipx}, \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Здесь $p = \sqrt{\xi^2 + c^2}$ и ветвь квадратного корня фиксируется условием:

$$\operatorname{Im} p(\xi) > 0 \text{ при } \operatorname{Im} \xi > 0. \quad (10)$$

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции $p(\xi)$ от ξ . Таким образом, в формулах, где участвует $p(\xi)$ и ξ , всегда подразумевается, что p является функцией от ξ . (Отметим, что $\bar{\phi}$ в общем случае, не является комплексным сопряжением к ϕ). При действительных ξ , пары вектор-функций $\{\phi, \bar{\phi}\}$ и $\{\psi, \bar{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (9), поэтому

$$\phi(x, \xi) = a(\xi)\bar{\psi}(x, \xi) + b(\xi)\psi(x, \xi), \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \quad (11)$$

$$\bar{\phi}(x, \xi) = -\bar{a}(\xi)\psi(x, \xi) + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}(x, \xi), \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \quad (12)$$

где

$$a(\xi) = \frac{W\{\phi, \psi\}}{W\{\bar{\psi}, \psi\}}, \quad b(\xi) = \frac{W\{\phi, \bar{\psi}\}}{W\{\psi, \bar{\psi}\}}, \quad |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1.$$

Риманова поверхность Γ функции $p(\xi)$ состоит из двух экземпляров Γ_+ и Γ_- комплексной плоскости C с разрезами по мнимой оси от $-ic$ до ic . Условие (10) однозначно определяет аналитическую продолжение функции $a(\xi)$ на лист Γ_+ , исключая точки ветвления $\xi = \pm ic$. Невещественные нули функции $a(\xi)$ соответствуют собственным значениям оператора $L(t)$ на листе Γ_+ . Собственные значения оператора $L(t)$ на листе Γ_- совпадают с нулями функции $\bar{a}(\xi)$. Итак, числа $\{\xi_k, \bar{\xi}_k\}_{k=1}^N$ являются собственными значениями оператора $L(t)$, и других собственных значений этот оператор не имеет. Предположим, что все собственные значения оператора $L(t)$ простые, так, что

$$\phi(x, \xi_k) = C_k \psi(x, \xi_k), \quad \bar{\phi}(x, \bar{\xi}_k) = \bar{C}_k \bar{\psi}(x, \bar{\xi}_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\bar{\psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_2(x, -\xi) \\ -\psi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \phi_2(x, -\xi) \\ -\phi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\bar{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \bar{b}(\xi) = b(-\xi), \quad \bar{\xi}_k = -\xi_k, \quad \bar{C}_k = C_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Для функции $\psi(x, \xi)$ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi(x, \xi) = \begin{pmatrix} i(\xi - p) \\ c \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, s) \begin{pmatrix} i(\xi - p) \\ c \\ 1 \end{pmatrix} e^{ips} ds, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{K}(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) & K_2(x, s) \\ -K_2(x, s) & K_1(x, s) \end{pmatrix}.$$

В представлении (14) ядро $\mathbf{K}(x, y)$ не зависит от ξ и связано с $u(x)$ с помощью равенства

$$u(x) - c = 2K_2(x, x). \quad (15)$$

Компоненты ядра $\mathbf{K}(x, y)$ при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$-\frac{2i}{c} \begin{pmatrix} K_2(x, y) \\ K_1(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x+y) \\ F_2(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_1(x, s) & K_2(x, s) \\ -K_2(x, s) & K_1(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s+y) \\ F_2(s+y) \end{pmatrix} ds = 0,$$

где

$$F_1(z) = \frac{i}{c} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n (\xi_n - p_n) e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \bar{\mu}_n (\bar{\xi}_n - \bar{p}_n) e^{-i\bar{p}_n z} \right) -$$

$$- \frac{i}{c} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\xi) - r(-\xi)] e^{ipz} dp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\xi) - r(-\xi)] e^{ipz} d\xi \right),$$

$$F_2(z) = \left(\sum_{n=1}^N \mu_n e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \bar{\mu}_n e^{-i\bar{p}_n z} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\xi) - r(-\xi)}{p} e^{ipz} d\xi,$$

$$r(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad \mu_n = \frac{i}{p_n} \frac{C_n}{\dot{a}(\xi_n)}, \quad \bar{\mu}_n = -\frac{i}{\bar{p}_n} \frac{\bar{C}_n}{\dot{\bar{a}}(\xi_n)}.$$

Определение. Набор величин

$$\left\{ r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \xi \in R; \xi_k, \text{Im } \xi_k > 0; C_k, k = \overline{1, N} \right\}$$

называется данными рассеяния для системы уравнений (9).

По данным рассеяния потенциал $u(x)$ определяется с помощью равенства (15).

Отметим, что вектор-функции

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{d\xi}(\phi - C_n \psi)|_{\xi=\xi_n}}{\dot{a}(\xi_n)}, \quad n = \overline{1, N} \quad (16)$$

являются решениями уравнений $LY = \xi_n Y$.

Заметим, что по предположению оператор L имеет только простые собственные значения, поэтому $\dot{a}(\xi_n)$ отличны от нуля.

Кроме того, функции $h_n(x)$ обладают следующими асимптотиками:

$$h_n \sim -C_n \left(\frac{i(\xi_n - p_n)}{c} \right) e^{ip_n x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty,$$

$$h_n \sim \left(\frac{1}{\frac{i(\xi_n - p_n)}{c}} \right) e^{-ip_n x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Согласно (17) справедливо равенство:

$$W\{\phi_n, h_n\} \equiv \phi_{n1} h_{n2} - \phi_{n2} h_{n1} = \frac{2C_n p_n (\xi_n - p_n)}{c^2}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Лемма 1. Если вектор-функции Y и Z являются решениями уравнений $LY = \xi Y$ и $LZ = \eta Z$, то для их компонент имеют место равенства:

$$\frac{d}{dx} (y_1 z_1 + y_2 z_2) = -i(\xi + \eta)(y_1 z_1 - y_2 z_2),$$

$$\frac{d}{dx} (y_1 z_2 - y_2 z_1) = -i(\xi - \eta)(y_1 z_2 + y_2 z_1).$$

Справедливость этой леммы доказывается непосредственной проверкой.

Эволюция данных рассеяния. Пусть потенциал $u(x, t)$ в системе уравнений (1) является решением уравнения

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = G(x, t), \quad (19)$$

где G достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если потенциал $u(x, t)$ является решением уравнения (19) в классе функций (6), то данные рассеяния системы уравнений (9) с потенциалом $u(x, t)$ зависят от t следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2ip)r^+ - \frac{c^4}{4a^2p^2(p-\xi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_1^2 + \phi_2^2) dx, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2ip_n + \frac{c^2}{2p_n(p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}) dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1}\phi_{n2} dx}, \quad n = \overline{1, N}.\end{aligned}$$

Доказательство. Оператор

$$A = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6 \begin{pmatrix} u^2 & u_x \\ -u_x & u^2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 3 \begin{pmatrix} 2uu_x & u_{xx} \\ -u_{xx} & 2uu_x \end{pmatrix}, \quad (20)$$

удовлетворяет соотношению Лакса, т. е.

$$[L, A] \equiv LA - AL = i \begin{pmatrix} 0 & -6u^2u_x - u_{xxx} \\ -6u^2u_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (19) можно переписать в виде:

$$L_t + [L, A] = iR, \quad (21)$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}.$

Дифференцируя по t равенство $L\phi = \xi\phi$ получим $L_t\phi + L\phi_t = \xi\phi_t$, которое согласно (21) можно переписать в виде:

$$(L - \xi)(\phi_t - A\phi) = -iR\phi. \quad (22)$$

Используя метод вариации постоянных из (22), находим:

$$\phi_t - A\phi = \alpha(x)\psi + \beta(x)\varphi. \quad (23)$$

Для определения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ получим:

$$M\alpha_x\psi + M\beta_x\varphi = -R\phi, \quad (24)$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для решения уравнения (24) удобно ввести следующие обозначения

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \text{ Согласно (11), (12) и определению Вронскиана}$$

$$\hat{\psi}^T M \phi = -\hat{\phi}^T M \psi = \frac{2p(\xi - p)}{c^2} a(\xi), \quad \hat{\psi}^T M \psi = \hat{\phi}^T M \phi = 0.$$

Умножая (24) на $\hat{\phi}^T$ и $\hat{\psi}^T$ получим:

$$\alpha_x = \frac{c^2 \hat{\phi}^T R \phi}{2ap(\xi - p)}, \quad \beta_x = -\frac{c^2 \hat{\psi}^T R \phi}{2ap(\xi - p)}. \quad (25)$$

Согласно (20) при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi_t - A\phi \rightarrow (4ip^3 - 6c^2ip)\phi,$$

поэтому на основании (23) при $x \rightarrow -\infty$ имеем:

$$\beta(x) \rightarrow 4ip^3 - 6c^2ip, \quad \alpha(x) \rightarrow 0.$$

Следовательно, из (25) можно определить:

$$\alpha(x) = -\frac{c^2}{2ap(\xi - p)} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi} R\varphi dx,$$

$$\beta(x) = -\frac{c^2}{2ap(\xi - p)} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\varphi dx + 4ip^3 - 6c^2 ip.$$

Таким образом, равенство (23) примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_t - A\varphi = & \left(\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi}^T R\varphi dx \right) \psi + \\ & + \left(-\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\varphi dx + 4ip^3 - 6c^2 ip \right) \varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно (11), (12) равенство (26) примет вид:

$$\begin{aligned} a_t \bar{\psi} + b_t \psi - A(a\bar{\psi} + b\psi) = \\ = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi}^T R\varphi dx \psi + \left(-\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\varphi dx + 4ip^3 - 6c^2 ip \right) (a\bar{\psi} + b\psi). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $x \rightarrow \infty$, с учётом (20) получим:

$$\begin{aligned} a_t = & -\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi dx, \\ b_t = & \frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}^T R\varphi dx - \frac{c^2 b}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\varphi dx + (8ip^3 - 12c^2 ip)b. \end{aligned}$$

Поэтому, при $\text{Im } \xi = 0$ из равенства

$$\frac{dr^+}{dt} = \frac{b_t a - a_t b}{a^2},$$

следует, что

$$\frac{dr^+}{dt} = (8ip^3 - 12c^2 ip) \frac{b}{a} + \left(\frac{c^2}{2p(p - \xi)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}^T R\varphi dx,$$

или

$$\frac{dr^+}{dt} = (8ip^3 - 12c^2 ip)r^+ - \frac{c^4}{4a^2 p^2 (p - \xi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx.$$

Дифференцируя тождество $\varphi_n = C_n \psi_n$ по t , получим равенство:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt} = \frac{dC_n}{dt} \psi_n + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt},$$

которое согласно (16), можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \frac{dC_n}{dt} \psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n) h_n \frac{d\xi_n}{dt}, \quad (27)$$

где $\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n}$.

Аналогично непрерывному спектру, учитывая (18), в случае дискретного спектра получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - A\varphi_n = & \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx \right) h_n + \\ & + \left(\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{h}_n^T R\varphi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) \varphi_n, \end{aligned}$$

которое является аналогом равенства (26). Согласно (27) и пользуясь равенством $\varphi_n = C_n \psi_n$, последнее равенство можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_n}{\partial t} \psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n) \frac{d\xi_n}{dt} h_n - C_n A \psi_n = \\ & = \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n + \\ & + \left(\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{h}_n^T R C_n \psi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) C_n \psi_n. \end{aligned}$$

Переходим в этом равенстве к пределу $x \rightarrow \infty$ с учётом (16) и (20):

$$\begin{aligned} & \frac{dC_n}{dt} \psi_n - \dot{a}(\xi_n) \frac{d\xi_n}{dt} h_n - C_n (4ip_n^3 - 6c^2 ip_n) \psi_n = \\ & = \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n + \\ & + \left(\frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n^T R \psi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) C_n \psi_n \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + \frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n^T R \psi_n dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx}{2C_n p_n (p_n - \xi_n) \dot{a}(\xi_n)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + \frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1} \psi_{n1} + h_{n2} \psi_{n2}) dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= -\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n) \dot{a}(\xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что согласно тождеству

$$\dot{a}(\xi_n) = -\frac{ic^2}{C_n p_n (\xi_n - p_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1} \phi_{n2} dx, \quad (28)$$

последнее равенство можно переписать в виде:

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1} \phi_{n2} dx}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Согласно (28) и (4), если функции $A_n(t)$ являются ненулевыми, то дискретный спектр оператора $L(t)$ будет простым.

Займёмся эволюцией данных рассеяния оператора $L(t)$, потенциал которого является решением системы (1).

Согласно условию (5) и равенствам (11)-(13) правую часть в уравнении (1), можно переписать в виде:

$$G = 2 \sum_{\substack{k=1, \\ \operatorname{Im} \xi_k > 0}}^N (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2).$$

Легко заметить, что в силу леммы Римана-Лебега для неотрицательных t

$$G(x, t) = o(1) \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Нетрудно видеть, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотики

$$\begin{aligned} \varphi &\sim a(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \\ c \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} + b(\xi) \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ipx}, \\ \psi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \varphi_k \sim C_k \begin{pmatrix} \frac{i(\xi_k - p_k)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip_k x}, \end{aligned}$$

а при $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \\ \psi &\sim -a(\xi) \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ -1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \bar{b}(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \psi_k \sim \frac{1}{C_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi_k - p_k)}{c} \end{pmatrix} e^{-ip_k x}. \end{aligned}$$

Применим результаты леммы 2 к системе уравнений (1). Сначала вычислим эволюции C_n . При ξ_k отличном от ξ_n согласно лемме 1 имеем следующее равенство:

$$\begin{aligned} &(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2)h_{n2}\psi_{n2} + (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2)h_{n1}\psi_{n1} = \\ &= (\Phi_{k1}^2 h_{n2}\psi_{n2} - \Phi_{k2}^2 h_{n1}\psi_{n1}) + (\Phi_{k1}^2 h_{n1}\psi_{n1} - \Phi_{k2}^2 h_{n2}\psi_{n2}) = \\ &= \frac{1}{2} \{ (\Phi_{k1}h_{n2} - \Phi_{k2}h_{n1})(\Phi_{k1}\psi_{n2} + \Phi_{k2}\psi_{n1}) + (\Phi_{k1}h_{n2} + \Phi_{k2}h_{n1})(\Phi_{k1}\psi_{n2} - \Phi_{k2}\psi_{n1}) + \\ &+ (\Phi_{k1}h_{n1} - \Phi_{k2}h_{n2})(\Phi_{k1}\psi_{n1} + \Phi_{k2}\psi_{n2}) + (\Phi_{k1}h_{n1} + \Phi_{k2}h_{n2})(\Phi_{k1}\psi_{n1} - \Phi_{k2}\psi_{n2}) \} = \\ &= -\frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\xi_k - \xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{k1}h_{n2} - \Phi_{k2}h_{n1})(\Phi_{k1}\psi_{n2} - \Phi_{k2}\psi_{n1})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi_k + \xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{k1}h_{n1} + \Phi_{k2}h_{n2})(\Phi_{k1}\psi_{n1} + \Phi_{k2}\psi_{n2})] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда при $k \neq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}) dx = 0.$$

Если $k = n$, то

$$\begin{aligned} &(\Phi_{n1}^2 - \Phi_{n2}^2)(h_{n2}\psi_{n2} + h_{n1}\psi_{n1}) = \\ &= \frac{1}{4i\xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{n1}h_{n1} + \Phi_{n2}h_{n2})(\Phi_{n1}\psi_{n1} + \Phi_{n2}\psi_{n2})] + \Phi_{n1}\Phi_{n2}(\psi_{n1}h_{n2} - \psi_{n2}h_{n1}). \end{aligned}$$

Из (4) и (18), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}) dx = \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n1}\Phi_{n2} W\{\phi_n, h_n\} dx = \frac{2p_n(\xi_n - p_n)}{c^2} A_n(t).$$

Таким образом, согласно лемме 2

$$\frac{dC_n}{dt} = (8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + 2A_n(t))C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Подобным образом можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\varphi_{n1}^2 + \varphi_{n2}^2) dx = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2 ip)r^+, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема. Если функции $u(x, t)$, $\Phi_{k1}(x, t)$, $\Phi_{k2}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, являются решением задачи (1)–(5) в классе функций (6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2 ip)r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ \frac{dC_n}{dt} &= (8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + 2A_n(t))C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (1)–(5) в классе функций (6).

Заключение. Выводятся эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ с самосогласованным источником, в случае конечной плотности.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений и при решении некоторых задач физики плазмы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan*, 32, pp.1681 (1972).
2. Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095-1097 (1967).
3. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Обратная задача для системы Дирака, *ДАН СССР*, 167(5), 967-970 (1966).
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 61(1), 118-134 (1971).
5. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, *ДАН СССР*, 207(1) 44-47 (1972).
6. Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряжённых дифференциальных уравнений первого порядка, *ДАН СССР*, 277(3), 559-562 (1984).
7. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. Москва, "Наука", (1986).
8. Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H. The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems, *Stud. Appl. Math.*, 53(4), 249-315 (1974).
9. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения, *ДАН СССР*, 219(6), 1334-1337 (1974).
10. Mel'nikov V.K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self- source, *Phys. Lett. A*, 128, 488-4924 (1988).

11. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions. // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, 38 (2021), 19–35
12. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа «ступеньки», // *Теор. и матем. физика*, 129(1), 38-54 (2001)
13. Уразбоев Г.У., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником в случае движущихся собственных значений. // *Вестник ЕГУ, сер. "Математика. Компьютерная математика"* 8 (1), 84-94 (2005)
14. Хасанов А.Б., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником интегрального типа соответствующего кратным собственным значениям. // *Узбекский математический журнал*, 81-93 (2007).
15. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves, // *J.Phys. A: Math. Gen.* 23, 1385-1403 (1990).
16. Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций, // *Дифф. уравнения*, 50(4), 536-543 (2014).
17. Романова Н.Н. N-солитонное решение “на пьедестале” модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, // *Теор. и матем. физика*, 39(2), 205-215 (1979).
18. Мамедов К.А. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности в случае движущихся собственных значений. // *Известия высших учебных заведений. Математика*, №10 с.73–85 (2020).

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ
ПЕРЕМЕННЫМИ**

Арзикулов Зафаржон Одилович,
старший преподаватель Ферганского
государственного технического университета, (PhD)
zafarbekarzikulov1984@gmail.com,
Абдужабборов Абдухалим Абдугаффор угли,
ассистент Ферганского государственного
технического университета
abduzhabborov.abdukhalim@gmail.com,

Аннотация. При изучении краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в прикладной математике, часто приходится составить систему уравнений в частных производных, удовлетворяемую гипергеометрическими функциями, и находить явные линейно независимые решения для этой системы. В настоящей работе мы строим автомодельные решения одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, которые выражаются через гипергеометрическую функцию от трёх переменных высшего порядка.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение в частных производных, автомодельное решение, гипергеометрическая функция от трёх переменных высшего порядка, система гипергеометрического типа.

**SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF A THIRD-ORDER DEGENERATE PARTIAL
DIFFERENTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH FOUR VARIABLES**

Abstract. When studying boundary value problems for some partial differential equations arising in applied mathematics, we often have to study of a system of PDE satisfied by hypergeometric functions and find an explicit linearly independent solutions for this system. In the present work, we construct a self-similar solutions of some degenerate PDE of the third order which are expressed in terms of the triple hypergeometric functions of the fourth order.

Keywords: degenerating partial differential equation, self-similar solution, hypergeometric function in three variables, system of the hypergeometric type.

**ТЎРТ ЎЗГАРУВЧИЛИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ БУЗИЛАДИГАН ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ АВТОМОДЕЛ ЕЧИМЛАРИ ҲАҚИДА**

Аннотация. Амалий математикада пайдо бўладиган баъзи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишида, кўпинча, гипергеометрик функциялар томонидан қаноатлантириладиган тенгламалар системасини тузишга ва бу системанинг чизиқли эркли ечимларини топишга тўғри келади. Мазкур ишда бузиладиган учинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг уч ўзгарувчили юқори тартибли гипергеометрик функция орқали ифодаланадиган автомодел ечимларини топамиз.

Калим сўзлар: бузиладиган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, автомодел ечим, уч ўзгарувчили юқори тартибли гипергеометрик функцияси, гипергеометрик типдаги система.

Введение. Теория специальных функций, как область математического анализа, посвящённая исследованию и применению высших трансцендентных функций, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и других разделов математики. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэромеханике, квантовой механике и теории потенциала, приводит к специальным

функциям. Чаще всего они появляются при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Большие успехи, достигнутые в теории гипергеометрической функции одного переменного, стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных.

Большая заслуга в теории гипергеометрических функций двух переменных принадлежит к Горну [1], который исследовал, в частности, гипергеометрические функции второго порядка. Он установил, что, кроме некоторых функций, выражаемых через функции от одного переменного или через произведения двух гипергеометрических функций, каждая из которых зависит от одного переменного, существует 34 существенно различных гипергеометрических функций порядка 2 (список Горна). Таким образом, в случае двух переменных 14 полных и 20 конфлюэнтных гипергеометрических функций второго порядка. Горн изучил сходимость гипергеометрических функций от двух переменных [2, с. 221 – 224] и установил системы дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют [2, с. 227 – 230]. Горн ограничивался исследованием гипергеометрических функций двух переменных второго порядка. Гипергеометрические функции, порядок которых превышает 2, называются функциями Кампе-де-Ферье [3, с. 27].

Как известно, если порядок вырождающегося и сингулярного дифференциальных уравнений в частных производных с тремя переменными превышает два, то их любые решения выражаются через гипергеометрическую функции Кампе-де-Ферье, порядок которой равен порядку рассматриваемого уравнения. Например, в работе [4] все 8 автомодельные решения уравнения

$$Lu = x^n y^m u_t - t^k y^m u_{xxx} - t^k x^n u_{yyy} = 0, \quad m, n, k = \text{const} > 0$$

в области $\Omega = \{(x, y, t) : x > 0, y > 0, t > 0\}$ выписаны через гипергеометрическую функцию Кампе-де-Ферье. К такому направлению исследований примыкают работы [5, 6, 7].

Следуя Горну [1] определим гипергеометрическую функцию от трёх переменных: тройной степенной ряд

$$\sum_{m, n, p=0}^{\infty} A(m, n, p) x^m y^n z^p \quad (1)$$

является гипергеометрическим рядом, если два отношения:

$$\frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} = f(m, n, p), \quad \frac{A\left(\begin{matrix} & + & m, \\ & & m, \end{matrix} \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix}\right)}{A\left(\begin{matrix} & & \\ & & m, \end{matrix} n\right)} = g\left(\begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix}\right),$$

$$\frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} = h(m, n, p),$$

– рациональные функции от m , n и p .

Систему, которую удовлетворяет гипергеометрическая функция от трёх переменных, можно записать с помощью дифференциальных операторов:

$$\delta \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sigma \equiv y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad \theta \equiv z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

в виде

$$\begin{cases} [F'(\delta, \sigma, \theta) x^{-1} - F(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \\ [G'(\delta, \sigma, \theta) y^{-1} - G(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \\ [H'(\delta, \sigma, \theta) z^{-1} - H(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$u = u(x, y, z)$ искомая гипергеометрическая функция и

$$\frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} = \frac{F(m, n, p)}{F'(m, n, p)}, \quad \frac{A(m, n+1, p)}{A(m, n, p)} = \frac{G(m, n, p)}{G'(m, n, p)},$$

$$\frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} = \frac{H(m, n, p)}{H'(m, n, p)}.$$

Таким образом, система, которую удовлетворяет гипергеометрическая функция от трёх переменных (1) имеет вид (3).

В настоящее время известны 205 полные [3, с. 74 – 87] и 395 конфлюэнтные [8] гипергеометрические функции от трёх переменных второго порядка. Интегральные представления типа Эйлера для 205 полных гипергеометрических функций от трёх переменных установлены в [9], а системы, которым удовлетворяют эти же полные функции, составлены в [10].

Целью настоящей работы найти все автомодельные решения одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с четырьмя переменными. Для решения поставленной задачи требуется вводить в рассмотрение обобщённые гипергеометрические функции от трёх переменных более второго порядка.

Обобщённая гипергеометрическая функция трёх переменных. Обобщённая гипергеометрическая функция трёх переменных порядка (M, N, P) определяется равенством [11](см. также, [3, с.44]):

$$F^{(3)}[x, y, z] \equiv F^{(3)} \left[\begin{matrix} (a) :: (b); (b'); (b''); (c); (c'); (c''); \\ (e) :: (g); (g'); (g''); (h); (h'); (h''); \end{matrix} ; x, y, z \right]$$

$$= \sum_{m, n, p=0}^{\infty} \Lambda(m, n, p) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!},$$

где

$$\Lambda(m, n, p) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m+n+p} \prod_{j=1}^B (b_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_{n+p} \prod_{j=1}^{B''} (b''_j)_{p+m} \prod_{j=1}^C (c_j)_m \prod_{j=1}^{C'} (c'_j)_n \prod_{j=1}^{C''} (c''_j)_p}{\prod_{j=1}^E (e_j)_{m+n+p} \prod_{j=1}^G (g_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{G'} (g'_j)_{n+p} \prod_{j=1}^{G''} (g''_j)_{p+m} \prod_{j=1}^H (h_j)_m \prod_{j=1}^{H'} (h'_j)_n \prod_{j=1}^{H''} (h''_j)_p}.$$

Здесь $(\lambda)_\nu$ – символ Похгаммера:

$$(\lambda)_0 = 1, (\lambda)_\nu = \lambda(\lambda+1) \cdot \dots \cdot (\lambda+\nu-1) = \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)},$$

а $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Порядок (M, N, P) обобщённой гипергеометрической функции $F^{(3)}[x, y, z]$ определяется следующим образом:

$$M = \max \{A + B + B'' + C, E + G + G'' + H + 1\},$$

$$N = \max \{A + B + B' + C', E + G + G' + H' + 1\},$$

$$P = \max \{A + B' + B'' + C'', E + G' + G'' + H'' + 1\}.$$

Гипергеометрические функции от трёх переменных принято делить на два вида. Если $M = N = P = K$, то функция $F^{(3)}[x, y, z]$ называется полной обобщённой гипергеометрической функцией порядка K , в противном случае, конфлюэнтной (вырожденной).

Рассмотрим конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $F^{(3)}[x, y, z]$ третьего порядка

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a :: -; -; -; & -; & -; & -; \\ - :: -; -; -; & c_1, c_2; & d_1, d_2; & e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}}{(c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}.$$

Для удобства введём обозначение:

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a :: -; -; -; & -; & -; & -; \\ - :: -; -; -; & c_1, c_2; & d_1, d_2; & e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right] \equiv F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right].$$

Таким образом,

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}}{(c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}. \quad (4)$$

a, c_i, d_i и e_i - действительные числа, причём $c_i, d_i, e_i \neq 0, -1, -2, \dots$ ($i=1, 2$).

Составим систему дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, соответствующую к функции $F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right]$.

Введём обозначение:

$$A(m, n, p) = \frac{(a)_{m+n+p}}{m! n! p! (c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p}$$

и составим отношения:

$$\begin{aligned} \frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(m+1)(c_1+m)(c_2+m)}, \\ \frac{A(m, n+1, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(n+1)(d_1+n)(d_2+n)}, \\ \frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(p+1)(e_1+p)(e_2+p)}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} F(m, n, p) &= a + m + n + p, & F'(m, n, p) &= (m+1)(c_1+m)(c_2+m), \\ G(m, n, p) &= a + m + n + p, & G'(m, n, p) &= (n+1)(d_1+n)(d_2+n), \\ H(m, n, p) &= a + m + n + p, & H'(m, n, p) &= (p+1)(e_1+p)(e_2+p). \end{aligned}$$

Теперь подставив $F(m, n, p)$, $G(m, n, p)$ и $H(m, n, p)$ в систему (3) и воспользовавшись определением (2) дифференциальных операторов δ , σ и θ , получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\left(c_1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_2 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) x^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0, \\ & \left[\left(d_1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(d_2 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) y^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0, \\ & \left[\left(e_1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(e_2 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) y^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Раскрывая скобки в системе (5), получим:

$$\begin{cases} x^2 \omega_{xxx} + (c_2 + c_1 + 1)x\omega_{xx} + (c_1 c_2 - x)\omega_x - y\omega_y - z\omega_z - a\omega = 0, \\ y^2 \omega_{yyy} + (d_2 + d_1 + 1)y\omega_{yy} + (d_1 d_2 - y)\omega_y - x\omega_x - z\omega_z - a\omega = 0, \\ z^2 \omega_{zzz} + (e_2 + e_1 + 1)z\omega_{zz} + (e_1 e_2 - z)\omega_z - x\omega_x - y\omega_y - a\omega = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, гипергеометрическая функция, определённая равенством (4), действительно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6).

Теперь определим все линейно независимые решения системы (6) в окрестности начала координат.

Решения системы (6) будем искать в виде:

$$u = x^\lambda y^\mu z^\nu \omega(x, y, z), \quad (7)$$

где λ, μ и ν - произвольные числа, подлежащие к определению, $\omega(x, y, z)$ - произвольная функция.

Вычислив необходимые производные от функции и подставив их систему (5), получим:

$$\begin{aligned} & x^2 \omega_{xxx} + [3\lambda + c_2 + c_1 + 1]x\omega_{xx} + [3\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda(c_2 + c_1 + 1) + c_1 c_2 - x]\omega_x + \\ & + [\lambda(\lambda - 1 + c_1)(\lambda - 1 + c_2)x^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \\ & y^2 \omega_{yyy} + [3\mu + d_2 + d_1 + 1]y\omega_{yy} + [3\mu(\mu - 1) + 2\mu(d_2 + d_1 + 1) + d_1 d_2 - y]\omega_y + \\ & + [\mu(\mu - 1 + d_1)(\mu - 1 + d_2)y^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \\ & z^2 \omega_{zzz} + [3\nu + e_2 + e_1 + 1]z\omega_{zz} + [3\nu(\nu - 1) + 2\nu(e_2 + e_1 + 1) + e_1 e_2 - z]\omega_z + \\ & + [\nu(\nu - 1 + e_1)(\nu - 1 + e_2)z^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \end{aligned}$$

Отсюда получим определяющую систему (indicate system):

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - 1 + c_1)(\lambda - 1 + c_2) = 0 \\ \mu(\mu - 1 + d_1)(\mu - 1 + d_2) = 0 \\ \nu(\nu - 1 + e_1)(\nu - 1 + e_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

имеющую 27 решений:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	0	0	0	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$
μ	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$
ν	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
λ	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$
μ	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	$1 - d_3$	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$
ν	0	0	0	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$

	19	20	21	22	23	24	25	26	27
λ	0	0	0	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$
μ	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$

ν	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$
-------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Следовательно, с учётом таблицы решений, определяющей системы (8) и представление (7), система дифференциальных уравнений гипергеометрического типа (6) имеет 27 линейно независимые решения:

$$\omega_1(x, y, z) = F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (8)$$

$$\omega_2(x, y, z) = y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-d_1+a; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2+1-d_1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (9)$$

$$\omega_3(x, y, z) = y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-d_2+a; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1+1-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (10)$$

$$\omega_4(x, y, z) = x^{1-c_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-c_1+a; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (11)$$

$$\omega_5(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-d_1; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (12)$$

$$\omega_6(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-d_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1-d_2+1, 2-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (13)$$

$$\omega_7(x, y, z) = x^{1-c_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-c_2+a; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (14)$$

$$\omega_8(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_2-d_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_2-d_1+1, 2-d_1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (15)$$

$$\omega_9(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_2-d_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1-d_2+1, 2-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (16)$$

$$\omega_{10}(x, y, z) = z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-e_1+a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (17)$$

$$\omega_{11}(x, y, z) = y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-d_1-e_1; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (18)$$

$$\omega_{12}(x, y, z) = y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-d_2-e_1; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1-d_2+1; e_2-e_1+1; 2-e_1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (19)$$

$$\omega_{13}(x, y, z) = x^{1-c_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-e_1; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (20)$$

$$\omega_{14}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_1-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (21)$$

$$\omega_{15}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_2-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (22)$$

$$\omega_{16}(x, y, z) = x^{1-c_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-e_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (23)$$

$$\omega_{17}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_1-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (24)$$

$$\omega_{18}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_2-e_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (25)$$

$$\omega_{19}(x, y, z) = z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-e_2+a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (26)$$

$$\omega_{20}(x, y, z) = y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-d_1-e_2; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (27)$$

$$\omega_{21}(x, y, z) = y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-d_2-e_2; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (28)$$

$$\omega_{22}(x, y, z) = x^{1-c_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; e_1-e_2+1, 2-e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (29)$$

$$\omega_{23}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_1-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-c_1, 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (30)$$

$$\omega_{24}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_2-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (31)$$

$$\omega_{25}(x, y, z) = x^{1-c_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-e_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (32)$$

$$\omega_{26}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_1-e_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (33)$$

$$\omega_{27}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_2-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right]. \quad (34)$$

1. Автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных четвёртого порядка

Рассмотрим уравнение

$$Lu = x^n y^m z^p u_t - t^k y^m z^p u_{xxx} - t^k x^n z^p u_{yyy} - t^k x^n y^m u_{zzz} = 0, \quad m, n, k, p = \text{const} > 0 \quad (35)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z, t) : x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\}$.

Решение уравнения (35) будем искать в виде:

$$u = P\omega(\xi, \eta, \zeta), \quad (36)$$

где

$$P = \left(\frac{3}{k+1} t^{k+1} \right)^{-1}, \quad \xi = -\frac{k+1}{3(n+3)^3 t^{k+1}} x^{n+3}, \quad \eta = -\frac{k+1}{3(m+3)^3 t^{k+1}} y^{m+3}, \quad \zeta = -\frac{k+1}{3(p+3)^3 t^{k+1}} z^{p+3}, \quad (37)$$

$$\alpha = \frac{n}{n+3}, \quad \beta = \frac{m}{m+3}, \quad \gamma = \frac{p}{p+3}. \quad (38)$$

Подставляя (36) в уравнение (35), получим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка:

$$A_1 \omega_{\xi\xi\xi} + A_2 \omega_{\eta\eta\eta} + A_3 \omega_{\zeta\zeta\zeta} + A_4 \omega_{\xi\xi\eta} + A_5 \omega_{\eta\eta\xi} + A_6 \omega_{\xi\xi\zeta} + A_7 \omega_{\eta\zeta\xi} + A_8 \omega_{\zeta\xi\eta} + A_9 \omega_{\zeta\eta\xi} + A_{10} \omega = 0 \quad (39)$$

где

$$A_1 = P t^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \xi^2,$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= Pt^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \eta^2, \\
 A_3 &= Pt^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \zeta^2, \\
 A_4 &= Pt^k y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\alpha}{3} + \frac{2+\alpha}{3} + 1 \right) \xi, \\
 A_5 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\beta}{3} + \frac{2+\beta}{3} + 1 \right) \eta, \\
 A_6 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\gamma}{3} + \frac{2+\gamma}{3} + 1 \right) \zeta, \\
 A_7 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\alpha}{3} \frac{2+\alpha}{3} - 3\xi \right), \\
 A_8 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\beta}{3} \frac{2+\beta}{3} - 3\eta \right), \\
 A_9 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\gamma}{3} \frac{2+\gamma}{3} - 3\zeta \right), \\
 A_{10} &= -3Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание определение (37) параметров α , β и γ , а также подставляя выражения коэффициентов $A_1 - A_{10}$ в уравнение (39), легко убедиться в том, что уравнение (39) равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
 \xi^2 \omega_{\xi\xi\xi} + \left(\frac{1+2\alpha}{3} + \frac{2+\alpha}{3} + 1 \right) \xi \omega_{\xi\xi} + \left(\frac{1+2\alpha}{3} \frac{2+\alpha}{3} - \xi \right) \omega_{\xi} - \eta \omega_{\eta} - \zeta \omega_{\zeta} - \omega = 0 \\
 \eta^2 \omega_{\eta\eta\eta} + \left(\frac{1+2\beta}{3} + \frac{2+\beta}{3} + 1 \right) \eta \omega_{\eta\eta} + \left(\frac{1+2\beta}{3} \frac{2+\beta}{3} - \eta \right) \omega_{\eta} - \xi \omega_{\xi} - \zeta \omega_{\zeta} - \omega = 0 \\
 \zeta^2 \omega_{\zeta\zeta\zeta} + \left(\frac{1+2\gamma}{3} + \frac{2+\gamma}{3} + 1 \right) \zeta \omega_{\zeta\zeta} + \left(\frac{1+2\gamma}{3} \frac{2+\gamma}{3} - \zeta \right) \omega_{\zeta} - \xi \omega_{\xi} - \eta \omega_{\eta} - \omega = 0
 \end{cases}$$

Сравнивая теперь последнюю систему дифференциальных уравнений с системой (39), учитывая (36), легко выписать все 27 автомодельных решений вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных (35) в виде:

$$u_1(x, y, z, t) = \lambda_1 PF^{(3)} \left[\begin{matrix} 1; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta \end{matrix} \right], \quad (40)$$

$$u_2(x, y, z, t) = \lambda_2 P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\beta}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta \end{matrix} \right], \quad (41)$$

$$u_3(x, y, z, t) = \lambda_3 P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\beta}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{5-2\beta}{3}, \frac{4-\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta \end{matrix} \right], \quad (42)$$

$$u_4(x, y, z, t) = \lambda_4 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\alpha}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{\alpha-4}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (43)$$

$$u_5(x, y, z, t) = \lambda_5 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-\beta}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (44)$$

$$u_6(x, y, z, t) = \lambda_6 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-\alpha-2\beta}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (45)$$

$$u_7(x, y, z, t) = \lambda_7 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\alpha}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (46)$$

$$u_8(x, y, z, t) = \lambda_8 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-2\alpha-\beta}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (47)$$

$$u_9(x, y, z, t) = \lambda_9 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-2\alpha-2\beta}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (48)$$

$$u_{10}(x, y, z, t) = \lambda_{10} P \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (49)$$

$$u_{11}(x, y, z, t) = \lambda_{11} P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{2-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (50)$$

$$u_{12}(x, y, z, t) = \lambda_{12} P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (51)$$

$$u_{13}(x, y, z, t) = \lambda_{13} \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (52)$$

$$u_{14}(x, y, z, t) = \lambda_{14} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-\alpha-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (53)$$

$$u_{15}(x, y, z, t) = \lambda_{15} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (54)$$

$$u_{16}(x, y, z, t) = \lambda_{16} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-2\alpha-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (55)$$

$$u_{17}(x, y, z, t) = \lambda_{17} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-2\alpha-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (56)$$

$$u_{18}(x, y, z, t) = \lambda_{18} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-2\alpha-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (57)$$

$$u_{19}(x, y, z, t) = \lambda_{19} P \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (58)$$

$$u_{20}(x, y, z, t) = \lambda_{20} P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (59)$$

$$u_{21}(x, y, z, t) = \lambda_{21} P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{10-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (60)$$

$$u_{22}(x, y, z, t) = \lambda_{22} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-\alpha-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (61)$$

$$u_{23}(x, y, z, t) = \lambda_{23} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-\alpha-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (62)$$

$$u_{24}(x, y, z, t) = \lambda_{24} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-\alpha-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (63)$$

$$u_{25}(x, y, z, t) = \lambda_{25} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{10-2\alpha-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (64)$$

$$u_{26}(x, y, z, t) = \lambda_{26} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-2\alpha-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (65)$$

$$u_{27}(x, y, z, t) = \lambda_{27} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-2\alpha-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}, \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}, \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (66)$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_{27}$ are constants.

$$P = \left(\frac{3}{k+1} t^{k+1} \right)^{-1}, \quad \xi = -\frac{k+1}{3(n+3)^3 t^{k+1}} x^{n+3}, \quad \eta = -\frac{k+1}{3(m+3)^3 t^{k+1}} y^{m+3}, \quad \zeta = -\frac{k+1}{3(p+3)^3 t^{k+1}} z^{p+3},$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Все автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения (35) представляются равенствами (40) – (66).

Заключение. Как известно, Сривастава впервые определил общие гипергеометрические функции от трёх переменных произвольного порядка. Несмотря на то, что имеется множество работ, в которых исследованы вопросы сходимости и приводимости, получены формулы суммирования и преобразования, интегральные представления для гипергеометрических функций от трёх переменных, очень мало работ, посвящённых применению гипергеометрических функций от трёх переменных высшего порядка к прикладным задачам.

Настоящая работа интересна тем, что она обсуждает приложения гипергеометрических функций от трёх переменных третьего порядка – устанавливает автомодельные решения одного вырождающегося дифференциального уравнения, возникающего в прикладных задачах математической физики.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen//Math.Ann. 1889, No.34. P. 544-600.
2. Бейтмен А., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
3. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
4. Ruzhansky M., Hasanov A. Self-similar solutions of the model degenerate partial differential equations of the second, third, and fourth order. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, vol.41, No. 6,

pp. 1103 – 1114.

5. Irgashev B.Y. On particular solutions of one equation with multiple characteristics and some properties of the fundamental solution. *Ukr.Math.J.* , 2016, vol. 68, pp. 868 – 893.

6. Irgashev B.Y. Application of hypergeometric functions to the construction of particular solutions. *Complex variables and elliptic equations*. 2023, vol. 68, No. 8, pp. 1045 – 1068.

7. Hasanov A., Ruzhansky M. Hypergeometric expansions of solutions of the degenerating model parabolic equations of the third order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol.41, No. 1, pp. 27 – 31.

8. Эргашев Т.Г., Вохобов Ф.Ф., Махмудов Б.Б. Конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех переменных. *Бюллетень института математики*, 2022, Т. 5, № 6, с.149-177.

9. Хасанов А., Ружанский М.В. Интегральные представления типа Эйлера для гипергеометрических функций от трёх переменных второго порядка// *Бюллетень Института математики*, 2019, 6, С. 73-223.

10.Hasanov A., Ruzhansky M. Systems of differential equations of Gaussian hypergeometric functions in three variables and their linearly-independent solutions. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2022, 5(3), pp. 50 – 142.

11.Srivastava H.M. Generalized Neumann expansions involving hypergeometric functions. *Proc. Cambridge Philos.Soc.* 1967, 63(2), pp. 425 – 429.

АВТОМОРФИЗМЫ И ЛЕМНИСКАТА

Жабборов Насриддин Мирзоодилович,

Ташкентский государственный экономический университет
zjabborovnasridin@gmail.com)

Хусенов Бехзод Эркин угли,

Бухарский государственный университет
b.e.husenov@buxdu.uz

Бобохонов Шарофиддин Собирович,

Каршинский государственный университет
boboxonovsharofiddin@1993gmail.com

Аннотация. В работе исследуются автоморфизмы лемнискатных областей, задаваемых уровнями модуля многочлена $P(z)$. Доказано, что каждая связная компонента области $|P(z)| < 1$ является односвязной, и отображение $P: \Omega_0 \rightarrow D$ является правильным голоморфным накрытием. Установлено, что всякий автоморфизм лемнискаты, сохраняющий уровни $|P(z)| = \text{const}$ и переставляющий нули многочлена с сохранением кратностей, удовлетворяет соотношению $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$. Показано, что группа таких автоморфизмов конечна и совпадает с группой алгебраических симметрий многочлена $P(z)$.

Ключевые слова: лемниската, автоморфизм, многочлен, уровень модуля, симметрия, правильное отображение, принцип аргумента.

AUTOMORPHISMS AND LEMNISCATES

Abstract. The paper investigates the automorphisms of lemniscate domains defined by the level sets of the modulus of a polynomial $P(z)$. It is proved that each connected component of the domain $|P(z)| < 1$ is simply connected and that the mapping $P: \Omega_0 \rightarrow D$ is a proper holomorphic covering. Furthermore, any automorphism preserving the levels $|P(z)| = \text{const}$ and permuting the zeros of P with their multiplicities satisfies $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$. The group of such automorphisms is finite and coincides with the algebraic symmetry group of the polynomial $P(z)$.

Key words: lemniscate, automorphism, polynomial, module level, symmetry, proper mapping, argument principle.

AVTOMORFIZMALAR VA LEMNISKATLAR

Annotatsiya. Maqolada $P(z)$ ko'phadining moduli darajalaridan hosil bo'lgan lemniskata sohalarining avtomorfizmlari o'rganiladi. Har bir $|P(z)| < 1$ sohasi bilan bog'langanligi va $P: \Omega_0 \rightarrow D$ xaritasi to'g'ri golomorflik bilan qoplovchi ekanligi isbotlangan. Shuningdek, $|P(z)| = \text{const}$ darajalarini saqlovchi hamda P ko'phadining nollarini ularning ko'payish sonlari bilan almashtiruvchi har qanday avtomorfizm $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$ shartni bajarishi ko'rsatildi. Bunday avtomorfizmlar guruhi chekli bo'lib $P(z)$ ko'phadining algebraik simmetriyalar guruhi bilan mos keladi.

Kalit so'zlar: lemniskata, avtomorfizm, ko'phad, modul darajalari, simmetriya, to'g'ri akslantirish, akslantirish prinsipi.

Введение. Современная геометрическая теория функций исследует взаимосвязь между аналитическими свойствами комплексных отображений и формой их областей определения. Одним из фундаментальных объектов этой теории являются лемнискатные области – множества, задаваемые уравнениями модуля многочлена или более общего голоморфного отображения:

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1 \} \quad (1.1)$$

Где $P(z)$ -многочлен степени $n \geq 1$. Границы таких областей, определяемые уравнением $|P(z)| = 1$, называют лемнискатами. Они являются естественным обобщением окружности, когда $P(z) = z$.

Исследование автоморфизмов лемнискатных областей занимает важное место в комплексном анализе. В классическом случае, когда областью служит единичный диск, автоморфизмы полностью описываются дробно –линейными преобразованиями Мёбиуса.

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1 \quad (1.2)$$

образующими группу $Aut(D)$, сохраняющую уровни $|z| = const$ и реализующую конформные вращения в гиперболической метрике.

Однако если область имеет лемнискатную форму, то структура автоморфизмов существенно усложняется. В общем случае такие области не являются кругами, а их границы могут иметь несколько компонент, различающихся по топологии и кривизне. Поэтому описание всех автоморфизмов, сохраняющих внутреннюю лемнискату предстает собой самостоятельную и нетривиальную задачу.

Особых интерес вызывают отображения $f : \Omega \rightarrow \Omega$ которые:

- *Сохраняют уровни функции $|P(z)| = const$;
- *Переставляют нули многочлена $P(z)$ с сохранением их кратностей;
- *Поддерживают инвариантность границы $\partial\Omega = \{|P(z)| = 1\}$.

Такие отображения естественно рассматривать как автоморфизмы лемнискатной области, согласованные с многочленом P .

Цель настоящей работы - строгое описание и доказательство аналитико-геометрических свойств автоморфизмов лемнискат, порождённых многочленом $P(z)$.

В частности, в работе:

1. Доказывается что каждая связная компонента области $|P(z)| < 1$ односвязна и что отображение $P : \Omega_0 \rightarrow D$ является правильным голоморфным накрытием диска конечной степени (Лемма 1).

2. Устанавливается, что всякий автоморфизм сохраняющий уровни $|P(z)|$ и переставляющий нули P , удовлетворяет соотношению $P(f(z)) = e^{i\theta} P(z)$ (**теорема 1**)

3. Показано что такие автоморфизмы сохраняют кратности нулей и инвариантность границы (**теорема 2**)

4. Доказано, что группа всех автоморфизмов, согласованных с P , конечна (**теорема 3**).

Методы исследования основаны на сочетании классических приёмов геометрической теории функций принципа аргумента и локальных разложений Вейерштрасса, что обеспечивает строгость и полноту доказательств.

Таким образом, статья формирует законченное описание группы автоморфизмов лемнискатных областей, определяемых многочленом $P(z)$, и выявляет дискретную структуру их симметрий.

Лемма 1. (Об односвязности и правильности компоненты лемнискаты)

Пусть $P(z)$ -ненулевой многочлен степени $n \geq 1$ и пусть

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : P(z) < 1\} \quad (1.3)$$

-лемнискатная область, заданная уравнением модуля многочлена. Обозначим через Ω_0 фиксированную связную компоненту множества Ω .

Тогда выполняются следующие свойства:

1. Область Ω_0 односвязна:
2. Ограничение $P|_{\Omega_0} : \Omega_0 \rightarrow D = \{w : |w| < 1\}$ является правильным (proper) голоморфным отображением канечной степени m :
3. Число m равно сумме кратностей всех нулей многочлена P , принадлежащих Ω_0 :

$$m = \sum_{p \in \Omega_0} \text{ord}_{z_0} P \quad (1.4)$$

Пояснение происхождения леммы. Этот результат восходит классическим фактом геометрической теории функций и теории квазиконформных отображений (смотрите: Lehto & Virtanen, “Quasiconformal Mappings in the Plane” (1973, §14) и Ahlfors, “Lectures on Quasiconformal Mappings” (1966, Ch.1).

Для удобства дальнейшего использования ниже приводится полное доказательство в развернутом виде.

Доказательство

Шаг 0. Регулярные уровни. Выберем $r \in (0, 1)$ так что окружность $|w| = r$ не содержит критических значений многочлена P

$$\text{CritVal}(P) = \{P(z) : P'(z) = 0\}$$

Обозначим

$$\Omega_r = \{z : |P(z)| < r\}, \Omega_0(r) \text{ -компоненту, вложенную в } \Omega_0.$$

Шаг 1. Накрытие без ветвлений

Если окружность $|w| = r$ регулярна (не пересекает множеств критических значений). То

$$P : \Omega_0(r) \rightarrow \{|w| < r\}$$

Является голоморфным накрытием без ветвлений.

Так как диск $\{|w| < r\}$ односвязен, любое его связное накрытие тривиально $\Omega_0(r)$ также односвязна ([Lehto & Virtanen, §14]).

Шаг 2. Предел при $r \uparrow 1$

Область Ω_0 представима как

$$\Omega_0 = \bigcup_{0 < r < 1} \Omega_0(r),$$

И каждая $\Omega_0(r)$ односвязна.

Объединение возрастающих односвязных областей также односвязно.

Следовательно, Ω_0 односвязна.

Шаг 3. Правильность отображения

Пуск $K \subset D$ - произвольный компакт.

Существует $\rho < 1$ такое, что $K \subset \{|w| \leq \rho\}$.

Тогда

$$P^{-1}(K) \cap \Omega_0 = \{z \in \Omega_0 : |P(z)| \leq \rho\}$$

Замкнуто и ограничено внутри Ω_0 .

Следовательно, компактно.

Это означает, что $P|_{\Omega_0}$ является пропер-образ компакта при обратном отображении компактен (см)[Ahlfors, Ch.1].

Шаг 4. Степень и число нулей

По принципу аргумента степень покрытия m равна числу нулей $P(z) - w$ в области Ω_0 (с учётом кратностей):

$$m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{P'(z)}{P(z) - w} dz, \quad |w| < 1, \quad (1.5)$$

Где $\Gamma_0 \subset \Omega_0$ -замкнутая кривая, охватывающая все нули $P(z) - w$ в Ω_0 .

При $w = 0$ формула (1,5) даёт именно сумму кратностей нулей $P(z)$ в Ω_0 :

$$m = \sum_{z_0 \in \Omega_0} \text{ord}_z P \quad (1.6)$$

Таким образом, отображение $P|_{\Omega_0}$ является голоморфным накрытием диска конечной степени m , а область Ω_0 -односвязной компонентной множества $|P(z)| < 1$.

Лемма доказана.

Комментарий.

* Свойство односвязности следует из отсутствия критических значений на регулярных уровнях (результаты Лехто-Виртанена).

* Правильность (properness) и формула (1.5) - прямое следствие принципа Аргумента (Ahlfors).

* Формула (1.6) имеет также топологическое толкования как степень отображения $P: \Omega_0 \rightarrow D$.

Теорема 1. (Автоморфизмы лемнискатных областей и сохранение уровней)

пусть $P(z)$ - многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_1 = \{z \in C : P(z) < 1\} \quad (1.7)$$

-фиксированная связная компонента лемнискатной области определённой условием $|P(z)| < 1$

Пусть $f \in \text{Aut}(\Omega_1)$ биективное голоморфное отображение $f: \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ с голоморфным обратным f^{-1}

Предположим, что выполняются условия

1. f переставляет нули многочлена P внутри Ω_1 с сохранением кратностей
2. Для всех $z \in \Omega_1$ выполняется равенство сохранения уровней

$$P(f(z)) = P(z) \quad (1.8)$$

Тогда существует константа $\theta \in R$, такая что

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \quad \text{для всех } z \in \Omega_0 \quad (1.9)$$

Доказательство

1. Вспомогательная функция

Определим голоморфную функцию:

$$F(z) = \frac{P(f(z))}{P(z)} \quad (1.10)$$

Функция $F(z)$ корректно определена в $\Omega_0 \setminus Z$ где $Z = \{z : P(z) = 0\}$ множество нулей внутри $P \Omega_1$

2. Устранимость особенностей в нулях многочлена

Пусть $a \in Z$ - нуль P кратности $m \geq 1$ и пусть $b = f(a)$ - его образ также нуль P той же кратности m (по условию (1))

Разложим функции локально в окрестностях a и b

$$P(z) = (z - a)^m g_a(z), \quad g_a(a) \neq 0$$

$$P(\omega) = (\omega - b)^m g_b(\omega), \quad g_b(b) \neq 0$$

Отображение f вблизи a имеет вид:

$$f(z) = b + c(z - a) + O\{(z - a)^2\}, \quad c = f'(a) \neq 0$$

Подставим $\varepsilon P(f(z))$

$$P(f(z)) = (f(z) - b)^m g_b(f(z)) = (a(z - a) + O(z - a)^2)^m g_b(f(z)) = c^m (z - a)^m g_b(f(z))(1 + O(z - a))$$

Следовательно,

$$F(z) = \frac{P(f(z))}{P(z)} = c^m \frac{g_b(f(z))}{g_a(z)} (1 + O(z - a))_1$$

Что аналитично вблизи a .

Значит, особенность F в a устранима, и F продлевается до голоморфной функции на всей области Ω_0 .

3. Ограничение модуля

Из (1.8) следует

$$F(z) = \frac{|P(f(z))|}{|F(z)|} = 1 \quad \text{для всех } z \in \Omega_0$$

То есть $F(z)$ — голоморфная функция постоянного модуля 1 в области Ω_0

4. Постоянство функции $F(z)$ — не была константой, то по принципу открытого отображения её образ должен содержать открытую область в $\mathbb{C}$.

Однако (1.11) показывает, что $F(\Omega_0) \subset \{|\omega| = 1\}$ — одномерная кривая без внутренности. Это невозможно для голоморфного открытого отображения. Следовательно, $F(z)$ — постоянна.

$$F(z) = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

5. Итоговое равенство

Возвращаясь к (1.10), получаем:

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \quad \text{для всех } z \in \Omega_0$$

Что и требовалось доказать.

Комментарии

1. Смысл условия (1.8) означает что, автоморфизм f сохраняет уровни модуля многочлена P , то есть отображает кривые $P(z) = \text{const}$ в самих себя.

2. Сохранение кратностей условия (1) необходимо для устранимости особенностей в нулевых точках $P(z)$.

3. Интерпретация формулы (1.9) все такие автоморфизмы f индуцируют вращение множества $P(\Omega_0)$ в плоскости ω , то есть f согласовано с умножением $P(z) = e^{i\theta} P(z)$. Группа таких автоморфизмов изоморфна подгруппе вращений диска $\text{Aut}(D)$.

4. Связь с классической геометрией функций. При $P(z) = z$ равенство (1.9) даёт стандартные автоморфизмы единичного диска $f(z) = c^{i\theta} z$. В более общем случае f – внутренний автоморфизм лемнискаты, согласованный с многочленом P .

Теорема 2. Сохранение нулей и уровней многочлена автоморфизмами лемнискаты.

Пусть $P(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : P(z) < 1\} \quad (1.12)$$

– фиксированная связная компонента области лемнискаты.

Пусть $f \in \text{Aut}(\Omega_0)$ – биестивное голоморфное отображение области Ω_0 на себя, для которого выполняется:

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f переставляет нули многочлена P внутри Ω_0 с сохранением их кратностей.
2. f сохраняет все уровни функции $P(z) = \text{const}$. В частности, $f(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_0$

Доказательство

(а) Сохранение нулей и их кратностей

Пусть $a \in \Omega_0$ – нуль P кратности $m \geq 1$

$$P(z) = (z - a)^m g_a(z), \quad g_a(a) \neq 0 \quad (1.14)$$

Из (3.11) следует

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) = c^\theta (z - a)^m g_a(z) \quad (1.15)$$

Положим $b = f(a)$. Так как f голоморфно, разложим его вблизи точки a :

$$f(z) = b + c(z - a) + O((z - a)^2),$$

Сравнивая (1.15) и (1.17), получаем равенство главных членов:

$$c^m g_b(b) = c^{i\theta} g_a(a)$$

Из (3.16) следует что $g_b(b) \neq 0$ то есть $b = f(a)$ также является нулём P той же кратности m .

Следовательно, автоморфизм f переставляет нули многочлена с сохранением кратностей.

(б) Сохранение уровней и границы

Взяв модуль обеих частей (1.13), получаем:

$$|P(f(z))| = |c^{i\theta}| |P(z)| = |P(z)|$$

Следовательно, f сохраняет каждую линию уровня $P(z) = \text{const}$ в частности.

$$f(\partial\Omega_0) = \{f(z) : P(z) = 1\} = \{z : |P(f^{-1}(z))| = 1\} = \{z : |P(z)| = 1\} = \partial\Omega \quad (1.19)$$

Тем самым граница и вся структура лемнискаты инвариантны относительно f

Комментарии

1. Смысл равенства (1.18) выражает локальную жёсткость автоморфизма вблизи каждого нуля a отображение f действует как поворот и масштаб $z \mapsto b + c(z - a)c|c|^m = 1$

2. Геометрическая интерпретация.

Аutomорфизм f сохраняет весь набор изолиний $P(z) = \text{const}$ он действует как вращение в координате $\omega = P(z)$, поэтому группа таких f изоморфна подгруппе вращений диска.

$$f_p = z \mapsto P^{-1}(c^{i\theta} P(z))$$

3. Роль условия $f(a) \neq 0$

Ненулевая производная гарантирует локальную обратимость и исключает ветвления, что делает сравнение порядков нулей корректным.

4. Аналогия с классическими случаями;

При $P(z) = z$ это даёт обычные автоморфизмы диска $f(z) = e^{i\theta} z$

при $P(z) = z^m$ автоморфизмы соответствуют вращениям, сохраняющим лемнискату $|z|^m = 1$

Теорема 3. (Конечность группы согласованных автоморфизмов.

Пусть $P(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1\} \quad (2.1)$$

– фиксированная связная компонента лемнискатной области, и пусть

$$C := \{f \in \text{Aut}(\Omega_0) : \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ такое что } P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \forall z \in \Omega_0\} \quad (2.2)$$

Тогда группа C конечна.

Подготовка обозначений

Обозначим множество нулей $P \in \Omega_0$ (с учётом кратностей) через

$$Z = \{a_1, \dots, a_s\} \subset \Omega_0 \quad m_j := \text{ord}_{a_j} P (j = 1, \dots, s) \quad (2.3)$$

Каждый $f \in C$ по формуле (2.2) согласован с P и, как следует из Теоремы 2, переставляет точки Z с.

Шаг 1. Гомоморфизм в группе перестановок нулей определим отображением

$$\Phi : C \rightarrow \text{Sym}(Z), \quad \Phi(f)(a_j) = f(a_j) \quad (2.4)$$

Из Теоремы 2 следует, что $\Phi(f)$ действительно перестановка множества Z . Причём кратности m_j сохраняются. Легко проверить, что Φ – гомоморфизм групп:

$$\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g) \quad (2.5)$$

Так как $\text{Sym}(Z)$ – конечная группа (множество Z конечно), то её подгруппа $\text{im } \Phi$ конечна:

$$|\text{im } \Phi| < \infty. \quad (2.6)$$

Остаётся показать, что ядро $\ker \Phi = \{f \in G : f(a_j) = a_j \forall a_j \in Z\}$ также конечно. Тогда по

$$|G| = |\text{im } \Phi| \cdot |\ker \Phi| < \infty \quad (2.7)$$

Шаг 2. Оценка $|\ker \Phi|$: случай $|Z| \geq 2$

Пусть $\ker \Phi \ni f$ фиксирует все нули $a_1, \dots, a_s$. Выберем риманову карту

$$\varphi : \Omega_0 \rightarrow D \text{ би голоморфизм.} \quad (2.8)$$

Рассмотрим

$$F := \varphi^0 f^0 \varphi^{-1} \subset \text{Aut}(D) \quad (2.9)$$

Так же $f(a_j) = a_j$, то F фиксирует точки $p_j := \varphi(a_j) \in D$. Если $|Z| \geq 2$ то F имеет две различные фиксированные внутренние точки диска; из классического описания автоморфизмов D следует, что тогда $F = \text{id}$ (автоморфизм диска не может иметь две разные фиксированные внутренние точки, кроме тождественного). Следовательно, $f = \text{id}$. Значит,

$$|Z| \geq 2 \Rightarrow \ker \Phi = \{\text{id}\} - \text{конечно} \quad (2.10)$$

Шаг 3. Оценка $|\ker \Phi|$: случай $|Z| = 1$

Пусть $Z = \{a\}$ – единственный нуль P в Ω_0 , его кратность $m := \text{ord}_0 P \geq 1$. Для $f \in \ker \Phi$ имеем $f(a) = a$. Локальные разложения (как в теореме 2):

$$P(z) = (z - a)^m g(z), \quad g(a) \neq 0, \quad (2.11)$$

$$f(z) = a + c(z - a) + O((z - a)^2), \quad c = f'(a) \neq 0, \quad (2.12)$$

Условие согласованности (4.2) даёт $P(f(z)) = e^{i\theta} P(z)$ для некоторого $\theta = \theta(f)$. Сравнение главных членов (смотрите вывод типа (3.16)) приводит к

$$c^m g(a) = c^w g(a) \Rightarrow c^w = c^m \quad (2.13)$$

Перейдём к модели диска, как выше: $F = \varphi^0 f^0 \varphi^{-1} \subset \text{Aut}(D)$ причём $F(\varphi(a)) = \varphi(a)$.

Нормировкой можно считать $\varphi(a) = 0$ (заменяем φ на $T^0 \varphi$, где T -подходящий автоморфизм диска). Тогда всякий автоморфизм диска, фиксирующий 0, имеет вид:

$$F(w) = e^w w, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Из цепного правила получаем $F'(0) = f'(a) = c = c^w$. Совместно с (4.13) имеем:

$$c^w = c^m = (c^w)^m = c^{r(a+2\pi k)m} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{m} \pmod{2\pi/m} \quad (2.15)$$

То есть угол α (а значит и F , и f) может принимать не более чем m различных значений:

$$\alpha \in \left\{ \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi k}{m} : k = 0, 1, \dots, m-1 \right\} \quad (2.16)$$

Следовательно,

$$|\ker \Phi| \leq m < \infty \quad (2.17)$$

Завершение доказательства

Объединяя (2.6), (2.10) и (2.17), получаем

$$|G| = |im \Phi| \cdot |\ker \Phi| < \infty$$

Теорема доказана.

Комментарии и тонкие моменты

1. Почему случай $|Z| = 0$ невозможен для компоненты $|P| < 1$: по принципу аргумента, максимума модулей в каждой внутренней компоненте уровня $|P| < 1$ многочлен P имеет хотя бы один нуль.

2. Смысл конечности $|\ker \Phi|$ при $|Z| = 1$: локальная «жёсткость» в точке нуля разрешает только m дискретных «вращений» (в координате φ), согласованных с глобальным условием $P(f) = e^g P$.

3. Общий итог: группа всех автоморфизмов Ω_0 , согласованных с P в смысле (2.2), всегда конечна. При $|Z| \geq 2$ ядро тривиально; при $|Z| = 1$ возможны не более m элементов в ядре (где m - кратность единственного нуля).

Заключение. В работе рассмотрены аналитико-геометрические свойства автоморфизмов лемнискатных областей, задаваемых уровнями модуля многочлена $P(z)$. На основе классических методов теории голоморфных и квазиконформных отображений получены строгие результаты, описывающие структуру таких автоморфизмов.

1. Лемма 1 показала, что каждая связная компонента области $\{|P(z)| < 1\}$ является односвязной и что отображение $P: \Omega_0 \rightarrow D$ является правильным голоморфным накрытием диска конечной степени, равной сумме кратностей нулей P внутри Ω_0 . Тем самым установлено топологическое соответствие между внутренней геометрией лемнискаты и структурной нулей многочлена.

2. Теорема 1 доказала, что всякий автоморфизм $f \in \text{Aut}(\Omega_0)$, сохраняющий уровни $|P(z)| = \text{const}$ и переставляющий нули P с сохранением кратностей, удовлетворяет равенству $P(f(z)) = e^\theta P(z)$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Это равенство означает, что автоморфизмы лемнискаты

индуцируют вращения в координате $w = P(z)$ и, следовательно, образуют подгруппу вращений группы автоморфизмов диска $Aut(D)$.

3. Теорема 2 установила жёсткость таких автоморфизмов: они не только сохраняют уровни функции $|P(z)|$, но и переставляют нули многочлена с теми же кратностями, обеспечивая локальную конформность и инвариантность границы $\partial\Omega_0$.

4. Теорема 3 показала, что группа всех автоморфизмов, согласованных с многочленом P в смысле условия $P(f) = e^g P$, является конечной. В частности, если внутри Ω_0 более одного нуля, автоморфизм единственен (тождественный), а при единственном нуле кратности m существует не более m допустимых вращений. Этот результат раскрывает дискретную природу симметрий лимникатных областей.

Полученные утверждения формируют завершённую классификацию автоморфизмов лемнискат, порождённых многочленом $P(z)$. Они показывают, что внутренняя геометрия лемнискаты полностью определяется распределением нулей многочлена и их кратностями, а допустимые преобразования сводятся к конечной группе вращений в образе диска.

В дальнейшем эти результаты могут служить базой для расширения анализа на более общие классы отображений, например, для построения автоморфизмов областей, задаваемых уровнями гармонических субгармонических или псевдовналитических функций, где сохраняется аналогичная структура инвариантности уровней и жёсткости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sadullaev A. *Plurisubharmonic functions and potential theory in complex spaces*. - Tashkent: Fan, 1982. - 212 p.
2. Sadullaev A., Jabborov N.M. *On a Class of A-Analytic Functions* // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. — 2016. — Vol. 9(3). — P. 374–383.
3. Jabborov N.M., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Y. *The Schwarz Inequality and the Schwarz Formula for A-Analytic Functions* // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2022. — Vol. 264(6). — P. 703–714.
4. Brett D. Wick. *The Corona Problem, lecture notes generated for the CIMPA Summer School May 2 - 13, 2011*.
5. B. Bojarski, *Homeomorphic solutions of the Beltrami systems*, *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 102, 661-664, 1955 (in Russian)
6. L. Carleson. *Interpolations by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem*, *Annals of Mathematics*, Volume 76, No. 3, (1962).
7. P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces*, United Kingdom, Cambridge University Press, 1998.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТОМ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Бойназаров Ахроржон Нумонжонович,

Кафедра прикладной математики и информатики

Ферганского государственного университета

Фергана, Узбекистан

ahr010185@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется нахождение элементарных решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего квадрат оператора Бесселя. Основной метод исследования основан на приведении уравнения к автономному виду с помощью подходящих замен и использовании операторов дробного порядка типа Эрдейи-Кобера. Рассмотрены специальные случаи широко используемых в физике и астрофизике уравнений, таких как уравнение Томаса-Ферми и уравнение Эмдена-Фаулера, для которых найдены точные (элементарные) решения в явном виде. Проанализированы решения линейной части уравнения, показано, что они представляют собой комбинацию полиномиальных, логарифмических и степенных функций. Полученные результаты могут быть применены в математической физике и в теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: оператор Бесселя, нелинейное уравнение, оператор Эрдейи-Кобера, уравнения Эмдена-Фаулера.

BESSEL OPERATORINING KVADRATI QATNASHGAN CHIZIQSIZ ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada Bessel operatori kvadrati qatnashgan chiziqsiz oddiy differensial tenglamaning elementar yechimlarini topish o'rganiladi. Tadqiqotning asosiy usuli tenglamani mos almashtirishlar yordamida avtonom shaklga keltirish va Erdelyi-Kober tipidagi kasr tartibli integrallash operatorlaridan foydalanishga asoslangan. Tomon-Fermi va Emden-Fowler tenglamalari kabi fizika va astrofizikada keng qo'llaniladigan tenglamalarning maxsus holatlari ko'rib chiqilib, ularning aniq (elementar) yechimlari ochiq ko'rinishda topilgan. Tenglamaning chiziqli qismi yechimlari tahlil qilinib, yechimlarning ko'phad, logarifmik va darajali funksiyalar kombinatsiyasidan tashkil topishi ko'rsatilgan. Olingan natijalar matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: Bessel operatori, chiziqsiz tenglama, Erdelyi-Kober operatori, Emden-Fowler tenglamalari.

SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING THE SQUARE OF THE BESSEL OPERATOR

Abstract. This article investigates the finding of elementary solutions for a nonlinear ordinary differential equation containing the square of the Bessel operator. The main research method is based on reducing the equation to an autonomous form using suitable substitutions and employing Erdelyi-Kober-type fractional integration operators. Special cases of widely used equations in physics and astrophysics, such as the Thomas-Fermi equation and the Emden-Fowler equation, are considered, for which exact (elementary) solutions are found in explicit form. The solutions of the linear part of the equation are analyzed, showing that they consist of a combination of polynomial, logarithmic, and power functions. The obtained results can be applied in mathematical physics and the theory of differential equations.

Keywords: Bessel operator, nonlinear equation, Erdelyi-Kober operator, Emden-Fowler equations.

Введение. В теории дифференциальных уравнений уравнения, содержащие оператор Бесселя, имеют особое значение, так как они часто встречаются в различных областях физики, астрофизики, динамики газов и квантовой механики. Например, уравнение Томаса-Ферми в атомной физике и уравнение Лейна-Эмдена в астрофизике являются известными примерами таких уравнений. Эти уравнения обычно имеют нелинейный характер, и нахождение их точных решений является сложной

задачей. Уравнения, содержащие оператор Бесселя B_a , изучались в [1], уравнение Томаса-Ферми в атомной физике – в [8], [7], уравнение Лейна-Эмдена в астрофизике – в [9], а их интересные физические и математические свойства исследовались в [10], [11]. Одним из таких уравнений является уравнение Фаулера-Эмдена, которое изучалось с различных точек зрения, и ему посвящены обширные монографии.

В статье рассматривается нелинейное уравнение, содержащее квадрат оператора Бесселя. Квадрат оператора Бесселя B_a^2 представляет собой дифференциальное выражение четвёртого порядка специальной структуры. Основной целью при решении данного уравнения является нахождение решений, которые могут быть выражены через элементарные функции, путём приведения его к автономному уравнению.

В работе сначала анализируются решения линейной части уравнения ($B_a^2 y(x) = 0$) с помощью оператора дробного порядка Эрдейи-Кобера. Затем на основе подходящих замен уравнение приводится к автономному виду. Нахождение решения основано на представлении автономного уравнения в виде алгебраического уравнения.

В нашем исследовании также рассматриваются частные случаи $a = 0$ (производная четвёртого порядка) и $a = 1$. При этом решения выражаются в виде линейной комбинации функций вида x^k . Полученные результаты имеют не только теоретическое значение, но также могут быть применены при решении практических задач.

Постановка задачи. В нашем исследовании в области $\Omega = \{x \in R, x > 0\}$ мы занимаемся нахождением решения $y(x) \in C^4(0, \infty)$ нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего оператор Бесселя целого порядка:

$$B_a^2 y(x) = bx^{m-1}y^n(x), \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

где $B_a = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}$ – оператор Бесселя, а a, b, k, n, m – постоянные параметры, и обозначает соответствующее выражение.

$$B_a^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 = \frac{d^4}{dx^4} + \frac{2a}{x} \frac{d^3}{dx^3} + \frac{a^2 - 2a}{x^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2a - a^2}{x^3} \frac{d}{dx}.$$

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. Если линейная часть нелинейного дифференциального уравнения $B_a^2 y(x) + \sum_{s=1}^l f_s(x)y^{m_s} = 0$, $a_n(x) = 1$, $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_l$, $f_s(x) \in C^4(R)$, $f(x) \neq 0$ (2) при помощи замены

$$y = v(x)z, \quad dt = udx \quad (3)$$

приводится к дифференциальному выражению с постоянными коэффициентами и выполняется условие:

$$p_s u^4 = f_s(x)v^{m_s-1}, \quad p_s = \text{const} \quad (4)$$

то уравнение (2) преобразуется в автономное уравнение:

$$\sum_{k=0}^3 b_k z^{(k)}(t) + \sum_{s=1}^l p_s z^{m_s}(t) = 0, \quad b_k = \text{const} \quad (5)$$

и решение уравнения (2) находится в виде:

$$y = \rho v(x) \quad (6)$$

где ρ является решением алгебраического уравнения:

$$b_0 \rho + \sum_{s=1}^l p_s \rho^{m_s} = 0. \quad (7)$$

При построении автономного уравнения (5) общее решение линейной части уравнения (2) должно иметь вид [3]

$$y(x) = v \sum_{k=0}^3 C_k e^{r_k \int u dx} \quad (8)$$

или должно выполняться условие (4).

В нашем исследовании мы используем следующие сведения:

Дополнительные сведения

1 Дробные интегралы Римана-Лиувилля.

Определение 1.[4] *Предположим, что $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Тогда*

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x > a \quad (9)$$

$$(I_{-b}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x < b, \quad (10)$$

где $\alpha > 0$, выражение (9) называется левосторонним, а (10) – правосторонним дробными интегралами Римана-Лиувилля.

2. Дробный оператор Эрдейи-Кобера

В работах Эрдейи и Кобера была введена следующая модификация дробного интегрирования:

$$I_{\gamma, \alpha} \varphi(x) = \frac{2x^{-2(\gamma+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\gamma+1} \varphi(t) dt, \quad (11)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\varphi(x) \in L(R^+)$.

В наших дальнейших работах мы будем использовать (11) в следующем виде:

$$I_{\frac{\gamma-1}{2}, \alpha} \varphi(x) = \frac{2x^{1-\gamma-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{\gamma} \varphi(t) dt. \quad (12)$$

Обратный интегральный оператор к (4) выражается следующим образом:

$$I_{\gamma, \alpha}^{-1} \varphi(x) = \frac{2x^{-2\gamma}}{\Gamma(p-\alpha)} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \right)^p \int_0^x (x^2 - t^2)^{p-\alpha-1} t^{2(\gamma+\alpha)+1} \varphi(t) dt, \quad (13)$$

где $p = [\alpha] + 1$.

Теорема 2. ([5, 6]) Если при $\alpha > 0$, $\gamma \geq -\frac{1}{2}$, $\varphi(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$ функция

$x^{2\gamma+1} [B_{\gamma}^x]^{k+1} \varphi(x)$ интегрируема в нуле и выполняется $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\gamma+1} \frac{d}{dx} [B_{\gamma}^x]^k \varphi(x) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$,

то справедливо следующее равенство:

$$[B_{\gamma+\alpha}^x + \lambda^2]^m J_{\lambda}(\gamma, \alpha) \varphi(x) = J_{\lambda}(\gamma, \alpha) [B_{\gamma}^x]^m \varphi(x).$$

Если $\lambda = 0$, то справедливо следующее равенство:

$$[B_{\gamma+\alpha}^x]^m I_{\gamma, \alpha} \varphi(x) = I_{\gamma, \alpha} [B_{\gamma}^x]^m \varphi(x).$$

Теперь найдём элементарные решения следующих нелинейных уравнений.

Применение оператора Эрдейи-Кобера для решения уравнений типа Эмдена-Фаулера или уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) согласно теореме 1, приравнявая линейную часть к нулю,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 y(x) = 0 \quad (14)$$

введём обозначение в (14):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} \right) y(x) = F(x). \quad (15)$$

Тогда (14) можно записать в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}\right) F(x) = 0. \quad (16)$$

Решением уравнения (16) будет:

$$F(x) = \frac{\bar{C}_1}{1-a} x^{1-a} + \bar{C}_2 = C_1 x^{1-a} + C_2. \quad (17)$$

Решение уравнения (14) является решением уравнения (15), и мы будем искать его в виде:

$$y = I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) \varphi(x), \quad (18)$$

где $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) \varphi(x) = I_{-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}} \varphi(x)$ равно (12) при $\gamma = 0$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}\right) I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) \varphi(x) = F(x) \quad (19)$$

Применим теорему 2 к выражению (19):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi(x) = G(x), \quad (20)$$

где

$$G(x) = I^{-1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) F(x). \quad (21)$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^1 C_k x^k + \frac{1}{(1)!} \int_0^x (x-t) G(t) dt, \quad (22)$$

где $I_{0+}^2 G(x) = \frac{1}{(1)!} \int_0^x (x-t) G(t) dt$.

Сначала упростим (21), затем подставим в (22) и после некоторых вычислений получим:

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^{3-a}. \quad (24)$$

Теперь, подставляя (24) в (18) и упрощая выражение, в результате получим, что решение уравнения (14) равно:

$$\begin{aligned} y &= I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right) \varphi(x) = \frac{2x^{1-a}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\frac{a}{2}-1} \varphi(t) dt \\ &= \frac{2x^{1-a}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\frac{a}{2}-1} [C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^{3-a}] dt \\ y(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^{3-a}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для построения автономного уравнения для (1) выполним подстановки (3) и согласно условию (4), получаем $t = \ln x \Rightarrow u = x^{-1}$ в результате v будет равно:

$$v = x^{-\frac{m+3}{n-1}}.$$

Следовательно, решение (25) выражается в виде (8) при $r_0 = \frac{m+3}{n-1}$, $r_1 = 1 + \frac{m+3}{n-1}$,

$r_2 = 2 + \frac{m+3}{n-1}$, $r_3 = 3 - a + \frac{m+3}{n-1}$ выполняются условие (4) и вид (8) из теоремы 1.

Теперь для построения автономного уравнения для (1) возьмём подстановку (3) в следующем виде:

$$y(x) = b^{-1} x^{-\frac{m+3}{n-1}} z(t), \quad t'_x = x^{-1}. \quad (26)$$

Взяв производные (26) до четвертого порядка включительно и подставив в (1), на основании (5) запишем автономное уравнение:

$$\begin{aligned} & z^{IV}(t) - \left[2a + \frac{4m+6n+4}{n-1} \right] z'''(t) \\ & + \left[\frac{(m+3n)(3m+3n+4)}{(n-1)^2} + \frac{(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^2} - 2a \frac{3m+3n+4}{n-1} + (a^2 - 2a) \right] z''(t) \\ & - \left[\frac{(m+3n)(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^3} + \frac{(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} \right. \\ & \left. + 2a \frac{(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^2} - (a^2 - 2a) \frac{2m+n+5}{n-1} + (2a - a^2) \right] z'(t) \\ & + \left[\frac{m+3n(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^4} - 2a \frac{(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} \right. \\ & \left. + (a^2 - 2a) \frac{(m+3)(m+n+2)}{(n-1)^2} - (2a - a^2) \frac{m+3}{n-1} \right] z(t) = b^{2-n} z^n(t). \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) мы ищем в виде (6), и ρ будет равно:

$$\rho = \left[b^{n-2} P(m, n, a) \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (27)$$

$$\text{где } P(m, n, a) = \frac{m+3}{n-1} \left[\frac{(m+3n)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} - \frac{2a(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^2} \right. \\ \left. + \frac{(a^2 - 2a)(m+n+2)}{(n-1)} - (2a - a^2) \right].$$

Используя (27), выразим элементарное решение уравнения (1) в виде (6) следующим образом:

$$y(x) = \left[b^{-1} P(m, n, a) \right]^{\frac{1}{n-1}} x^{-\frac{m+3}{n-1}}.$$

Уравнение типа Томаса-Ферми.

$$B_0^2 y(x) = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}(x), \quad x > 0, \quad (28)$$

$$\text{где } B_0^2 = \frac{d^4}{dx^4}.$$

Решим уравнение (28) согласно теореме 1. Сначала найдем решение, приравняв линейную часть к нулю.

$$y^{IV}(x) = \frac{d^2}{dx^2} y''(x) = 0. \quad (29)$$

Решение уравнения (29):

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \quad (30)$$

Выражение (30) удовлетворяет (4) и (8) при $u = x^{-1}$, $u^4 = x^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v^{1/2} = x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow v = x^{-7}$. Теперь построим автономное уравнение для (28), для этого возьмем производные согласно замене (3), подставим в (28) и получим следующее:

$$5040z(t) - 2414z'(t) + 431z''(t) - 34z'''(t) + z^{IV}(t) = z^{\frac{3}{2}}(t).$$

Элементарное решение уравнения (28) имеет вид (6), и ρ в нем находим согласно (7): $\rho = 5040^2$ и решение равно $y(x) = 5040^2 x^{-7}$.

В случай $a = 1$ в уравнении (1)

$$B_1^2 y(x) = bx^{m-1} y^n(x) \quad (31)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 y(x) = 0 \quad (32)$$

Решение уравнения (32) с использованием (12), (13) и теоремы 2 запишем следующим образом:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x \ln x. \quad (33)$$

Приведём решение (33) к виду (8).

$$v \left(C_1 e^{\int_1^x u dx} + C_2 e^{\int_2^x u dx} + C_3 e^{\int_3^x u dx} + C_4 e^{\int_4^x u dx} \int u dx \right) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x \ln x$$

Следовательно, из последнего слагаемого получаем $u = x^{-1}$ и, проверив условие (4) $x^{-4} = bx^{m-1} v^{n-1} \Rightarrow v = b^{-1} x^{\frac{3+m}{n-1}}$, находим, что оно равно. Отсюда видно, что решение уравнения (31) совпадает с решением уравнения (1) при $a = 1$.

Закключение. В данной работе успешно найдены и проанализированы точные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения вида $B_a^2 y(x) = bx^{m-1} y^n(x)$, содержащего квадрат оператора Бесселя целого порядка. Отмечены следующие основные результаты:

1. Эффективность метода: метод приведения уравнения к автономному виду и использования операторов дробного порядка типа Эрдейи-Кобера оказался эффективным и позволил найти точные решения нелинейных уравнений.
2. Теоретическая и практическая значимость: полученные результаты не только обогащают математическую теорию, но также имеют практические приложения для решения нелинейных дифференциальных уравнений, используемых в различных областях физики, астрофизики и техники.
3. Возможности для дальнейших исследований: показана возможность применения данной методики к уравнениям, содержащим операторы Бесселя дробного порядка, что открывает новые направления для будущих исследований.

В заключение следует отметить, что предложенный в работе метод доказал свою эффективность при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, и для различных значений параметров были получены решения в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Л. М. Беркович. Об уравнении Фаулера-Емдена и некоторых его обобщениях. № 381 -№ 409 (1972).
2. Sergey Sitnik, Shakhobiddin Karimov, Axrorjon Boynazarov. Solving the Cauchy Problem for an ordinary differential equation with an integer power of the Bessel operator using transmutation operators.
3. И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, представимых в виде операторов с постоянными коэффициентами. — Вестник МГУ. Серия математика, 1967, № 2, с. 3–13.
4. Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т. Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие; на русском языке; А.Уринов и др. Фергана: изд. “Фаргона”, 2022.-192 с.
5. Urinov, A.K., Karimov, Sh.T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type. Lobachevskii J. Math. 4(41), 102–110 (2020) <https://doi.org/10.1134/S199508022001014X>
6. Karimov, Sh.T. The Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon Equation with the Bessel operator. Lobachevskii J. Math. 5(41), 768–780 (2020) <https://doi.org/10.1134/S1995080220050042>.
7. E. Fermi, Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell’atomo, Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, 6 (1927), 602–607.

8. L. H. Thomas, *The calculation of atomic fields*, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33 (1927), 542–548.
9. С. Чандрасекар, *Введение в учение о структуре звезд* (translated from English: *An Introduction to the Study of Stellar Structure*), Moscow, 1950.
10. П. Э. Эмих, *Теория устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений* (translated from English), Moscow, 1954.
11. Дж. Сансоне, *обыкновенные дифференциальный уравнение* (translated from Italian), Vol. 2, Москва, 1954.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Сулаймонов Фозил Уралович,

Джизакский государственный педагогический
университет имени Абдуллы Кадыри
fozil.sulaymonov@mail.ru

Эшдавлатов Зарифжон Зафар угли,

Самаркандский государственный университет
имени Шарофа Рашидова
z.eshdavlatov@mail.ru

Холбоева Хаётхон Фарход кизи,

Джизакский государственный педагогический
университет имени Абдуллы Кадыри

Аннотация. Рассмотрен аномальный перенос вещества в трещиновато-пористой среде, состоящей из одиночной трещины и граничащего с ней пористого блока (матрицы). Задача численно решена методом конечных разностей, а дробная производная в уравнениях переноса определена в смысле Капуто. На основе численных расчётов показано, что уменьшение порядка производной по времени от 1 в уравнении переноса в матрице приводит к замедлению распространения профилей концентрации в матрице и одновременно к увеличению концентрационных профилей в трещине.

Ключевые слова: диффузия, дробные производные, пористый блок, трещиновато-пористая среда.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ANOMALOUS SOLUTE TRANSPORT IN A FRACTURED-POROUS MEDIUM

Abstract. Anomalous mass transport in a fractured porous medium consisting of a single fracture and an adjacent porous block (matrix) is considered. The problem is solved numerically using the finite difference method, and the fractional derivative in the transport equations is defined in the Caputo sense. Based on numerical calculations, it is shown that decreasing the order of the time derivative from 1 in the matrix transport equation slows the propagation of concentration profiles in the matrix and simultaneously increases the concentration profiles in the fracture.

Key words: diffusion, fractional derivatives, porous block, fractured-porous medium.

YORIQ-G'OVAK MUHITDA ANOMAL MODDA KO'CHISHI MASALASINI SONLI YECHISH

Annotatsiya. Bitta yoriq va unga qo'shni g'ovak blokdan (matritsadan) iborat yoriq g'ovak muhitda anomal modda ko'chishi ko'rib chiqiladi. Masala chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechiladi va ko'chish tenglamalaridagi kasr hosilasi Kaputo tarifi orqali hisoblanadi. Sonli hisob-kitoblarga asoslanib, matritsadagi ko'chish tenglamasida vaqt bo'yicha hosilasining tartibini 1 dan kamaytirganda matritsadagi konsentratsiya profillarining tarqalishini sekinlashtiradi va bir vaqtning o'zida yoriqdagi konsentratsiya profillarini oshirishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: diffuziya, kasr tartibli hosilalar, g'ovak blok, yoriq-g'ovak muhit.

Введение. Геологическое строение залежей нефти и газа обычно представляет собой сложную систему, и анализ массопереноса в этих средах показывает, что классическое уравнение диффузии, основанное на законе Фика, не способно адекватно описать аномальный характер переноса растворённых веществ, наблюдаемый в натурных и лабораторных экспериментах. Из-за сложности процессов переноса вещества в фрактальных средах для их моделирования начали применять нелокальные уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и координате [1].

Если рассматривать пористую среду как многофазное материальное тело, то в ней всегда можно выделить представительный элементарный объём (ПЭО), содержащий как твёрдую фазу

(скелет пористой среды), так и пустотное пространство. Размер ПЭО подобран так, что физические параметры, представляющие распределения пустотного пространства и твёрдой матрицы в нём, являются статистически значимыми [2]. В частности, трещиновато-пористую среду (ТПС) можно рассматривать как композицию из двух хорошо различимых образований: отдельных трещин или сетей трещин, и твёрдой среды или пористой матрицы, находящейся между трещинами (называемой пористой матрицей). Подробное описание ТПС и сетей трещин можно найти в [3]. Отдельные трещины представляют собой плоские разрывы или две твёрдые поверхности, окружённые пористой матрицей. Трещины рассматриваются как пористые среды с обычно более высокой проницаемостью, чем прилегающая пористая матрица [4–7].

Многочисленные эксперименты и данные, полученные на местности, свидетельствуют о том, что транспорт веществ в слоистых геологических структурах проявляет аномальное поведение [8–10]. Это выражается, например, в необычных скоростях движения и концентрациях минералов, асимметрии, резких передних фронтах и продолжительных "хвостах" в концентрационных профилях [11–14]. Результаты, представленные в [15], также подтверждают наличие аномальной нефиковской диффузии в средах с сложной структурой. Анализ характеристик хранилищ ядерных отходов также подтверждает аномальный характер переноса загрязняющих веществ [16]. Численные эксперименты демонстрируют, что изменение параметров, представляющих порядки дробных производных по времени, позволяет получать различные временные распределения концентрации, соответствующие наблюдаемым в экспериментах данным.

В данном исследовании рассматривается перенос вещества в отдельно взятом элементе трещиновато-пористой среды (ТПС), с учётом аномальности переноса. Моделирование транспорта растворённого вещества в трещине осуществляется с применением аномального уравнения диффузии, выведенного на основе соответствующего аномального закона Фика. Форма такого уравнения для диффузии через пористую среду фрактального типа базируется на концепции памяти. Решение данной задачи с учётом начальных и граничных условий осуществляется численно. Используя фрактальную производную модель, учитывается массообмен между трещиной и соседней пористой матрицей фрактальной геометрии. Сформулирована задача о переносе вещества при подаче жидкости с веществами с одного конца трещины. Получено и проанализировано численное решение задачи, определены поля концентрации растворённого вещества в трещине и прилегающей пористой среде. Исследовано влияние аномальных явлений на характеристики процесса переноса.

Постановка задачи. Рассмотрим элемент ТПС, состоящий из одной трещины и смежного с ней пористого блока (матрицы). Трещина является полубесконечным одномерным объектом [17, 18], так что распределение вещества и течение жидкости по её поперечному сечению считается однородным. В такой постановке второе измерение трещины, т.е. её толщина не принимается во внимание. Пористый блок занимает первую четверть плоскости. Таким образом, рассматривается область $R\{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$. Пусть в трещине жидкость течёт с заданной постоянной скоростью v . С конца $x=0$ трещины подаётся жидкость с концентрацией вещества c_0 . Первоначально трещина и пористый блок считаются заполненными чистой (без вещества) жидкостью. В трещине происходит конвективно-диффузионный перенос вещества, а в пористом блоке – только диффузионный. Процесс переноса в пористом блоке считаем аномальным, а в трещине процесс происходит без проявления аномальных явлений.

Уравнения переноса вещества и течение жидкости в элементе ТПС принимаем в виде:

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} + v \frac{\partial c_f}{\partial x} = D_f \frac{\partial^2 c_f}{\partial x^2} + m_0 D_m \frac{\partial^{1-\gamma}}{\partial t^{1-\gamma}} \left(\frac{\partial c_m}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^\gamma c_m}{\partial t^\gamma} = D_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где $c_f = c_f(t, x)$ – концентрация вещества в трещине, M^3/M^3 ; $c_m = c_m(t, x, y)$ – концентрация в матрице, M^3/M^3 ; D_f – коэффициент диффузии в трещине, M^2/c ; v – скорость движения жёсткости; D_m – коэффициент аномальной диффузии в матрице, M^2/c^γ ; γ – порядки производных, $0 < \gamma \leq 1$; m_0 – коэффициент пористости матрицы; t – время, C ; x, y – координата, M .

Так как трещина моделируется как одномерный объект, распределение концентрации по её поперечному сечению не рассматривается.

Пусть в среду с конца $x=0$, начиная с момента $t>0$ подаётся жидкость с постоянной концентрацией вещества c_0 . Тогда начальные и граничные условия имеют вид:

$$c_f(0, x) = 0, \quad c_m(0, x, y) = 0, \quad (3)$$

$$c_f(t, 0) = c_0, \quad c_f(t, \infty) = 0, \quad (4)$$

$$c_m(t, x, 0) = c_f(t, x), \quad c_m(t, x, \infty) = 0. \quad (5)$$

Алгоритм численного решения. Для решения задачи (1) - (5) применяем метод конечных разностей [19]. В области $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$ вводим сетку, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого интервал $[0, \infty)$ по направлению x разбиваем с шагом h_1 , а интервал $[0, \infty)$ по направлению y – с h_2 , и отрезок $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ . В результате имеем сетку:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \{ & (x_i, y_k, t_j), i = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; \\ & j = 0, 1, \dots, J; x_i = i h_1; y_k = k h_2; t_j = j \tau; \tau = T / J \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (1), (2) аппроксимируются на сетке $\omega_{h_1 h_2 \tau}$. Для этого используем явную схему, а дробные производные определим в смысле Капуто. Следовательно, аппроксимации имеют вид:

$$\frac{(c_f)_i^{j+1} - (c_f)_i^j}{\tau} + \nu \frac{(c_f)_{i+1}^j - (c_f)_i^j}{h_1} = D_f \frac{(c_f)_{i-1}^j - 2(c_f)_i^j + (c_f)_{i+1}^j}{h_1^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{m_0 D_m}{\Gamma(1+\gamma) \tau^{1-\gamma} h_2} \times \left[\sum_{l=0}^{j-1} \left[(c_m)_{i,0}^{l+1} - (c_m)_{i,0}^l - (c_m)_{i,1}^{l+1} + (c_m)_{i,1}^l \right] \left((j-l)^{1-\gamma} - (j-l-1)^{1-\gamma} \right) \right], \\ & \frac{1}{\Gamma(2-\gamma) \tau^\gamma} \left[\sum_{l=0}^{j-2} \left((c_m)_{i,k}^{l+1} - (c_m)_{i,k}^l \right) \times \left((j-l+1)^\gamma - (j-l)^\gamma \right) + (c_m)_{i,k}^{j+1} - (c_m)_{i,k}^j \right] \\ & = D_m \frac{(c_m)_{i,k-1}^j - 2(c_m)_{i,k}^j + (c_m)_{i,k+1}^j}{\Gamma(2-\gamma) h_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ – сеточные значения концентраций $c_f(t, x)$ и $c_m(t, x, y)$ в точках сетки (t_j, x_i) и (t_j, x_i, y_k) , соответственно, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Начальные и граничные условия аппроксимируются как:

$$\begin{aligned} (c_f)_i^0 &= 0, & (c_m)_{i,k}^0 &= 0, \\ (c_f)_0^j &= c_0, & (c_m)_{i,0}^j &= (c_f)_i^j, \\ (c_f)_I^j &= 0, & (c_m)_{i,K}^j &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сеточные уравнения (7) и (8) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} (c_f)_i^{j+1} &= (c_f)_i^j + D_f \frac{(c_f)_{i-1}^j - 2(c_f)_i^j + (c_f)_{i+1}^j}{h_1^2} - \tau \nu \frac{(c_f)_{i+1}^j - (c_f)_i^j}{h_1} + \\ & + \frac{m_0 D_m}{\Gamma(1+\gamma) \tau^{1-\gamma} h_2} \left[\sum_{l=0}^{j-1} \left[(c_m)_{i,0}^{l+1} - (c_m)_{i,0}^l - (c_m)_{i,1}^{l+1} + (c_m)_{i,1}^l \right] \left((j-l)^{1-\gamma} - (j-l-1)^{1-\gamma} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (c_m)_{i,k}^{j+1} &= (c_m)_{i,k}^j + \frac{m_0 D_m \Gamma(2-\gamma) \tau^\gamma}{h_2^2} \left((c_m)_{i,k-1}^j - 2(c_m)_{i,k}^j + (c_m)_{i,k+1}^j \right) \\ & - \sum_{l=0}^{j-2} \left((c_m)_{i,k}^{l+1} - (c_m)_{i,k}^l \right) \times \left((j-l+1)^\gamma - (j-l)^\gamma \right), \quad i = \overline{0, I-1}, \quad j = \overline{0, J-1}, \quad k = \overline{0, K-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты и обсуждение. Для расчёта полей $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ по (10), (11) составлена специальная программа для ЭВМ. В расчётах использованы следующие значения исходных

параметров: $c_0 = 0,01$, m^3/m^3 ; $D_m = 5 \cdot 10^{-6}$, m^2/c^{γ} ; $D_f = 2 \cdot 10^{-5}$, m^2/c ; $v = 1 \cdot 10^{-5}$, m/c ; $m_0 = 0,35$ и различные γ .

На рисунках 1, 2 показаны сечения поверхности концентрации c_m в трёх точках $x = 0,1$ м, $x = 0,3$ м, $x = 0,5$ м, когда диффузионный перенос в пористом блоке

На рисунке 1 показан классический случай $\gamma = 1$, который происходит без проявления аномальных эффектов при различных значениях времени. При этом при малых значениях x получаются относительно большие концентрации c_m . Концентрационное поле с увеличением времени увеличивается как по направлению x , так и по направлению y .

На рисунке 2 показан аномальный случай, когда значения γ уменьшаются от единицы. Как видно из рисунка, с уменьшением γ от 1 профили концентрации в целом принимают заниженные значения. Однако, вблизи трещины профили при уменьшении γ от 1 принимают завышенные значения.

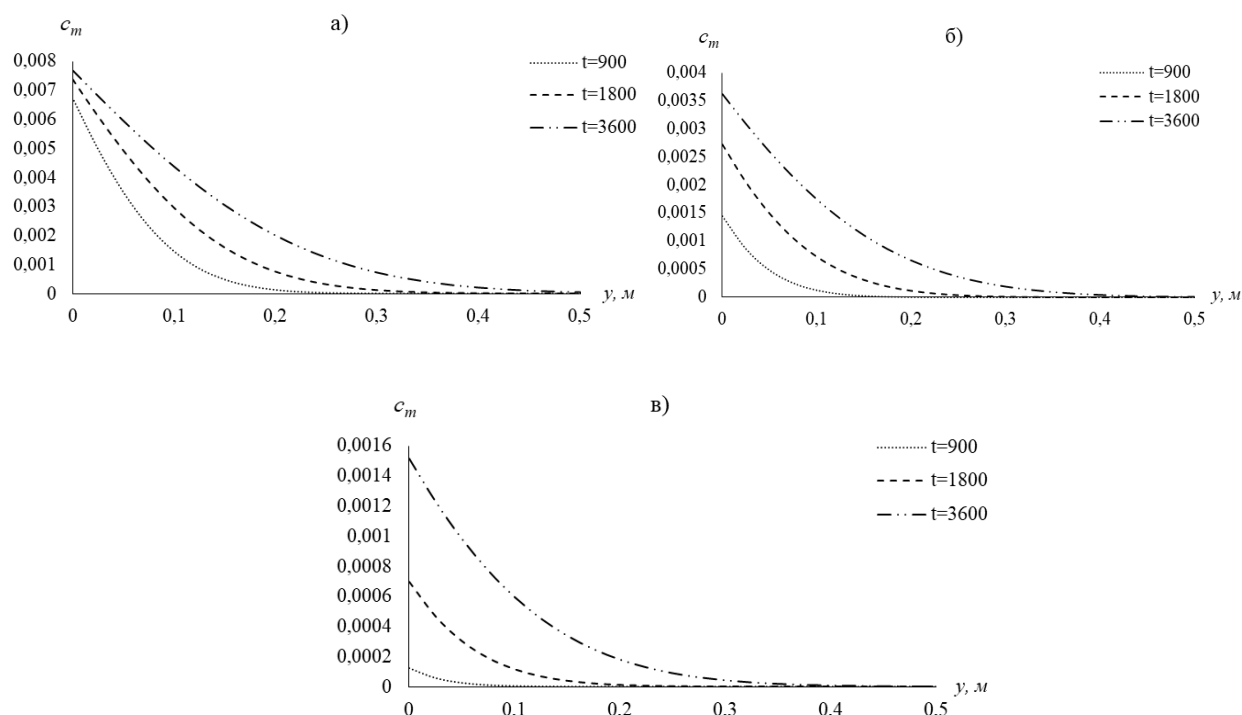


Рисунок 1. Профили концентраций c_m при $\gamma=1$, $\delta=1$ и различных значениях времени, $x = 0,1$ м (а), $0,3$ м (б), $0,5$ м (в).

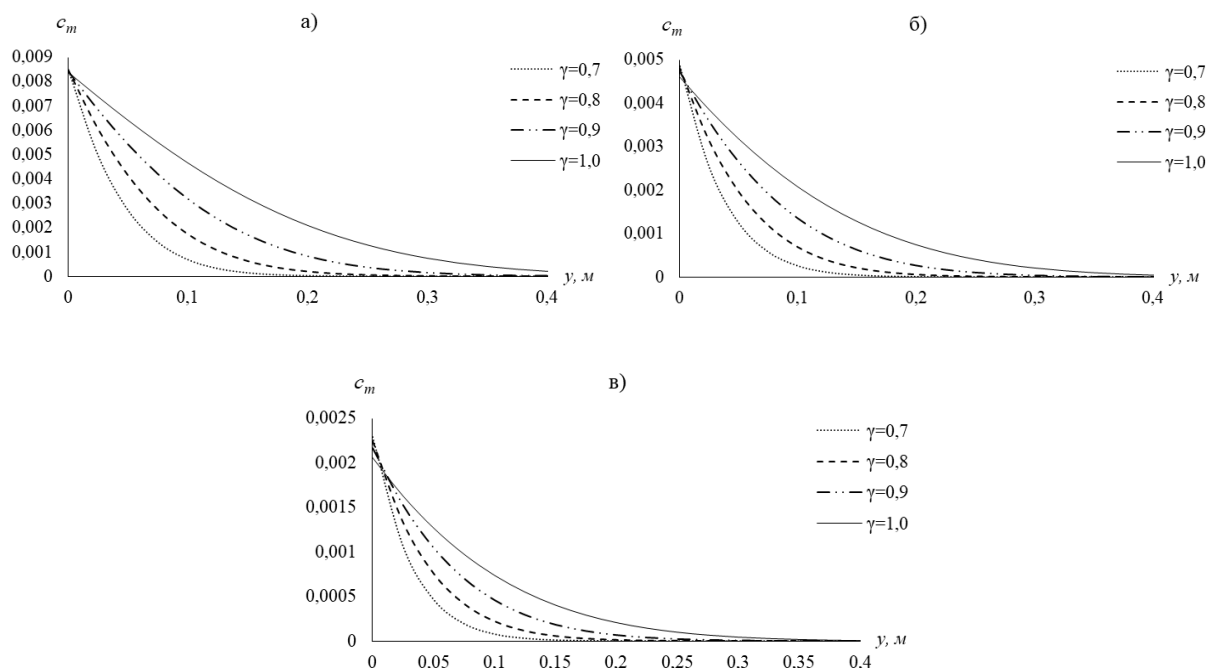


Рисунок 2. Профили концентраций c_m при $\delta=1$, $t=3600$ с $x=0,1$ м (а), $0,3$ м (б), $0,5$ м (в).

Закключение. Рассмотрена задача об аномальном переносе вещества в элементе ТПС, состоящем из одиночной трещины и присоединённого к ней пористого блока. Показано, что аномальный характер переноса вещества в пористом блоке элемента ТПС различным образом влияет на распределение его концентрации как в трещине, так и в пористом блоке. При «медленной» диффузии в пористом блоке процесс переноса в трещине интенсифицируется, наоборот при «быстрой» диффузии в простом блоке – замедляется.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Fomin S., Chugunov V., Hashida T. *Mathematical modeling of anomalous diffusion in porous media* // *Fractional Differential Calculus*, №1, 2011, pp 1-28.
2. Bear J., Tsang C. F., De Marsily G. *Flow and contaminant transport in fractured rock*. Academic Press, 2012.
3. Sahimi M. *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. – John Wiley & Sons, 2011.
4. Rezaei A., Pirvand M. *Semi-analytical solution for reactive contaminant transport in a filled-fractured system with intervening rock matrices: Case examples of tritium and uranium* // *Journal of Hydrology*. – 2022. – Т. 608. – С. 127642.
5. Nelson R.A., Handin J. *Experimental study of fracture permeability in porous rock* // *AAPG Bulletin*, 61, pp. 227–236, 1977.
6. Gale J.E., Quinn O., Wilson C. Forster C., Witherspoon P.A., Jacobson L., *Hydrogeologic characteristics of fractured rocks for waste isolation* // *The Stripa Experience. Symp. Sci. Basis for Nucl. Waste Mgmt.*, Boston, MA, 27–30 November 1979, pp. 507–518, 1980.
7. Grisak G. E., Pickens J. F. *An analytical solution for solute transport through fractured media with matrix diffusion* // *Journal of Hydrology*. – 1981. – Т. 52. – №. 1-2. – С. 47-57.
8. Li B., Bao R., Wang Y., Liu R., Zhao C. *Permeability evolution of two-dimensional fracture networks during shear under constant normal stiffness boundary conditions* // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. – 2021. – Т. 54. – С. 409-428.
9. Sahimi M. *Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing* // *Reviews of Modern Physics*, 65, 1993, 1395–1534. (doi:10.1103/RevModPhys.65.1393)

10. Edery Y., Guadagnini A., Scher H., Berkowitz B. *Origins of anomalous transport in heterogeneous media: structural and dynamic controls* // *Water Resources Research*, 50, 2014, 1490–1505. (doi:10.1002/2013WR015111)
11. Hatano Y., Hatano N. *Dispersive transport of ions in column experiments: an explanation of long-tailed profiles* // *Water Resources Research*, 34, 1998, 1027–1033. (doi:10.1029/98WR00214)
12. Haggerty R., Wondzell S.M., Johnson M.A., *Power-law residence time distribution in the hyporheic zone of a 2nd-order mountain stream* // *Geophysical Research Letters*, 29, 2002, 1640. (doi:10.1029/2002GL014743)
13. Radilla G., Sausse J., Sanjuan B., Fourar M. *Interpreting tracer tests in the enhanced geothermal system (EGS) of Soultz-sous-Forêts using the equivalent stratified medium approach* // *Geothermics*, 44, 2012, 43–51. (doi:10.1016/j.geothermics.2012.07.001)
14. Cardenas M.B., Slottke D.T., Ketcham R.A., Sharp Jr J.M. *Navier-Stokes flow and transport simulations using real fractures shows heavy tailing due to eddies* // *Geophysical Research Letters*, 34, 2007, L14404. (doi:10.1029/2007GL030545)
15. Kärger J., Ruthven D.M. *Diffusion in nanoporous materials: fundamental principles, insights and challenges* // *New Journal of Chemistry*, 40, 2016, 4027–4048. (doi:10.1039/C5NJ02836A)
16. Hodgkinson D., Benabderrahmane H., Elert M., Hautojärvi A., Selroos J.O., Tanaka Y., Uchida M. *An overview of Task 6 of the Aspö Task Force: modelling groundwater and solute transport: improved understanding of radionuclide transport in fractured rock* // *Hydrogeology Journal*, 17, 2009, 1035–1049. (doi:10.1007/s10040-008-0416-9)
17. Khuzhayorov B., Mustofoqulov J., Ibragimov G., Md Ali F., Fayziev B. *Solute transport in the element of fractured porous medium with an inhomogeneous porous block* // *Symmetry*, 12(6), 1028.
18. Хужаёров Б.Х., Норкулов О.М., Юлдашев Т.Р. *Гидродинамическая модель физико-химического заводнения залежей с трещиновато-пористыми коллекторами* // *Узбекский журнал нефти и газа*, Выпуск 4, Ташкент, 2008, стр. 26-29.
19. Самарский А.А., *Теория разностных схем*. Москва: Наука, 1989. –616 с.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE SECOND ORDER EQUATION WITH FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE AND RIEMANN-LIOUVILLE INTEGRAL

Omonova Adibakhon Numonjon kizi,
Student at Fergana State University
adibaxonomono@gmail.com

Abstract. Recently, initial-boundary problems in a rectangular domain for differential equations in partial derivatives of both even and odd order have been intensively studied. In this case, non-degenerate equations or equations that degenerate on one side of the quadrilateral are taken as the object of study. But initial boundary problems (local) for equations with two or three lines of degeneracy remain unexplored. In this paper, in a rectangular domain, a second-order equation degenerating on two sides of the rectangular and contains the with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integro operators has been considered. The solution of the considered is written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is studied. An estimate for solution to problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Key words: initial-boundary problem, Caputo fractional derivative, degenerate differential equation, MittagLeffler-type functions of two variables.

KAPUTO KASR HOSILASI VA RIMAN-LYUVILL INTEGRALINI O'Z ICHIGA OLUVCHI BUZULADIGAN IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALASI

Annotatsiya. So'nggi vaqtlarda, to'rtburchak sohada, juft va toq tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang'ich-chegara masalalari faol o'rganilmoqda. Bu holda o'rganish obyekti sifatida yo bo'lmasa buzilmagan tenglamalar, yoki to'rtburchakning bir chekkasida buziluvchi tenglamalar olinadi. Ammo ikkita yoki uchta degeneratsiya chizig'iga ega tenglamalar uchun boshlang'ich-chegara (lokal) masalalari hali o'rganilmaganligicha qolmoqda. Ushbu maqolada to'rtburchak sohada, ikkita chekkasida degeneratsiyalanuvchi, Kaputo kasr hosilasi va Riman-Lyuvill integral operatorlarini o'z ichiga olgan ikkinchi tartibli tenglama qaralgan. Qaralayotgan masalaning yechimi spektral masalaning o'z funksiyalari sistemasiga nisbatan Fourier qatori ko'rinishida yozilgan. Ushbu qator va u orqali hadma-had differensiallashtirish yo'li bilan olingan qatorning bir hil yaqinlashuvi o'rganilgan. Masala yechimi uchun baho olingan, undan berilgan funksiyalarga bog'liq holda uzluksiz bog'liqlik kelib chiqadi.

Kalit so'zlar: boshlang'ich-chegaraviy masalasi, Kaputo kasr hosilasi, buziladigan differensial tenglama, ikki o'zgaruvchili Mittag-Leffler turidagi funksiyalar.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЁННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО И ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В последнее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в прямоугольной области для дифференциальных уравнений в частных производных как чётного, так и нечётного порядка. При этом в качестве объекта исследования берутся невырожденные уравнения или уравнения, вырождающиеся на одной стороне четырехугольника. Однако начально-краевые задачи (локальные) для уравнений с двумя или тремя линиями вырождения остаются неисследованными. В данной работе в прямоугольной области рассматривается уравнение второго порядка, вырождающееся на двух сторонах прямоугольника и содержащее с дробной производной Капуто и интегрооператоры Римана-Лиувилля. Решение рассматриваемой задачи записывается в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Исследуется равномерная сходимость этого ряда и ряда, полученного из него почленным дифференцированием. Получена оценка решения задачи, из которой следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: начально-краевая задача, дробная производная Капуто, вырожденное дифференциальное уравнение, функции типа Миттаг-Леффлера двух переменных.

Introduction. It is well known that the theory of differential equations has a long and rich history. Until the last quarter of the twentieth century, this theory primarily focused on differential equations of integer order. With the development of fractional (differential and integral) analysis in the late twentieth century, researchers began to study differential equations involving fractional derivatives. At present, numerous scientific articles have been published that address initial, boundary, and spectral problems for differential equations (both ordinary and partial) containing differential operators of fractional order in various forms (see, for example, [1]– [5], and the references therein). The books [6] and [7] have played a significant role in the development of this area.

Recently, there has been growing interest in the study of boundary value problems for second-order mixed-type equations involving fractional-order differential operators (see, for example, [8]–[14]).

In the aforementioned and other related works, only non-degenerate equations have been considered. However, both local and non-local boundary value problems for degenerate partial differential equations involving fractional derivatives of the unknown function remain largely unstudied. The investigation of boundary value problems for such equations is of great importance not only from a theoretical standpoint but also from a practical one, as these equations frequently arise in the mathematical modeling of various problems in gas and hydrodynamics, the theory of small surface bendings, mathematical biology, and other scientific fields.

Problem statement. Consider the following degenerate partial integro-differential equation in the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$:

$${}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) + a I_{0t}^\beta u(t, x) + bu(t, x) = [x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x)], \quad (1)$$

where $T, \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, a, b$, are given real numbers, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \beta_1 < 1$, $u(x, t)$ - is an unknown function,

$${}^c D_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} u_z(z, x) dz$$

-fractional derivative in the sense of Caputo [15] of the function $u(t, x)$, with respect to the argument t ,

$$I_{0t}^\beta u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} u(z, x) dz$$

-fractional integral in the Riemann-Liouville [15] sense of the function $u(t, x)$ with respect to the argument t .

Let us study the following initial-boundary value problem for equation (1).

Problem B. Find a function $u(t, x)$ with the following properties:

$$1) \quad u(t, x), \quad x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x, {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) \in C(\Omega);$$

2) in the domain Ω satisfies equation (1);

3) The following boundary conditions hold on $\partial\Omega$:

$$u(t, 1) = 0, \left[x^{\alpha_1} u_x(t, x) \right]_{x=0} = 0, t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in [0, 1], \quad (3)$$

where $\varphi(x)$ is a given continuous function.

Uniqueness of the solution problem B

Before proceeding to prove the uniqueness of the solution to the problem B , we present the following auxiliary lemmas.

Lemma 1. If $V(0, x) = 0$ and $\alpha \in (0, 1)$, then the following inequality holds [19]:

$$I(x) = \int_0^t V(t, x) {}^c D_{0t}^\alpha V(t, x) dt \geq 0.$$

Lemma 2. If $\beta \in (0, 1)$, then the following inequality holds [19]:

$$I(x) = \int_0^t V(t, x) I_{0t}^\beta V(t, x) dt \geq 0$$

Theorem 1. If $a \geq 0, b \geq 0$, then problem B cannot have more than one solution.

Proof. Let us assume that there are two solutions $u_1(t, x)$ and $u_2(t, x)$ of the problem B . Their difference will be denoted by $u(t, x)$. Then the function $u(t, x)$ is a solution of equation (1) under homogeneous boundary conditions.

We multiply equation (1) by the function $u(t, x)$ and integrate over the domain Ω :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^T u(x, t) {}^c D_{0t}^\alpha u(x, t) dt + a \int_0^1 dx \int_0^T u(x, t) I_{0t}^\beta u(t, x) dt + b \int_0^1 dx \int_0^T u^2(t, x) dt = \\ = \int_0^T dt \int_0^1 u(t, x) \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x dx \end{aligned}$$

Applying the rule of integration by parts to the inner integral of the last term and taking into account conditions (2), we have

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) dx = \\ = \int_0^1 dx \int_0^T u(t, x) {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) dt - a \int_0^1 dx \int_0^T u(t, x) I_{0t}^\beta u(t, x) dt - b \int_0^1 dx \int_0^T u^2(t, x) dt, \end{aligned}$$

from which, by virtue of Lemma 1, 2 and $a \geq 0, b \geq 0$ the equality follows:

$$\int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) dx = 0$$

Therefore, $x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) = 0$ i.e. $u_x(t, x) = 0$ for $(t, x) \in \Omega$. Then $u(t, x) = \tau(t)$, where $\tau(t)$ - is an arbitrary function. Satisfying this function with the conditions $u(t, 0) = 0$, and taking into account, we obtain $u(t, x) \equiv 0, (t, x) \in \Omega$. Since $u(t, x) \in C(\overline{\Omega})$, then $u(t, x) \equiv 0, (t, x) \in \Omega$. Then, $u_1(t, x) = u_2(t, x), (t, x) \in \overline{\Omega}$

The proof of Theorem 1 is complete.

Study of the spectral problem. With the formal application of the Fourier method to the stated problem B , the following spectral problem arises: find those values of the parameter λ for which nontrivial solutions of the equation

$$Mv \equiv - \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} v'(x) \right]' = \lambda v(x), 0 < x < 1, \quad (4)$$

exist, satisfying the following conditions:

$$\begin{cases} v(x), x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1} v'(x) \in C[0,1]; \\ v(1)=0, [x^{\alpha_1} v'(x)]|_{x=0}=0 \end{cases} \quad (5)$$

It is easy to show that the spectral problem $\{(4),(5)\}$ has a solution $v(x) \not\equiv 0$ only for, $\lambda > 0$ and it is equivalent to the following integral equation with symmetric kernel:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s) v(s) ds \quad (6)$$

where the function $G(x,s)$ is defined by formula

$$G(x,s) = \begin{cases} \int_s^1 \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}}, & x \leq s; \\ \int_x^1 \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}}, & x \geq s, \end{cases}$$

Then, according to the theory of integral equations, the integral equation (6) therefore, the problem (4), (5) has a countable number of eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k, \dots$ condensing at infinity, and the corresponding eigenfunctions $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x), \dots$ form orthonormal system in the space $L_2(0,1)$.

The following lemmas can be proven on their own. Therefore, we present them without proof.

Lemma 3. Let the function $h(x)$ satisfy the following conditions:

$$h(x) \in C[0,1] \quad (7)$$

$$x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1} h'(x) \in C[0,1], \quad (8)$$

$$h(1) = 0, \quad (9)$$

$$[x^{\alpha_1} h'(x)]|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

$Mh(x) \in L_2(0,1)$. Then, on the segment $[0,1]$ it can be expanded into an absolutely and uniformly convergent series by the system of eigen functions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ of the problem (4), (5):

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k v_k(x),$$

$$\text{where } h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx.$$

Lemma 4. The following series converge uniformly on the segment $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1} v_k'(x)]^2}{\lambda_k^2}.$$

Lemma 5. If function $h(x)$ the conditions (7), (9), $x^{\alpha_1/2}(1-x)^{\beta_1/2} [Mh(x)]' \in L_2(0,1)$ hold true, then the inequality

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} [h'(x)]^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx$.

Lemma 6. If function $h(x)$ the conditions (7)-(10), and $Mh(x)$ function conditions (7), (9) $x^{\alpha_1/2} (1-x)^{\beta_1/2} [Mh(x)]' \in L_2(0,1)$ hold true, then the inequality

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} \left\{ [Mh(x)]' \right\}^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx$.

Uniqueness and stability of a solution to problem B

The solution to the problem B is formally sought in the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \quad (11)$$

where $v_k(x)$, $k \in N$ are the eigen functions of the problem (4), (5) and $u_k(t)$, $k \in N$ are the unknown functions to be determined.

Substituting (11) into (1) and (3), with respect to $u_k(t)$, we obtain the following problem:

$${}^c D_{0t}^\alpha u_k(t) + a I_{0t}^\beta u_k(t) + (\lambda_k + b) u_k(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (12)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad (13)$$

where $\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx$, $k \in N$.

To solve this problem, we apply the operator I_{0t}^α to equation (12) and, using the properties $I_{0t}^\alpha {}^c D_{0t}^\alpha u_k(t) = u_k(t) - u_k(0)$ and $I_{0t}^\alpha I_{0t}^\beta u_k(t) = I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t)$ and condition (13), we obtain the Volterra integral equation of the second kind:

$$u_k(t) + a I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t) + (\lambda_k + b) I_{0t}^\alpha u_k(t) = \varphi_k, \quad (14)$$

To solve equation (14), we apply the method of successive approximations:

$$u_{k,m}(t) = u_{k,0}(t) - a I_{0t}^{\alpha+\beta} u_{k,m}(t) - (\lambda_k + b) I_{0t}^\alpha u_{k,m}(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad u_{k,0}(t) = \varphi_k. \quad (15)$$

Using formula $I_{0t}^\alpha I_{0t}^\beta u_k(t) = I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t)$, we calculate $u_{k,m}(t)$:

$$u_{k,m}(t) = \sum_{n=0}^m \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j I_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j} u_{k,0}(t), \quad (16)$$

where $\gamma = \alpha + \beta$, $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

According to the theory of integral equations [18], if there exists $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{k,m}(t)$ uniformly in t , then its limit function is a solution of the integral equation (14).

Passing to the limit at $m \rightarrow +\infty$ in (16) and substituting the expression $u_{k,0}(t)$, we obtain a solution to equation (14) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda - b)^j I_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j} (1), \quad (17)$$

Using the formula $I_{0t}^{\alpha_2} (1) = \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)}$, we can write (17) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j) + \alpha j + 1)} \quad (18)$$

We will prove that the series (18) is convergent a little later.

Using the formula [20] $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k B_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} B_{k,n}$, we can write (18) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n=j}^{+\infty} C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j) + \alpha j + 1)}.$$

If we introduce the notation $n = j + m$ here, we can write the last equation in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+j}^j (-a)^m (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma m + \alpha j}}{\Gamma(\gamma m + \alpha j + 1)}.$$

This equation can be written using the Mittag-Leffer function of two variables as follows:

$$u_k(t) = \varphi_k E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right), \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

where E_2 -Mittag-Leffer function of two variables [21]

$$\begin{aligned} E_2 \left(\begin{matrix} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2; \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m + \beta_1 n} (\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_1 + \alpha_3 m + \beta_2 n) \Gamma(\delta_2 + \alpha_4 m) \Gamma(\delta_3 + \beta_3 m)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 m)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$x, y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R},$$

$$(\gamma_1)_{\alpha_1 m + \beta_1 n} = \frac{\Gamma(\gamma_1 + \alpha_1 m + \beta_1 n)}{\Gamma(\gamma_1)}.$$

If $\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ and $\beta_2 + \beta_3 - \beta_1 > 0$, then the series (20) is absolutely and uniformly convergent for arbitrary $\forall (x, y)$ [22].

It is not difficult to show that the following formulas are valid for the function E_2 :

$$\begin{aligned} I_{0t}^\beta \left(E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) \right) &= t^\beta E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \beta, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right), \\ {}^c D_{0t}^\alpha \left(E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) \right) &= -(\lambda_k + b) E_{\alpha, 1} \left(-(\lambda_k + b)t^\alpha \right) - \\ &\quad -\alpha t^{\gamma-\alpha} E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) = \\
 & = E_{\alpha, 1} \left(-(\lambda_k + b)t^\alpha \right) - \alpha t^\gamma E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ \gamma + 1, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right), \\
 & E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) - E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) = \\
 & = (\lambda_k + b)t^\alpha E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ \gamma + 1, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right),
 \end{aligned}$$

where $E_{\alpha_2, \beta_2}(z)$ - Mittag-Leffler function [15]:

$$E_{\alpha_2, \beta_2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)}, \quad \alpha_2 > 0.$$

Using these formulas, it can be proven that (19) is a solution to problem (12), (13). It can be shown directly that (19) can be written in the form

$$\begin{aligned}
 u_k(t) = \varphi_k \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} e_{1, -\alpha}^{1, 1/2} \left[-\alpha t^\gamma (1-\xi)^\gamma \eta \right] \\
 e_{1, -\gamma}^{1, 1/2} \left[-(\lambda_k + b)t^\alpha \xi^\gamma \eta \right] d\eta d\xi, \quad t \in [0, T]
 \end{aligned} \quad (21)$$

where $e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z)$ - Wright-type function [5]:

$$e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_3 k + \mu_3) \Gamma(\delta_3 - \beta_3 k)}, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_3 > \beta_3. \quad (22)$$

If $z < 0$, $\mu_3 \geq 0$, $\delta_3 \geq \beta_3$ the following inequality holds for function (22) [see page 87 in [5]]:

$$e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z) < \frac{1}{\Gamma(\mu_3) \Gamma(\delta_3)} \quad (23)$$

If we say $a \geq 0$, $b \geq 0$ and note that $\lambda_k > 0$, then using inequality (23), we obtain the following inequality for (21):

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k|, \quad t \in [0, T]. \quad (24)$$

Substituting (19) into (11), we find a formal solution to the problem A_{pq} :

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) v_k(x), \quad \gamma = \alpha + \beta \quad (25)$$

Theorem 2. If $a > 0$, $b > 0$, $p \neq q$ and function $\varphi(x)$ satisfy the conditions of Lemma 6, then of the series (25) determines the unique solution of the problem A_{pq} .

Proof. To prove the theorem, it is sufficient to prove that the series (25) and the series corresponding to the functions $x_1^\alpha (1-x)^{\beta_1} u_x(x, t)$ converge uniformly in $\bar{\Omega}$, and the series corresponding to the

functions $\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x \quad {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) \in C(\Omega)$ converges uniformly on any compact $\Omega_1 \subset \Omega$.

Consider the series corresponding to the function $\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x$.

Using inequality (24), then from (25) follows the inequality

$$\left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| \left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} v_k'(x) \right] \right|.$$

Hence, by virtue of equation (4), on any compact set $\Omega_1 \subset \Omega$, we have

$$\left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_k v_k(x)|. \quad (26)$$

Based on the Cauchy-Schwartz inequality, we have

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_k v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^{3/2} \varphi_k| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Here, by Lemmas 6 and 4, the series on the right-hand side converge uniformly with respect to $x \in [0, 1]$. Then the series on the left-hand side converges uniformly with respect to $x \in [0, 1]$. Therefore, the series (26) converges absolutely and uniformly on the compact set $\Omega_1 \subset \Omega$. The convergence of the remaining series are proved similarly. Theorem 2 has been proved.

Theorem 3. *If the conditions of Theorem 2 are met, then the following estimate is true for the solution of problem B:*

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_2, r} \quad (27)$$

$$\text{where } C_1 = \sup_{[0,1]} \sqrt{G(x, x)}, \quad \|f(x)\|_{L_2, r} = \int_0^1 r(x) f^2(x) dx, \quad r(x) = x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1}.$$

Proof. By virtue of Lemma 4, Lemma 5 and the inequality $|u_k(t)| \leq |\varphi_k|$, the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| v_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \varphi_k \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right|^{1/2} \leq \left[G(x, x) \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} [\varphi'(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_2, r(0,1)} \end{aligned}$$

From this, inequality (27) follows. Theorem 3 is proven.

Conclusion. In this paper, a non-local initial-boundary value problem for a degenerate second order equation with a fractional Caputo derivative and a Riemann–Liouville integral is considered in a rectangular domain. Using the method of separation of variables, a solution to the problem is obtained in the form of a series that converges absolutely and uniformly in the closure of the domain under consideration. In addition, the uniqueness of the solution and its continuous dependence on the given functions are established.

REFERENCES:

1. Dzhrbashyan M.M., Neressyan A.B. *Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order*, Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics, 1968. vol.3, no.1, pp. 3–29 (In Russian).

2. Dzhrbashyan M.M. Boundary value problem for a fractional order differential operator of SturmLiouville type, *Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics*, 1970. vol.5, no.2, pp. 71–96 (In Russian).
3. Nakhushev A.M. Sturm-Liouville problem for an ordinary second-order differential equation with fractional derivatives in lower terms, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1977. vol.234, no.2, pp. 308– 311 (In Russian).
4. Aleroev T.S. On the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional order differential operator , *Differential Equations*, 2000. vol.36, no.9, pp. 1278–1279 (In Russian).
5. Pskhu A.V. *Partial differential equations of fractional order*. Moscow: Nauka, 2005 (In Russian).
6. Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its applications*. Moscow: Fizmatlit, 2003 (In Russian).
7. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives and some of their applications*. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987 (In Russian).
8. Karimov E.T., Toshternirov B.H. Tricomi type problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with the hyper-Bessel fractional differential operator, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2019. vol.4, pp. 9–14.
9. Abdullaev O.Kh. On a problem for a degenerate mixed-type equation with Caputo and ErdélyiKober fractional operators, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019. vol.71, no.6, pp. 723–738 (In Russian).
10. Masaeva O.Kh. Dirichlet problem for a generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with GerasimovCaputo fractional derivative , *Applied Mathematics and Physics*, 2020. vol.52, no.4, pp. 246–254 (In Russian).
11. Islomov B.I., Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problems for a loaded equation of parabolichyperbolic type with Caputo and Erdélyi-Kober fractional operators , *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020. no.10, pp. 33–46 (In Russian).
12. Islomov B.I., Ubaydullaev U.Sh. Inverse problem for a mixed-type equation with fractional order operator in rectangular domain, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021. no.3, pp. 29–46 (In Russian).
13. Urinov A.K., Karimov E.T., Kerbal S. Boundary value problem with integral conjugation condition for a partial differential equation with Riemann-Liouville fractional derivative related to gas flow in a channel surrounded by porous medium, *Results in Science and Technology. Series: Contemporary Mathematics and Its Applications. Topical Reviews*, 2022. vol.210, pp. 66–76 (In Russian).
14. Karimov E.T., Ruzhansky M., Toshternirov B.Y. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, pp. 1–17.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol.204. Amsterdam North-Holland Mathematics Studies: Elsevier, 2006.
16. Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 1*. Moscow: Nauka, 1965 (In Russian).
17. Naimark M.A. *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka, 1969. 528 pp. (In Russian).
18. Mikhlin S.G. *Lectures on Linear Integral Equations*. Moscow: Fizmatlit, 1959 (In Russian).
19. Urinov A.K., Usmonov D.A. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourthorder equation with a fractional Gerasimov-Caputo derivative, *Bulletin of KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences*, 2023. vol.42, no.1, pp. 123–139 10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.
20. Kapilevich M. B. The solution of singular Cauchy problems in basis series , *Ukrainian Mathematical Journal*, 1967.. vol.3, no.9, pp. 1560-1577.
21. Garg M., Manohar P., Kalla S.L.A Mittag-Leffler-type function of two variables, *Integral Transforms and Special Functions*, 2013, pp. [to be added] 10.1080/10652469.2013.789872.
22. Hasanov A., Karimov E.T. arXiv:2501.03918 [math.CA] <https://arxiv.org/pdf/2501.03918>, 2024.

JARAYONLAR STABILLIGINI NAZORAT QILISHNING UCH KOMPONENTLI TIZIMI

Axmedov Soxibjon Akbarovich,

Andijon davlat universiteti dotsenti, f.-m.f.n.

axmedovstat@gmail.com

Ablazova Kamola Saxibovna,

Qo‘qon universiteti Andijon filiali dotsenti v.b., t.f.b.f.d. (PhD)

k.s.ablazova@gmail.com

Dexqonboyeva Salomatxon Alisher qizi,

Andijon davlat universiteti magistranti

salomatxondexqonboyeva@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada texnologik jarayonlar stabilligini nazorat qilish uchun an'anaviy Shuxart kartalarining imkoniyatlarini kengaytiruvchi uch komponentli statistik tizim taklif etilgan. Ma'lumki, Shuxartning to'rtta asosiy qoidasi jarayon o'rtachasi va dispersiyasidagi o'zgarishlarni aniqlasada, taqsimot shaklining buzilishini qamrab olmaydi. Shu sababli maqolada o'rtacha qiymat, dispersiya va taqsimotni bir vaqtda baholovchi kompleks nazorat mexanizmi nazariy asoslab berilgan. Smirnov statistik alomatiga asoslangan metodika texnologik jarayonlarni chuqur tahlil qilishda, xususan avtomobil bo'yash sexida gruntovka qalinligini nazorat qilish misolida samaradorligi bilan namoyon bo'ladi. Yondashuv statistik boshqaruvni yanada ishonchli tashkil etish, nosozlik sabablarini aniqlash imkonini beradi.

Kalit so'zlar: jarayonning stabilligini aniqlovchi qoidalar, Shuxartning nazorat kartalari, Smirnov alomatiga asoslangan nazorat karta, gruntovka qalinligi texnologik operatsiyasi.

THREE-COMPONENT SYSTEM FOR PROCESS STABILITY CONTROL

Abstract. This article proposes a three-component statistical system that expands the capabilities of traditional Shewhart charts to control the stability of technological processes. It is known that Shewhart's four basic rules, while determining changes in the mean and variance of the process, do not cover the violation of the distribution shape. Therefore, the article theoretically substantiates a complex control mechanism that simultaneously evaluates the mean, variance, and distribution. The methodology based on the Smirnov statistical sign is effective in in-depth analysis of technological processes, in particular, in the example of controlling the thickness of the primer in a car paint shop. The approach allows for more reliable organization of statistical control and identification of the causes of failures.

Keywords: rules for determining process stability, Shewhart control charts, Smirnov-based control chart, technological operation of primer thickness.

ТРЁХКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ СТАБИЛЬНОСТИ ПРОЦЕССА

Аннотация. В данной статье предлагается трёхкомпонентная статистическая система, расширяющая возможности традиционных карт Шухарта для контроля устойчивости технологических процессов. Известно, что четыре основных правила Шухарта, определяя изменения среднего значения и дисперсии процесса, не охватывают нарушение формы распределения. Поэтому в статье теоретически обоснован комплексный механизм контроля, одновременно оценивающий среднее значение, дисперсию и распределение. Методология, основанная на статистическом признаке Смирнова, эффективна при глубоком анализе технологических процессов, в частности, на примере контроля толщины грунтовки в окрасочном цехе автомобилей. Подход позволяет более надёжно организовать статистический контроль, выявить причины отказов.

Ключевые слова: правила, определяющие устойчивость процесса, контрольные карты Шухарта, контрольная карта, основанная на признаке Смирнова, технологическая операция толщины грунтовки.

Kirish. Statistik sifat nazorati tizimlarida Shuxart kartalari uzoq vaqt davomida asosiy vosita bo'lib kelgan. Bu kartalar bilan jarayonni stabilligini quyidagi o'rtacha kvadratik og'ish (σ)ga asoslangan 4 ta qoida yordamida amalga oshirilgan:

- 1) 1-qoida: Agar biror nuqta 3σ dan tashqarida joylashsa, jarayonda keskin o'zgarish mavjud va jarayon stabil emas.
- 2) 2-qoida: 3 ta ketma-ket nuqtadan 2 tasi 2σ dan tashqarida bo'lsa, jarayon stabil emas.
- 3) 3-qoida: 5 ta nuqtadan 4 tasi 1σ dan tashqarida bo'lsa, jarayonda sistematik o'zgarishlar mavjud, ya'ni jarayon statsionar emas.
- 4) 4-qoida: 8 yoki undan ko'p ketma-ket nuqtalar markaziy chiziqli (μ -ning bahosi)ning bir tomonida bo'lsa, o'rtacha qiymat(μ) siljigan.

Bu qoidalar jarayonning faqat o'rtacha va dispersiya o'zgarishlarini aniqlaydi, ammo taqsimot shaklini nazorat qila olmaydi.

Hozirgi kunda murakkab texnologik, biologik, pedagogik va tabiiy jarayonlar statistik tahlili yanada nazariy asoslangan yondashuvlarni talab qilmoqda. Shu sababli, jarayonning stabililigini to'liq tasdiqlash uchun o'rtacha, dispersiya va taqsimot shaklini nazorat qiluvchi uch komponentli tizimni yaratish zarur bo'ladi.

1. Metod. Taklif etilgan nazariy induktiv metodda stabillikni nazorat qilish uchun xil nazorat kartaga asoslanadi:

- 1) $\bar{X}$ -karta (o'rtacha qiymatlar kartasi) [1], [2] – o'rtacha qiymatning turg'unligini baholaydi:

$$- \text{Nazorat chegaralari: } UCL(\text{Yuqori nazorat chegara}) = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$LCL(\text{Quyi nazorat chegara}) = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ bu yerda } n \text{ – tanlanma hajmi.}$$

- Stabillik sharti: barcha nuqtalar chegaralar orasida bo'lishi, trend yo'qligi.

- 2) S-karta (standart og'ish kartasi) [1], [2] – jarayon dispersiyasining o'zgarishini kuzatadi:

- Nazorat chegaralari: $UCL = B_4 \bar{S}$, $LCL = B_3 \bar{S}$, bu yerda $\bar{S}$ - S ning kichik guruhlar bo'yicha o'rtacha bahosi, B_3 va B_4 koeffitsientlar tanlanma hajmiga qarab jadvallardan aniqlanadi [1].

- Stabillik sharti: barcha nuqtalar chegaralar orasida bo'lishi.

- 3) S (Smirnov)- nazorat kartasi [3] – taqsimot shaklining o'zgarishini aniqlaydi.

Agar birlik $t = \overline{1; l}$ momentlarda to'plangan ma'lumotlarning variatsion qatori $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$ tanlanmalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa:

$$\rho_t^c = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \Phi(Y_{kt}^*) - \frac{2k-1}{2n} \right| + \frac{1}{2n} < \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}} = UCL_{\rho^c} \quad (1)$$

u holda texnologik jarayon stabil holatda bo'ladi. (1) da ρ_t^c -nominal normal taqsimot bilan tanlanmaga mos emperik taqsimot funksiya orasidagi maksimal farqni bildiradi va u stabillikni baholaydi. UCL_{ρ^c} - nazorat kartaning yuqori chegarasi, $k_{0,99}^c$ Smirnov taqsimoti kvantili bo'lib tenglama ildizi sifatida taqribiy topiladi, jumladan, $k_{0,99}^c = 1,035$. Agar $t = \overline{1; l}$ birlik vaqtlarda $\rho_t^c < \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa texnologik jarayon stabil bo'ladi aks holda nostabil bo'ladi. Ushbu nazorat karta Smirnov kriteriysiga asoslangan holda quyidagi teorema asosan hosil qilingan:

Teorema [4]. $\alpha = 0,01$ va $H_0: P(X < x) = F(x; \bar{X}_n; S_n^2)$ gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda ρ^c -nazorat karta uchun nazorat qiluvchi miqdor ρ_t^c va $UCL_{\rho^c} = \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}}$ kabi topiladi.

Izoh. Bunda $X \sim N(\bar{X}_n; S_n^2)$ jarayonga mos normal taqsimot bo'lib, uning parametrlari jarayon statistik nazoratda bo'lganda optimal baholanib topilgan.

Har bir parameter (matematik kutillma va dispersiya bahosi, ρ_t^c) stabillik talabi sifatida mustaqil nazorat qilinadi. Jarayon stabilligi har bir tanlanma uchun quyidagi shart bilan aniqlanadi:

matematik kutilmani turg'unligi;

dispersiyani turg'unligi;

taqsimot shaklining o'zgarishsizligi.

Bu yondashuv jarayonning to'liq stabililigini aniqlash imkonini beradi.

Taqdim etilgan metodika qo'llanilganda har bir vaqt oralig'ida birlik vaqtlardagi ma'lumotlar asosida tanlangan statistik kriteriylarga asoslangan formal tekshiruv amalga oshiriladi.

2. Natijalar. Tahlil natijalari shuni ko'rsatadiki, Shuxart qoidalari faqat o'rtacha va dispersiyaga oid ayrim holatlarni aniqlaydi.

Ammo ular taqsimot shakli o'zgarishini butunlay nazardan chetda qoldiradi. Uch komponentli tizim esa barcha ehtimoliy stabillik buzilishlarini qamrab oladi:

o'rtacha siljishi;

dispersiya oshishi yoki kamayishi;

taqsimotning assimetriya yoki “og‘ir dum”larga o‘tishi.

Bu yondashuv jarayonning istalgan turdagi statistik o‘zgarishlarini erta aniqlash imkonini beradi. Fikrimizni tasdiqlash maqsadida avtomobil zavodining bo‘yash sexidagi muammolarni o‘rganish uchun olingan ma’lumotlar asosida texnologik jarayon stabiligini aniqlash jarayonini keltiramiz

Masala. Bo‘yash sexida Cobalt mashinasini gruntovka qilishda nosozliklar topilgan. Sabablarini aniqlash va choralari topish, jarayonni statistik boshqariladigan holatga keltirish talab qilinadi.

Texnologik operatsiya tavsifi Cobalt mashinasining payvandlangan korpusi liniyada bo‘yash sexiga kiritiladi va robotlar yordamida gruntovka qilinadi. Gruntovka qalinligi bo‘yicha andoza [45; 70] mk kabi.

Endi yuqorida keltirilgan uch xil nazorat kartalar bilan quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Maxsus tuzilgan kod asosida ma’lumotlarga asosan nazorat kartalar qurish va jarayonning holatini aniqlash;

2. Jarayonning potentsial ko‘rsatkichini aniqlash. Holat bo‘yicha tashxis qo‘yish.

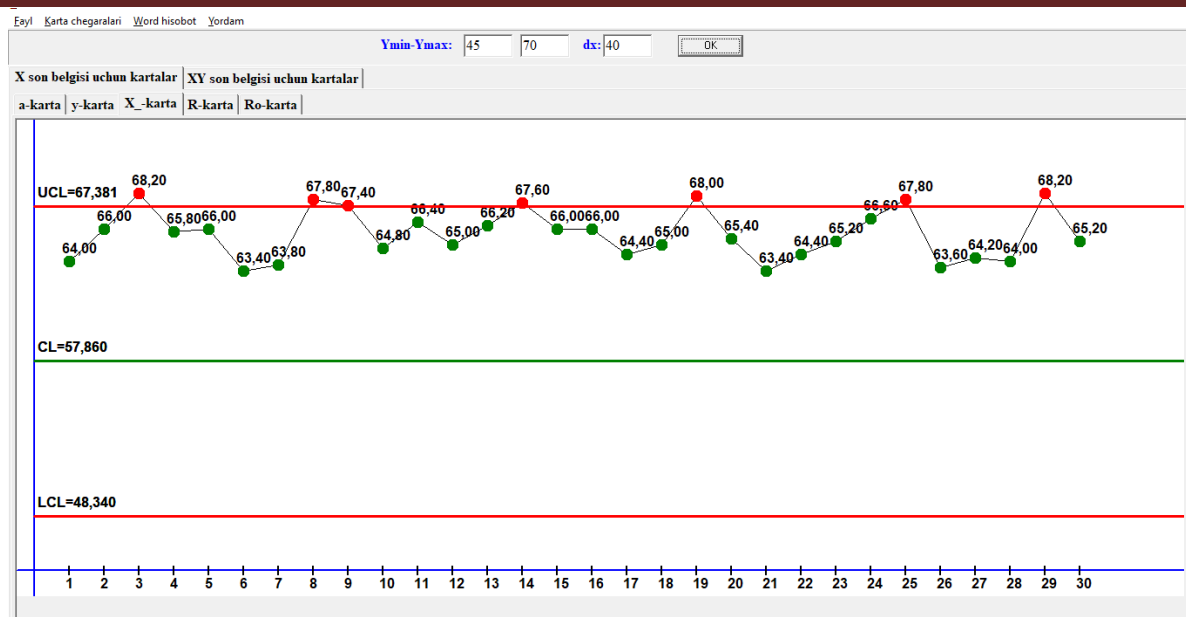
Ma’lumotlarni tayyorlash statistik tahlil. Gruntovka qalinligini o‘lchovchi asbobi bilan o‘lchash ishlari bajariladi. Ma’lumotlar asosida Smirnov nazorat kartasini $t = 1, 2, 3$ birlik vaqtlarida diagrammasini quramiz.



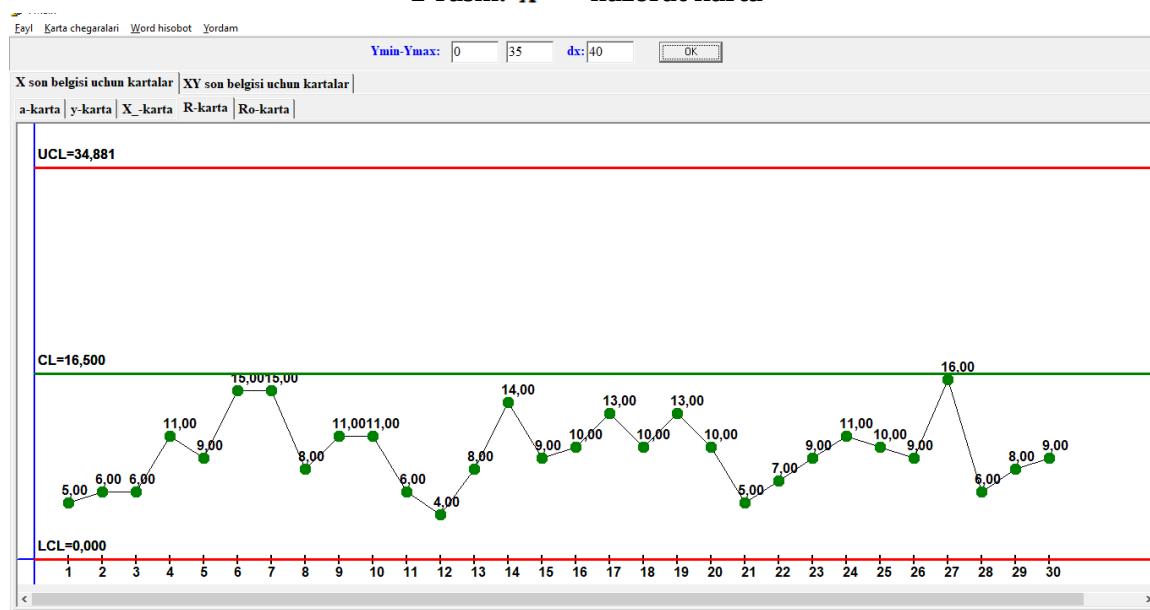
1-rasm. p^c -nazorat karta

1-rasmgagi diagrammaga asosan $t = 1; 2$ birlik vaqtlarda jarayon stabil, $t = 3$ birlik vaqtda esa stabillik buzilyapti. Buni sababini aniqlash uchun qo‘shimcha tekshiruvlar Shuxartning $\bar{X} - R$ qo‘shloq nazorat kartasi bilan amalga oshiramiz.

Jarayon holatini $n = 5$ hajmli oniy tanlamalardan iborat $k=30$ ta kichik guruhlar tuzib $(\bar{X} - R)$ – qo‘shloq nazorat kartalar diagrammasini quramiz.



2-rasm. $\bar{X}$ – nazorat karta



3-rasm. R – nazorat karta

NKning o'qish qoidasiga ko'ra [1],[2] sexdan olingan ma'lumotlar uchun o'rta qiymatlar $\bar{X}$ kartasida (2-rasm) hamma nuqtalar CL dan yuqorida joylashgan va UCL dan yuqorida nuqtalar mavjud, variatsiya qulochi R kartasida (3-rasm) esa deyarli hamma nuqtalar CL dan quyida joylashgan. Bu anomaliy holatlar gruntovka qalinligida andozadan chetlanishlar mavjudligini ko'rsatadi. Ishlab chiqarishda bunga turli sabablar bo'lishi mumkin, masalan, kraskani qo'yilib ketishi, elektr tizimidagi nosozliklar, roborlarni nosoz ishlashi kabi. Shu sexdagi mas'ullar bu nosozliklar robotlar tomonidan yon tomonlarga qaraganda old va orqa kapotlarga qalinroq gruntovka qilinishi deb aniqlashdi. Bu gruntovka qiluvchi robotni to'la mukammallashtirilmaganligi sabab bo'lishi mumkin deb ko'rsatdilar. Bunda hisoblaslar texnologik jarayonning o'rtacha potentsial ko'rsatkichi, ya'ni chiqayotgan sifatsiz mahsulotlar ulushi 13,7% ni tashkil etadi. Nosozlikni vaqtida to'g'rilash katta chiqimni oldini oladi. Bizning eng muhim natijamiz jarayonlarni uch komponentli tizim asosida yuqoridagi kabi stabililigini ta'minlab turishdan iborat.

Munozara. Uch komponentli tizim Shuxart qoidalarining induktiv tabiatiga nisbatan ancha ishonchli.

U taqsimotga bog'liq emas, chunki S statistiklari umumiy ko'rinishdagi taqsimotlarni baholash imkonini beradi. Shuningdek, bu metod tabiiy eksperimental ma'lumotlarda uchraydigan taqsimot shaklining buzilishlarini ham aniqlaydi, bu esa Shuxart metodologiyasida mavjud bo'lmagan imkoniyatdir.

Xulosa. Tadqiqot natijalariga ko'ra, jarayon stabililigini to'liq tasdiqlash uchun uch parametr – o'rtacha, dispersiya va taqsimot shaklini nazorat qilish zarur. Shu maqsadda taklif qilingan uch komponentli

nazorat kartalari tizimi: nazariy asoslangan; universal; yuqori sezgirlikka ega va Shuxart qoidalarining to'liq o'rnini bosuvchi vosita sifatida baholanishi mumkin.

Ushbu tizim texnologik, biologik, pedagogik va boshqa murakkab jarayonlarni nazariy asoslangan tarzda boshqarish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Ахмедов С.А. Жараёнларни статистик бошқариши. Методик қўлланма. Андижон. –2005. Б. 100.
2. Уилер Д., Чамберс Д. Статистические управления процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. Москва. ООО “«Альпина Бизнес Букс” – 2009.С.409.
3. Аблазова К.С. Статистическое моделирование стабильности технологического процесса при помощи контрольных карт и ее приложения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент.2023. – №3(49) — С. 124-135
4. Ахмедов С.А., Аблазова К.С. Некоторые статистические инструменты при исследовании устойчивости технологического процесса. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – 2019-№3. С.16-19.

ON DYNAMICS OF A SEPARABLE CUBIC STOCHASTIC OPERATORS IN S^2

Baratov Bakhodir Soyib ugli,

Faculty of Mathematics, Karshi State University, teacher
baratov.bahodir@bk.ru

Abstract. In this paper, we study a class of separable cubic stochastic operators defined on a finite-dimensional simplex. That is, we consider cubic stochastic operators defined as a product of three linear operators defined on a simplex. It is shown that for a separable cubic stochastic operator defined on a two-dimensional simplex, the vertices of the simplex are fixed points. It is also proven that the orbit of a separable cubic stochastic operator converges for any starting point taken from the simplex.

Keywords: cubic stochastic operator, separable cubic stochastic operator, orbit, simplex.

S^2 DA ANIQLANGAN SEPARABEL KUBIK STOXASTIK OPERATORLARNING
DINAMIKASI HAQIDA

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan separabel kubik stoxastik operatorning dinamikasi o'rganilgan. Ya'ni, simpleksda aniqlangan uchta chiziqli operatorlarning ko'paytmasi sifatida aniqlangan kubik stoxastik operatorlarni ko'rib chiqamiz. Ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan separabel kubik stoxastik operator uchun simpleksning uchlari qo'zg'almas nuqtalar ekanligi ko'rsatilgan. Shuningdek, separabel kubik stoxastik operatorning orbitasi simpleksdan olingan har qanday boshlang'ich nuqta uchun yaqinlashuvchi ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: kubik stoxastik operator, separabel kubik stoxastik operator, orbita, simpleks.

О ДИНАМИКЕ РАЗДЕЛИМОГО КУБИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО
ОПЕРАТОРА В S^2

Аннотация. В данной работе мы изучаем класс разделимых кубических стохастических операторов, определённых на конечномерном симплексе. То есть, мы рассматриваем кубические стохастические операторы, представленные как произведение трёх линейных операторов, определённых на симплексе. Показано, что для разделимого кубического стохастического оператора, определённого на двумерном симплексе, вершины симплекса являются неподвижными точками. Также доказано, что орбита разделимого кубического стохастического оператора сходится для любой начальной точки, выбранной из симплекса.

Ключевые слова: кубический стохастический оператор, разделимый кубический стохастический оператор, орбита, симплекс.

Introduction. Many systems can be represented using nonlinear operators. Among the simplest nonlinear examples is the quadratic stochastic operator (QSO). This operator models the evolution of a population and was originally introduced by Bernstein in [1].

For more than 80 years, the theory of QSOs has been developed and many papers were published (see e.g. [4]-[8], [16]-[17]). In recent years it has again become of interest in connection with its numerous applications in many branches of mathematics, biology and physics.

Let $E = \{1, 2, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distribution on E

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \quad (1)$$

be the $(m-1)$ -dimensional simplex. A QSO is a mapping defined as $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(x) = x' \in S^{m-1}$, where

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E, \quad (2)$$

and the coefficients $P_{ij,k}$ satisfy

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1 \quad \text{for all } i, j \in E. \quad (3)$$

The trajectory (orbit) $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$, of V for an initial value $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{(n+1)}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

One of the main problems in mathematical biology is to study the asymptotic behavior of the trajectories. This problem was solved completely for the Volterra QSO.

The operator V is called Volterra QSO, if $P_{ij,k} = 0$ for any $k \notin \{i, j\}$, $i, j, k \in E$. For the Volterra QSO the general formula was given in [4],

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad (4)$$

where $a_{ki} = 2P_{ik,k} - 1$ for $i \neq k$ and $a_{kk} = 0$. Moreover, $a_{ki} = -a_{ik}$ and $|a_{ki}| \leq 1$ for all $i, k \in E$.

In [4], the theory of Volterra QSO was developed using theory of the Lyapunov functions and tournaments. But non-Volterra QSOs were not completely studied. Because, there is no general theory that can be applied for study of non-Volterra operators.

In [16] Separable Quadratic Stochastic Operators (SQSOs) were introduced. Volterra QSO (4) has a form as SQSO, but in [17] it was proved that it coincides with a SQSO if and only if it is a linear operator.

In recent years, Cubic Stochastic Operators (CSOs) have begun to be studied, which different from quadratic operators [8-10].

In this paper we consider another class of cubic operators which we call separable cubic stochastic operators [11-13].

In Section 2, we recall the definition of CSOs and definitions and known results. In Section 3 for a SCSSO defined on the two-dimensional simplex, we prove that it has three fixed points and we find the boundary ∂S^2 is an invariant set.

Preliminaries and known results. *Separable quadratic stochastic operator.* Let us recall some necessary definition and notations. In [18] Separable Quadratic Stochastic Operators were introduced as follows: The QSO (2), (3) with additional condition

$$P_{ij,k} = a_{ik} b_{jk} \quad \text{for all } i, j, k \in E \quad (5)$$

where $a_{ik}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ entries of matrices $A = (a_{ik})$ and $B = (b_{jk})$ such that the conditions (3) are satisfied for the coefficients (5).

Then the QSO V corresponding to the coefficients (5) has the form.

$$x'_k = (V(\mathbf{x}))_k = (A(\mathbf{x}))_k (B(\mathbf{x}))_k, \quad (6)$$

where $(A(\mathbf{x}))_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i$, $(B(\mathbf{x}))_k = \sum_{j=1}^m b_{jk} x_j$.

Definition 1. [16] *The QSO (6) is called separable quadratic stochastic operator (SQSO).*

Cubic stochastic operator. The CSO is a mapping $W: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the form

$$x'_l = \sum_{i,j,k=1}^m P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E, \quad (7)$$

where $P_{ijk,l}$ are coefficients of heredity such that

$$P_{ijk,l} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m P_{ijk,l} = 1, \quad \forall i, j, k \in E. \quad (8)$$

and we suppose that the coefficients $P_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i, j, k .

For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$, the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$ of initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under action of CSO (8) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = W(\mathbf{x}^{(n)})$, where $n = 0, 1, 2, \dots$ with $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$. Denote by $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$. Since $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \subset S^{m-1}$ and S^{m-1} is a compact set, it follows that $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \neq \emptyset$. If $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ consists of a single point, then the trajectory converges and $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ is a fixed point of the operator W . A

point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a fixed of the W if $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Denote by $\text{Fix}(W)$ the set of all fixed points of the operator W , i.e.

$$\text{Fix}(W) = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

Let $DW(\mathbf{x}^*) = (\partial W_i / \partial x_j)(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 2 ([3]): A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle in $\mathbb{C}$.

Definition 3 ([3]): A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

- (i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are in the unit disk;
- (ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are outside the closed unit disk;
- (iii) a saddle otherwise;

Main result. In this section we consider CSO (7), (8) with additional condition

$$P_{ijk,l} = a_{il} b_{jl} c_{kl}, \quad \text{for all } i, j, k, l \in E, \quad (9)$$

where $a_{il}, b_{jl}, c_{kl} \in \mathbb{R}$ entries of matrices $A = (a_{il})$, $B = (b_{jl})$ and $C = (c_{kl})$ such that the conditions (8) are satisfied for the coefficients (9).

Then the CSO W corresponding to the coefficients (9) has the form

$$x'_i = (W(\mathbf{x}))_i = (A(\mathbf{x}))_i (B(\mathbf{x}))_i (C(\mathbf{x}))_i \quad (10)$$

where $(A(\mathbf{x}))_i = \sum_{l=1}^m a_{il} x_l$, $(B(\mathbf{x}))_i = \sum_{j=1}^m b_{ji} x_j$ and $(C(\mathbf{x}))_i = \sum_{k=1}^m c_{ki} x_k$.

Definition 4. [11] The CSO (10) is called separable cubic stochastic operator (SCSO).

Let us consider the following matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Then corresponding SCSO $W : S^2 \rightarrow S^2$ is:

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 (x_1 + 1,5x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x'_2 = x_2 (0,5x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2), \\ x'_3 = x_3 (x_2 + x_3)(x_1 + 2x_2 + x_3). \end{cases} \quad (12)$$

Using the equation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ we rewrite the operator (12) as follows

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 (1 + 0,5x_2)(1 + x_3), \\ x'_2 = x_2 (1 - 0,5x_3)(1 - x_1), \\ x'_3 = x_3 (1 - x_1)(1 + x_2). \end{cases} \quad (13)$$

Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, i \notin \alpha \subset \{1, 2, 3\}\}$.

Let the set $\text{int } S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 x_2 x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \text{int } S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2 , respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.

Lemma 1. For the SCSO W (12), the following assertions true:

- (i) The face $\Gamma_{\{1,2\}}$, $\Gamma_{\{1,3\}}$, $\Gamma_{\{2,3\}}$ of the simplex S^2 are invariant sets;
- (ii) $\text{Fix}(W) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$;
- (iii) The fixed point $\mathbf{e}_1$ is a attracting point, $\mathbf{e}_2$ is a repelling fixed point and the fixed point $\mathbf{e}_3$ is a saddle point.

Proof: (i) Obviously.

(ii) To find the fixed points we consider the equation $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, that is the following system of equations

$$\begin{cases} x_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+x_3), \\ x_2 = x_2(1-0,5x_3)(1-x_1), \\ x_3 = x_3(1-x_1)(1+x_2). \end{cases} \quad (14)$$

(a) Let $x_1 = 0$. Then from the third equation of (14) it follows

$$x_3 = x_3 + x_2x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \text{and} \quad 1 = 1 + x_2.$$

It is clear that if $x_3 = 0$ then we have $x_2 = 1$. If $x_3 > 0$ then from the last equation one has

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1.$$

We take solution $x_2 = 1$, then it follows that $x_3 = 0$. Consequently, if $x_1 = 0$, we obtain the fixed points $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Similarly, in the case $x_2 = 0$ and $x_3 = 0$, we have the fixed points $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, respectively.

(b) Suppose that $x_1x_2x_3 \neq 0$. Then from the system (14), one has

$$\begin{cases} 1 = (1+0,5x_2)(1+x_3), \\ 1 = (1-0,5x_3)(1-x_1), \\ 1 = (1-x_1)(1+x_2). \end{cases} \quad (15)$$

The second equation of (15) we get

$$1 = (1-0,5x_1)(1-x_3) \Rightarrow -x_3 = 0,5x_1(1-x_3).$$

Last equation it follows that $x_1 = 0$ and $x_3 = 0$, this contradicts to $x_1x_2x_3 \neq 0$.

Consequently, we have that $\text{Fix}(W) \cap \text{int } S^2 = \emptyset$.

(iii) To find the type of fixed point of the SCSO (12), we rewrite it in the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+(1-x_1-x_2)), \\ x'_2 = x_2(1-0,5x_1)(1-(1-x_1-x_2)). \end{cases} \quad (16)$$

where $(x_1, x_2) \in \{(x, y) : x, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$ and x_1, x_2 are the first two coordinates of a point lying in the simplex S^2 .

The Jacobian of the operator (16) at a fixed point $\mathbf{e}_1$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,5$, at the $\mathbf{e}_2$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 2$ and at the $\mathbf{e}_3$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Therefore, it follow that the fixed point $\mathbf{e}_1$ is a attracting point, $\mathbf{e}_2$ is a repelling fixed point and the fixed point $\mathbf{e}_3$ is a saddle point.

The theorem is proved. □

The set of limit points. Let $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ be the initial point. Then the trajectory of $\mathbf{x}^{(0)}$ is denote by $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$ and is defined as $W(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{x}^{(n+1)}$ where $n = 0, 1, 2, \dots$.

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+x_3), \\ x'_2 = x_2(1-0,5x_3)(1-x_1), \\ x'_3 = x_3(1-x_1)(1+x_2). \end{cases}$$

Theorem 1. For the SCSO W (12), the following assertions true:

- (i) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$,
- (ii) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,
- (iii) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,
- (iv) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,

Proof: (i) Let $\mathbf{x}^{(0)} = (0, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in \Gamma_{\{2,3\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{2,3\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{e}_3$ are fixed points belonging to this face. For the SCSO W (12) is true $x_1^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{2,3\}}$. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{2,3\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_2 = x_2(1 - 0.5x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + x_2). \end{cases} \quad (17)$$

From the first equation of (17), one has

$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - 0.5x_3^{(n)}) \leq x_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \text{ Therefore, it follows that there exists the } \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*.$$

Moreover, from the second equation of (17), one has $x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)}(1 + x_2^{(n)}) \geq x_3^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (0, x_2^*, x_3^*)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_3$. That is, if $x_3^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{2,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{1,2\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$ are fixed points belonging to this face. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{1,2\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + 0.5x_2), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1). \end{cases} \quad (18)$$

Not that, for the SCSO W (18) is true $x_3^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{1,2\}}$. From the first equation of (25), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + 0.5x_2^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the second equation of (25), one has $x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - x_1^{(n)}) \leq x_2^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. So we have that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*$. Hence there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, 0)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed point we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$. That is, if $x_1^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{1,2\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, 0, x_3^{(0)}) \in \Gamma_{\{1,3\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{1,3\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_3$ are fixed points belonging to this face. For the SCSO W (12) is true $x_2^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{1,3\}}$. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{1,3\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - x_1). \end{cases} \quad (19)$$

From the first equation of (19), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + x_3^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the second equation of (19), one has $x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)}(1 - x_1^{(n)}) \leq x_3^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, 0, x_3^*)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$. That is, if $x_1^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{1,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_3\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} = \text{int } S^2$. Then, from the first equation of operator (12), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + 0.5x_2^{(n)})(1 + x_3^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. So we have that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the third equation of operator (12), one has $x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - 0.5x_3^{(n)})(1 - x_1^{(n)}) \leq x_2^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*$. Thus, using $x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)} = 1$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed point we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$.

Consequently, we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \text{int } S^2$.

The theorem is proved.

Acknowledgments. The work is supported by the applied Project “Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators” No. AL-9224093956 of The Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

REFERENCES:

1. Bernstein S. N. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, // *The Annals of Mathematical Statistics*. pp. 83 (1942).
2. Davronov R.R., Jamilov U.U and M. Ladra. Conditional cubic stochastic operator, // *Difference Equ. Appl.* Vol 21, Issue 12, pp. 1163–1170, (2015).
3. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems, // Boulder, Stud. Nonlinearity, Westview Press, 2003.
4. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, // *Acad. Sci. Sb. Math.* Vol 76, (1993), pp. 489-506.
5. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories, // *Vladikavkaz. Math. J.* Vol 8, Issue 2, pp. 12–28, (2006).
6. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems, // *Inf. Dim. Anal. Quant.Prob. Rel. Fields* Vol 14, Issue 2, pp. 279-335, (2011).
7. Jamilov U. U. On symmetric strictly non-Volterra quadratic stochastic operators, // *Discontin. Nonlinearity Complex.* Vol 5. Issue 3, pp. 263–283, (2016).
8. Jamilov U. U., Ladra M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operator, // *J. Appl. Nonlinear Dyn.* Vol 6, Issue 1, pp. 79–90, (2017).
9. Jamilov U. U., Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators, // *J. Differ. Equ. Appl.* Vol 26. Issue 2, (2020) pp. 1-14.
10. Jamilov U. U., Khamraev A. Yu., Ladra M. On a Volterra cubic stochastic operator, // *Bull. Math. Biol.* Vol 80. Issue 2, pp. 319-334, (2018).
11. Baratov, B.S., Jamilov, U.U. On separable cubic stochastic operators, // *Qual. Theory Dyn. Syst.* Vol 23, Issue 2, a.n. 93. 28 pages. (2024).
12. Baratov B. S. On dynamics of a separable cubic stochastic operator, // *Bull. Inst. Math.*, Vol 6, Issue 1, pp. 17-25, (2023).
13. Baratov. B. S. The dynamics of a separable cubic operator, *Uz. Math. Jour*, Vol 68, Issue 2, pp. 27-41. 2024, DOI:10.29229/uzmj.2024-2-3.
14. Rozikov U. A., Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators, // *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol 14, Issue 1, pp.92–100, (2014).
15. Rozikov U. A., Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplexes, // *Ukrainian Math. J.* Vol 56, Issue 10, pp. 223-228, (2004).
16. Rozikov U.A., Nazir S. Separable quadratic stochastic operators, // *Lobachevskii J. Math.* Vol 31, Issue 3, pp. 215-222, (2010).
17. Rozikov U.A., Zada A. On a class of separable quadratic stochastic operators, // *Lobachevskii Jour. Math.* Vol 32, Issue 4, pp. 397-406, (2011).

AN INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE KERNEL PSEUDO-INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Elmurodova Khilola Botirovna,

Lecturer at the Department of Differential Equations,
Bukhara State University, Uzbekistan
h.b.elmurodova@buxdu.uz

Abstract. In this paper, we investigate an inverse problem for a one-dimensional pseudoparabolic integro-differential equation supplemented with an additional condition. First, the corresponding direct problem is examined. Using the Fourier method, the direct problem is reduced to an equivalent integral equation. Then, by applying Grönwall-type inequalities, an estimate for the solution in terms of the norms of the unknown functions is derived. Stability estimates are also obtained. The inverse problem is likewise reduced to an equivalent integral equation. For this integral equation, the Banach fixed-point (contraction mapping) principle is employed. As a result, the existence and uniqueness of the solution are established.

Keywords: pseudoparabolic equation, Fourier method, inverse problem, integral equation, Banach fixed point theorem.

YADRO PSEUDO-INTEGRO-DIFFERENTIAL TENGLAMASINI ANIQLASHNING TESKARI MUAMMOSI

Annotatsiya. Ushbu maqolada bir o'lchamli psevdoparabolik integro-differensial tenglama uchun qo'shimcha berilgan shart ostida qo'yilgan teskari masala o'rganiladi. Avvalo, to'g'ri masala ko'rib chiqiladi. Masala Furiye usulidan foydalangan holda ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. So'ngra Gronualla tengsizligi yordamida masalaning yechimi noma'lum funksiyalar normasi orqali baholanadi. Turg'unlik baholari ham olinadi. Teskari masala ham ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. Ushbu integral tenglama uchun Banaxning qisqartirib akslantirishlar prinsipi qo'llaniladi. Natijada yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: psevdoparabolik tenglama, Furiye usuli, teskari masala, integral tenglama, Banaxning qisqartirib akslantirish teoremasi.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ПСЕВДОИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В данной работе исследуется обратная задача для одномерного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с дополнительным условием. Сначала рассматривается соответствующая прямая задача. С использованием метода Фурье прямая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Далее, применяя неравенства типа Гронуолла, получена оценка решения через нормы неизвестных функций. Также устанавливаются оценки устойчивости. Обратная задача аналогичным образом сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Для этого интегрального уравнения применяется принцип сжимающих отображений Банаха. В результате доказываются существование и единственность решения.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, метод Фурье, обратная задача, интегральное уравнение, теорема о сжимающем отображении в банаховом пространстве (теорема Банаха о неподвижной точке).

Introduction. Inverse problems for partial differential equations are understood as the problems of finding unknown coefficients, as well as initial and non-local boundary conditions and solutions of differential equations given the solution of a direct problem. Inverse problems are a dynamically developing area of modern mathematics [1], [2]. The constitutive relations for a linear nonhomogeneous heat propagation and diffusion processes in a medium with memory contain a time- and space-dependent kernel in an integral term of time variable convolution type [7]-[12]. Interest in equations with mixed derivatives, and in particular in pseudoparabolic equations in recent years, is driven by the needs of mechanics, applied sciences, and mathematics itself. The study of processes such as fluid filtration in fractured porous media, the

movement of groundwater with a free surface in multilayered media, the transport of moisture, heat, and salts in porous media, and other similar practically significant problems requires the investigation of third-order boundary value problems for pseudoparabolic equations [3],[15],[16]. Therefore, scientific research in this direction is of interest to both mathematical scientists and engineers. The present work is part of this direction, in which the characteristics of the medium are expressed through the determination of a function, that is, the inverse problem is studied.

In this work, [6], [13], [14] the method of separation of variables is employed to obtain the classical solution of the direct problem in the form of a biorthogonal series in terms of eigenfunctions and associated functions. The direct problem is considered as an initial-boundary value problem.

The direct problem is reduced to equivalent integral equations using the Fourier method. To establish the corresponding integral inequalities, the theorems of the Gronwall inequality are applied. We obtain an a priori estimate of the solution in terms of an unknown coefficient, which is essential for the study of the inverse problem.

The inverse problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind. Based on the unique solvability of this equation in the class of continuous functions, theorems on the unique solvability of the direct and inverse problems are proved. A stability estimate is also obtained.

Setting up the problem. Let $\Pi_T = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ be a rectangle domain. In this present paper, we consider the following inverse problem of determining a pair of functions $\{u(x, t), k(t)\}$, which satisfy the non-linear 1D pseudoparabolic equation.

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \int_0^t k(t - \tau)u(x, \tau)d\tau \quad \text{in } \Pi_T, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

the Dirichlet boundary condition

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

and the overdetermination condition

$$u(x_0, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

where $f(t)$, $\varphi(x)$ are given functions.

The problem of determining

$$u(x, t) \in Y_T := C_{x,t}^{(2,1)}(\Pi_T) \cap C(\overline{\Pi}_T) \quad (A)$$

from (1)-(3) with given $k(t)$ and $\varphi(x)$ is called the direct problem for a 1D pseudoparabolic integrodifferential equation, where $\overline{\Pi}_T = \{[0, 1] \times [0, T]\}$ and the space $C^{(2,1)}(\Pi_T)$ denotes the set of functions defined on the domain Π_T that are twice continuously differentiable with respect to the spatial variable x and once continuously differentiable with respect to the temporal variable t .

Inverse problem: Given the initial data $\varphi(x)$ and $f(t)$, to find the pair of functions $u(x, t), k(t)$, satisfying to (1)-(4).

Definition 2.1. The pair of the functions $\{u(x, t), k(t)\}$ is called a classical solution to the inverse problem, if

$$u(x, t) \in Y_T, \quad \text{and} \quad k(t) \in C[0, T]$$

and satisfying each of the system (1)-(4) at every point of the corresponding domain.

Everywhere in this paper, we require the following conditions for known functions:

$$A1) \varphi \in C[0, 1]; \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \varphi'(1) = 0;$$

$$A2) f \in C^2[0, T];$$

Results and Discussion. To obtain a solution to problem (1)-(3), we formally apply the Fourier method. We will look for a nontrivial particular solution to this problem in the form $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituting it into the equation (1) and boundary conditions (3), we obtain a problem spectral for $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

$$X(0) = X(1), \quad (6)$$

$$X'(1) = 0. \quad (7)$$

$$Y''(x) + \lambda^2 Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

$$Y'(0) = Y'(1), \quad (9)$$

$$Y(0) = 0. \quad (10)$$

The solution of the problem (5)-(7) has a Riesz basis in $L_2(0,1)$, (for more details, the reader can consult [4], [5], [6]) consisting of eigenfunctions and associated functions

$$X_0(x) = 2, \quad X_{2n}(x) = 4\cos\lambda_n x, \quad X_{2n-1}(x) = 4(1-x)\sin\lambda_n x \quad (11)$$

and eigenvalues

$$\lambda_n = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

The biorthogonal sequence to $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ of eigenfunctions and associated functions corresponding to the problem adjoint to problem (5)-(7):

$$Y_0(x) = x, \quad Y_{2n}(x) = x\cos\lambda_n x, \quad Y_{2n-1}(x) = \sin\lambda_n x, \quad (12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, also forms a Riesz basis.

By applying the Fourier method, the solution $u(x, t)$ of the problem (1)-(3) can be expanded in a uniformly convergent series in term eigenfunctions of (11) in $L_2(0,1)$ of the form

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^\infty u_{2n}(t)X_{2n}(x) + \sum_{n=1}^\infty u_{2n-1}(t)X_{2n-1}(x). \quad (13)$$

The coefficients $u_0(t), u_{2n}(t), u_{2n-1}(t)$ for $n \geq 1$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions. Namely, we multiply (1) by the eigenfunctions of (11) and integrate over $(0,1)$. Recall that the inner product in $L_2(0,1)$ is defined by $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Let us note the expansion coefficient $\varphi(x)$ in the eigenfunctions of (12) for $n \geq 1$ respectively by.

$$\begin{cases} (\varphi(x), Y_0(x)) = \varphi_0, \\ (\varphi(x), Y_{2n-1}(x)) = \varphi_{2n-1}, \\ (\varphi(x), Y_{2n}(x)) = \varphi_{2n}. \end{cases} \quad (14)$$

We obtain in view of (1) and $(u(x, t), Y_0(x)) = u_0(t)$, can get

$$\begin{cases} u'_0(t) = \int_0^t k(t-\tau)u_0(\tau)d\tau, \\ u_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad (15)$$

For $u_{2n-1}(t) = (u_{2n-1}(x, t), Y_{2n-1}(x))$, $n \geq 1$, in view of (1) we have

$$\begin{cases} u'_{2n-1}(t) + \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2} u_{2n-1}(t) = \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t k(t-\tau)u_{2n-1}(\tau)d\tau, \\ u_{2n-1}(0) = \varphi_{2n-1}. \end{cases} \quad (16)$$

We get with (1) and $u_{2n}(t) = (u_{2n}(x, t), Y_{2n}(x))$, $n \geq 1$, can be written as

$$\begin{cases} u'_{2n}(t) + \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2} u_{2n}(t) = \frac{-2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} (u'_{2n-1} + u_{2n-1}) + \int_0^t k(t-\tau)u_{2n}(\tau)d\tau, \\ u_{2n}(0) = \varphi_{2n}, \end{cases} \quad (17)$$

where

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)Y_0(x)dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x)Y_{2n}(x)dx, \quad \varphi_{2n-1} = \int_0^1 \varphi(x)Y_{2n-1}(x)dx. \quad (18)$$

The problem (15) is equivalent C[0, T] to the Volterra integral equation:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s)u_0(s)dsd\tau. \quad (19)$$

Solution to the problem (16) have the form:

$$u_{2n-1}(t) = \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} + \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds. \quad (20)$$

For the problem (17), we obtain the equivalent integral equation:

$$u_{2n}(t) = \int_0^t \left[-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u'_{2n-1}(\tau) - \frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u_{2n-1}(\tau) + \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n}(s)ds \right] \\ \times e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau + \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t}. \quad (21)$$

For each fixed n , equation (19) and (21) are Volterra integral equations of the second kind with respect to u_0 , u_{2n-1} and u_{2n} . According to the general theory of integral equations, each of them has a unique solution. The solution can be found, for example, by the method of successive approximations. It is easy to see that $k(t) \in C[0, T]$, then $u_n(t) \in C^1[0, T]$.

Lemma 3.1. Let $k(t) \in C[0, T]$. The following estimates are valid with large n and for all $t \in [0, T]$:

$$|u_0(t)| \leq |\varphi_0| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (22)$$

$$|u_{0'}(t)| \leq \|k\| |\varphi_0| T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (23)$$

$$|u_{2n-1}(t)| \leq |\varphi_{2n-1}| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (24)$$

$$|u'_{2n-1}(t)| \leq C |\varphi_{2n-1}| \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right), \quad (25)$$

$$|u''_{2n-1}(t)| \leq C |\varphi_{2n-1}| \left[(1 + \|k\|) \right. \\ \left. + \|k\| \left(T \left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) \right], \quad (26)$$

$$|u_{2n}(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_{2n-1}| \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) + |\varphi_{2n}| \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (27)$$

$$|u'_{2n}(t)| \leq C_2 |\varphi_{2n-1}| \left[\left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| \right) (T+1) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| \right. \\ \left. \times \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right] + |\varphi_{2n}| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + 1 \right]. \quad (28)$$

Proof. Easy to see that $e^{-\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}(1+k(0))t} \leq 1$ for all $n = 1, 2, \dots$, and $t \in [0, T]$. From (19), one can obtain the following estimates (bounds) for the function $u_0(t)$.

$$|u_0(t)| \leq |\varphi_0| + \left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s)u_0(s)ds \right| \leq |\varphi_0| + \|k\| \left| \int_0^t (t-s)u_0(s)ds \right|,$$

From here, by the Gronwall inequality, we get the estimate (22). Calculating the derivative $u_0'(t)$ by the formula (19), we easily obtain the estimate $|u_0'(t)|$. From this fact and (20) one can obtain estimates for $u_{2n-1}(t)$:

$$|u_{2n-1}(t)| \leq |\varphi_{2n-1}| + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \right|.$$

Hence, by the Gronwall inequality, we get the estimate (24).

By applying formula (20), we derive the expressions for $u'_{2n-1}(t)$ and $u''_{2n-1}(t)$, and consequently obtain estimates (25) and (26). Next, we estimate (21) and derive the following inequality for $|u_{2n}(t)|$:

$$\begin{aligned} |u_{2n}(t)| &\leq \left| \int_0^t u'_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t u_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \right| + \\ &\left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s) u_{2n}(s) ds d\tau \right| \leq |\varphi_{2n-1}| \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) T \\ &+ |\varphi_{2n-1}| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} T + |\varphi_{2n}| + \|k\| \left| \int_0^t (t-s) u_{2n}(s) ds \right|. \end{aligned}$$

From here, by the Gronwall inequality, we get the estimate (27). According to (21), (24), (25) and (27):

$$\begin{aligned} |u'_{2n}(t)| &\leq |u'_{2n-1}(t)| + |u'_{2n-1}(t)|T + |u_{2n-1}(t)| + |u_{2n-1}(t)|T + \\ &\left| \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \right| + \left| \int_0^t k(t-s) u_{2n}(s) ds \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s) u_{2n}(s) ds d\tau \right|. \end{aligned}$$

From the last equation we get (28).

Lemma 3.1 has been proved. $\square$

Proposition. [4] For all $\varphi \in L^2(0,1)$, we have $r\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq \sum_{n=0}^\infty \varphi^2 \leq R\|\varphi\|_{L^2}^2$, where $R = 16$, $r = \frac{3}{4}$.

We show the smooth approximation of the series denoted by (13), $u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxt}(x, t)$. Formally termwise differentiating the series in formula (13), we get the following series:

$$u_t(x, t) = 2u_0'(t) + 4 \sum_{n=1}^\infty u_{2n-1}'(t)(1-x)\sin\lambda_n x + 4 \sum_{n=1}^\infty u_{2n}'(t)\cos\lambda_n x, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= - \sum_{n=1}^\infty (4\lambda_n^2(1-x)\sin\lambda_n x + 8\lambda_n \cos\lambda_n x) u_{2n-1}(t) \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 u_{2n}(t) \cos\lambda_n x, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} u_{xxt}(x, t) &= - \sum_{n=1}^\infty (4\lambda_n^2(1-x)\sin\lambda_n x + 8\lambda_n \cos\lambda_n x) u'_{2n-1}(t) \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 u'_{2n}(t) \cos\lambda_n x. \end{aligned} \quad (31)$$

The series (13), (29)-(31) due to the estimates (22)-(28) respectively for any $(x, t) \in \Pi_T$ are majorized by the convergent series

$$2|\varphi_0| + \sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n-1}| + \sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n}|, \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 |\varphi_{2n-1}| + \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 |\varphi_{2n}|, \quad (33)$$

where $\varphi_{2n-1} = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx$, $\varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) x \cos(2\pi n x) dx$.

Let us state the following lemma, ensuring that the following assertion holds for all the series

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi_{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^\infty \varphi_{2n}.$$

Lemma 3.2. Let $k \in C[0, T]$ and us assume that the conditions A1 is satisfied. Then, the series (32) and (33) converge.

Proof. We examine each series as follows:

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n-1}| = \sum_{n=1}^\infty |(\varphi(x), Y_{2n-1})| = \sum_{n=1}^\infty \left| \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx \right| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{2\pi n} \varphi'(x) \cos(2\pi n x) dx \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi', \sqrt{2} \cos(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right] \leq C_1, \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |\varphi_{2n}| = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |(\varphi(x), x \cos(2\pi n x))| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \varphi'''(x) \sin(2\pi n x) dx \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \varphi''(x) \sin(2\pi n x) dx \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi''', \sqrt{2} \sin(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi'', \sqrt{2} \sin(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n} \right)$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 \right] \leq C_2. \quad (35)$$

Similarly to the above, we obtain the following estimates:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|c_n|}{n} \right)$$

$$\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right] \leq C_3, \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |\varphi_{2n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{|d_n|}{n} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right] \leq C_4, \quad (37)$$

where

$$a_n = \int_0^1 \varphi'(x) \sqrt{2} \cos(2\pi n x) dx, \quad b_n = \int_0^1 \varphi'(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx,$$

$$c_n = \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx, \quad d_n = \int_0^1 \varphi'''(x) \sqrt{2} \cos(2\pi n x) dx,$$

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi'''(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx, \quad \beta_n = \int_0^1 \varphi''(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx.$$

They are the Fourier coefficients with respect to the systems $\sqrt{2} \cos(2\pi k x)$, $\sqrt{2} \sin(2\pi k x)$, $k = 1, 2, \dots$. Using the inequality $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ and after simple performing, according to (34) and (36) we obtain the following:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_{2n}| + |\varphi_{2n-1}|) \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n^2} + a_n^2 + (b_n^2 + c_n^2) \right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (2\|\varphi'\|^2 + \|\varphi\|^2) \leq C,$$

since

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \|\varphi'\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) \leq (\|\varphi'\|^2 + \|\varphi\|^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Similarly

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 |\varphi_{2n}| + \lambda_n^2 |\varphi_{2n-1}|) \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n^2} + d_n^2 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (2\|\varphi'''\|^2 + \|\varphi''\|^2) \leq \tilde{C},$$

that is

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \| \varphi''' \|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \| \varphi''' \|^2 + \| \varphi'' \|^2. \quad \square$$

The relations (34)-(37) imply the convergence of the series (32),(33). Therefore, the series (13), (29)-(31) converge uniformly.

Thus, we have proved the following assertion.

Theorem 3.1. *If functions $\varphi(x)$ and $k(t)$ satisfy conditions of Lemma 3.2, then problem (1)-(3) has a unique solution, which represents the sum of series (13), whose coefficients obey formulas (19),(20),(21).*

□

Plugging (19), (20), (21) into (13), we obtain:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 2\varphi_0 + 2 \int_0^t \int_0^\tau k(\tau - s)u_0(s)dsd\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \right. \\ & \times \int_0^\tau k(\tau - s)u_{2n-1}(s)ds + \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}t} 4(1 - x) \sin 2\pi n x \\ & 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\lambda_n}{1 + \lambda_n^2} (u_{2n-1}(t) - \varphi_{2n-1} + \int_0^t u_{2n-1}(\tau)d\tau) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^t \int_0^\tau k(\tau - s)u_{2n}(s)dsd\tau \right) \cos 2\pi n x. \right. \end{aligned} \quad (38)$$

Let $\tilde{u}_0, \tilde{u}_{2n-1}, \tilde{u}_{2n}$ be a solution of (15), (16), (17) with $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_{2n-1}, \tilde{\varphi}_{2n}$ and $\tilde{k}$. In this regard, from (19),(20), (21) the difference's $u - \tilde{u}_0, u - \tilde{u}_{2n-1}, u - \tilde{u}_{2n}$ will estimate in norm as follows, then by the Gronwall lemma for all $t \in [0, T]$ and $n \in \mathbf{N}$, we have:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_0| = |u - \tilde{u}_0| & \leq |\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau - s)u_0(s)dsd\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau - s)\bar{u}_0(s)dsd\tau \right| \\ & \leq |\bar{\varphi}_0| + \|\bar{k}\| \|u_0\| \frac{T^2}{2} e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$|\bar{u}'_0| = |u' - \tilde{u}'_0| \leq \left| \int_0^t (\bar{k}(t - s)u_0(s) + \tilde{k}(t - s)\bar{u}_0(s))ds \right| \leq \|u_0\| \|\bar{k}\| + \|\bar{u}_0\| \|\tilde{k}\|, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{2n-1}(t)| = |u_{2n-1}(t) - \tilde{u}_{2n-1}(t)| & \leq |\varphi_{2n-1} - \tilde{\varphi}_{2n-1}| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau - s)u_{2n-1}(s)dsd\tau \right| \\ & + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau - s)\bar{u}_{2n-1}(s)dsd\tau \right| \leq \left(|\bar{\varphi}_{2n-1}| + \|\bar{k}\| \|u_{2n-1}\| \frac{T^2}{2} \right) e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}'_{2n-1}(t)| = |u'_{2n-1}(t) - \tilde{u}'_{2n-1}(t)| & \leq |\varphi_{2n} - \tilde{\varphi}_{2n}| + \left| \int_0^t \bar{k}(t - s)u_{2n-1}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t - s)\bar{u}_{2n-1}(s)ds \right| \\ & + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau (\bar{k}(\tau - s)u_{2n-1}(s) + \tilde{k}(\tau - s)\bar{u}_{2n-1}(s))ds \right| \\ & \leq |\bar{\varphi}_{2n-1}| + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\|, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}''_{2n-1}(t)| & \leq |\varphi_{2n-1} - \tilde{\varphi}_{2n-1}| + |(\varphi_{2n} - \tilde{\varphi}_{2n})(k - \tilde{k})| + \left| \int_0^t u'_{2n-1}(t - s)\bar{k}(s)ds \right| \\ & + \left| \int_0^t \bar{u}'_{2n-1}(t - s)\tilde{k}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \bar{k}(t - s)u_{2n-1}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t - s)\bar{u}_{2n-1}(s)ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau (\bar{k}(\tau-s)u_{2n-1}(s) + \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n-1}(s))ds \right| \\
 & \leq \left(\|u'_{2n-1}\| T + \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|u_{2n-1}\| \right) \|\bar{k}\| \\
 & + \left(\|\bar{u}'_{2n-1}\| T + \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|\bar{u}_{2n-1}\| \right) \|\tilde{k}\| + |\bar{\varphi}_{2n-1}| + \|\bar{\varphi}_{2n}\| \|\bar{k}\|, \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}_{2n}(t)| & = |u_{2n}(t) - \bar{u}_{2n}(t)| \leq \left| \int_0^t \bar{u}'_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t \bar{u}_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \\
 & \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau-s)u_{2n}(s)dsd\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n}(s)dsd\tau \right| + |\varphi_{2n} - \bar{\varphi}_{2n}| \\
 & \leq (\|\bar{u}'_{2n-1}\| T + \|\bar{u}_{2n-1}\| T + \|\bar{k}\| \|u_{2n}\| \frac{T^2}{2} + |\bar{\varphi}_{2n}|) e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}'_{2n}(t)| & = |u'_{2n}(t) - \bar{u}'_{2n}(t)| \leq |\bar{u}'_{2n-1}(t)| + |\bar{u}_{2n-1}(t)| + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} \bar{u}'_{2n-1}(\tau) d\tau \right| \\
 & \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} \bar{u}_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t \bar{k}(t-s)u_{2n}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t-s)\bar{u}_{2n}(s)ds \right| \\
 & + \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau-s)u_{2n}(s)dsd\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n}(s)dsd\tau \right| + |\varphi_{2n} - \bar{\varphi}_{2n}| \\
 & \leq (1+T)(\|\bar{u}'_{2n-1}\| + \|\bar{u}_{2n-1}\|) + (\|\bar{k}\| \|u_{2n}\| + \|\tilde{k}\| \|\bar{u}_{2n}\|) \left(T + \frac{T^2}{2}\right). \quad (45)
 \end{aligned}$$

Indeed, the expressions (39)-(45) are stability estimates for the solutions to the problem (15)-(17).

Solvability of the inverse problem. In this section, we investigate the inverse problem of determining functions $u(x, t), k(t)$ from relations (1)-(4). To solve this problem, we will use the contraction mapping principle.

Let

$$\mu = \left(2\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1+\lambda_n^2} (\varphi_{2n-1}(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 + \varphi_{2n}\cos 2\pi n x_0) \right)^{-1} \neq 0. \quad (A_3)$$

Putting $x = x_0$ into (13) and in view of (4), we have

$$f(t) = u_0(t)X_0(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t)X_{2n}(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}(t)X_{2n-1}(x_0), \quad t \in [0, T]. \quad (46)$$

Substituting the right (19), (20), (21) instead of $u_0(t), u_{2n-1}(t), u_{2n}(t)$ in (46) and then differentiating two times, after simple transformations, we obtain an integral equation with respect to $k(t)$, that is,

$$\begin{aligned}
 k(t) & = k_0(t) - \mu \left[2 \int_0^t u_0'(t-s)k(s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \right. \right. \\
 & \times \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \\
 & \left. \left. \times 4(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u''_{2n-1}(t) - u'_{2n-1}(t) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{1+\lambda^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds \cos 2\pi n x_0], \quad (47)$$

where

$$k_0(t) = \mu f''(t) - 4\mu \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2} \right)^2 \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} (1-x_0) \sin 2\pi n x_0.$$

$$- 8\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^5}{(1+\lambda_n^2)^3} \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \cos 2\pi n x_0.$$

Equation (47) may be written as an operator equation

$$k(t) = A[k](t), \quad (48)$$

where the map A is defined by

$$A[k](t) = k_0(t) - \mu [2 \int_0^t u_{0'}(t-s)k(s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right.$$

$$+ \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds$$

$$\times 4(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u''_{2n-1}(t) - \frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u'_{2n-1}(t) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+\lambda^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds \cos 2\pi n x_0 \right]. \quad (49)$$

To prove that the operator A admits a unique fixed point, start by showing that A maps a certain closed convex set into itself, in the space $C[0, T]$. Fix a number $\rho > 0$ and consider the ball

$$B(k_0, \rho) := \{k(t) \in C[0, T] : \|Ak - k_0\| \leq \rho\},$$

is stable by the operator A , that is, $A(B(k_0, \rho)) \subset B(k_0, \rho)$.

Theorem 4.1. *Let the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy conditions of A1), A2). Then exists a number $T^* \in (0, T)$, such that there exists a unique solution $k(t) \in C[0, T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).*

Let us first prove that for an enough small $T > 0$ the operator A maps the ball $B^T(k_0, \rho)$ implies that $A[k](t) \in B^T(k_0, \rho)$. Indeed, for any continuous function $k(t)$, the function $B[k](t)$ calculated using formula (47) will be continuous. Moreover, estimating the norm of the differences, we find that

$$\|A[k] - k_0\| \leq \max_{t \in [0, T]} \left| 2\mu \int_0^t u_{0'}(t-s)k(s)ds \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right|$$

$$+ \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \right.$$

$$\times \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \left| + 4 \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u''_{2n-1}(t) \right| \right.$$

$$\left. + 4 \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} u'_{2n-1}(t) \right| + 4 \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds \right|$$

$$\leq |\mu| \|k\| \left(2\|u'_{0'}\|T + \sum_{n=1}^{\infty} \left(4\|u'_{2n-1}\|T + 4\left(T + \frac{T^2}{2}\right)\|u_{2n-1}\| \right) \right)$$

$$+4|\mu|\sum_{n=1}^{\infty} (||u'_{2n-1}|| + ||u'_{2n-1}|| + ||u'_{2n}|| ||k|| T). \quad (50)$$

Here we have used the estimates (22)-(28). Note that the function occurring on the right-hand side in this inequality is monotone increasing with T , and the fact that the function $k(t)$ belongs to the ball $B^T(k_0, \rho)$ implies the inequality

$$||k|| \leq \rho + ||k_0||_0 = \rho_0. \quad (51)$$

Therefore, we only strengthen the inequality if we replace $||k||$ in this inequality with the expression ρ_0 . Performing these replacements, we obtain

$$\begin{aligned} ||A[k](t) - k_0(t)|| &\leq C|\mu| [||\varphi|| ||k||^2 T e^{||k||\frac{T^2}{2}} + ||\varphi'|| [(1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}}) ||k|| T \\ &+ ||k|| (T + \frac{T^2}{2}) e^{||k||\frac{T^2}{2}} + (1 + ||k||) + ||k|| (T (1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}}) + (T + \frac{T^2}{2}) e^{||k||\frac{T^2}{2}}) \\ &+ 1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}} + (1 + (2 + \frac{T^2}{2} ||k||) e^{||k||\frac{T^2}{2}} + ||k|| (e^{||k||\frac{T^2}{2}} + 1)) ||k|| T] \\ &+ (||\varphi'|| + ||\varphi||) (e^{||k||\frac{T^2}{2}} + 1) ||k|| T]. \end{aligned}$$

Let T_1 be a positive root of the equation

$$\begin{aligned} m_1(T) &= C|\mu| [||\varphi|| ||k||^2 T e^{||k||\frac{T^2}{2}} + ||\varphi'|| [(1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}}) ||k|| T \\ &+ ||k|| (T + \frac{T^2}{2}) e^{||k||\frac{T^2}{2}} + (1 + ||k||) + ||k|| (T (1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}}) + (T + \frac{T^2}{2}) e^{||k||\frac{T^2}{2}}) \\ &+ 1 + (1 + \frac{T^2}{2}) ||k|| e^{||k||\frac{T^2}{2}} + (1 + (2 + \frac{T^2}{2} ||k||) e^{||k||\frac{T^2}{2}} + ||k|| (e^{||k||\frac{T^2}{2}} + 1)) ||k|| T] \\ &+ (||\varphi'|| + ||\varphi||) (e^{||k||\frac{T^2}{2}} + 1) ||k|| T] = \rho. \end{aligned}$$

Then for $T \in [0, T_1]$ we have $A[k](t) \in B^T(k_0, \rho)$.

Now consider two functions $k(t)$ and $\tilde{k}(t)$ belonging to the ball $B^T(k_0, \rho)$ and estimate the distance between their images $A[k](t)$ and $A[\tilde{k}](t)$ in the space $C[0, T]$. Composing the difference $A[k](t) - A[\tilde{k}](t)$ with the help of equations $u_0(t), u_{2n-1}(t), u_{2n}(t)$ and $\tilde{u}_0(t), \tilde{u}_{2n-1}(t), \tilde{u}_{2n}(t)$, then estimating its norm, we obtain

$$\begin{aligned} ||A[k](t) - A[\tilde{k}](t)|| &\leq C|\mu| \left| \int_0^t (u'_0(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}'_0(t-s)\tilde{k}(s))ds \right| \\ &+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u'_{2n-1}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}'_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right| \\ &+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u_{2n-1}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right| \end{aligned}$$

$$+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^{\tau} (u_{2n-1}(\tau-s)\bar{k}(s) + \bar{u}_{2n-1}(\tau-s)\tilde{k}(s))ds \right|$$

$$+ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}''_{2n-1}(t) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}'_{2n-1}(t) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u'_{2n}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}'_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right|.$$

Let $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$, $\varphi_{2n-1} = \tilde{\varphi}_{2n-1}$, $\varphi_{2n} = \tilde{\varphi}_{2n}$. Then using inequality (22)-(28) and the estimate (39)-(45) with we will drive the next inequality for $\|A[k] - A[\tilde{k}]\|$:

$$\begin{aligned} \|A[k](t) - A[\tilde{k}](t)\| &\leq \frac{C|\bar{\mu}|}{\sigma} [(\|u'_0\| \|\bar{k}\| + \|\bar{u}'_0\| \|\tilde{k}\|)T + \sum_{n=1}^{\infty} [\|u'_{2n-1}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}'_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| T \\ &\quad + \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| T + \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| \frac{T^2}{2} + \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} + \|\bar{u}''_{2n-1}\| + \|\bar{u}'_{2n-1}\| \\ &\quad + \|u'_{2n}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}'_{2n}\| \|\tilde{k}\| T]] \leq C|\bar{\mu}| [\|u'_0\| T + \sum_{n=1}^{\infty} [(T + \frac{T^2}{2}) \|u_{2n-1}\| + \|u'_{2n-1}\| T + \| \\ &\quad u'_{2n}\| T] \\ &\quad + \left(1 + \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\|\right) \|u_0\| \|\tilde{k}\| T + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n-1}\| [(T + \frac{T^2}{2}) \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} \\ &\quad + \|\tilde{k}\| T \left((3+T) \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \left(1 + \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}}\right) + T^2 e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} \right)] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n}\| \left(1 + \frac{T^2}{2}\right) \|\bar{k}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n}\| \left(1 + \frac{T^2}{2}\right) \|\bar{k}\| \leq C|\bar{\mu}| [\|\varphi_0\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} [\|k\| T^2 + 1 + \\ &\quad \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\|] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n-1}| \left[\left(T + \frac{T^2}{2}\right) (e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2}\right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\| \frac{T^2}{2}}) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}}\right) T + \left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right) \|k\|\right) (T+1) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\| T \left[\left(T + \frac{T^2}{2}\right) \left(\frac{T}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} + 1 + \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} (3+T)\right) + T^2 e^{\|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2}} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2}\right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\| \frac{T^2}{2}}\right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n}| \left[\left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2}\right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right] \|\bar{k}\|. \end{aligned} \quad (52)$$

The functions $k(t)$ and $\tilde{k}(t)$ belong to the ball $B^T(k_0, \rho)$, and hence for each of these functions one has inequality (51) is valid. Note that the function on the right-hand side in inequality (52) at the factor $\|\bar{k}\|$

is monotone increasing with $||k||$, $||\tilde{k}||$, and T . Consequently, replacing $||k||$ and $||\tilde{k}||$ in inequality (52) with $\rho + ||k_0||$ will only strengthen the inequality. This, we have

$$\begin{aligned} & \|A[k](t) - A[\tilde{k}](t)\| \leq C|\bar{\mu}|[||\varphi||e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \left[\rho_0 T^2 + 1 + \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 \right] \\ & + ||\varphi'|| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \right. \\ & + \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) T + \left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 \right) (T + 1) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \\ & + e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 T \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(\frac{T}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \rho_0 \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} (3 + T) \right) + T^2 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ & \left. + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ & + (||\varphi'|| + ||\varphi||) \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] ||\bar{k}||. \end{aligned} \quad (55)$$

Let T_2 be a positive root of the equation

$$\begin{aligned} & m_2(T) = C|\bar{\mu}|[||\varphi||e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \left[\rho_0 T^2 + 1 + \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 \right] \\ & + ||\varphi'|| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \right. \\ & + \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) T + \left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 \right) (T + 1) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \\ & + e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 T \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(\frac{T}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \rho_0 \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} (3 + T) \right) + T^2 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ & \left. + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ & + (||\varphi'|| + ||\varphi||) \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. Then for $T \in (0, T_2)$ we have that the distance between the functions $A[k](t)$ and $A[\tilde{k}](t)$ in the function space $C[0, T]$ is not greater than distance between $||k||$ and $||\tilde{k}||$ multiplied by $m_2(T) < 1$. Consequently, if we choose $T^* < \min(T_1, T_2)$, then the operator A is a contraction in the ball $B^T(k_0, \rho)$; i.e., there exists a unique solution of equation (46). Theorem 4.1 is proven.

REFERENCES:

1. Romanov, V. G. *Inverse problems of mathematical physics*. Utrecht: VNU Science Press, The Netherlands, 1987.
2. Hasanov Hasanoglu A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham, Springer, 2017, xiii+261 pp.
3. S.N. Antontsev, S.E. Aitghanov, G.R. Ashurova *Aninverse problem for the pseudo-parabolic*

equation with p -Laplacian. 2012. *Evol. Eq. and Cont. Theo.*

4. N. I. Ionkin, "The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition," *Differ. Uravn.*, vol. 13, no. 2, pp. 294–304, 1977.

5. K. M. Alroev, T. S. and S. A. Malik, "Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition," *Electronic Journal of Differential Equations* 270, 1–16 (2013).

6. V. Il'in, "How to express basis conditions and conditions for the equiconvergence with trigonometric series of expansions related to non-selfadjoint differential operators," *Computers and Mathematics with Applications* 34, 641–647 (1997).

7. V. L. Kamynin; On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition, *Mathematical Notes*, 77 (2005), No.4, 482–493.

8. M.I. Ivanchov, N.V. Saldina Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration. *Ukr. Math. J.*, 2006. Vol. 58, No. 11. P. 1685–1703

9. J. Janno, A Lorenzi Recovering memory kernels in parabolic transmission problems. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2008. Vol. 16, No. 3. P. 239–265.

10. J. Janno, L. Wolfersdorf Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996, Vol. 4, No. 1. P. 39–66.

11. D.K. Durdiev, Zh.Zh. Zhumaev, Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020. Vol. 45, No. 14. P. 8374–8388.

12. D.K. Durdiev, Zh.Z. Nuriddinov, Problem of determining a multidimensional kernel in one parabolic integro-differential equation. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2021. Vol. 14, No. 1. P. 117–127.

13. K.S. Amrilloyeva, D.I. Akramova, J.B. Ergashov, Determination of a diffusion coefficient and a source control term for a time fractional diffusion equation with integral type over-determining conditions, October, 2022.

14. D. K. Durdiev, T. R. Suyarov, "Inverse coefficient problem for the 2D wave equation with initial and nonlocal boundary conditions", *Владикавказ. матем. журн.*, 26:2 (2024), 5–25.

15. H.B. Elmuradova, Bir o'lchovli psevdoparabolik integro-differensial tenglama yadrosini aniqlashning teskari masalasi. *Matematika instituti byulleteni*, 2024 7(3), 45–54 bb.

16. D. K. Durdiev, H. B. Elmuradova, A. A. Rakhmonov *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025, 29:1, 7–20.

KASR TARTIBLI TO'LOQIN TARQALISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA

*G'iyosova Farangis Ulug'bek qizi,
Qarshi davlat universiteti magistranti*

Annotatsiya. Ushbu maqolada kasr tartibli to'loqin tarqalish tenglamasi uchun 1-aralash masala qaralgan. Bu aralash masalaning yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan. Bu masalani yechishda matematik fizikaning keng tarqalgan usullaridan biri Furiye metodi yordamida yechilgan.

Kalit so'zlar: kasr tartibli hosila va integral, aralash masala, Furiye metodi, Caputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В статье рассматривается смешанная задача 1 для уравнения распространения волн дробного порядка. Доказана теорема о существовании и единственности решения этой смешанной задачи. Один из распространённых методов математической физики при решении этой задачи решается с помощью метода Фурье.

Ключевые слова: дробная производная и интеграл, смешанная задача, метод Фурье, дробная производная Капуто.

MIXED PROBLEM FOR THE FRACTIONAL-ORDER WAVE PROPAGATION EQUATION

Abstract. This article considers mixed problem 1 for the fractional-order wave propagation equation. The theorem on the existence and uniqueness of a solution to this mixed problem is proved. This problem was solved using one of the common methods in mathematical physics, the Fourier method.

Keywords: fractional derivative and integral, mixed problem, Fourier method, fractional derivative in the sense of Caputo.

Kirish. Kasr hosilalarini o'z ichiga olgan differensial tenglamalarning simmetriya xususiyatlarini o'rganish hozirgi vaqtda anomal kinetikaga ega bo'lgan turli jarayonlarning matematik modellari kabi tenglamalarning tobora keng qo'llanilishi bilan bog'liq holda dolzarb muammo hisoblanadi. Bundan tashqari, klassik butun tartibli hosiladan farqli o'laroq, kasr tartibli hosilalarning bir xil bo'lmagan ko'plab ta'riflari mavjud, bu turli xil kasr tartibli differensial tenglamalarga olib keladi. Ular shaklida bir-biriga yaqin, lekin xususiyatlari jihatidan sezilarli darajada farq qiladi. Funktsiyaga nisbatan funktsiyaning kasr hosilalaridan foydalanib, umuman olganda, o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan almashtirishlar sinfini kengaytirishga imkon beradi. Ularni ekvivalentlik o'zgarishlarining yangi turli sifatida ko'rib chiqadi. Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ko'pgina matematik olimlar ilmiy izlanishlar olib borgan. Bu soha XVIII asr boshlarida paydo bo'lib, o'sha davrda J.Fure, J.Liuvill, B.Rimanlar tomonidan kiritilgan. Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar fizika, biologiya meditsina, iqtisodiyot va moliya, kompyuter fanlari va suniy intellekt sohalarida keng tatbiq etiladi.

Asosiy qism. Aytaulik, $D = (x, t) \in R^2$, $0 < x < l, 0 < t < T$ sohada

$$D_t^\alpha u(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t < T \quad (1)$$

Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

boshlang'ich shartni va quyidagi

$$u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(l, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraylik, bu yerda $\varphi(x)$, $f(x, t)$ - berigan funksiyalar, a - o'zgarmas son, T - fiksirlangan son, D_t^α orqali Kaputo ma'nosidagi α -tartibli kasr tartibli hosila belgilangan.

Ta'rif. Agar $u(x, t) \in C[0, l] \times [0, T]$ va $f(x, t)$ funksiyalar uchun $D_t^\alpha u(x, t), u_{xx}(x, t) \in C[0, l] \times [0, T]$ xossalarga ega bo'lib, (1)-(4) ning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda bu $u(x, t)$ funksiya (1)-(4) masalaning yechimi deyiladi.

Teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ va bo'lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin. U holda (1)-(4) aralash masalaning yechimi mavjud va u quyidagicha ko'rinishga ega:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha, 1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha, 1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Isbot. Teoremani isbotlash uchun xususiy hosilali tenglamalarni yechishda keng tarqalgan usullardan biri o'zgaruvchilarni ajratish, ya'ni Furye metodidan foydalanamiz. (1)-(4) masalaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz,

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

bu yerda $v(x, t)$ funksiya

$$\begin{cases} D_t^\alpha v(x, t) - a^2 v_{xx}(x, t) = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (5)$$

masalaning, $w(x, t)$ funksiya esa

$$\begin{cases} D_t^\alpha w(x, t) - a^2 w_{xx}(x, t) = f(x, t) \\ w(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

masalaning yechimi.

(1)-(4) masalani yechish uchun yuqoridagi ikkita yordamchi masalani yechish yetarli. Bunda (1)-(4) masalani bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan ikki hol uchun alohida-alohida yechib olamiz (5) masalani yechish uchun Furye usulidan foydalanamiz. Yechimni

$$v(x, t) = T(t) X(x) \neq 0 \quad (7)$$

Ko'rinishda izlaymiz, bunda $X(x)$ - faqat x o'zgaruvchining funksiyasi, $T(t)$ - esa faqat t o'zgaruvchining funksiyasidir. (7) ni (5) tenglamaga olib borib qo'yamiz

$$D_t^\alpha T(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x) \quad (8)$$

$$\frac{D_t^\alpha T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (9)$$

tenglikni hosil qilamiz, (9) ko'rinishdagi funksiya (8) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun (9) ayniyatdan iborat bo'lishi kerak, ya'ni $0 < t < T$ erkli o'zgaruvchining barcha qiymatlarida o'rinli bo'lishi shart bo'ladi. (9) tenglikning chap tomoni faqat t o'zgaruvchiga, o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchiga bog'liq. Agar biz x o'zgaruvchining biror qismini tanlab t o'zgaruvchini o'zgartirsak (9) tenglikning o'ng qismi va aksincha t o'zgaruvchining biror qismini tanlab x o'zgaruvchini o'zgartirsak (9) tenglikning chap qismi

o'zgaras bo'ladi. Ushbu tenglik faqat tenglikning ikkala tomoni ham o'zgaras songa teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Demak, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{D_t^\alpha T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (10)$$

bu yerda λ -o'zgaras bo'lib, uning ishorasi haqida hech qanday talab qo'yilmagani uchun keyingi hisoblar qulay bo'lishi uchun minus ishora bilan olamiz.

(10) tenglikdan $X(x)$ va $T(t)$ noldan farqli funksiyalarni aniqlash uchun

$$D_t^\alpha T(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (11)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (12)$$

oddiy differensial tenglamalarga kelimiz.

Chegaraviy shartlardan foydalanib quyidagi tenglikka ega bo'lamiz,

$$v(0, t) = T(t) X(0) = 0$$

$$v(l, t) = T(t) X(l) = 0$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa, $T(t)$ noldan farqli funksiya bo'lganligi uchun $X(x)$ funksiya uchun

$$X(0) = X(l) = 0$$

qo'shimcha shartlar qanoatlantirilishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $X(x)$ funksiyani aniqlash uchun xos qiymat haqidagi soda masalani hosil qilamiz: λ parametrning shunday qiymatlarini topish kerakki natijada

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

masala notrivial yechimga ega bo'lsin. λ parametrning bunday qiymatlariga xos son, unga mos notrivial yechimga esa berilgan masalaning xos funksiyasi deb ataladi. Ushbu keltirilgan xos son va xos funksiyasi masalasiga Shturm-Liuvill masalasi ham deyiladi. λ parametrning manfiy, nol va musbat bo'lgan hollari qarab chiqiladi. $\lambda < 0$ va $\lambda = 0$ bo'lgan hollarda $X(x) = 0$ yechimga ega bo'ladi. Xos funksiya noldan farqli yechimga ega bo'lmaydi. Bizga nol yechim kerak emas. Shu sababli $\lambda > 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (13) sistemaning yechimi quyidagicha aniqlanadi.

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

Chegaraviy shartlarga ko'ra

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$c_2 \neq 0 \text{ demak, } \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \text{ bundan } \lambda = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \text{ ekanligi kelib chiqadi, bu yerda } n=1,2,3,\dots$$

chunki λ va l musbat sonlar. Demak, berilgan masala notrivial yechimga $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$ xos qiymatlardagina ega va u quyidagicha bo'ladi

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Ixtiyoriy o'zgaras koeffitsientni $c_n = 1$ deb tanlab olsak yechim

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi esa, $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ xos qiymatga mos xos funksiyani $T_n(t)$ lar uchun quyidagi ifodalarni topamiz:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (14)$$

(14) ifodani (5) masalaga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\alpha T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

Bundan esa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[D_t^\alpha T_n(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, biz quyidagi masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} D_t^\alpha T_n(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (15)$$

(15) Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasining yechimiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$T_n(t) = \varphi_n E_{\alpha,1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \quad (16)$$

Xususi yechimlar yig'indisi yana yechim bo'lganligi sababli

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

funksiya ham yechim bo'ladi. Shunday qilib (5) masalaning formal yechimi

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi bir jinsli bo'lmagan holni qarab chiqamiz. (6) masalani yechish uchun ham Furiye usulidan foydalanamiz, ya'ni $w(x, t)$ funksiyani

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ko'rinishda izlaymiz. Uni (6) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\alpha T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x, t)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \text{ga teng ekanligidan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$$

ekanligi kelib chiqadi. Boshlang'ich shartni hisobga olsak quyidagi

$$\begin{cases} D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (18)$$

masalaga kelamiz. (18) masalaning yechimi Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli chiziqli differensial tenglama yechimi kabi bo'ladi, ya'ni

$$T_n(t) = \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Shunday qilib, (6) masala quyidagi formal yechimga

$$\text{ega: } w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Yechimlarni umumlashtirib, (1)-(4) masala uchun quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \end{aligned}$$

Xulosa. Ushbu aralash masalani yechishda quyidagi natijalarga kelindi:

Teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ va bo'lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin. U holda (1)-(4) aralash masalaning yechimi mavjud va u quyidagicha ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x \end{aligned}$$

ADABIYOTLAR:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier (2006).
2. R. Ashurov, Yu. Fayziyev, "On the nlocal boundary value problems for time -fractional equations,"// *Fractal and Fractional*, 6, 41 (2022).
3. A.V. Pskhu *The Stankovich Integral transform and Its Applications*, Special Functions and Analysis of Differential Equations, 2020, p.16.
4. Umarov S., Hahn M., Kobayashi K. *Beyond the triangle: Browian motion, Ito calculus, and Fokker-Plank equation-fractional generalizations.* // World Scientifist. 2017.

NEFT QUDUQLARINI SHTANGLI NASOSLAR YORDAMIDA ISHLATISHDA
GIDRODINAMIK BOSIM

Akilov Jaxon Akilovich,

Mirzo Ulug‘bek nomidagi Samarqand
davlat arxitektura-qurilish universiteti professori,
fizika-matematika fanlari doktori
Samarqand, 140147, Lolazor k.,70.
jaxon.akilov@mail.ru

Djabbarov Mamasoli Sadikovich,

Mirzo Ulug‘bek nomidagi Samarqand
davlat arxitektura-qurilish universiteti dotsenti,
fizika-matematika fanlari nomzodi
m.s.jabborov1954@mail.ru

G‘aybulov Yuldosh Shermanovich,

Mirzo Ulug‘bek nomidagi Samarqand davlat
arxitektura-qurilish universiteti katta o‘qituvchisi
ygaybulov@mail.ru

Annotatsiya. Maqolada neft qudug‘ini chuqur joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlik qovushoq-elastik xususiyatlarining quduqdagi gidrodinamik bosimga ta’siri qaralgan. Jarayonning matematik modeli tuzilib, uni ifodalovchi matematik masala Furiye va Laplas almashtirishi usullari bilan yechilgan. Olingan formulalar asosida, neft relaksatsiya xususiyatlarining plunjerga bo‘lgan gidrodinamik bosimga ta’siri o‘rganilgan. Agar dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o‘zgarsa, bosimning o‘zgarishi impulsli xususiyatga ega bo‘lishi mumkinligi ko‘rsatilgan. Aniqlanganki, suyuqlikning qovushoq elastik xususiyatlari gidrodinamik bosim maksimumining “kechikishiga” olib keladi, ushbu xususiyatlar oshgani sayin, qovushoq va qovushoq-elastik suyuqliklar uchun bosim qiymatlari farqi ortadi.

Kalit so‘zlar: plunjer, gidrodinamik bosim, qovuhoq-elastik suyuqlik, relaksatsiya parametrlari, shtangli nasos, Furiye usuli, Laplas almashtirishi.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ
СКВАЖИН ШТАНГОВЫМИ НАСОСАМИ

Аннотация. В статье рассматривается влияние вязкоупругих свойств жидкости на гидродинамическое давление нефти при эксплуатации нефтяной скважины глубинными штанговыми насосами. Построена математическая модель процесса и решена представляющая её математическая задача с использованием методов преобразований Фурье и Лапласа. На основе полученных формул исследовано влияние релаксационных свойств нефти на гидродинамическое давление на плунжер. Установлено, что при резком изменении скорости плунжера в начальный момент, изменение давления может иметь импульсный характер. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости приводят к «запаздыванию» достижения максимума гидродинамического давления, причём с ростом этих свойств разница в значениях давления для вязких и вязкоупругих жидкостей увеличивается.

Ключевые слова: плунжер, гидродинамическое давление, вязкоупругая жидкость, параметры релаксации, штанговый насос, метод Фурье, преобразование Лапласа.

HYDRODYNAMIC PRESSURE DURING OIL WELL OPERATION WITH SUCKER
ROD PUMPS

Abstract. The article discusses the influence of viscoelastic fluid properties on the hydrodynamic pressure of oil during wellbore operation using sucker rod pumps. A mathematical model of the process is constructed, and the corresponding mathematical problem is solved using Fourier and Laplace transform methods. Using the resulting formulas, the influence of the relaxation properties of oil on the hydrodynamic pressure on the plunger is studied. It is established that with a sharp change in plunger velocity at the initial moment, the pressure change can be impulsive. It is shown that the viscoelastic properties of the fluid lead to a "delay" in reaching the maximum hydrodynamic pressure, and that as these properties increase, the difference in pressure values for viscous and viscoelastic fluids increases.

Keywords: plunger, hydrodynamic pressure, viscoelastic fluid, relaxation parameters, rod pump, Fourier method, Laplace transform.

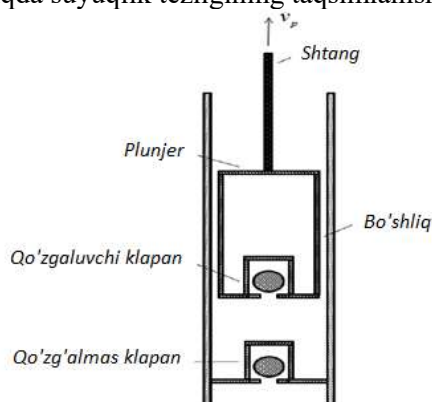
Kirish. Neft quduqlarini shtangali nasoslar bilan ishlatishda, plunjerga ko'taruvchi trubalardagi suyuqlik ustuni tufayli hosil bo'ladigan bosim ta'sir qiladi. Plunjer yuqoriga qarab harakat qilganda, shtanglar osilgan nuqta harakatlana boshlagan paytdan boshlab, plunjer suyuqlikning og'irlik yukini ko'tara boshlaydi. Ushbu yuk ta'sirida shtanglar cho'zilib, bu ularning ishdan chiqishiga olib kelishi mumkin. Plunjerning tezligi o'zgaruvchan bo'lgani uchun, chuqurlikdagi quduq nasosining silinri va shtanglar orasidagi halqasimon maydonida suyuqlik harakati nostatsionar bo'ladi. U plunjer ustidagi bosimda aks etadi. Mazkur maqolada, plunjer yuqoriga qarab harakatlanishi paytida unga bo'lgan gidrodinamik bosimga neft qovushoq-elastik xususiyatlarining ta'siri nazariy jihatdan o'rganilgan.

Eksperimental tadqiqotlar ko'rsatadiki, tarkibida asfalten-smola moddalar bo'lgan neftlar relaksatsiya xususiyatiga ega va ular qovushoq-elastik suyuqliklar hisoblanadi [1-2]. Neft quduqlari ishlashining ko'plab muhim ko'rsatkichlari va texnologik uskunalarining ishlashi neftning reologik xususiyatlariga bog'liq. Qovushoq-elastik neftning reologik xususiyatlari gidrodinamik jarayonlarga sezilarli ta'sir ko'rsatadi, shuning uchun neft konlarini o'zlashtirish va quduqni ishlatishda ularni hisobga olish zarur [3]. Neftni qazib olish har xil turdagi nasos agregatlari yordamida amalga oshiriladi. Ulardan eng keng tarqalgani chuqur joylashgan shtangli nasoslardir. Ushbu agregatlar bilan ishlash tajribasi ulardan katta chuqurlikdagi o'rta va yuqori oqimli quduqlarda samarali foydalanish mumkinligini ko'rsatadi. Turli geologik va fizik sharoitlarda ularning ishonchliligi neft qazib olish ko'rsatkichlarini ko'p jihatdan aniqlaydi. Shtangli plunjerli nasoslar yordamida neft quduqlarini ishlatishda matematik modellashirish masalalari [4-5] da qaralgan. [4] da murakkab sharoitlarda ishlaydigan plunjerli nasosning matematik modeli taklif qilingan. [5] da yuqori qovushoqli neftni chiqarish uchun pnevmatik kompensatorga ega shtangli blokning matematik modeli ishlab chiqilgan, quduq bo'ylab gidrodinamik bosimni barqarorlashtirish tahlil qilingan.

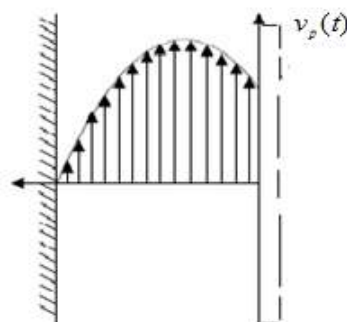
Shtangli nasoslar yordamida quduqni ishlatish jarayonida neft qovushoq-elastik xossalari gidrodinamik bosimga ta'sirini o'rganish alohida qiziqish uyg'otadi. Chuqur quduq nasosining shtanglari va silindri orasidagi halqasimon maydonda suyuqlikning nostatsionar harakati masalalari [6-9] da qaralgan. [6] da ikkita doiraviy truba orasidagi halqasimon bo'shliq tekis bo'shliq sifatida modellashirilgan va neft qovushoq Nyuton suyuqligi deb qaralgan. Masala taqribiy usulda yechilgan. Bu masalaning aniq yechimi qovushoq suyuqlik va qovushoq-elastik Maksvell suyuqligi uchun [7, 8] da keltirilgan. Biroq, ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqni tekis bo'shliq sifatida modellashirish olingan formulalarni amalda qo'llashni cheklaydi. Yuqorida aytilgan farazdan foydalanmagan holda masala qovushoq va Maksvell qovushoq-elastik suyuqligi uchun [9] da qaralgan.

Biroq, qovushoq-elastik neftlar qazib olinadigan quduqlarni ishlatish jarayonda gidrodinamik bosimni hisoblashda nafaqat kuchlanishning relaksatsiyasi vaqti, balki tezlikning kechikishi vaqtini ham hisobga olish zarur.

Masalaning qo'yilishi. Ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqasimon oraliqda plunjerga neftning gidrodinamik bosimini aniqlash masalasini qaraymiz. 1-rasmda chuqur quduq nasosining tipik konfiguratsiyasi, 2-rasmda qo'zg'almas sistemaga nisbatan ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqda suyuqlik tezligining taqsimlanishi ko'rsatilgan.



1-rasm. Shtangali nasos tizimining konfiguratsiyasi



2-rasm. Qo'zg'almas sistemaga nisbatan ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqda suyuqlik tezligining taqsimlanishi. $v_p(t)$ – plunjer tezligi

Jarayonni matematik modellashtrish uchun suyuqlik va trubalarga nisbatan umumiy qabul qilingan farazlardan foydalanamiz: ko'taruvchi trubaning yuzasida suyuqlikning nisbiy tezligi nolga teng; harakatlanuvchi truba(lar) yuzasida esa u truba tezligiga teng; oqimning silliqqligi saqlanadi; suyuqlik siqilmas; boshlang'ich va oxirgi effektlar e'tiborga olinmaydi.

Plunjerga umumiy bosim $p(t)$ quyidagicha bo'ladi:

$$p(t) = \Delta p(t) + \rho g(L - h) + p_0, \quad (1)$$

bu yerda t - vaqt; $\Delta p(t)$ - ko'taruvchi trubada suyuqlikning nostatsionar harakati paytida gidrodinamik bosim (bosim o'zgarishi); p_0 - quduq og'zidagi bosim; L - suyuqlikning ko'tarilgan ustunining balandligi; h -

nasosining cho'mish chuqurligi; ρ - neftning zichligi; g - erkin tushish tezlashishi, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Suyuqlikning nostatsionar laminar oqimdagi $v(r, t)$ tezligi, doiraviy simmetriyani hisobga olgan holda, quyidagi tenglamadan aniqlanadi

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = q(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau), \quad (r_2 < r < R), \quad (2)$$

bu yerda R - radial koordinata; r - ko'taruvchi trubaning radiusi; r_2 - shtanglar radiusi; $q(t) = -\partial p / \partial z = \Delta p / L$ ko'taruvchi trubaning o'qi bo'ylab trubaning L uzunlikdagi qismiga mos bosim o'zgarishi; τ - urinma kuchlanish.

(1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$p(t) = Lq(t) + \rho g(L - h) + p_0.$$

Suyuqlikning reologik tenglamasini quyidagicha olamiz:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(r, t) = \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (3)$$

bu yerda μ - dinamik qovushoqlik; λ_1 - kuchlanishning relaksatsiya vaqti; λ_2 - tezlikning kechikish vaqti.

(3) tenglama $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ da Oldroydning qovushoq-elastik suyuqlik modelini ifodalaydi ($\lambda_1 > \lambda_2$). Nol boshlang'ich shartda siljish kuchlanishi uchun (3) tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$\tau(r, t) = \mu \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu}{\lambda_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial r} d\xi. \quad (4)$$

(4) ni (1) ga qo'yib, suyuqlik tezligi uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} v(r, \xi) d\xi \right) + q(t). \quad (5)$$

(1) va (3) dan foydalanib, suyuqlik tezligi uchun bitta differensial tenglama hosil qilish mumkin:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v}{\partial t} = \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) q(t) + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right], \quad (r_2 < r < R). \quad (6)$$

Dastlabki vaqtda suyuqlik harakatlanmaydi, shuning uchun (7) uchun boshlang'ich shartlar

$$v(r, 0) = 0, \quad v_t(r, 0) = 0, \quad r_2 \leq r \leq R. \quad (7)$$

bo'ladi. Qabul qilingan farazlarga muvofiq, (7) tenglama uchun chegaraviy shartlar

$$v(r_2, t) = v_p(t), \quad v(R, t) = 0, \quad (t > 0). \quad (8)$$

bo'ladi, bu yerda $v_p(t)$ - plunjerning harakat tezligi. Gidrodinamik bosimni aniqlashda qo'shimcha shart sifatida suyuqlik oqimi balansi tenglamasidan foydalanamiz:

$$Q = \pi(r_1^2 - r_2^2) v_p(t) = 2\pi \int_{r_2}^R r v(r, t) dr, \quad (9)$$

bu yerda r_1 - plunjer radiusi, Q - suyuqlik sarfi.

(1)-(9) munosabatlar qaralayotgan jarayonning matematik modelini ifodalaydi.

Masalani yechish usuli. Quyidagi o'lchamsiz miqdorlarni kiritamiz:

$$\bar{t} = \frac{U_0}{R} t, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{v(r, t)}{U_0}, \quad \bar{v}_p(\bar{t}) = \frac{v_p(t)}{U_0}, \quad \bar{q}(\bar{t}) = \frac{R}{\rho U_0^2} q(t),$$

bu yerda U_0 – tezlikning biror xarakterli qiymati. Unda, o'lcamsiz miqdorlarda quyidagilarni olamiz:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \int_0^{\bar{t}} \bar{v}(\bar{r}, \xi) e^{-\frac{\bar{t}-\xi}{\bar{\lambda}_1}} d\xi \right) + \bar{q}(\bar{t}), \quad (\alpha < \bar{r} < 1).$$

$$\left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right] + \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \bar{q}(\bar{t}), \quad (\alpha < \bar{r} < 1),$$

$$\bar{v}(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{v}'_{\bar{t}}(\bar{r}, 0) = 0, \quad (\alpha \leq \bar{r} \leq 1);$$

$$\bar{v}(\alpha, \bar{t}) = \bar{v}_p(\bar{t}), \quad \bar{v}(1, \bar{t}) = 0, \quad (\bar{t} > 0).$$

$$\int_{\alpha}^1 \bar{r} \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r} = \frac{\alpha_*^2}{2} \bar{v}_p(\bar{t}),$$

bu yerda $\alpha = r_2 / R$, $\alpha_1 = r_1 / R$, $\alpha_*^2 = \alpha_1^2 - \alpha^2$, $c_1 = c(1 - c_2)$, $c = 1 / \bar{\lambda}_1$, $c_2 = \bar{\lambda}_2 / \bar{\lambda}_1$,

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{U_0}{R} \lambda_1, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{U_0}{R} \lambda_2, \quad \text{Re} = \frac{\rho R U_0}{\mu}.$$

Masalani yechish jarayonida, yozuvlar qulay bo'lishi uchun, o'lcamsiz miqdorlar ustidagi "-" belgini hozircha qo'ymay yozamiz. Ya'ni quyidagicha:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t v(r, \xi) e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} d\xi \right) + q(t), \quad (\alpha < r < 1). \quad (10)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) q(t), \quad (\alpha < r < 1) \quad (11)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v'_t(r, 0) = 0, \quad (\alpha \leq r \leq 1); \quad v(\alpha, t) = v_p(t), \quad v(1, t) = 0, \quad (t > 0). \quad (12)$$

$$\int_{\alpha}^1 r v(r, t) dr = \frac{\alpha_*^2}{2} v_p(t). \quad (13)$$

(12) ni r ga ko'paytirib, $[\alpha, 1]$ oraliqda integrallab, (13) dan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$q(t) = \frac{\alpha_*^2}{1 - \alpha^2} v'_p(t) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_2}{1 - \alpha^2} \left[\frac{\partial v(1, t)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, t)}{\partial r} \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_1}{1 - \alpha^2} \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \left[\frac{\partial v(1, \xi)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, \xi)}{\partial r} \right] d\xi. \quad (14)$$

(17) ni (12) ga qo'yib, suyuqlik tezligi uchun quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_2}{1 - \alpha^2} \left[\frac{\partial v(1, t)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, t)}{\partial r} \right] + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial r} d\xi \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_1}{1 - \alpha^2} \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \left[\frac{\partial v(1, \xi)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, \xi)}{\partial r} \right] d\xi + \frac{\alpha_*^2}{1 - \alpha^2} v'_p(t), \quad (15)$$

Bu tenglamani Furiyening o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan yechamiz. Buning uchun $v(r, t) = z(r)U(t)$ deb olamiz. (15) ga mos birjinsli tenglama uchun, nol chegaraviy shartlarda, quyidagi Bessel tenglamasi uchun Shturm-Liuvvil masalasini hosil qilamiz:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) + \beta^2 z = \frac{2}{1 - \alpha^2} [z'(1) - \alpha z'(\alpha)], \quad z(\alpha) = 0, \quad z(1) = 0. \quad (16)$$

$\beta = 0$ (16) masalaning xos qiymati. Unga mos $z_0(r)$ xos funksiyani (13) ni hisobga olgan holda - quyidagi ko'rinishda topish topish:

$$z_0(r) = A_\alpha \left[1 - r^2 + (1 - \alpha^2) \frac{\ln r}{\ln \alpha} \right], \quad (17)$$

bu yerda $A_\alpha = \frac{(2\alpha_*^2 + \alpha^2 - 1) \ln \alpha}{(1 - \alpha^2)[1 - \alpha^2 + (1 + \alpha^2) \ln \alpha]}.$

Izlanayotgan noma'lum funksiyalarni quyidagicha ifodalaymiz

$$v(r, t) = v_0(r, t) + v_1(r, t), \quad (18)$$

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), \quad (19)$$

bu yerda $v_0(r, t) = z_0(r)v_p(t)$ (15) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning nol boshlang'ich va chegaraviy shartlardagi yechimi. $q_0(t)$ funksiya (14) ga $v_0(r, t)$ ni qo'yib aniqlanadi :

$$q_0(t) = \frac{\alpha_*^2}{1 - \alpha^2} v_p'(t) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \left[c_2 v_p'(t) + c_1 \int_0^t e^{-c(t-\xi)} v_p'(\xi) d\xi \right]. \quad (20)$$

$v_1(r, t)$, $q_1(t)$ funksiyalar

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) q_1(t), \quad (\alpha < r < 1). \quad (21)$$

tenglamalarning

$$v_1(r, 0) = 0, \quad v_{1r}(r, 0) = 0, \quad (\alpha \leq r \leq 1); \quad v_1(\alpha, t) = v_p(t), \quad v_1(1, t) = 0, \quad (t > 0). \quad (22)$$

$$\int_\alpha^1 r v_1(r, t) dr = \frac{1 - \alpha^2}{4} v_p(t), \quad (23)$$

shartlarni qanoatlantiruchi yechimi. Bu yerda (23) tenglik (13) ni hisobga olgan holda (15) dan kelib chiqadi.

(21)-(23) masalani Laplas integral almashtirishi yordamida yechamiz[10]:

$$\tilde{v}_1(r, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v_1(r, t) dt, \quad \tilde{v}_p(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v_p(t) dt, \quad \tilde{q}_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} q_1(t) dt.$$

Boshlang'ich shartlarni hisobga olib, Laplas tasvirida

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{v}_1}{dr} \right) - k^2 \tilde{v}_1(r, s) = -\frac{k^2}{s} \tilde{q}_1(s), \quad (\alpha < r < 1) \quad (24)$$

tenglamani olamiz. Uning uchun chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\tilde{v}_1(0, s) = \tilde{v}_p(s), \quad \tilde{v}_1(1, s) = 0, \quad (25)$$

bu yerda $k = \sqrt{\text{Re } s (1 + \lambda_1 s) / (1 + \lambda_2 s)}$. (23) tenglik Laplas tasvirida quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_\alpha^1 r \tilde{v}_1(r, s) dr = \frac{1 - \alpha^2}{4} \tilde{v}_p(s). \quad (26)$$

(24) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yozish mumkin:

$$\tilde{v}_1(r, s) = C_1 J_0(ikr) + C_2 Y_0(ikr) + \frac{\tilde{q}_1(s)}{s},$$

bu $J_0(x)$, $Y_0(x)$ - nolinch va birinchi turdagi Bessel funksiyalari. C_1 , C_2 o'zgarmlarni (25) shartdan topib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\tilde{v}_1(r, s) = \frac{1}{D_\alpha(ik)} \cdot \left\{ \frac{\tilde{q}_1(s)}{s} [D_\alpha(ik) + d_2(ik)J_0(ikr) - d_1(ik)Y_0(ikr)] + \right. \\ \left. + \tilde{v}_p(s) \cdot [Y_0(ik)J_0(ikr) - J_0(ikr)Y_0(ikr)] \right\}, \quad (27)$$

$$\tilde{q}_1(s) = s \tilde{v}_p(s) \cdot \tilde{f}(s), \quad (28)$$

bu yerda $d_1(x) = J_0(\alpha x) - J_0(x)$; $d_2(x) = Y_0(\alpha x) - Y_0(x)$; $D_\alpha(x) = J_0(\alpha x)Y_0(x) - J_0(x)Y_0(\alpha x)$.

$$\tilde{f}(s) = \frac{\varphi(ik)}{\psi(ik)}; \quad \varphi(x) = \frac{1-\alpha^2}{4} x D_\alpha(x) + Y_0(x) d_3(x) - J_0(x) d_4(x);$$

$$\psi(x) = \frac{1-\alpha^2}{2} x D_\alpha(x) - d_2(x) d_3(x) + d_1(x) d_4(x);$$

$$d_3(x) = \alpha J_1(\alpha x) - J_1(x); \quad d_4(x) = \alpha Y_1(\alpha x) - Y_1(x),$$

$J_1(x)$, $Y_1(x)$ - birinchi tartibli birinchi va ikkinchi tur Bessel funktsiyalari.

(28) tasvirda Laplas originaliga o'tib, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \bar{q}(\bar{t}) = & \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} \bar{v}_p'(\bar{t}) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \left[c_2 \bar{v}_p(\bar{t}) + c_1 \int_0^{\bar{t}} e^{-c(\bar{t}-\xi)} \bar{v}_p(\xi) d\xi \right] - \\ & - \frac{4}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \varphi_n}{C_n \psi_{1n}} \int_0^{\bar{t}} \bar{v}_p'(\xi) e^{-a_n(\bar{t}-\xi)} (A_n \text{ch} b_n(\bar{t}-\xi) + B_n b_n \text{sh} b_n(\bar{t}-\xi)) d\xi, \end{aligned} \quad (29)$$

bu yerda β_n

$$\frac{1-\alpha^2}{2} \beta D_\alpha(\beta) - d_2(\beta) d_3(\beta) + d_1(\beta) d_4(\beta) = 0$$

tenglamaning musbat ildizlari;

$$\psi_{1n} = (1-\alpha^2) D_\alpha(\beta_n) + \frac{1-\alpha^2}{2} \beta_n [\alpha d_7(\beta_n) + d_8(\beta_n)] + d_1(\beta_n) d_6(\beta_n) - d_2(\beta_n) d_5(\beta_n),$$

$$\varphi_n = \varphi(\beta_n), \quad d_5(x) = \alpha^2 J_0(\alpha x) - J_0(x); \quad d_6(x) = \alpha^2 Y_0(\alpha x) - Y_0(x);$$

$$d_7(x) = J_0(x) Y_1(\alpha x) - J_1(\alpha x) Y_0(x); \quad d_8(x) = J_1(x) Y_0(\alpha x) - J_0(\alpha x) Y_1(x);$$

$$a = 1/(2\bar{\lambda}_1), a_n = a(1 + \bar{\lambda}_2 x_n^2), b_n = \sqrt{a_n^2 - 2a x_n^2}. \quad x_n = \beta_n / \sqrt{\text{Re}}.$$

$$A_n = 1 + 2\bar{\lambda}_2 x_n^2 (2 + a\bar{\lambda}_2^2 x_n^2) + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)(\bar{\lambda}_2(a_n^2 + b_n^2) - 2a_n) - 4\bar{\lambda}_2^2 a_n x_n^2;$$

$$B_n = 2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_2 a_n - 1);$$

$$C_n = 1 + 4\bar{\lambda}_1 x_n^2 + \bar{\lambda}_2 x_n^4 + 2\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 (a_n^2 + b_n^2) - 4\bar{\lambda}_1 a_n (1 + \bar{\lambda}_2 x_n^2).$$

Xususiyl holda, (42) dan $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 = 0$ da qovushoq suyuqlik uchun

$$\bar{q}(\bar{t}) = \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} \bar{v}_p'(\bar{t}) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \bar{v}_p(\bar{t}) - \frac{2}{\text{Re}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \varphi_n}{\psi_{1n}} \cdot \int_0^{\bar{t}} \bar{v}_p'(\xi) \cdot e^{-x_n^2(\bar{t}-\xi)} d\xi \quad (30)$$

formulani hosil qilish mumkin. Gidrodinamik bosimni

$$\Delta p(t) = \frac{\rho U_0^2 L}{R^2} \bar{q}(\bar{t}), \quad (31)$$

formuladan, plunjerga umumiy bosimni (31) ni (1) formulaga qo'yib aniqlanadi.

Natijalar va muhokamalar. Olingan formulalar yordamida plunjerning yuqoriga ko'tarilishida neft qovushoq-elastik xususiyatlarning gidrodinamik bosimga ta'sirini o'rganish mumkin. Ulardan ko'rsatadiki, dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o'zgarsa (lahzali tezlanish): $v_p(t) = U_0 \eta(t)$, tezlanishning ta'siri kuchli bo'lishi mumkin, chunki $v_p'(t) = U_0 \delta(t)$, bu yerda $\eta(t)$ – Hevisidning birlik funktsiyasi, $\delta(t)$ – Dirakning delta funktsiyasi. Vaqtning biror orasida plunjer tezligi o'zgarmas bo'lsin: $v_p(t) = v_m = \text{const}$, ya'ni. $\bar{v}_p(\bar{t}) = 1$. U holda (29) va (30) dan

$$\bar{q}(\bar{t}) = \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} [c_2 + c_1(1 - e^{-c\bar{t}})] \quad \text{va} \quad \bar{q}(\bar{t}) = \frac{4A_\alpha}{\text{Re}}$$

Ko'rinadiki, tezlik o'zgarmas bo'lgan vaqt oralig'ida gidrodinamik bosim faqat qovushoq suyuqlik uchun o'zgarmas bo'lib, qovushoq-elastik suyuqlik uchun o'zgarmas bo'lmaydi.

Shtanglar va trubalarning bo'yлама tebranishlari e'tiborga olinmasa, plunjer tezligini shtang osilgan nuqtaning tezligiga teng deb qarash mumkin. Bunday holda plunjer harakatining bir sikli davri uchun uning tezligini quyidagicha olish taklif qilingan [6]:

$$v_p(t) = \frac{48v_m}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{T}, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (32)$$

bu yerda v_m – shtang osilgan nuqtaning o‘rtacha tezligi; T – plunjer harakatining bitta sikli davri.

Suyuqlik qovushoq-elastik xossalarining plunjer ko‘tarilishi paytidagi gidrodinamik bosim o‘zgarishiga ta’sirini o‘rganish uchun parametrlarning quyidagi qiymatlarida sonli tajribalar o‘tkazildi:

$$L = 1000 \text{ m}, h = 100 \text{ m}, U_0 = v_m = 0.60 \text{ m/s}, p_0 = 10^5 \text{ Pa},$$

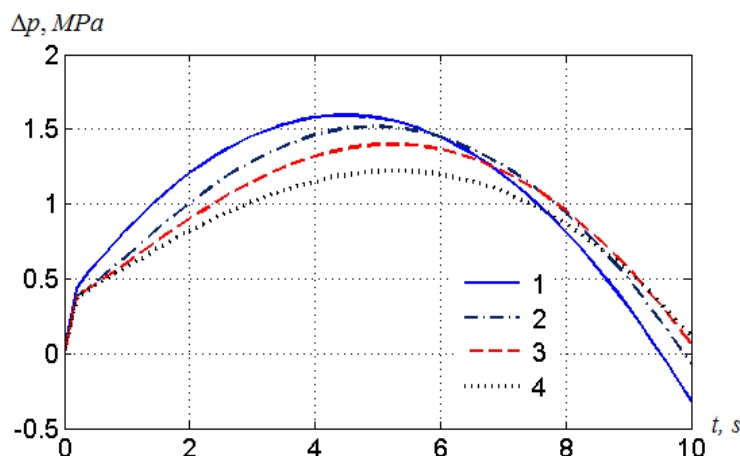
$$T = 20 \text{ s}, r_2 = 0.01 \text{ m}, r_1 = 0.02988 \text{ m}, R = 0.030 \text{ m}.$$

3-rasmda neft qovushoqligi va zichligining $\mu = 0.09 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ qiymatlari va relaksatsiya parametrlarining

$$1 - \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad 2 - \lambda_1 = 1 \text{ s}; \lambda_2 = 0.5 \text{ s}; \quad 3 - \lambda_1 = 2 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}; \quad 4 - \lambda_1 = 3 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}$$

qiymatlari uchun gidrodinamik bosimning vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarishi grafiklari keltirilgan.

Rasmdan ko‘rinadki, plunjerning ko‘tarilish tezligining oshishi jarayonida qovushoq-elastik suyuqlik uchun gidrodinamik bosim qovushoq suyuqlikka qaraganda qaraganda kichik bo‘ladi. U tezlik kamayishida, aksincha, katta bo‘ladi. Ko‘tarilishning boshida va oxirida bosim o‘zgarishining sakrashi sodir bo‘ladi. Buning sababi shuki, qaralayotgan holda boshlang‘ich tezlanish noldan farqli. Boshlang‘ich sakrashning bo‘lmasligi sharti - tezlikning dastlabki momentan boshlab silliq o‘zgarishi, ya’ni boshlang‘ich tezlanishning nolga tengligidir.



3-rasm. Neft relaksatsiya parametrlarining ba’zi qiymatlarida plunjerga bo‘lgan gidrodinamik bosimning o‘zgarishi grafiklari

$$\mu = 0.09 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \rho = 920 \text{ kg/m}^3$$

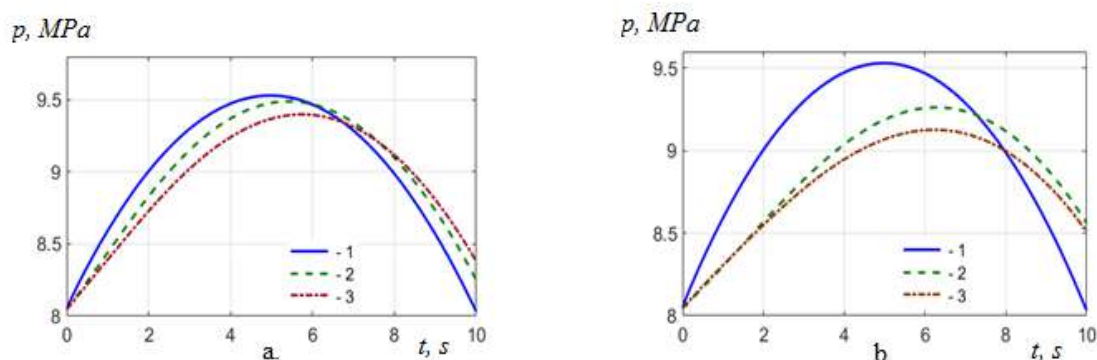
$$1 - \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad 2 - \lambda_1 = 1 \text{ s}; \lambda_2 = 0.5 \text{ s};$$

$$3 - \lambda_1 = 2 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}; \quad 4 - \lambda_1 = 3 \text{ s}; \lambda_2 = 2 \text{ s}.$$

4-rasmlarda neft qovushoqligi va zichligining $\mu = 0.100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ qiymatlarida plunjerga suyuqlik umumiy bosimining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi grafiklari keltirilgan.

Grafiklardan ko‘rinadiki, neftning qovushoq-elastik xususiyatlari plunjerga gidrodinamik bosimining pasayishiga (tezlanish vaqtida) va ortishiga (sekinlashuv vaqtida) olib keladi. Qiymatlardagi eng katta farq ko‘tarilishning to‘xtashi momentida kuzatiladi. Relaksatsion xususiyatlar bosim maksimumining kechikishiga olib keladi. Bu xususiyatlarining oshishi bilan bosim rejimlaridagi farq, ayniqsa, ko‘tarilish sekinlashuvi momentida ortadi. Sonli tajribalar ko‘rsatadiki, neft fting qovushoqligi va zichligi oshishi bilan gidrodinamik bosim ham ortadi. Bunda bosim profillarining shakli va qovushoq-elastik xususiyatlar ta’sirining tabiati o‘zgarmaydi, ammo ta’sir darajasi ortadi. Bu, ayniqsa, tezlashish va tormozlash vaqtida seziladi.

Plunjer tezligi oshgandagi gidrodinamik bosimning o‘zgarishga doir hisoblashlar ko‘rsatadiki, plunjer tezligi oshishi gidrodinamik bosim ma’lum vaqtgacha ortadi va keyin kamayadi. Bu bosim nyuton qovushoq suyuqligi uchun qovushoq-elastik suyuqlikka qaraganda kamroq. Shunday qilib, qovushoq-elastik neftlarni ishlab chiqaradigan neft quduqlarini chuqur joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda neftning relaksatsion xususiyatlarini hisobga olish zarur.



4-rasm. Neft relaksatsiya parametrlarining plunjerga umumiy bosimga ta'siri

$\mu = 0.100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.

a. 1 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; 2 – $\lambda_1 = 1 \text{ s}$, $\lambda_2 = 0.5 \text{ s}$; 3 – $\lambda_1 = 2 \text{ s}$, $\lambda_2 = 1 \text{ s}$;

b. 1 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; 2 – $\lambda_1 = 3 \text{ s}$, $\lambda_2 = 1 \text{ s}$; 3 – $\lambda_1 = 5 \text{ s}$, $\lambda_2 = 2 \text{ s}$.

Xulosa. Neft qudug'ini chuqurda joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlik qovushoq-elastik xususiyatlarining plunjerga gidrodinamik bosimining matematik modeli tuzilib, uni ifodalovchi matematik masala Furiye usuli va Laplas almashtirishidan foydalanib yechilgan. Neft qovushoq-elastik xususiyatlarini plunjerga gidrodinamik bosimga ta'sirini nazariy jihatdan o'rganishga imkon beruvchi formulalar olingan. Olingan formulalar va sonli tajribalar asosida, neft relaksatsiya xususiyatlarining plunjerga bo'lgan gidrodinamik bosimga ta'siri o'rganilgan. Aniqlanganki, agar dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o'zgarsa, bosimning o'zgarishi impulsli xususiyatga ega bo'lishi mumkin. Plunjer tezligi o'zgarish bo'lgan vaqt oralig'ida gidrodinamik bosim faqat Nyuton suyuqligi uchun o'zgarib, qovushoq-elastik suyuqlik uchun esa o'zgaruvchan bo'lishi ko'rsatilgan. Neftning qovushoq-elastik xususiyatlari plunjerga gidrodinamik bosim maksimumining "kechikishiga" olib kelishi, bu xususiyatlar oshgani sayin, qovushoq va qovushoq-elastik suyuqliklar uchun bosim qiymatlari farqi ortadi. O'tkazilgan sonli tajribalar - shuni ko'rsatadiki, qovushoq-elastik neftlar ishlab chiqaruvchi quduqlarni shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlikning relaksatsion xususiyatlarini hisobga olish zarur.

ADABIYOTLAR:

1. Хужаёров Б. Х. Реологические свойства смесей. Самарканд: Согдиана, 2000. 216 с.
2. Аметов К. М., Байдуков Ю. Н., Рузин Л. М., Спиридонов Ю. А. Извлечение тяжёлых и высоковязких нефтей. – М.: Недра, 1985. 205 с.
3. Акилов Ж. Неустановившиеся движения вязкоупругих жидкостей. -Ташкент: Фан, 1982. 104 с.
4. Топольников А.С., Уразаков К.Р., Исмаилов С.Ф. Математическая модель штанговой насосной установки, работающей в сложных условиях // Ученые записки АГНИ. – 2015. Т. 8. – № 1. – С. 235–251.
5. Уразаков К.Р., Тимашов О.Т., Молчанова В.А. Моделирование работы погружных плунжерных насосных агрегатов с пневмокомпенсаторами. // Известия Томского политехнического университета. Т. 331. № 12(2020). – С. 51-59. DOI <https://doi.org/10.18799/24131830/2020/12/2938>.
6. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов А.М. и др. Теория и практика применения глубинных насосов с гидравлическим затвором. М.: Недра, 1968. 158 с.
7. Akilov, Zh. A., Jhabbarov, M. S. & Gaybulov, Y. S. (2020). Stress modeling on the plunger at operation of the holes mining n-Newton oil. ISJ Theoretical & Applied Science, 10 (90). P. 118-123. DOI: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS>.
8. Akilov Zh., Dzhabbarov M.S., Gaybulov Yu.Sh. Mathematical modeling of pressure on the plunger during the operation of wells producing viscoelastic oils. DIZZW 2020. // German International Journal of Modern Science. No. 9, 2021, Vol. 1. P. 11-15. DOI: 10.24412/2701-8369-2021-9-1-11-15.
9. Гайбулов Ю. Ш. Гидродинамическое давление при эксплуатации нефтяных скважин глубинными насосами // Труды конференции АИР 3244. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной механики – АПАМ-2024». С. 020057–10. Электронная публикация 27.11.2024. <https://doi.org/10.1063/5.0242037>.
10. Плескунов М.А. Операционное исчисление. М.: Юрайт, 2020. - 141 с.

LAPLAS TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASINING KARLEMAN FUNKSIYASI

Ishankulov Tolib,

Samarqand davlat univerisitetii professori, f.m.f.d.
tolibi@mail.ru

Umarov Sanjar Sunnatovich,

Samarqand davlat pedagogika instituti tayanch doktoranti
sanjar88.21@gmail.com

Annotasiya. Ushbu maqola differensial tenglamalar va matematik fiziki ixstisoslgi bo'yicha tadqiqot olib boruvchi ilmiy izlanuvchilar uchun mo'ljallangan. Maqolada tekislikdagi Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi qaralgan. G soha chegarasi ∂G ning bir qismi S silliq chiziqda berilgan qiymatlariga ko'ra, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini davom ettirishi konskruksiyasi qaralgan.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, Koshi masalasi, nokorrekt masalalar, Karleman funksiyasi, regularizatsiya, davom ettirish formulalari.

ФУНКЦИЯ КАРЛЕМАНА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Аннотация: Статья предназначена для исследователей, проводящих исследования в области дифференциальных уравнений и математической физики. В статье рассматривается задача Коши для уравнения Лапласа на плоскости. Рассматривается построение границы области G ∂G на гладкой линии S по заданным значениям, являющееся продолжением решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризация, формулы продолжения.

CARLEMAN FUNCTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION

Abstract. This article is intended for researchers conducting research in the fields of differential equations and mathematical physics. It considers the Cauchy problem for the Laplace equation in the plane. It considers constructing the boundary of a domain G on a smooth line ∂G given values of S , which is an extension of the solution to the Cauchy problem for the Laplace equation.

Keywords: Laplace's equation, Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularization, continuation formulas.

Kirish. Matematik fizikaning nokorrekt masalalarni yechimlar sinfini kompaktga qadar toraytirilsa, bu masala turg'un bo'lishiga doir birinchi natijalar A.N.Tixonov ishlarida keltirilgan. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasining Karleman funksiyasi tushunchasi M.M.Lavrent'yev tomonidan kiritilgan [2]. Tekislikdagi yo'lak ko'rinishidagi cheksiz sohada Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasining regularizatsiyasi V.K.Ivanov tomonidan o'rganilgan [3]. Ko'p o'lchamli fazoda soha chegarasining bir qismi konus bo'lganda Laplas va Gelmgols tenglamalari uchun Koshi masalasining yechimi Sh.Yarmuxamedov tomonidan Karleman funksiyasini qurish asosida olingan [4].

1. Masalaning qo'yilishi. R^2 tekislikda yarim birlik aylana yoyi hamda S silliq chiziq bilan chegaralangan D sohani qaraymiz. Bunda koordinata boshi sohadan tashqarida joylashgan deb olamiz.

$x = (x_1, x_2) \in D$ va $y = (y_1, y_2) \in \bar{D}$ bo'lsin. Qaralayotgan D sohada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1)$$

Laplas tenglamasi yechimi $U(x) = U(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ garmonik funksiyaning Koshi berilganlari S da berilgan:

$$U(x)|_S = f_0(x), \quad \left. \frac{\partial U(x)}{\partial n} \right|_S = f_1(x) \quad (2)$$

bu yerda $f_0(x)$ va $f_1(x)$ - berilgan funksiyalar. (2) shartlarga ko'ra $U(x)$ funksiyani D sohada topish masalasi qaraladi.

2. Karleman funksiyasi qurish sxemasi. (1) – (2) masala yechimini topishda Karleman funksiyasi metodidan foydalanamiz. [2] ga ko'ra Laplas tenglamasining Karleman funksiyasi ta'rifini keltiramiz:

Ta'rif. S to'plamning D sohaga nisbatan Karleman funksiyasi deb ikkita x va y nuqtalarga hamda σ musbat sonli parametrga bog'liq bo'lgan, quyidagi ikki shartlarni qanoatlantiruvchi $G(x, y, \sigma)$ funksiyaga aytiladi:

$$1) G(x, y, \sigma) = \ln \frac{1}{|x - y|} + g(x, y, \sigma), \quad (3)$$

bu yerda $g(x, y, \sigma)$ funksiya y o'zgaruvchi bo'yicha D sohada garmonik funksiya;

$$2) \int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, \sigma)| + \left| \frac{\partial G(x, y, \sigma)}{\partial n} \right| \right) ds \leq \alpha(\sigma); \quad (4)$$

bunda $\alpha(\sigma)$ funksiya $\sigma \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Bu ta'rifda $g(x, y, \sigma)$ funksiya Karleman funksiyasining regulyar qismi deyiladi.

Yuqorida berilgan ta'rifdagi Karleman funksiyasining regulyar qismini

$$g(x, y, N) = -\ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \cos n\theta, \quad (5)$$

ko'rinishda olamiz, bu yerda Karleman funksiyasining parametri σ sifatida N natural son olindi va

$$\theta = \varphi - \psi; \quad |x| = \rho; \quad |y| = \rho_1; \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}; \quad \psi = \arctg \frac{y_2}{y_1}.$$

Teorema. $G(x, y, N) = \ln \frac{1}{r} + g(x, y, N)$ funksiya qaralayotgan D sohada S yoyi uchun

Laplas tenglamasining Karleman funksiyasi bo'ladi.

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. (5) tenglik bilan aniqlangan $g(x, y, N)$ funksiya D sohada y o'zgaruvchi bo'yicha garmonik funksiya bo'ladi.

Isbot. $g(x, y, N)$ funksiyani y o'zgaruvchi bo'yicha Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsatamiz ya'ni:

$$\Delta_y g(x, y, N) = -\Delta_y \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rho^n \Delta_y \left(\frac{\cos n\theta}{\rho_1^n} \right).$$

$$\ln \frac{1}{\rho_1} - \text{Laplas tenglamasining fundamental yechimligidan } \Delta_y \ln \frac{1}{\rho_1} = 0.$$

Qatordagi laplasian ichidagi funksiyani $g^* = \frac{\cos n\theta}{\rho_1^n}$ belgilaymiz.

Δg^* hisoblash uchun Laplas tenglamasini qutb koordinatalar ko'rinishidan

$$\Delta g^*(\rho_1, \theta) = \rho_1^2 g_{\rho_1 \rho_1}^* + \rho_1 g_{\rho_1}^* + g_{\theta \theta}^*$$

foydalanib, tegishli hosilalarni hisoblaymiz:

$$g_{\rho_1}^* = n\rho_1^{-n-1} \cos n\theta; g_{\rho_1\rho_1}^* = n(n+1)\rho_1^{-n-2} \cos n\theta;$$

$$g_{\theta}^* = -n\rho_1^{-n} \sin n\theta; g_{\theta\theta}^* = -n^2\rho_1^{-n} \cos n\theta.$$

$$\Delta g^*(\rho_1, \theta) = (n^2 + n)\rho_1^{-n} \cos n\theta - n\rho_1^{-n} \cos n\theta - -n^2\rho_1^{-n} \cos n\theta = 0.$$

$$\Delta_y g(x, y, N) = 0.$$

(5) funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha garmonikligi isbotlandi.

Isbotlangan lemmadan $G(x, y, N)$ funksiya Laplas tenglamasining Karleman funksiyasining 1) shartini qanoatlantirishi kelib chiqadi. Endi $G(x, y, N)$ funksiya ta'rifni 2) shartini qanoatlantirishini ko'rsatish uchun

$$\int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, N)| + \left| \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right| \right) ds_y, \quad x \in D$$

integralni baholaymiz.

$$\text{Bu yerda } G(x, y, N) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta, \quad r = |x - y|$$

$G(x, y, N)$ funksiyaning qator ko'rinishidagi ifodasini topish uchun $|x - y|$ ifodada $x = \rho e^{i\varphi}$,

$$y = \rho_1 e^{i\psi}, \quad \theta = \varphi - \psi \quad \text{va} \quad \lambda = \frac{\rho}{\rho_1} \quad \text{almashtirishlar olib}$$

$$r = \rho_1 \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Ushbu

$$\ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\rho_1} - \ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} \quad (6)$$

tenglikdagi $\ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta}$ ifodani kompleks o'zgaruvchili $\ln(1 - z)$ funksiya $z = \lambda e^{i\theta}$ almashtirishdan so'ng haqiqiy qismidan quyidagi

$$\ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \cos n\theta \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) va (7) dan

$$\ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\rho_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \quad (8)$$

tenglikni olamiz. (8) tenglikdan

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \quad (9)$$

ga kalamiz.

Karleman $G(x, y, N)$ funksiyasining regulyar qismi sifatida

$$g(x, y, N) = - \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta$$

funksiyani olamiz. Demak $G(x, y, N)$ funksiyani

$$G(x, y, N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi qatorni $x \in D$, $y \in \partial D / S$ uchun baholaymiz:

$$\begin{aligned} |G(x, y, N)|_{\partial D/S} &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \right|_{\rho_1=1} \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} = \rho^{N+1} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

Xuddi shunga o'xshash G funksiyani $y \in \partial D / S$ nuqtadagi normal bo'yicha hosilasini baholaymiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial D/S} &= \left| \frac{\partial G}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=1} = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} -\frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} \cos n\theta \right|_{\rho_1=1} = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |-\rho^n \cos n\theta| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Shunday qilib,

$$\int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, N)| + \left| \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right| \right) ds_y \leq \frac{4\pi\rho^{N+1}}{1-\rho}. \quad (12)$$

(12) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda $0 < \rho < 1$ bo'lgani uchun $N \rightarrow \infty$ da $2\pi \cdot \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}$

nolga intiladi.

Grin formulasiga ko'ra (1), (2) masala yechimi uchun

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[\ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \cdot \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS \quad x \in D \quad (13)$$

integral tasvir o'rinli.

$g(x, y, N)$ funksiya y o'zgaruvchi bo'yicha D sohada garmonikligidan $x \in D$ uchun Grin formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[g(x, y, N) \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y) \cdot \frac{\partial g(x, y, N)}{\partial n_y} \right] dS_y &= \\ &= \int_D \left[g(x, y, N) \cdot_y U(y) - U(y) \cdot_y g(x, y, N) \right] dy = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

tenglik o'rinli. Masala shartidagi berilganlarni hisobga olib (13) va (14) tengliklardan

$$U(x) = \int_{\partial D/S} \left[G(x, y, N) \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y +$$

$$+ \int_S \left[G(x, y, N) \cdot f_1(y) - f_0(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikda $U(x) = U(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ hamda (12)

tengsizlikni hisobga olgan holda $N \rightarrow \infty$ limitga o'tib

$$U(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_S \left[G(x, y, N) \cdot f_1(y) - f_1(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y$$

tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Тихонов А.Н., "Об устойчивости обратных задач", ДАН СССР, т. 39, № 5 (1943), 195-198
2. Лаврентьев М.М., "О некоторых некорректных задачах математической физики", Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. - 92 с..
3. Иванов В. К., "Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе", // Дифференц. уравнения, 1:1 (1965), 131-136
4. Ярмухамедов Ш., "О задаче Коши для уравнения Лапласа", Докл. АН СССР, 235:2 (1977), 281-283.
5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, часть II (Наука, М., 1985).
6. Рудин У. Теория функций в полукруге (Мир, М., 1974).
7. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа (Наука, М., 1980).
8. Teodorescu N. La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique (Thèse, Paris, 1931).
9. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения (Наука, Н., 1990).
10. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques (Paris, 1926).
11. Gonchar A. A. On analytic continuation from the edge of wedge. // Ann. Acad. Sci. Fennical. Ser. AI: Mathem. 10, 221-225 (1985).

THE CONTROLLING PROBLEM FOR THE HEAT EXCHANGE EQUATION IN AN INHOMOGENEOUS ROD

Kuldoshova Maftuna Jumanazarovna,

Teacher of Shahrisabz branch of
Tashkent Institute of Chemical Technology
kuldoshovamaftuna6@gmail.com

Abstract. The issue of controlling the heat exchange process in a non-homogeneous boom is considered. The problem under consideration is put into a non-homogeneous equation of the parabolic type. A control function is placed at one end of the boom. The mathematical model of the problem is constructed. The existence and uniqueness of its solution is proved. The control function is found.

Keywords: parabolic equation, Laplace equation, eigenfunction, eigenvalue, initial condition, boundary condition.

УПРАВЛЯЮЩАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА В НЕОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Аннотация. Рассматривается задача управления процессом теплообмена в неоднородной штанге. Задача описывается неоднородным уравнением параболического типа. Управляющая функция помещена на один из концов штанги. Построена математическая модель задачи. Доказано существование и единственность её решения. Найдена управляющая функция.

Ключевые слова: параболическое уравнение, уравнение Лапласа, собственная функция, собственное значение, начальное условие, граничное условие.

BIR JINSLI BO'LMAGAN NOVDADA ISSIQLIK ALMASHISH TENGLAMASINI BOSHQARISH MUAMMOSI

Annotatsiya. Bir xil bo'lmagan bumda issiqlik almashinuvi jarayonini nazorat qilish masalasi ko'rib chiqiladi. Ko'rib chiqilayotgan masala parabolik tipdagi bir jinsli bo'lmagan tenglamaga qo'yiladi. Bomning bir uchida boshqaruv funksiyasi o'rnatilgan. Masalaning matematik modeli tuzilgan. Uning yechimining mavjudligi va o'ziga xosligi isbotlangan. Boshqarish funksiyasi topilgan.

Kalit so'zlar: parabolik tenglama, laplas tenglamasi, xos funksiya, xos qiymat, boshlang'ich shart, chegaraviy shart.

Introduction. Currently, the development of science and technology provides the opportunity not only to study, but also to control many processes. The study of many physical processes comes down to the study of differential equations and mathematical physics problems. A simple example of this is the problem of maintaining the temperature of a certain area at a certain temperature.

Literature analysis. Currently, the problems of controlling processes described by partial differential equations are being intensively studied. The first to engage in this direction was the French scientist J.L. Lions. Later, V. Barbu, A. Rascanu, G. Tessitore, H.O. Fattorini. A.V. Fursikov obtained a number of scientific results. Academician Sh. Alimov, who is conducting scientific research in this area, in his articles "On a control problem associated with the heat transfer process" (2010) and S. Albeverio, Sh. Alimov, "On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process" (2008), considered the issue of optimal control of the heat exchange process.

Z.K. Fayozova "Граничное управление процессом теплообмена" (2013) In the article, a governing function for the homogeneous heat dissipation equation is found. Y. E. Fayziyev, N. Xalilova "О задаче управления процессом теплопроводности" (2010) In the article, a governing function for the inhomogeneous heat dissipation equation is found. Scientific results [1], [2],[3],[4] given in works.

Research methodology. The article sets the initial boundary conditions for the inhomogeneous heat dissipation equation, as well as the conditions that maintain the average temperature of the rod over time at a given state. A control function is set at one end of the inhomogeneous rod, and methods of the spectral theory of differential operators and Millen substitution are used to find the function.

Analysis and results. In the following area

$D = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < l\}$ Let's look at the heat transfer equation and the boundary and initial conditions.

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l; t > 0; \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3)$$

here $k(x)$ function characterizing the composition of the stergen material,

$f(x, t)$ and the function of a heat source or absorber within the stent,

$\mu(t)$ heat control function on the edge of the rod,

$\varphi(x)$ - The initial state of the sturgeon.

(2) and (3) from the condition

$$u(0, 0) = \varphi(0) = \mu(0), \quad u(l, 0) = \varphi(l) = 0, \quad \text{equal to} \quad (4)$$

Management function

$\mu(t)$ We assume that is bounded:

$$|\mu(t)| \leq M. \quad (5)$$

Average temperature of sturgeon

$$\frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx = b(t) \quad (6)$$

We define it as (6) which indicates that the average temperature of the rod is maintained at a given value over time.

The problem is posed. $b(t)$ Let the function be given. Then it is

$\mu(t)$ It is necessary to find a control function such that problems (1)-(3) have a unique solution and this solution satisfies condition (6)

In solving this problem, we set the following requirements for the given functions.

$$k(x) \in C^1[0; l], \quad k(x) > k_0 > 0,$$

Theorem. Let our given functions belong to the following class

$$k(x) \in C^1[0; l], \quad k(x) > k_0 > 0, \quad \varphi \in C[0, l] \quad f(x, t) \in C[0; l] \times C(R_+) \quad \text{va}$$

$\mu \in C^1[0, +\infty]$. Then the solution to problem (1)-(4) exists and is unique.

Proof. To solve problems (1)-(3), we consider the following eigenvalue problem:

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right) = \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad \varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0. \quad (7)$$

It is known from the course on the spectral theory of differential operators that the eigenvalue problem (7) has a solution and that the solutions of this problem are

$\{\varphi_n(x)\}$ system of specific functions $L_2[0; l]$ forms an orthonormal basis in space, that is:

$$\int_0^l \varphi_n(y) \varphi_m(y) dy = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

$$G(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad (8)$$

(1)-(3) We express the general solution of the problem using the Green function

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ k(\xi) \frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right\} - \frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right] d\xi d\tau + \\ - \int_0^l G(x, \xi; t) \omega(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi; t) \phi(\xi) d\xi \quad (9)$$

$$\text{So, } u(x, t) = k(0) \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi; t) \phi(\xi) d\xi. \quad (10)$$

To solve the problem before us, we substitute expression (10) into condition (6).

$$\int_0^t \mu(\tau) \left\{ \frac{1}{l} k(0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) dx \right\} d\tau = b(t) - \\ - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx - \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t) \phi(\xi) d\xi dx \right\} d\tau.$$

To simplify the above equation, we introduce some notations.

$$K(t - \tau) = \frac{1}{l} k(0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \left\{ k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi; t - \tau) \right\} \Big|_{\xi=0} dx \\ F(t) = - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx \right\} d\tau, \\ \Phi(t) = - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t) \phi(\xi) d\xi dx \right\} d\tau.$$

Then we arrive at the following Volterra equation.

$$\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau = b(t) + F(t) + \Phi(t) \quad (11)$$

(11) We use Laplace transform to solve the equation:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \{ b(t) + F(t) + \Phi(t) \} dt,$$

Here $p = a + is$ - complex number. Then

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau \right) dt = \int_0^{+\infty} \mu(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\lambda} K(\lambda) d\lambda = \hat{\mu}(p) \hat{K}(p). \\ \int_0^{+\infty} e^{-pt} \{ b(t) + F(t) + \Phi(t) \} dt = \hat{b}(p) + \hat{F}(p) + \hat{\Phi}(p). \\ \hat{K}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) dt = \frac{1}{l} k(0) \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(0) \int_0^l \phi_n(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-pt - \lambda_n^2 t} dt \\ \hat{F}(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx \right\} d\tau dt$$

$$\widehat{\Phi}(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi dx \right\} dt d\tau.$$

So,

$$\widehat{\mu}(p) = \frac{\widehat{b}(p) + \widehat{F}(p) + \widehat{\Phi}(p)}{\widehat{K}(p)}. \quad (12)$$

(12) Performing the Mellin substitution in the equation $\mu(t)$ we find the function.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\widehat{b}(p) + \widehat{F}(p) + \widehat{\Phi}(p)}{\widehat{K}(p)} e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{b}(a+is) + \widehat{F}(a+is) + \widehat{\Phi}(a+is)}{\widehat{K}(a+is)} e^{(a+is)t} ds. \end{aligned}$$

The theorem has been proven.

Theorem. So

$M > 0$ find that the following conditions

$$\|b\|_{w_2^2(R_+)}^2 \leq M$$

and $b(0) = b'(0) = 0$ satisfies.

Proof. $\mu(t)$ We evaluate the function below.

$$|\mu(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{b}(i\xi) + \widehat{F}(i\xi) + \widehat{\Phi}(i\xi)|}{|\widehat{K}(i\xi)|} d\xi \leq \frac{1}{2\pi C_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(i\xi)| \sqrt{1 + \xi^2} d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(i\xi)| \sqrt{1 + \xi^2} d\xi \leq C_1 \|b\|_{w_2^2(R_+)}^2. \quad \text{The condition is reasonable. Therefore}$$

$$|\mu(t)| \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} \|b\|_{w_2^2(R_+)}^2 \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} M = 1$$

Here $M = \frac{2\pi C_0}{C_1}$ is equal.

The theorem is proved.

Conclusion. In the considered case, the rod is not homogeneous and a heat source is located inside the rod. In this case, to determine the average temperature of the rod, a control function was placed at one end of it and found.

Control function $k(x)$, $f(x, t)$ It also depends on the functions and they have the following condition

$$\dots k(x) \in C^1[0; l], k(x) > k_0 > 0, \varphi \in C[0, l] \quad f(x, t) \in C[0; l] \times C(R_+)$$

REFERENCES:

1. Alimov Sh., On a control problem associated with the heat transfer process. // Eurasian mathematical journal, Number 2 (2010), 17-30.
2. Albeverio S., Alimov Sh., On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process. // Applied Mathematics and Optimization, (2008)
3. Фаязова З.К. Граничное управление процессом теплообмена. // НУЗ. 2013.
4. Файзиов Ю.Э., Халилова Н. О задаче управления процессом теплопроводности. // Вестник НУЗ. 2016, С.49-54.

NOINFORMATIV KUZATUVLAR STATISTIK MODEL UCHUN KRAMÉR–RAO
BAHOSINING YANGI ISBOTI

Muradov Rustamjon Sobitxonovich,
Namangan davlat texnika universiteti,
Oliy matematika kafedrası mudiri,
Fizika-matematika fanlari doktori
rustamjonmuradov@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar juftligi orqali shakllanadigan o'ng tomondan tasodifiy senzuralangan model hamda unga mos ravishda kuzatiladigan minimumlar va senzuralanish indikatorlaridan iborat tanlanma tahlil qilinadi. Senzuralanish taqsimoti informativ bo'lmagan vaziyatda baholashga tegishli parametr uchun Fisher informatsiyasi aniqlanadi va Rao-Kramer quyi chegarasining muqobil isboti taqdim etiladi. Keltirilgan isbot senzuralangan kuzatuvlar uchun tuzilgan haqiqatga o'xshashlik funksiyasiga Koshi–Bunyakovskiy tengsizligini to'g'ridan-to'g'ri qo'llashga tayanadi, bunda tegishli regularlik shartlarining bajarilishi talab etiladi.

Kalit so'zlar: fisher informatsiyasi, informativ bo'lmagan senzuralanish modeli, Rao-Kramer quyi chegarasi.

НОВЫЙ ВЫВОД ОЦЕНКИ КРАМЕРА–РАО ДЛЯ МОДЕЛИ НЕИНФОРМАТИВНЫХ
НАБЛЮДЕНИЙ

Аннотация. В данной статье исследуется модель случайная цензурирования справа, формируемая парой независимых случайных величин, а также соответствующая выборка, состоящая из наблюдаемых минимумов и индикаторов цензурирования. В случае неинформативного распределения цензурирования определяется информация Фишера для оцениваемого параметра и приводится альтернативное доказательство нижней границы Рао–Крамера. Представленное доказательство основано на прямом применении неравенства Коши–Буняковского к функции правдоподобия для цензурированной выборки при выполнении необходимых регулярных условий.

Ключевые слова: информация Фишера, модель неинформативного цензурирования, нижняя граница Рао–Крамера.

A NEW DERIVATION OF THE CRAMÉR–RAO BOUND FOR A NONINFORMATIVE
OBSERVATION MODEL

Abstract. This paper examines a randomly right-censored model generated by a pair of independent random variables, along with the corresponding sample consisting of observed minima and censoring indicators. Under a noninformative censoring distribution, the Fisher information for the parameter of interest is derived, and an alternative proof of the Rao–Cramér lower bound is presented. The proof relies on a direct application of the Cauchy–Bunyakovsky inequality to the likelihood function of the censored sample, assuming the fulfillment of appropriate regularity conditions.

Keywords: Fisher information, noninformative censoring model, Rao–Cramér lower bound.

Kirish. Zamonaviy statistik tahlilda parametrlarni baholashning aniqligi va ishonchliligi nazariyasi markaziy o'rin tutadi, ayniqsa, kuzatuvlar to'liq yoki informativ bo'lmagan sharoitlarda. Amaliy tajriba shuni ko'rsatadiki, real ma'lumotlarning katta qismi senzuralangan, cheklangan yoki noaniq shaklda yig'iladi, bu esa klassik baholash usullarining samaradorligini keskin pasaytiradi. Shuning uchun bunday sharoitlarda Kramér–Rao quyi chegarasini qayta ko'rib chiqish va uning muqobil isbotlarini ishlab chiqish nazariy statistika hamda ishonchlilik tahlili uchun dolzarb masaladir. Noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao bahosining yangi isboti parametr bahosining eng yaxshi mumkin bo'lgan chegarasini aniqroq tushunishga yordam beradi va amaliy tadqiqotlarda, jumladan, tibbiyot statistikasi, iqtisodiy modellash, xavf tahlili va senzuralangan ma'lumotlar bilan ishlanadigan boshqa ko'plab sohalarda ahamiyatga ega.

Parametrlarni baholash nazariyasida Kramér–Rao quyi chegarasi statistik baholarning aniqligini baholashda fundamental mezon hisoblanadi. Ammo amaliy tahlillarda, xususan, omonatlik ma'lumotlari,

tsenzuralangan kuzatuvlar, ishonchlilik tahlili yoki yashirin jarayonlardan olingan ma'lumotlarda kuzatuvlar ko'pincha informativ bo'lmaydi yoki parametr haqida to'liq ma'lumot tashimaydi. Bunday sharoitda klassik Kramér–Rao tengsizligini qo'llash murakkablashadi va yangi yondashuvlar talab etiladi. Shu sababli, noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao bahosining alternativ yoki soddalashtirilgan isbotini ishlab chiqish nazariy statistika va amaliy ehtimollar nazariyasi uchun dolzarb ahamiyat kasb etadi. Bu izlanish statistik baholarning chegaraviy aniqligini to'g'ri talqin qilish, yangi baholash usullarini yaratish va mavjud metodlarni umumlashtirishda muhim metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

Faraz qilamiz, $(\Omega, \mathcal{A})$ o'lchovli fazoda aniqlangan o'za'ro bog'liqsiz ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari noma'lum skalyar ($s = 1$) θ parametr aniqligida berilgan bo'lsin:

$$F(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(\xi < x), \quad G(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(\eta < x), \quad \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{(1)}.$$

Biz bu taqsimotlar absoliot uzluksiz deb, ularning zichlik funksiyalarini mos ravishda $f(x; \theta)$ va $g(x; \theta)$ lar orqali belgilaymiz. Statistik model shundayki, unda (ξ, η) juftlik o'rniga (Z, δ) juftlik kuzatiladi, bu erda $Z = \min(\xi, \eta)$ va $\delta = I(Z = \xi)$. Bizni qiziqitiradigan ξ tasodifiy miqdor faqatgina $\xi \leq \eta$, ya'ni $\delta = 1$ bo'lgandagina kuzatiladi. Agar (X_i, Y_i) lar orqali (ξ, η) juftliklarning i - tajribadagi amaliy qiymatlarini belgilasak, u holda tajribalarning n -qadamida biz $\mathcal{C}^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ statistik tanlanmani kuzatamiz. Bu erda $Z_i = \min(X_i, Y_i)$ va $\delta_i = I(Z_i = X_i)$. Har bir (Z_i, δ_i) juftlik $(\mathbb{W} \times \{0, 1\}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ tanlanma fazoni yaratadi, bu erda $\mathbb{W}$ orqali Z ning qiymatlari to'plami, $\mathcal{U}$ orqali $A \times \{0\}$ va $B \times \{1\}$ ko'rinishdagi to'plamlar σ - algebrasini va $\mathcal{Y} = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ orqali esa $v(x, y)$ o'lchovga nisbatan daminirlangan, $\mathcal{U}$ da aniqlangan va (Z, δ) juftliklar yaratgan taqsimotlar oilasini belgilaymiz. Bu erda A va B lar $\mathbb{W}$ dagi Borel to'plamlari, $dv(x, y) = \Delta_y \times dx$ va Δ_y esa $y \in \{0, 1\}$ nuqtada aniqlangan sanovchi o'lchovdir. $\mathcal{C}^{(n)}$ tanlanmadagi har bir (Z_i, δ_i) juftlikka

$$k(x, y; \theta) = \left\{ f(x; \theta) \overline{G(x; \theta)} \right\}^y \left\{ g(x; \theta) \overline{F(x; \theta)} \right\}^{1-y} \quad (1)$$

zichlik funksiyasi mos keladi va bu erda $\overline{G} = 1 - G$, $\overline{F} = 1 - F$. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i f(x; \theta)}{\partial \theta^i}, & g^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i g(x; \theta)}{\partial \theta^i}, \\ \lambda^{(i)}(x; \theta) &= \frac{f^{(i)}(x; \theta)}{f(x; \theta)}, & \mu^{(i)}(x; \theta) &= \frac{g^{(i)}(x; \theta)}{g(x; \theta)}, \\ \overline{F}^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i \overline{F}(x; \theta)}{\partial \theta^i}, & \overline{G}^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i \overline{G}(x; \theta)}{\partial \theta^i}, \\ k^{(i)}(x, y; \theta) &= \frac{\partial^i k(x, y; \theta)}{\partial \theta^i}, & \varphi^{(i)}(\theta) &= \frac{d^i \varphi(\theta)}{d\theta^i}. \end{aligned}$$

$\mathcal{C}^{(n)}$ tanlanmadagi senzurlangan va senzurlanmagan X_i larning xissasini o'rganish maqsadida quyidagi subtaqsimotlarni aniqlaymiz:

$$F^*(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(Z < x, \delta = 1) = \int_{-\infty}^x \overline{G}(t; \theta) f(t; \theta) dt,$$

$$G^*(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(Z < x, \delta = 0) = \int_{-\infty}^x \bar{F}(t; \theta) g(t; \theta) dt.$$

Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, $\forall (x; \theta) \in \mathbb{R}^{(1)} \times \Theta$ uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$F^*(x; \theta) + G^*(x; \theta) = H(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(Z < x),$$

$$F^*(\infty; \theta) = \lim_{x \rightarrow \infty} F^*(x; \theta) = \mathbb{M}_\theta \delta, \quad G^*(\infty; \theta) = \lim_{x \rightarrow \infty} G^*(x; \theta) = \mathbb{M}_\theta (1 - \delta).$$

Endi o'ng tomondan tasodifiy senzurlanishning bir muhim xususiy holi – “proporsional intensivliklar modeli” (PIM) bilan tanishib o'tamiz.

1-Ta'rif. [6] (F, G) (yoki (ξ, η)) juftlik PIMni qanoatlantiradi deyiladi, agar shunday musbat o'zgarmas son β mavjud bo'lib, barcha $x \in \mathbb{R}^{(1)}$ lar uchun

$$\overline{G(x; \theta)} = \left(\overline{F(x; \theta)} \right)^\beta \quad (2)$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Ba'zida PIM ni Koziol-Griin modeli ham deb atashadi ([1-6] ga qarang). PIM ning eng muhim xarakteristik xossalardan biri unda kuzatilayotgan tanlanmadagi $(Z_1, \dots, Z_n)$ va $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligidir.

1-Teorema [1,4]. (F, G) juftlikning PIMni qanoatlantirishining zarur va yetarli sharti $Z = \min(\xi, \eta)$ va $\delta = I(Z = \xi)$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqsizligidan iboratdir.

Yuqorida senzurlovchi taqsimot funksiya G noma'lum θ parametr ga bog'liq bo'lgan, ya'ni informativ modelni qarab o'tdik. Endi bu taqsimot θ ga bog'liq emas deb hisoblaymiz. Bunday model informativ bo'lmagan senzurlanish modeli deb ataladi. Ushbu maqolada biz Kramer-Rao tengsizligining boshqacha isbotini keltiramiz.

Demak, faraz qilamiz, ξ va η tasodifiy miqdorlar $F(x; \theta)$ va $G(x)$ taqsimot funksiyalari bilan berilgan bo'lib, θ -skalyar parametr, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{(1)}$ bo'lsin. Kuzatiladigan $C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ tanlanmaga mos kelgan birgalikdagi zichlik funksiya

$$k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) = \prod_{i=1}^n k(Z_i, \delta_i; \theta) \text{ da } (x, y) \in \mathbb{R}^{(1)} \times \{0, 1\} \text{ uchun}$$

$$k(x, y; \theta) = \left[f(x; \theta) \overline{G(x)} \right]^y \cdot \left[g(x) \overline{F(x; \theta)} \right]^{1-y},$$

$$\text{bo'lib, bu erda } f(x; \theta) = \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial x}, g(x) = \frac{dG(x)}{dx} ..$$

Bu holda $C^{(n)}$ mos Fisher informatsiyasi $I_n(\theta) = nI(\theta)$ bo'lib, bu erda

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \overline{G(x)} dF(x; \theta) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln \bar{F}(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \overline{F(x; \theta)} dG(x).$$

Tanlanma fazoni $\mathcal{Y}^{(n)} = \left[\mathbb{R}^{(1)} \times \{0, 1\} \right]^{(n)}$ orqali belgilab olib, quyidagi regulyarlik shartlarini keltiramiz:

(I)' $\{x: 0 < F(x; \theta) < 1\}$ to'plam ga bog'liq emas.

(II)', $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$ va $\frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta}$ hosilalar mavjud bo'lib,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(x)} dF(x; \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G(x)} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(x; \theta)} dG(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta} dG(x), \\ \lim_{\Delta_n \downarrow 0} \frac{1}{\Delta_n^2} \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \frac{[k_n(x; \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(x; \bar{y}; \theta)]^2}{k_n(\bar{x}; \bar{y}; \theta)} d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) &= \\ &= \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \left(\frac{\partial \ln k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot k_n(\bar{x}; \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

- tengliklar o'rinli.

(III)' Barcha $\theta \in \Theta$ uchun $0 < I(\theta) < \infty$ va θ ning bahosi θ_n uchun $0 < d_n(\theta) = \mathbb{M}_{\theta}(\theta_n - \theta)^2 < \infty$.

2-Teorema. Agar (I)-(III)' shartlar bajarilsa, u holda θ ning ixtiyoriy siljimagan bahosi θ_n uchun barcha $\theta \in \Theta$ larda

$$d_n(\theta) \geq I_n^{-1}(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)}. \quad (3)$$

Isboti. $\mathbb{M}_{\theta} \theta_n = \theta$ ekanligidan,

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \theta_n(\bar{x}, \bar{y}) k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = \theta,$$

va

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \theta_n(\bar{x}, \bar{y}) k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = \theta + \Delta_n.$$

Bu erdan va barcha $\theta \in \Theta$ uchun $\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ tenglikdan

$$\Delta_n = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} [\theta_n - \theta] [k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)] d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}). \quad (4)$$

Endi (3) da Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llasak,

$$\Delta_n^2 \leq d_n(\theta) \cdot \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \frac{[k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)]^2}{k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)} d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Bu tengsizlikda (III)' shartni qo'llasak,

$$d_n(\theta) \geq \left\{ \int_{\mathcal{O}^{(n)}} \left(\frac{\partial \ln k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) \right\}^{-1} = I_n^{-1}(\theta),$$

ya'ni (3) kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Yakuniy natijalar shuni ko'rsatadiki, noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao quyidagi chegarasining yangi isboti klassik yondashuvning qo'llanish doirasini kengaytiradi va baholash nazariyasida aniqlilik mezonlarini yanada chuqurroq tushunishga yordam beradi [8-10]. Biroq ushbu yo'nalishda hali bir qator ochiq masalalar mavjud, masalan, umumlashtirilgan informativlik o'lchovlarini ishlab chiqish, senzuralangan va yarim-senzuralangan modellar uchun Kramér–Rao tengsizligining yanada boshqa variantlarini aniqlash, shuningdek, bog'liq kuzatuvlar ostida Kramér–Rao bahosining mavjudligi va barqarorligini o'rganish. Kelgusidagi tadqiqotlar ushbu bo'shliqlarni to'ldirishga, noinformativ ma'lumotlar uchun optimal baholovchi sinflarini tavsiflashga va amaliy modellashtirishda yanada samarali statistik metodlarni ishlab chiqishga qaratilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Абдушукуров А.А., Ким Л.В. Нижние границы Крамера-Рао и Баттачария при случайном цензурировании наблюдений. // сб. Вероятностные распределения и математическая статистика.-Ташкент: ФАН, 1986, с.20-40.
2. Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press. 1946.
3. Rao, C.R. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. // *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*. 1945.
4. Abdushukurov A.A., Kim L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattachariya bounds for randomly censored observations. // *J.Soviet. Math*. 1987. v.5.p2171-2185.
5. Lehmann, E.L., & Casella, G. *Theory of Point Estimation*. Springer. 1998.
6. Абдушукуров А.А. Об эффективности статистических оценок при случайном цензурировании наблюдений и новые оценки в модели пропорциональных интенсивностей. // Дис. канд.физ.-мат.наук.-Ташкент. 1989.-151с.
7. Van der Vaart, A. W. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press. 1998.
8. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений: асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей.-Ташкент: Университет. 2009. 269 с.
9. Ibragimov, I.A., & Has'minskii, R.Z. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Springer. 1981.
10. Ghosh, A., Basu, A., & Martin, R. Robust alternative to the Fisher information. *Statistical Papers*. 2016.

FRACTIONAL PARABOLIC SYSTEMS OF VECTOR ORDER WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Sulaymonov Ilyoskhujab Abdirasul ugli,
National university of Uzbekistan and
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences
ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Abstract. The paper considers the Cauchy problem for the system of partial differential equations of fractional order $\partial_t^\beta U(t, x) + \mathbb{A}(D)U(t, x) = H(t, x)$. Here U and H are vector-functions, the $m \times m$ matrix of differential operators $\mathbb{A}(D)$ is triangular (elements above or below the diagonal are zero). Operators located on the diagonal are elliptic. The main distinctive feature of this system is that the vector-order β has different components $\beta_j \in (0, 1]$, and β_j are not necessarily rational. Sufficient conditions (in some cases they are necessary) on the initial function and the right-hand side of the equation are found to ensure the existence of a classical solution.

Key words: system of fractional vector-order differential equation, matrix symbol, elliptic operators, classical solution.

ДРОБНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В статье рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений дробного порядка $\partial_t^\beta U(t, x) + \mathbb{A}(D)U(t, x) = H(t, x)$, здесь U и H — вектор-функции, а матрица дифференциальных операторов размера $m \times m$ — $\mathbb{A}(D)$ является треугольной (элементы выше или ниже диагонали равны нулю). Операторы, расположенные на диагонали, являются эллиптическими. Главной отличительной особенностью этой системы является то, что вектор порядка β имеет различные компоненты $\beta_j \in (0, 1]$, причём β_j не обязательно являются рациональными. Найдены достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия на начальную функцию и правую часть уравнения, обеспечивающие существование классического решения.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений дробного векторного порядка, символ матрицы, эллиптические операторы, классическое решение.

VEKTOR TARTIBLI RIMAN-LIUVILL KASR HOSILALI PARABOLIK TENGLAMALAR SISTEMASI

Annotatsiya. Ushbu ishda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi $\partial_t^\beta U(t, x) + \mathbb{A}(D)U(t, x) = H(t, x)$ uchun Koshi masalasi ko'rib chiqiladi. Bu yerda U va H — vektor-funksiyalar, $\mathbb{A}(D)$ matritsa $m \times m$ o'lchamli differensial operatorlardan tashkil topgan uchburchak (diagonaldan yuqoridagi yoki pastidagi elementlar nol) matritsa. Diagonalda joylashgan operatorlar elliptikdir. Sistemaning asosiy farqli jihati shundaki, β vektor-tartib turli $\beta_j \in (0, 1]$, komponentalarga ega va β_j lar ratsional bo'lishi shart emas. Klassik yechimning mavjud bo'lishini ta'minlash uchun boshlang'ich funksiya va tenglamaning o'ng tomoniga yetarli (ba'zi hollarda esa zarur) shartlar topilgan.

Kalit so'zlar: vektor-tartibli kasr hosilali differensial tenglamalar sistemasi, matritsa simboli, elliptic operatorlar, klassik yechim.

Introduction. In the study of differential equation systems, an important problem is to construct explicit solution formulas. For systems of ordinary fractional differential equations, such representations are relatively easy to obtain (see [1], [2]).

S. Umarov recently developed general solution formulas for various fractional systems [3, 4, 5]. In particular, [5] presents new results even for classical fractional systems and provides an explicit solution representation for the Cauchy problem:

$$\begin{aligned}\partial_t^\beta U(t, x) + \mathbb{A}(D)U(t, x) &= H(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{\beta-1} U(t, x) &= \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

where $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\beta = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \rangle$, $\beta_j \in (0, 1]$, $j = 1 \dots m$, $\mathbb{A}(D) = \{A_{i,j}(D)\}$ is a $m \times m$ matrix whose elements are pseudo-differential operators, $\Phi(x) = \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x) \rangle$, $H(t, x) = \langle h_1(t, x), h_2(t, x), \dots, h_m(t, x) \rangle$, are a given vector-functions, $U(t, x) = \langle u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_m(t, x) \rangle$, is an unknown vector-function and $\partial_t^\beta U(t, x) = \langle \partial_t^{\beta_1} u_1(t, x), \partial_t^{\beta_2} u_2(t, x), \dots, \partial_t^{\beta_m} u_m(t, x) \rangle$, is the fractional order derivative of order $0 < \beta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$ in the sense of Riemann-Liouville, which for any continuous function $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as (see, for example [6], p. 71):

$$\partial_t^{\beta_j} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta_j)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t - \xi)^{\beta_j}} d\xi, \quad t > 0,$$

provided that the right side is pointwise defined on $\mathbb{R}_+$.

The components β_j of the order vector β are arbitrary real numbers in $(0, 1]$. When all $\beta_j = \beta$, the solution has a simpler form [4], and rational β_j reduce to this case.

In [5], the solution $U(t, x)$, initial data $\Phi(x)$, and source term $H(t, x)$ are taken from the class Ψ of functions with compactly supported Fourier transforms. This ensures transform applicability but limits generality due to the narrowness of Ψ and the broad class of operators $\mathbb{A}(D)$.

The work [7] addresses this by establishing conditions under which classical solutions exist, assuming $\beta_j = \beta$.

The aim of this work is to establish a solution representation when the vector of fractional derivative orders β has arbitrary components $\beta_j \in (0, 1]$. To this end, we consider a lower triangular matrix of differential operators with constant coefficients:

$$\mathbb{A}(D) = \{A_{i,j}(D)\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}, \quad \text{where } A_{i,j}(D) = 0 \text{ for } j > i, \quad \text{where } A_{i,j}(D) = \sum_{|\alpha| \leq l_{i,j}} a_\alpha D^\alpha, \quad \text{and}$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \text{ The matrix-symbol is defined as } \mathcal{A}(\xi) = \{A_{i,j}(\xi)\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}, \quad \text{where } A_{i,j}(\xi) = 0 \text{ for } j > i.$$

We assume that each diagonal operator $A_{j,j}(D)$, $j = 1, \dots, m$, is a homogeneous elliptic operator of the highest order among all $A_{i,j}(D)$, i.e., $l_{j,j} > l_{i,j}$, $\forall i \neq j$.

Define:

$$p^* = \max_{1 \leq j \leq m} \{l_{j,j}\}. \quad (1)$$

Recall that a homogeneous differential operator $A(D) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha D^\alpha$ is called elliptic if its symbol $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \xi^\alpha > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Let B be a Banach space. We define the space $\mathbf{B} = B \otimes \dots \otimes B$ (m times) consisting of vector functions $\Phi(x) = \langle \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \rangle$, where $\varphi_j(x) \in B$. The norm in $\mathbf{B}$ is given by:

$$\|\Phi\|_{\mathbf{B}}^2 = \|\varphi_1\|_B^2 + \dots + \|\varphi_m\|_B^2.$$

The space $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{B})$ denotes the space of vector-valued functions continuous on $[0, T]$ with values in $\mathbf{B}$.

The object of study in this work is the following problem.

Initial-Boundary Value Problem. Find functions $u_j(t, x) \in L_2^{q_j}(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0, T]$, $j = 1, \dots, m$ (note that this inclusion is considered as a boundary condition at infinity), such that

$$U(t, x) \in \mathbf{C}([0, T] \times \mathbb{R}^n), \partial_t^\beta U(t, x) \text{ and } \mathbb{A}(D)U(t, x) \in \mathbf{C}((0, T] \times \mathbb{R}^n), \quad (2)$$

and satisfying the Cauchy problem

$$\partial_t^\beta U(t, x) + \mathbb{A}(D)U(t, x) = H(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{\beta-1} U(0, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

where $H(t, x)$ and $\Phi(x)$ are given continuous functions.

The solution to an initial-boundary value problem from class (2) is usually called a *classical solution*.

a. Preliminaries. The Fourier transform of a function $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denoted as $F[f](\xi)$, is defined as follows:

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The inverse Fourier transform is denote by $F^{-1}[f](x)$ and is defined by the following integral:

$$F^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

If $f(x)$ is a function that is smooth enough and decays rapidly as $|x|$ goes to infinity, then the operation of the operator $A(D)$ on this function can be expressed as:

$$A(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} A(\xi) F[f](\xi) e^{-ix\xi} d\xi \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Therefore for such a function one has

$$F[A(D)f(x)](\xi) = A(\xi)F[f](\xi). \quad (5)$$

The classical Laplace transform is defined by the following integral formula:

$$L[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

provided that the function f (the Laplace original) is absolutely integrable on the semi-axis $\mathbb{R}_+$. The inverse Laplace transform is defined by the following integral formula:

$$L^{-1}[g](y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{ic}} e^{sy} L[f](s) ds.$$

where $\mathcal{L}_{ic} = (c - i\infty, c + i\infty)$, $c > \sigma_s$.

The Laplace transform of the Riemann-Liouville derivative of a function $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, is (see [6], p. 84):

$$\begin{aligned} L[\partial_t^\beta \langle f_1, \dots, f_m \rangle](s) &= \langle L[\partial_t^{\beta_1} f_1](s), \dots, L[\partial_t^{\beta_m} f_m](s) \rangle = \\ &= \langle s^{\beta_1} L[f_1](s) - I_t^{1-\beta_1}(f_1)(0+), \dots, s^{\beta_m} L[f_m](s) - I_t^{1-\beta_m}(f_m)(0+) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

where $I_t^{\beta_j}$ are Riemann-Liouville fractional derivative and integral, respectively and defined as:

$$I_t^{\beta_j} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta_j)} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{1-\beta_j}} d\xi, \quad t > 0.$$

Recall that the Mittag-Leffler function $E_{\rho, \mu}(t)$ is defined as follows:

$$E_{\beta, \mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \quad \beta > 0, \mu \in \mathbb{C}.$$

Lemma 1. (see, for example, [6], p. 50) The Laplace transform of the Mittag-Leffler function is as follows:

$$L[t^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-\lambda t^\beta)](s) = \frac{1}{s^\beta + \lambda}.$$

The convolution of $f(t)$ and $g(t)$ is written as " $f * g$ " and is defined as follows

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Laplace transform of convolution equal to this:

$$L[f * g](s) = L[f](s) L[g](s). \quad (7)$$

Formal solution of Initial-Boundary Value Problem. In this section, following the work of S. Umarov [5], we will construct a formal solution to the problem (3)-(4).

Applying Fourier-Laplace transform to the problem (3)-(4) we get the recurrent equation:

$$L[F[u_1]](s, \xi) = \frac{1}{s^{\beta_1} + A_{1,1}(\xi)} F[\varphi_1](\xi), \quad (8)$$

$$L[F[u_k]](s, \xi) = \frac{F[\varphi_k](\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_{k,j}(\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} L[F[u_j]](s, \xi), \quad k = 2, \dots, m. \quad (9)$$

Before solving these equations, we consider the following sets.

Let $G_{k,j} = \{k, k-1, \dots, k-j\}$ be a set, where $1 \leq k \leq m$ and $1 \leq j \leq k-1$. By $G_{k,j}^{(h)}, 0 \leq h \leq j-1$ we denote subsets of $G_{k,j}$ which formed by excluding h elements except for k and $k-j$ elements of the set. For example, let $k=6, j=3$. Then $G_{k,j} = \{6, 5, 4, 3\}$ and $G_{k,j}^{(0)} = G_{k,j}$, $G_{k,j}^{(1)} = \{\{6, 5, 3\}, \{6, 4, 3\}\}$ and $G_{k,j}^{(2)} = \{6, 3\}$.

From (8) and the recurrence equation (9), we have:

$$L[F[u_k]](s, \xi) = \frac{F[\varphi_k](\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{P_{k,j,r}(\xi)}{\prod_{\tau \in G_{k,k-j}^{(r)}} (s^{\beta_\tau} + A_{\tau,\tau}(\xi))} F[\varphi_{k-j}](\xi), \quad (10)$$

where $P_{k,j,r}(\xi), k=2, \dots, m, j=1, \dots, k-1$, are combinations of multiplication and sum of functions $A_{\mu,\nu}(\xi), \mu=2, \dots, k, \nu=1, \dots, j-1$.

Applying the inverse Laplace transform to (8) and (10), we get:

$$\begin{aligned} F[u_1](t, \xi) &= E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi)t^{\beta_1})F[\varphi_1](\xi), \\ F[u_k](t, \xi) &= E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi)t^{\beta_k})F[\varphi_k](\xi) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi)t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right) \right] F[\varphi_{k-j}](\xi), \end{aligned}$$

where

$$V_{k,j,r}(t, \xi) = * \prod_{\tau \in G_{k,k-j}^{(r)}, \tau \neq k-j} t^{\beta_\tau - 1} E_{\beta_\tau, \beta_\tau}(-A_{\tau,\tau}(\xi)t^{\beta_\tau}).$$

Here "*" is the convolution operation, and " $* \prod$ " is the convolution product. Thus, the solution of the Cauchy problem (3)-(4) has the representation when $H(t, x) \equiv 0$:

$$U(t, x) = S(t, D)\Phi(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

where $S(t, D)$ stands for the pseudo-differential matrix operator with the matrix-symbol $S(t, \xi)$:

$$s_{k,j}(t, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi)t^{\beta_k}) & \text{if } k = j, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi)t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right) \right] & \text{if } k > j. \end{cases}$$

If $H(t, x) \not\equiv 0$, then the representation of a formal solution to problem (3)-(4) is obtained from (11) and the fractional Duhamel principle [8, 9]. The solution takes the following form:

$$U(t, x) = S(t, D)\Phi(x) + \int_0^t S(\eta, D) \partial_t^{1-\beta} H(t-\eta, x) d\eta.$$

Let us also introduce the pseudo-differential operator $S'(\eta, D)$, the entries of the matrix-symbol $S'(\eta, \xi)$, which have the form:

$$s'_{k,j}(\eta, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ \eta^{\beta_k-1} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) \eta^{\beta_k}) & \text{if } k = j, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(\eta^{\beta_{k-j}-1} E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) \eta^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(\eta, \xi) \right) \right] & \text{if } k > j. \end{cases}$$

Lemma 2. (see, for example, [10]) The following equality holds:

$$\int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta = \int_0^t S(\eta, D) \partial_t^{1-\beta} H(t-\eta, x) d\eta,$$

where 1 is a m dimensional vector.

Using Lemma 2, we can rewrite the formal solution of problem (3)-(4) in the following form:

$$U(t, x) = S(t, D) \Phi(x) + \int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Main theorem. Before presenting the main theorem, we show that the formal solution (12) constructed in the previous section satisfies all the requirements of Initial-Boundary Value Problem. Let us start by checking the convergence of the expression $\mathbb{A}(D)U(t, x)$. Note that each $u_i(t, x), i=1, \dots, m$ is subject to operators from the column i of the given matrix $\mathbb{A}(D)$. For example, the operators $A_{1,1}(D), A_{2,1}(D), \dots, A_{m,1}(D)$ act on $u_1(t, x)$.

Let us denote (see (12)):

$$U(t, x) = W(t, x) + Y(t, x),$$

where

$$W(t, x) = S(t, D) \Phi(x), \quad Y(t, x) = \int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n.$$

We estimate expressions $W(t, x)$ and $Y(t, x)$ separately. Let $w_i(t, x)$ and $y_i(t, x)$, where $i=1, \dots, m$, be the entries of the vector functions $W(t, x)$ and $Y(t, x)$, respectively.

To investigate $w_i(t, x), i=1, \dots, m$, it is sufficient to consider the following integrals:

$$w_{1,R}(t, x) = \int_{|\xi| < R} E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi) t^{\beta_1}) \hat{\varphi}_1(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

$$w_{k,R}(t, x) = \int_{|\xi| < R} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) t^{\beta_k}) \hat{\varphi}_k(\xi) e^{-ix\xi} d\xi + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{|\xi| < R} Q_{k,j,r}(t, \xi) \hat{\varphi}_{k-j}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

where $k=2, \dots, m$ and

$$Q_{k,j,r}(t, \xi) = P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right).$$

We have the following statement.

Lemma 3. 1) To estimate all coefficients before each $\hat{\varphi}_i(\xi)$, it suffices to estimate $A_{q,q}(\xi) Q_{m,m-i,0}(t, \xi)$, $q=1, \dots, m$.
2) This estimate is given by

$$|A_{q,q}(\xi) Q_{m,m-i,0}(t, \xi)| \leq C_{\beta_1, \dots, \beta_m, \varepsilon} |\xi|^{p^* - l_{i,i} + (m-i)\varepsilon} t^{\varepsilon \sum_{j=i+1}^m \beta_j - \beta_i},$$

where p^* is defined in (1), and $\varepsilon \in (0,1)$ is arbitrary.

The proof of this lemma follows from mathematical induction (see [10]).

Now set $\tau > n/2$ and choose $\varepsilon > 0$ such that $\tau - (m-i)\varepsilon > n/2$. Then applying Lemma 3 and using the Holder inequality we get:

$$\|A_{q,q}(D) w_{k,R}(t, x)\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^k C_{\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon} t^{\varepsilon \sum_{j=i+1}^k \beta_j - \beta_i} \|\varphi_i\|_{L_2^{\tau + p^* - l_{i,i}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (13)$$

Let us now estimate expressions $y_i(t, x), i=1, \dots, m$. To do this it is sufficient to consider the following functions:

$$y_{1,R}(t, x) = \int_{0 \leq |\xi| < R} \int_0^t \eta^{\beta_1-1} E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi) \eta^{\beta_1}) \hat{h}_1(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta,$$

$$y_{k,R}(t, x) = \int_{0 \leq |\xi| < R} \int_0^t \eta^{\beta_k-1} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) \eta^{\beta_k}) \hat{h}_k(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{0 \leq |\xi| < R} \int_0^t S_{k,j,r}(\eta, \xi) \hat{h}_{k-j}(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta,$$

where $k=2, \dots, m$ and

$$S_{k,j,r}(\eta, \xi) = P_{k,j,r}(\xi) \left(\eta^{\beta_{k-j}-1} E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) \eta^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(\eta, \xi) \right).$$

Lemma 4. 1) To estimate all coefficients before each $\hat{h}_i(t-\eta, \xi)$, it suffices to estimate only $A_{q,q}(\xi) S_{m,m-i,0}(\eta, \xi)$, $q=1, \dots, m$.

2) This estimate reads:

$$|A_{q,q}(\xi) S_{m,m-i,0}(\eta, \xi)| \leq C_{\beta_1, \dots, \beta_m, \varepsilon} |\xi|^{p^* - l_{i,i} + (m-i)\varepsilon} \eta^{\sum_{j=i}^m \beta_j},$$

where p^* is defined in (1) and $\varepsilon \in (0,1)$ is arbitrary.

This lemma is proved analogously as Lemma 3 (see [10]).

Now set $\tau > n/2$ and choose $\varepsilon > 0$ such that $\tau - (m-i)\varepsilon > n/2$. Then applying Lemma 4 and using the Holder inequality we get:

$$\|A_{q,q}(D)y_{k,R}(t, x)\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=1}^k C_{\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon, \tau} \max_{t \in [0, T]} \|h_i(t, \cdot)\|_{L_2^{\tau + p^* - l_{i,i}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (14)$$

Based on the proven estimates (13), (14), the following main result of the work:

Theorem 1. Let $\tau > \frac{n}{2}$ and $\varphi_i(x) \in L_2^{\tau + p^* - l_{i,i}}(\mathbb{R}^n)$, $i=1, \dots, m$ and $h_i(t, x) \in L_2^{\tau + p^* - l_{i,i}}(\mathbb{R}^n)$, $i=1, \dots, m$.

Then the solution of Initial-Boundary Value Problem exists and is unique, and the solution of this problem has the representation (12).

Remark 1. If all diagonal operators $A_{j,j}(D)$ have the same order, then $p^* - l_{i,i} = 0$, and the condition for initial data and source terms reduces to: $\varphi_j, h_j(t, x) \in L_2^\tau(\mathbb{R}^n)$, $\tau > \frac{n}{2}$. This ensures continuity by the Sobolev embedding theorem. The condition $\tau > \frac{n}{2}$ is sharp, as unbounded functions may exist when $\tau = \frac{n}{2}$.

REFERENCES:

1. V. Daftardar-Gejji, A. Babakhani. Analysis of a system of fractional differential equations // *Journal of Mathematical Analysis and Application* – 2004. Vol. 293, pp. 511-522.
2. V.K. Veber. The structure of general solution of the system $y(\alpha) = Ay$, $0 < \alpha \leq 1$ // *Trudy Kirgiz. Gos. University Ser. Mat. Nauk, Vyp* – 1976. Vol. 11, pp. 26-32.
3. S.R. Umarov, R.R. Ashurov, Y.Q. Chen. On a method of solution of systems of fractional pseudo-differential equations // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2021. Vol. 24, pp. 254-277.
4. S.R. Umarov. Representations of solutions of systems of time-fractional pseudodifferential equations // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2024. Vol. 27, pp. 616-651.
5. S.R. Umarov. Representations of solutions of time-fractional multi-order systems of differential-operator equations // *Fractal Fractional* – 2024. Vol. 8, pp. 1-37.
6. A.A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* // Elsevier, Amsterdam – 2006.
7. R.R. Ashurov, O.T. Mukhiddinova. On systems of fractional nonlinear partial differential equations // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2025. Vol. 28, pp. 2167-2197.

8. S.R. Umarov. *On fractional Duhamel's principle and its applications* // *Journal of Differential Equations* – 2012. Vol. 251, pp. 5217–5234.
9. S.R. Umarov. *Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols* // Springer – 2015.
10. R.R. Ashurov, I.A. Sulaymonov. *Fractional parabolic systems of vector order* // *Journal of Mathematical Sciences* – 2024. Vol. 284, pp. 179-195.

FRAKTAL TUZILISHGA EGA BO'LGAN G'OVAK MUHITLARDAN ANOMAL MODDAN KO'CHISHI MASALASIDAGI HOSILA TARTIBINI TIKLASH

Xolliyev Faxriddin Boxodirovich,

Termiz davlat universiteti

«Kompyuter va dasturing injiniring» kafedrasi o'qituvchisi

surxon88@bk.ru

Annotatsiya. Maqolada fraktal tuzilishga ega bo'lgan g'ovak muhitlarda kuzatiladigan anomal moddadan ko'chish jarayonlarini tasvirlovchi kasr tartibli differensial modelda hosila tartibini tiklash masalasi ko'rib chiqiladi. Bunday modellarda funksiyalarning hosila tartibini aniqlash ko'pincha murakkab yoki amaliy jihatdan imkonsiz bo'lganligi sababli, parametrlarni aniqlash va modellashtirish aniqligini oshirish uchun hosilalarsiz optimallashtirish yondashuvlaridan foydalanish talab etiladi. Kasr tartibli hosilalar tartibini tiklash uchun samarali natija beruvchi Nelder–Mead simpleks algoritmining qo'llanishi tahlil qilinadi. O'rganilayotgan masala funksionalni minimallashtirish orqali hosila tartibi va model parametrlarini aniqlash imkonini berib, anomal moddadan ko'chishi jarayonining matematik tavsifini aniqlashtirishda barqaror va amaliy vosita sifatida namoyon bo'ladi.

Kalit so'zlar: anomal moddadan ko'chishi, fraktal g'ovak muhit, kasr tartibli hosila, hosila tartibini baholash, Nelder–Mead usuli, kasr tartibli differensial tenglamalar, optimallashtirish usullari, parametrlarni identifikatsiya qilish.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОРЯДКА ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧЕ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Аннотация. В статье рассматривается задача восстановления порядка производной в дробной дифференциальной модели, описывающей аномальные процессы переноса вещества, наблюдаемые в пористых средах с фрактальной структурой. Поскольку определение порядка производных функций в таких моделях часто является сложным или практически невозможным, для определения параметров и повышения точности моделирования требуется использование подходов к оптимизации без производных. Анализируется применение симплексного алгоритма Нельдера-Мида, дающего эффективный результат восстановления порядка дробных производных. Исследуемая задача представляет собой устойчивый и практический инструмент для уточнения математического описания процесса аномального переноса вещества, позволяющий определить порядок производной и параметры модели путем минимизации функционала.

Ключевые слова: аномальный перенос вещества, фрактальная пористая среда, дробная производная, оценка порядка производной, метод Нельдера-Мида, дробные дифференциальные уравнения, методы оптимизации, идентификация параметров.

RECOVERY OF DERIVATIVE ORDER IN THE ANOMALOUS MASS TRANSFER PROBLEM IN FRACTAL POROUS MEDIA

Abstract. The article examines the problem of restoring the order of the derivative in a fractional differential model describing anomalous solute transport processes observed in porous media with a fractal structure. Since determining the order of derivative functions in such models is often complex or practically impossible, it is necessary to use optimization approaches without derivatives to determine parameters and improve modeling accuracy. The application of the Nelder–Mead simplex algorithm, which gives an effective result in restoring the order of fractional derivatives, is analyzed. The problem under study represents a stable and practical tool for refining the mathematical description of the anomalous solute transport process, allowing for determining the order of the derivative and model parameters by minimizing the functionality.

Keywords: anomalous mass transfer, fractal porous medium, fractional derivative, derivative order estimation, Nelder-Mead method, fractional differential equations, optimization methods, parameter identification.

Kirish. So'nggi yillarda g'ovak muhitlarda modda ko'chish jarayonlarini tavsiflovchi matematik modellar, ayniqsa, fraktal tuzilishga ega murakkab fraktal muhitlarda anomal modda ko'chishi bilan bog'liq masalalar ilmiy tadqiqotchilarning alohida e'tiborini tortmoqda. Bunga bir nechta omillar sabab bo'lib, ulardan eng muhimi shundan iboratki, real g'ovak muhitlarning tuzilishida kuzatiladigan fraktallik klassik diffuziya tenglamalari bilan yetarli darajada tadqiq etishni qiyinlashtiradi. Moddaning makroskopik darajadagi sekinlashgan yoki tezlashgan ko'chishi ko'pincha kasr tartibli differensial tenglamalar orqali ifodalanadi, ularning parametrlaridan biri bo'lgan hosila tartibi fizik jarayonning chuqur ichki xususiyatlarini belgilab beradi.

Fraktal tuzilishga ega bo'lgan g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishni o'rganishning amaliy qo'llanish sohasi nihoyatda keng: 1) geofizik jarayonlarda suyuqlikning murakkab qatlamlar bo'ylab tarqalishi, 2) gidrogeologik muhitlarda ifloslantiruvchi moddalarning tarqalish tezligini baholash, 3) kimyo-texnologik tizimlarda diffuziya jarayonlari, 4) neft-gaz konlarida filtratsiya va kollektor xossalari aniqlash, 5) ekologik monitoring, 6) biologik to'qimalardagi modda almashinuvi, 7) materialshunoslikda g'ovak strukturalarning o'tkazuvchanlik xususiyatlarini tahlil qilish va boshqalar. Mazkur jarayonlarning fraktal tabiati ularni tavsiflovchi tenglamalarning ko'pincha teskari va nekorrekt masalalar turkumiga kirishiga olib keladi.

Hosila tartibini tiklash masalasi ham shunday murakkab teskari masalalardan biri bo'lib, u kasr tartibli differensial tenglamalarda mavjud bo'lgan fizik parametrning bevosita kuzatishlarga asoslanib aniqlanishini talab qiladi. Zamonaviy sonli metodlarning rivojlanishi, fraktal geometriya asosidagi modellar paydo bo'lishi, hisoblash texnologiyalarining takomillashuvi anomal ko'chishning murakkab teskari masalalarini samarali yechishga yo'l ochmoqda.

Kasr hosilalar bilan ifodalangan modellar real fizik jarayonlarning murakkab xususiyatlarini aniqroq aks ettiradi. Biroq, bunday modellar uchun kasr tartibli hosilalarning parametrlari va tartiblarini aniqlash masalalari, ayniqsa, teskari qo'yilishdagi tadqiqotlar nazariy va amaliy jihatdan murakkab bo'lib, fanning ko'plab sohalarida hali yetarlicha o'rganilmagan. Bir o'lchovli va ikki o'lchovli kasr tartibli diffuziya tenglamasining koeffitsiyentini aniqlash uchun teskari masalalar [1, 2, 3, 4, 5, 6] ishlarda o'rganilgan.

Ushbu maqolada fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishi tenglamalaridagi kasr tartibli hosilaning tartibini kuzatuv ma'lumotlari asosida tiklash, ya'ni hosila tartibini aniqlash bo'yicha teskari masalani ishlab chiqish va uni tahlil qilishdir.

1. Masalaning qo'yilishi. Ikki zonadan iborat bo'lgan fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitda moddaning anomal ko'chishi tenglamalari uchun teskari masala qaralgan. Birjinslimas muhit fraktal tuzilishga ega bo'lsa modda ko'chishi tenglamalari ham fraktal o'lchamga bog'liq tarzda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Modda ko'chishi tenglamalari aynan kasr hosilali ko'rinishda bo'lsa tajriba natijalariga yaxshiroq mos kelishi ko'rsatilgan. Ikki zonadan iborat bo'lgan fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitda modda ko'chishi jarayoni quyidagi kasr hosilali tenglamalar yordamida yoziladi [7-9].

Tenglamalar quyidagicha bo'ladi:

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \theta_m D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - v_m \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \omega (c_m - c_{im}), \quad (2)$$

bu yerda α, β – hosila tartiblari, θ_m, θ_{im} – g'ovaklik koeffitsiyenti, c_m, c_{im} – hajmiy konsentratsiya, D_m – gidrodinamik dispersiya koeffitsiyenti, t – vaqt, x – koordinata bo'yicha o'zgaruvchi, v_m – zarracha harakatining o'rtacha tezligi, γ – massa uzatish koeffitsiyenti. $[\gamma] = T^{\alpha-1}$, $[\omega] = T^{-1}$. c – o'lchamsiz kattaliklar, $[\partial^\alpha c / \partial t^\alpha] = T^{-\alpha}$, $[D] = L^\gamma / T^\alpha$, L – uzunlik o'lchovi, T – vaqt o'lchovi. α va β kasr hosilalarning tartiblari quyidagi oraliqda o'zgaradi: $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$.

$[0, \infty]$ sohada masala qaraladi. Boshlang'ich va chegaraviy shartlar:

$$c_m(0, x) = 0, \quad c_{im}(0, x) = 0, \quad (3)$$

$$c_m(t, 0) = c_0, \quad c_m(t, \infty) = 0. \quad (4)$$

Teskari masalani yechish uchun (3), (4) boshlang'ich va chegaraviy shartlardan tashqari qo'shimcha shartlar ham kerak bo'ladi. Bunday shartlar sifatida x_l , $l=1,2,3$ nuqtalarda konsentratsiyaning vaqt bo'yicha o'zgarishi ma'lum bo'ladi, ya'ni $z_l(t)$, $l=1,2,3$ funksiyalar beriladi. Ko'pincha $z_l(t)$, $l=1,2,3$

funksiyalar tajriba natijalari orqali aniqlanadi. Teskari masalani yechishda $z_l(t)$, $l=1,2,3$ funksiyalarni “kuzatish ma’lumotlari” sifatida qabul qilish mumkin.

Shunday qilib qo’shimcha shartlarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$c_m(t, x_l) = z_l(t), \quad l=1,2,3. \quad (5)$$

Teskari masala quyidagi tartibda qo’yiladi: α, β kasr hosila tartiblari quyidagi funksional minimumidan aniqlanadi:

$$J(\xi) = \sum_{l=1}^n \int_0^T [c_m(t, x_l) - z_l(t)]^2 dt, \quad \xi = (\alpha, \beta), \quad (6)$$

bu yerda $c_m(t, x_l)$ – (1)-(4) masala α, β parametrlarining qandaydir berilgan qiymatlaridagi yechimi hisoblanadi. α, β larni (6) funksional minimumidan aniqlash uchun Nelder–Mead usulini qo’llaymiz.

Ko’p o’zgaruvchili funktsiyaning lokal minimumini topishning simpleks usuli Nelder va Mid tomonidan ixtiro qilingan. Ikki o’zgaruvchi uchun simpleks uchburchak bo’lib, usul uchburchakning uchta uchidagi funktsiyaning qiymatlarini taqqoslaydigan qidiruv sxemasidir. Funktsiya eng katta qiymat qabul qiladigan eng yomon cho’qqi tashlab yuboriladi va yangi cho’qqi bilan almashtiriladi. Yangi uchburchak hosil bo’ladi va qidiruv davom etadi. Bunda uchburchaklar ketma-ketligi quriladi (ular har xil shaklda bo’lishi mumkin), ularning uchlaridagi funktsiyaning qiymatlari borgan sari kamayib boradi. Uchburchakning o’lchami kichraytiriladi va natijada minimum nuqtasining koordinatalari topiladi [10].

2. Ayirmali masala. (1) – (4) masala $\alpha = \alpha^s$, $\beta = \beta^s$ da chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechiladi [3]. $\Omega = \{0 \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T\}$ sohada o’zgarmas qadam bilan to’r kiritib olamiz. $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = L/N, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}$, bu yerda h – x koordinata bo’yicha to’r qadami, τ – t bo’yicha vaqt qadami, L – g’ovak muhitning xarakterli uzunligi.

Kvazireal eksperiment o’tkazish uchun dastlab (1) – (4) to’g’ri masala $\alpha^{exact} = 0,8$, $\beta^{exact} = 1,8$ berilgan qiymatlarda chekli ayirmalar usuli bilan sonli yechiladi. Sonli hisoblashlar natijalari bo’yicha $z_l = z_l(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$, $l = 1, 2, \dots, n$ to’rli funktsiya aniqlanadi. $z(t_j)$ funktsiya teskari masalani yechish uchun berilgan ma’lumotlar bo’lib xizmat qiladi. Ko’pincha real holatlarda bu funktsiya eksperimental aniqlanadi va ma’lum xatolikka ega bo’ladi. Bu xatolikni modellashtirish uchun $z(t)$ funktsiya quyidagi tarzda hisoblanadi:

$$z_l^\delta(t_j) = z_l(t_j) + 2\delta \left(\sigma(t_j) - \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

bu yerda δ – xatolik darajasi, $\sigma(t_j)$ – tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar $\sigma(t_j) \in (0, 1)$.

(1) tenglama chekli ayirmalar usuli yordamida Kaputo ta’rifidan foydalanib quyidagicha approksimatsiya qilinadi:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_m ((c_m)_i^{j+1} - (c_m)_i^j)}{\tau} + \\ & + \frac{\gamma \theta_{im}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left[\sum_{l=0}^{j-1} ((c_{im})_i^{l+1} - (c_{im})_i^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}) + ((c_{im})_i^{j+1} - (c_{im})_i^j) \right] = \\ & = \frac{\theta_m D_m}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} \left[\sum_{l=0}^{i-1} ((c_m)_{i-(l+1)}^j - 2(c_m)_{i-l}^j + (c_m)_{i-(l-1)}^j) \cdot ((l+1)^{2-\beta} - (l)^{2-\beta}) \right] - \\ & - v_m \theta_m \frac{(c_m)_{i+1}^j - (c_m)_{i-1}^j}{2h}, \end{aligned} \quad (8)$$

Ayirmali approksimatsiyalar kinetika tenglamasi (2) uchun quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma \theta_{im}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left[\sum_{l=0}^{j-1} ((c_{im})_i^{l+1} - (c_{im})_i^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}) + ((c_{im})_i^{j+1} - (c_{im})_i^j) \right] = \\ & = \omega ((c_m)_i^j - (c_m)_i^{j+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

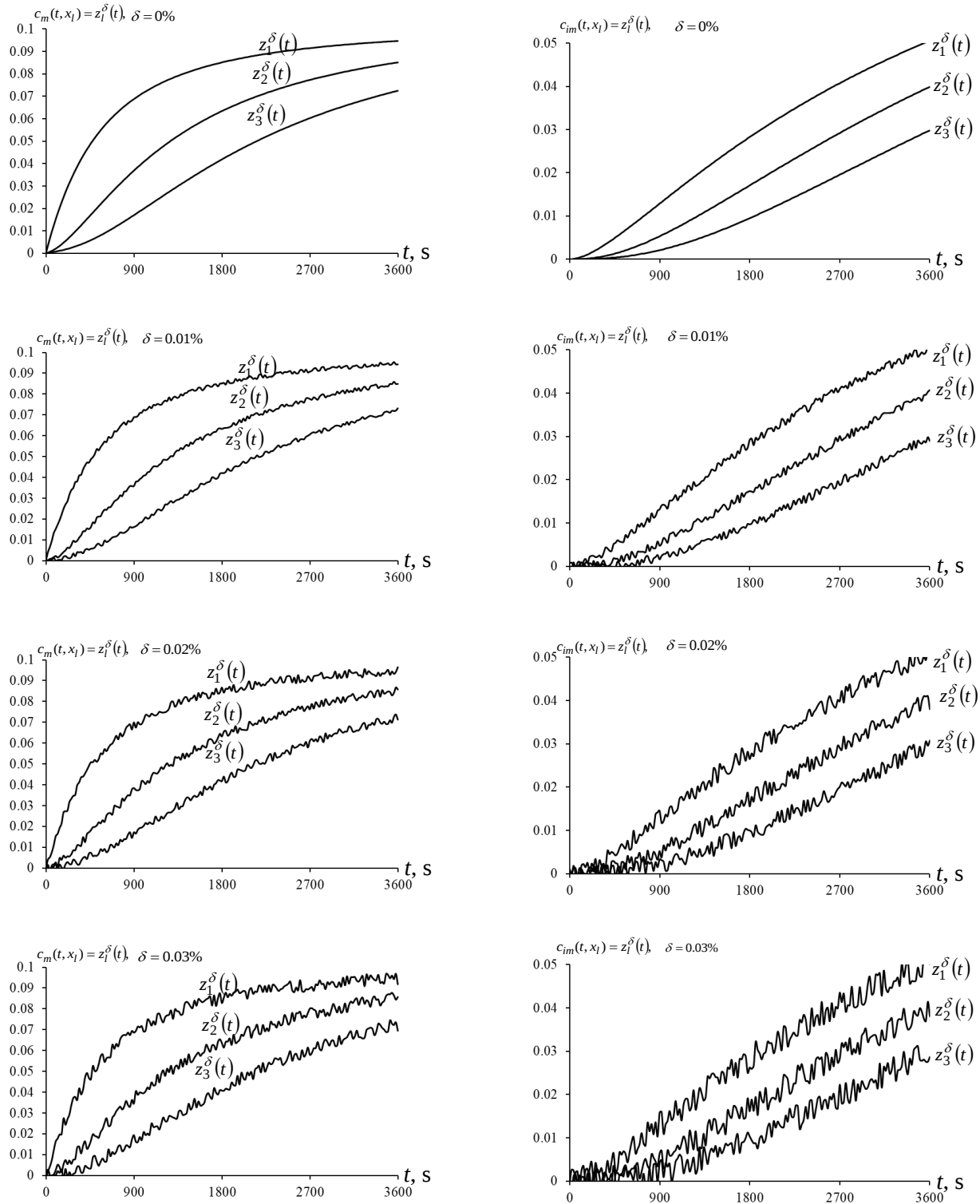
bu yerda $\Gamma(\cdot)$ - Eylerning gamma funksiyasi, c_i^j – (t_j, x_i) nuqtada aniqlangan to’r funktsiya.

Boshlang’ich va chegaraviy shartlar quyidagicha approksimatsiya qilinadi:

$$(c_m)_i^0 = 0, \quad (c_{im})_i^0 = 0, \quad (10)$$

$$(c_m)_0^j = 0, \quad (c_m)_N^j = 0. \quad (11)$$

$z_l^\delta(t)$ funksiyalar grafiklari 1 – rasmda tasvirlangan.



1-rasm. $z_l^\delta(t)$ funksiya grafigi

(6) funksional quyidagi integral yig‘indi yordamida hisoblanadi:

$$J = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=0}^M \tau [c_m(t_j, x_l) - z_l(t_j)]^2,$$

bu yerda x_l , $l = 1, 2, 3$ – koordinata to‘ri tugunlariga mos tushadi.

3. Sonli hisoblash natijalari

Hisoblashlarda parametrlarning quyidagi qiymatlaridan foydalanilgan: $c_0 = 0,1$, $\tau = 1$, $h = 0,1$, $\theta_m = 0,4 \text{ m}^3 / \text{m}^3$, $\theta_{im} = 0,1 \text{ m}^3 / \text{m}^3$, $D = 10^{-5} \text{ M}^y / c$.

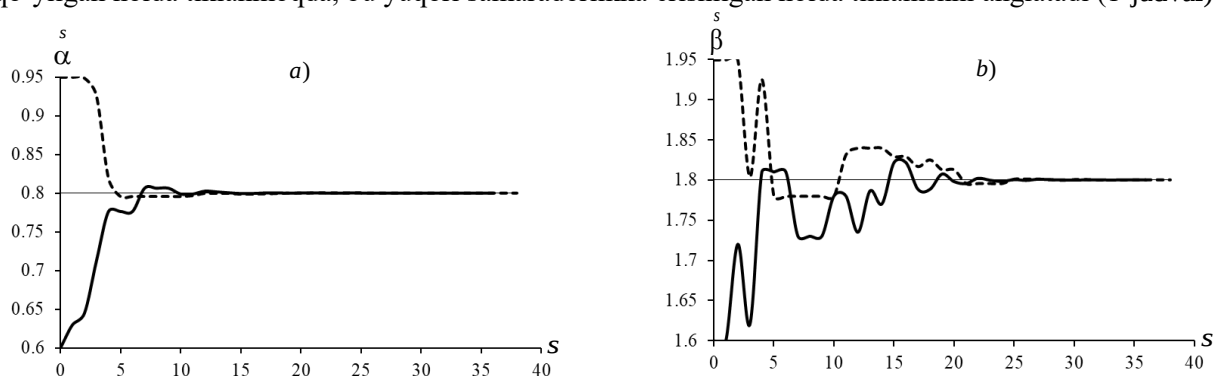
Sonli hisoblashlarda MATLAB muhitining Nelder–Mead usuliga asoslangan `fminsearch()` funksiyasi qo‘llanildi.

1-jadvalda kasr tartibli modda ko‘chishi jarayonlarini tavsiflovchi matematik modellar tarkibidagi kasr hosila tartibini gradient talab qilmaydigan Nelder–Mead simpleks usuli orqali identifikatsiya qilish natijalari keltirilgan. Bu usul ko‘p o‘lchamli maqsad funksiyasini minimallashtirishda geometrik simpleks prinsipiga tayanadi va har bir iteratsiyada simpleksning eng yomon tugunini akslantirish (reflection), kengaytirish (expansion), siqish (contraction) yoki global kichraytirish (shrink) orqali yangilaydi. Boshlang‘ich yaqinlashish tugunlari sifatida α , β hosila tartiblari tanlanib, ularning haqiqiy qiymatlariga yaqinlashish jarayoni iterativ baholangan.

1-jadval.

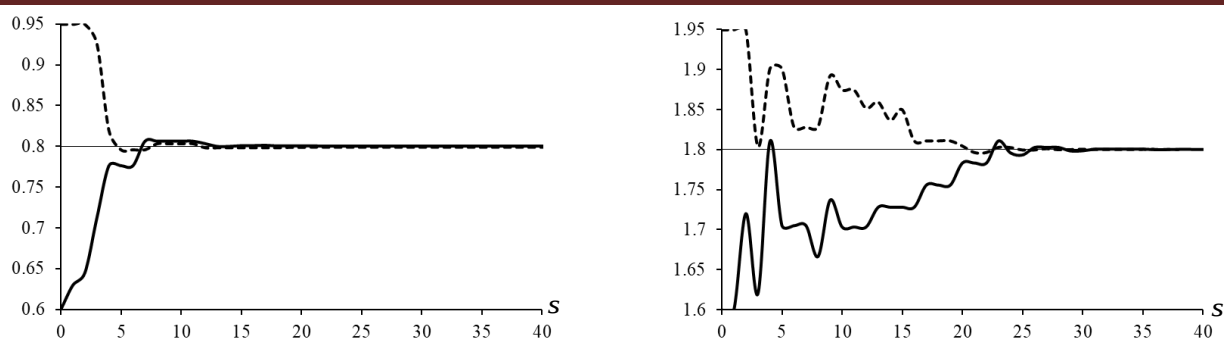
$\delta \%$	Boshlang‘ich yaqinlashish		Hisoblangan qiymat		Nisbiy xatolik	
	α	β	α	β	$\frac{ \alpha - \alpha^{exact} }{\alpha^{exact}} \cdot 100\%$	$\frac{ \beta - \beta^{exact} }{\beta^{exact}} \cdot 100\%$
$\alpha^{exact} = 0,8$, $\beta^{exact} = 1,8$						
0	0,6	1,6	0,80000047	1,799971	0,00000058	0,0000159
3%	0,6	1,6	0,80024851	1,793342	0,00031063	0,0036988
0	0,95	1,95	0,80000054	1,799972	0,00000067	0,0000153
3%	0,95	1,95	0,79871292	1,80998	0,00160885	0,0055447

$\delta = 0$ da boshlang‘ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo‘lganda α vaqt bo‘yicha hosila tartibi 0,000058% va β koordinata bo‘yicha kasr hosila tartibi 0,00159% aniqlada tiklanmoqda, boshlang‘ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo‘lganda ham α 0,0000067% va β esa 0,000153% nisbiy xatolikka yo‘l qo‘yilgan holda tiklanmoqda, bu yuqori samaradorlikka erishilgan holda tiklanishni anglatadi (1-jadval).



2-rasm. Hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va $\beta^{exact} = 1,8$ ning qo‘zg‘atilmagan ($\delta = 0$) qiymatida tiklanishi

Bunda: a) $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,6$, b) $\beta = 1,95$, $\beta = 1,6$.



3-rasm. Hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va $\beta^{exact} = 1,8$ ning qo'zg'atilgan ($\delta = 3\%$) qiymatida tiklanishi

Bunda: a) $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,6$, b) $\beta = 1,95$, $\beta = 1,6$.

$\delta = 3\%$ da boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo'lganda α vaqt bo'yicha hosila tartibi 0,031063% va β koordinata bo'yicha kasr hosila tartibi 0,36988% aniqlada tiklanmoqda, boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo'lganda ham α 0,160885% va β esa 0,55447% nisbiy xatolikka yo'l qo'yilgan holda tiklanmoqda, jadval natijalari shuni ko'rsatadiki, δ ortgan sari, model parametrlarini tiklashdagi nisbiy xatolik ham oshadi. Bu esa, boshlang'ich tugunlarda delta xatolik darajasi yuqori bo'lsa, parametrlarni aniqlash aniqligi pasayishini bildiradi. (1-jadval).

2, 3 – rasmlarda modda ko'chishi masalasidagi konsentratsiyaning vaqt bo'yicha hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va modda ko'chishi masalasidagi diffuziya hadidagi hosila tartibi $\beta^{exact} = 1,8$ qiymatlarini tiklashning turli qo'zg'alishlarda hisoblash natijalari keltirilgan.

Hisoblashlar dastlab boshlang'ich ma'lumotlar qo'zg'atilmagan holda, yani $\delta = 0$ bo'lgan hol uchun olingan (2(a, b) – rasm). 3(a, b) – rasmda $\delta = 3\%$ bo'lgan hollar uchun grafiklar keltirilgan. Hosila tartibi α va β ni tiklash bo'yicha keltirilgan grafiklarda dastlabki 40 ta iteratsiya natijalari keltirilgan. 2 - rasmda

$\delta = 0\%$ da pastdan boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo'lganda α va β ning tiklangan qiymatlari $\alpha^s = 0,80000047$ ba $\beta^s = 1,799971$ tashkil qildi. α ni tiklashdagi nisbiy xatolik 0,000058%, β ni

tiklashdagi nisbiy xatolik esa 0,00159%. Yuqoridan boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo'lganda

α va β ning tiklangan qiymatlari $\alpha^s = 0,80000054$ va $\beta^s = 1,799972$ tashkil qildi. α ni tiklashdagi nisbiy xatolik 0,000067%, β ning qiymati esa 0,00153% ga teng. 3-rasmda dastlabki xatolik $\delta = 3\%$ da xuddi

2 - rasmdagi kabi pastdan boshlang'ich yaqinlashishlarda tiklangan qiymatlar $\alpha^s = 0,8024851$ va $\beta^s = 1,793342$ tashkil qildi. Bunda nisbiy xatolik mos ravishda 0.031063%, 0,36988% ga teng. Yuqoridan

boshlang'ich yaqinlashishlarda tiklangan qiymatlar $\alpha^s = 0,78871292$ va $\beta^s = 1,80998046$ tashkil qildi. Bunda nisbiy xatolik mos ravishda 0,160885%, 0,55447% ga teng. 2 va 3 rasmlarni solishtirsak xatolik berilmagan holatda kamroq iteratsiya talab qilgan holda tezroq tiklanmoqda, xatolik berilganda esa nisbatan iteratsiyalar soni ko'proq va mos ravishda tiklanish ham ozgina kechikayotganini ko'rishimiz mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. C. L. Sun, J. J. Liu, An inverse source problem for distributed order time-fractional diffusion equation, *Inverse Problems* 36 (2020) 055008.
2. L. L. Sun, Y. Zhang, T. Wei, Recovering the time-dependent potential function in a multi-term time-fractional diffusion equation, *Applied Numerical Mathematics* 135 (2019) 228–245.
3. Y. Kian, L. Oksanen, E. Soccorsi, M. Yamamoto, Global uniqueness in an inverse problem for time fractional diffusion equations, *Journal of Differential Equations* 264 (2018) 1146–1170.

4. M. Yamamoto, Uniqueness in determining fractional orders of derivatives and initial values, *Inverse Problems* 37 (2021) 095006.
5. J. Xian, X.-B. Yan, T. Wei, Simultaneous identification of three parameters in a time-fractional diffusion-wave equation by a part of boundary Cauchy data, *Applied Mathematics and Computation* 384 (2020) 125382.
6. X. C. Zheng, J. Cheng, H. Wang, Uniqueness of determining the variable fractional order in variable-order time-fractional diffusion equations, *Inverse Problems* 35 (2019) 125002.
7. Guleria, A.; Swami, D. Solute Transport Through Saturated Soil Column with Time-Dependent Dispersion. *Hydrol. J.* 2018, 40, 1–15.
8. Gao, G.; Zhan, H.; Feng, S.; Fu, B.; Ma, Y.; Huang, G. A new mobile-immobile model for reactive solute transport with scale-dependent dispersion. *Water Resour. Res.* 2010, 46, W08533.
9. Khuzhayorov, B.; Usmonov, A.; Kholiev, F. Numerical Solution of Anomalous Solute Transport in a Two-Zone Fractal Porous Medium. In *APAMCS 2022: Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems*; Springer: Cham, Switzerland, 2023; Volume 702, pp. 98–105. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_10.
10. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. – 720 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕЙКИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

*Даминова Мукаррам Султон кизи,
Каршинский государственный университет
Шодиева Севинч Расул кизи,
Каршинский государственный университет
Абдижабборов Махмуд Абдижалил угли,
Каршинский государственный университет*

Аннотация. Данная работа посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка. Единственность поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение параболо-гиперболического типа, оператор дробного порядка в смысле Капуто, интегральное условие склеивания, единственность и существование решения.

A NONLOCAL PROBLEM WITH AN INTEGRAL GLUING CONDITION FOR A LOADED EQUATION OF MIXED TYPE WITH A FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE

Abstract. This paper is devoted to proving the uniqueness and existence of a solution to a nonlocal problem with an integral gluing condition for a loaded parabolic-hyperbolic equation including a fractional-order Caputo operator. Uniqueness of the problem is proved using the energy integral method, and existence is proved using the integral equation method.

Keywords: loaded equation, parabolic-hyperbolic equation, fractional-order Caputo operator, integral gluing condition, uniqueness and existence of a solution.

KASR TARTIBLI KAPUTO HOSILASI BILAN ARALASH TURDAGI YUKLANGAN TENGLAMA UCHUN INTEGRAL YAQINLASHISH SHARTI BILAN NOLOKAL MASALA

Annotatsiya. Ushbu maqola yuklangan parabolik-giperbolik tenglama, shu jumladan, kasr tartibli Kaputo operatori uchun integral yaqinlashish sharti bilan noloal muammoning yechimini o'ziga xosligi va mavjudligini isbotlashga bag'ishlangan. Masalaning o'ziga xosligi energiya integral usuli yordamida, mavjudligi esa integral tenglama usuli yordamida isbotlanadi.

Kalit so'zlar: yuklangan tenglama, parabolik-giperbolik tenglama, kasr tartibli Kaputo operatori, integral yaqinlashish sharti, yechimning yagonaligi va mavjudligi.

Введение. Применение теории дробного интегрирования и дифференцирования в дробных электрических сопротивлениях биологических элементов, в дробном управлении диффузионными системами, в управлении движением, для анализа сигналов, используемых в робототехнике, динамических системах и управлении механическими манипуляторами, можно найти в работах А.А. Килбаса, Х. М. Шриваставы, Дж. Дж. Трухильо [1], К. С. Миллер и Б. Росс [2], И. Подлубный [3], С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричив [4] Краевые задачи для уравнений параболического и смешанного типов, исключая дробные интегро-дифференциальные операторы, такие как Капуто и Риман-Лиувилль, были исследованы в работах [5-9]. Первые фундаментальные исследования теории нагруженных уравнений принадлежат А.М. Нахушеву [10-11]. В этих работах даётся наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация нагруженных уравнений: нагруженные дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные, функциональные уравнения, а также их многочисленные приложения. За этими исследованиями последовали работы [12-17], в которых были получены интересные результаты. С другой стороны, нам необходимо отметить работы [18-20], в которых методом отдельных переменных было исследовано несколько

локальных и нелокальных начально-краевых задач для нагруженных уравнений в прямоугольных областях.

Вышеприведённые публикации привели к выводу, что исследования в области теории нагруженных дифференциальных уравнений дробного порядка актуальны, и эта теория является одной из современных и развивающихся теорий PDE. Однако краевые задачи с интегральным условием склеивания для уравнений со смешанной нагрузкой дробного порядка еще недостаточно изучены. Следует отметить работы [21], [22]. Данная статья посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^\alpha u + p(x, y) \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} u_t(t, 0) dt, & \text{at } y \geq 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - q(x+y) \int_{x+y}^1 (t-x-y)^{\gamma-1} u_t(t, 0) dt, & \text{at } y \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

С оператором Капуто:

$${}_C D_{0y}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt, \quad (2)$$

где $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$; $p(x, y)$ и $q(x, y)$ заданные функции. Пусть Ω ограничена сегментами:

$$B_1 B_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h\}, \\ B_2 A_2 = \{(x, y) : y = h, 0 < x < 1\}$$

при $y < 0$ и характеристиками: $A_1 C : x - y = 1$, $B_1 C : x + y = 0$.

Для уравнения (1) при $y > 0$, здесь $A_1(1; 0)$, $A_2(1; h)$, $B_1(0; 0)$, $B_2(0; h)$, $C(0, 5; -0, 5)$.

Вводим обозначения: $\theta(x) = \theta\left(\frac{x+1}{2}; \frac{x-1}{2}\right)$,

$$D_{xb}^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b (t-x)^{\beta-1} f(t) dt, \quad (3)$$

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega^- = \Omega \cap (y < 0), \quad I = \{x : 0 < x < 1\}, \quad I_1 = \left\{x : \frac{1}{2} < x < 1\right\}, \quad I_2 = \{y : 0 < y < h\},$$

В области Ω доказываем единственность и существование решения следующей задачи

Задача. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) из классов функции

1. $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$;
2. ${}_C D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega^+)$,
3. $u_{xx}(x, y) \in C(\Omega^- \cup \Omega^+)$, $u_{yy}(x, y) \in C(\Omega^-)$,
4. $u_x(x, y) \in C(\overline{B_1 B_2} \cup \overline{A_1 A_2})$, $y^{1-\alpha} u_y(x, y) \in C(\Omega^+ \cup I)$, $u_y(x, y) \in C(\Omega^- \cup I)$;

удовлетворяющие граничным условиям:

$$u_x(x, y)|_{A_1 A_2} = \varphi(y), \quad y \in \bar{I}_2, \quad (4)$$

$$u_x(x, y)|_{B_1 B_2} = \psi(y), \quad y \in \bar{I}_2, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} u[\theta(x)] = a(x) u_y(x, 0) + b(x) u_x(x, 0) + c(x) u(x, 0) + d(x), \quad x \in I_1, \quad (6)$$

и условиям склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = \lambda_1(x) u_y(x, -0) + \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) u_t(t, 0) dt + \lambda_3(x) u(x, 0), \quad x \in I, \quad (7)$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, и $\lambda_j(x)$ ($j = \overline{1, 3}$), заданные функции, такой, что

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2(x) \neq 0$$

Единственность решения задачи. Известно, что уравнение (1) по характеристической координате $\xi = x + y$ и

$\eta = x - y$ при $y \leq 0$ будет иметь вид:

$$u_{\xi\eta} = \frac{q(\xi)}{4} \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} u_t(t, 0) dt. \quad (8)$$

Вводим обозначения:

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad x \in \bar{I}, \quad v^-(x) = u_y(x, -0), \quad x \in I. \quad (9)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^- можно представить в виде:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} v^-(t) dt + \frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} q(\xi) d\xi \int_{\xi}^{x-y} d\eta \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} \tau'(t) dt, \\ u[\theta(x)] = \frac{\tau(x) + \tau(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^1 v^-(t) dt + \frac{1}{4} \int_x^1 q(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 d\eta \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} \tau'(t) dt, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} u[\theta(x)] = \frac{\tau'(x) + v^-(x)}{2} - \frac{q(x)}{4} \int_x^1 d\eta \int_{\eta}^1 (t - x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt. \quad (11)$$

После использования (6) с учётом (3) из (11) мы получим:

$$(1 - 2a(x))v^-(x) = (2^{-1}(1-x)^{\gamma} q(x) + 2c(x))\tau(x) - (1 - 2b(x))\tau'(x) + \\ + 2^{-1} \Gamma(1+\gamma) q(x) D_{x1}^{-\gamma} \tau'(x) - 2d(x), \quad (x, 0) \in I. \quad (12)$$

С учётом обозначений и условия склеивания (7) имеем:

$$v^+(x) = \lambda_1(x)v^-(x) + \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt + \lambda_3(x)\tau(x), \quad x \in I. \quad (13)$$

Дальше от уравнения (1) при $y \rightarrow +0$ с учётом (2), (3) и

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} f(y)$$

Получили [20]:

$$\tau''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)v^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\tau(x) + \Gamma(\beta)p(x, 0)D_{x1}^{-\beta} \tau'(x) = 0, \quad (14)$$

$$\tau'(0) = \psi(0), \quad \tau'(1) = \varphi(0). \quad (14)$$

Теорема 1. Если $1 - 2a(x) \neq 0$ и для заданных выполняются условия:

$$c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1) \leq 0, \quad c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0) \geq 0, \quad (\lambda_2(x)/r(x))' \leq 0, \quad (15)$$

$$\lambda_1(0)q(0)/(1-2a(0)) \geq 0, \quad p(0,0) \geq 0, \quad p'(x,0) \geq 0, \quad \lambda_2(0)/r(0) \leq 0, \quad (16)$$

$$(\lambda_1(x)q(x)/(1-2a(x)))' \geq 0, \quad (\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x))' \geq 0, \quad (1-2b(x))\lambda_1(x)/(1-2a(x)) \geq 0, \quad (17)$$

то решение $u(x, y)$ задачи единственно.

Доказательство. Известно, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то мы можем утверждать, что исходная задача имеет единственное решение. Для этого предположим, что задача имеет два решения, а затем обозначив их разность как $u(x, y)$ мы получим соответствующую однородную задачу. Уравнение (14) умножаем на $r'(x)$ и интегрируем от 0 до 1:

$$\int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx = \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_1(x) \tau'(x) v^-(x) dx + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_2(x) \tau'(x) dx \int_0^1 r(t) \tau'(t) dt +$$

$$+ \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_3(x) \tau(x) \tau'(x) dx - \Gamma(\beta) \int_0^1 \tau'(t) p(x, 0) D_{x1}^{-\beta} \tau'(x) dx \quad (18)$$

С учётом (12) на счёт $d(x)=0$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx &= \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 (c_1(x) \lambda_1(x) + \lambda_3(x)) d\tau^2(x) - \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{(1-2b(x)) \lambda_1(x)}{1-2a(x)} [\tau'(x)]^2 dx - \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1+\gamma)}{2\Gamma(\gamma)} \int_0^1 \frac{\lambda_1(x) \tau'(x) q(x)}{1-2a(x)} \int_x^1 (t-x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt - \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \frac{\lambda_2(x)}{r(x)} d \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 - \int_0^1 \tau'(x) p(x, 0) dx \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} \tau'(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где $c_1(x) = (1-x)^\gamma q(x) + 2c(x)/(1-2a(x))$.

Основываясь на формуле [23]

$$|x-t|^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma) \cos \pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{\gamma-1} \cos[z(x-t)] dz, \quad 0 < \gamma < 1$$

после некоторых упрощений из (19) мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx &= \frac{\Gamma(\alpha)}{2} [\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1)) - \tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0))] - \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 [\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x)]' \tau^2(x) dx - \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)} \tau'^2(x) dx + \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)} \left(\int_0^1 r(x) \tau'(x) dx \right)^2 + \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)} \right)' dx \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\gamma\Gamma(\alpha)}{2\cos\pi(1-\gamma)/2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^\gamma} \int_0^1 \frac{\lambda_1(x)q(x)}{1-2a(x)} d \left[\left(\int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau'(t) \sin zt dt \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\cos\pi(1-\beta)/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \int_0^1 p(x, 0) d \left[\left(\int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau'(t) \sin zt dt \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Далее, объединяя по частям в последние два члена, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [\tau'^2(1) - \tau'^2(0)] - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} [\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1)) - \tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0))] + \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 [\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x)]' \tau^2(x) dx + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)} \tau'^2(x) dx - \\ &\quad - \frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)} \left(\int_0^1 r(x) \tau'(x) dx \right)^2 - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)} \right)' \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 dx + \\ &\quad + \frac{\gamma\Gamma(\alpha)q(0)\lambda_1(0)}{4(1-2a(0))\sin\pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} (M^2(0, z) + N^2(0, z)) dz + \frac{\gamma\Gamma(\alpha)}{4\sin\pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \times \\ &\quad \times \int_0^1 \left[\frac{\lambda_1(x)q(x)}{1-2a(x)} \right]' [M^2(x, z) + N^2(x, z)] dx + \frac{p(0, 0)}{2\Gamma(\beta)\sin\pi\beta/2} \int_0^\infty \frac{M^2(0, z) + N^2(0, z)}{z^\beta} dz + \\ &\quad + \frac{1}{2\Gamma(\beta)\sin\pi\beta/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \int_0^1 (M^2(x, z) + N^2(x, z)) p_x(x, 0) dx = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } M(x, z) = \int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt,$$

Таким образом, в силу $\tau'(0) \equiv 0$, $\tau'(1) \equiv 0$ при $\varphi(y) = \psi(y) = 0$ (18) в силу (15)-(17) из (20) делается вывод, что $d(x) \equiv 0$. Следовательно, на основе решения второй краевой задачи для уравнения (1) с учётом [20], [24] на счёт (4) и (5), получим $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Далее, из

функциональных соотношений (12), с учётом $d(x) \equiv 0$ получаем, что $v^-(x) \equiv 0$. Следовательно, на основании решения $u(x, y) \equiv 0$ в замкнутой области $\bar{\Omega}^-$.

Существование решения задачи

Теорема 2. Если условия (15)-(17) и

$$p(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}^+) \cap C^2(\Omega^+), \quad q(x, y) \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C^2(\Omega^-), \quad (21)$$

$$\varphi(y), \psi(y) \in C(\bar{I}_2) \cap C^1(I_2); \quad a(x), b(x), c(x), d(x), \lambda_j(x) \in C^1(\bar{I}_1), \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (22)$$

выполнены, то решение исследуемой задачи существует.

Доказательство. С учётом (12) на счёт уравнения (14) получим:

$$\begin{aligned} \tau''(x) + A(x)\tau'(x) + B(x) \int_x^1 (t-x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt + p(x, 0) \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} \tau'(t) dt - \\ - \Gamma(\alpha) \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt + C(x)\tau(x) = D(x) \end{aligned} \quad (23)$$

здесь

$$\begin{aligned} A(x) = \frac{\Gamma(\alpha)(1-2b(x))\lambda_1(x)}{1-2a(x)}, \quad B(x) = -\frac{\gamma\Gamma(\alpha)q(x)\lambda_1(x)}{2(1-2a(x))}, \\ C(x) = -\Gamma(\alpha)(c_1(x)\lambda_1(x) + \lambda_3(x)), \quad D(x) = -\frac{2\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)d(x)}{1-2a(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда, при $x \rightarrow 1$ в силу $v(1) = \varphi(0) = \tau'(1)$ заключаем, что

$$\tau(1) = \frac{(1-b(1)-a(1))\varphi(0) - \frac{1}{2}d(1)}{c(1)}. \quad (24)$$

Интегрируем уравнение (23) от x до 1 и считая (24) после некоторых вычислений, получаем:

$$\tau'(x) - \int_x^1 K(x, t) \tau'(t) dt = F(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (25)$$

Заметим, что это уравнение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, где

$$K(x, t) = A(t) + \int_x^t \frac{B(z)}{(t-z)^{1-\gamma}} dz + \int_x^t \frac{p(z, 0)}{(t-z)^{1-\beta}} dz - \Gamma(\alpha) \int_x^t \lambda_2(z) r(z) dz - \int_x^t C(z) dz. \quad (26)$$

$$F(x) = \varphi(0) - \int_x^1 D(t) dt - \tau(1) \int_x^1 C(t) dt. \quad (27)$$

В силу (22) и (23) из (26) и (27) с учётом $0 < \beta, \gamma < 1$ следует, что

$$|K(x, t)| \leq c_1 \quad \text{для любого } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (28)$$

$$F(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I). \quad (29)$$

Таким образом, учитывая (28) и (29), мы делаем вывод, что уравнение (25) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода и, основываясь на теории интегральных уравнений типа Вольтерра, мы найдём уникальные решения уравнения (25) в классе $C(\bar{I}) \cap C^2(I)$. Это решение задаётся формулой [24]:

$$\tau'(x) = \int_x^1 R(x, t) F(t) dt + F(x), \quad x \in \bar{I}. \quad (30)$$

где $R(x, t)$ резольвента-ядро из $K(x, t)$. Интегрируя уравнение (30) от x до 1, получаем

$$\begin{aligned} \tau(x) = - \int_x^1 dt \int_t^1 \left[\varphi(0) - \int_z^1 D(\zeta) d\zeta - \tau(1) \int_z^1 C(\zeta) d\zeta \right] R(t, z) dz - \\ - \int_x^1 \left[\varphi(0) - \int_t^1 D(z) dz - \tau(1) \int_t^1 C(z) dz \right] dt, \quad x \in \bar{I}. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу (27) и (28) из (30) мы заключаем, что

$$\tau(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I). \quad (32)$$

Подставляя (30) и (31) в (13) с учётом (21), (22), (32) мы определяем $\nu^-(x)$ в классе

$$\nu^-(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I). \quad (33)$$

Далее, в силу (32), (33), принимая во внимание (12), $x=1$ считая, что $\nu(1) = \tau'(1) = \varphi(0)$ и $c(1) \neq 0$ мы находим неизвестную постоянную $\tau(1)$:

$$\tau(1) = [(1 - a(1) - b(1))\varphi(0) + d(1)]/c(1). \quad (34)$$

Таким образом, решение сформулированной задачи может быть восстановлено в области Ω^+ как решение второй краевой задачи для уравнения (1) (см. [5]), а в области Ω^- как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (9)). Следовательно, сформулированная задача однозначно разрешима.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если $a(x) = \frac{1}{2}$, тогда из (12) следует, что сформулированная задача эквивалентно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно приведенного $\tau(x)$ выше, то будет доказана однозначная разрешимость полученного интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
2. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York. 1993.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. New York. 1999. 364 p.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk: Science and Technology. 1987. 688 p.
5. Pskhu A.V. *Fractional partial differential equations*. Moscow: Nauka, 2005. 199 p.
6. Kadirkulov B. J. *Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative*. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014. 2014(57). pp. 1–7.
7. Karimov E.T., Akhatov J.A. *Boundary value problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative*. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014. 2014(14). pp. 1–6.
8. Ashurov R.R., Cabada A., Turmetov B.Kh. *Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients*. *Fract. Calc. & Appl. Anal.* Springer, 2016. 19(1). pp. 229–251.
9. Islomov B. I., Yuldashev T. K., Ubaydullayev U.Sh. *On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator*. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*. □2021. 1(101). pp.127–137.
10. Nakhushiev A.M. *Equations of Mathematical Biology*. M.: Higher school, 1995. 301p.
11. Nakhushiev A.M. *Loaded equations and their applications*. M.: Science. 2012. 233p.
12. Kaziev V.M. *Goursat problem for one loaded integro-differential equations*. *Differential. equations*. 1981. T. 17. No 2. pp. 313–319.
13. B. I. Islomov1, O. Kh. Abdullayev, N. K. Ochilova. *On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators*. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*, 2017, 8 (3), p. 1{12}
14. B. I. Islomov, O. Kh. Abdullayev. *Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with Caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order*. *Russian Mathematics*, 2020, Vol. 64, No. 10, pp. 29–42.
15. Khubiev K.U. *On a boundary value problem for a loaded equation of a mixed hyperbolic-parabolic type*. *Dokl. Adyg. (Circassian.) Intern. acad. sciences*. 2005.

16. Abdullaev O. Kh. A nonlocal problem for a loaded mixed-type equation with integral operator. *Vestnik Sam. state tech. university. Series of Physics and Mathematics*. 2016.
17. Abdullaev O. Kh. Some problems for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Atangano-Baleanu operators fractional order. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 6, No. 2, 1-14 (2020)
18. Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Math.* 2013. 57(7). pp. 53-65.
19. Sabitov K. B. An initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with loaded terms, *Russian Math.* 2015. 59 (6). pp. 23-33.
20. Ramazanov M. I. On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-elliptic equation in a rectangular domain. // *Mat. magazine. Almaty.* 2002. 2 (4). pp. 75–81
21. Salakhitdinov M. S., Karimov E. T. On a nonlocal problem with conjugation conditions of the integral form for the parabolic-hyperbolic one with the Caputo operator. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 2014. No. 4. pp. 6-9.
22. Abdullaev O. Kh. Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 479–489
23. Smirnov M. M. *Mixed type equations*. M.: Higher school. 1985. 304 p.
24. Mikhlin S. G. *Lectures on linear integral equations*. M.: Fizmatgiz. 1959. 232 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Зокиров Мухаммад Собирович,

Самаркандский государственный университет

имени Шарофа Рашидова

mzokirov45@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается радиальная задача аномальной фильтрации однородной жидкости. Течение однородной жидкости в пористой среде моделировалось дифференциальным уравнением с дробными производными. Дробные производные определены в смысле Капуто. Задача решена численно с методом конечных разностей. Представлены профили скорости фильтрации при различных значениях дробной производной времени в плоской радиальной пористой среде.

Ключевые слова: аномальная фильтрация, время релаксации, дробная производная, метод конечных разностей, пористая среда.

NUMERICAL MODELING OF PLANE-RADIAL FILTRATION PROCESSES WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

Abstract. The paper considers the radial problem of anomalous filtration of a homogeneous fluid. The flow of a homogeneous fluid in a porous medium was modeled by a differential equation with fractional derivatives. Fractional derivatives are defined in the Caputo sense. The problem was solved numerically using the finite difference method. The filtration velocity profiles are presented for different values of the fractional derivative of time in a flat radial porous medium.

Key words: anomalous filtration, fractional derivative, finite difference method, porous media, relaxation time.

KASR HOSILALI TEKIS RADIAL SIZISH JARAYONLARINI SONLI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. Ushbu ishda bir hil suyuqlikni anomal sizishning tekis radial masalasi ko'rib chiqilgan. Birjinsli suyuqlikning g'ovak muhitdagi sizishi kasr tartibli differentsial tenglama bilan modellashdirilgan. Kasr hosila Kaputo ta'rif asosida aniqlangan. Masala chekli ayirmalar usuli bilan yechilgan. Tekis radial g'ovak muhitda vaqt bo'yicha kasr hosila tartibning turli qiymatlarida sizish tezligi profillari keltirilgan.

Kalit so'zlar: anomal sizish, kasr tartibli hosila, relaksatsiya, g'ovakl muhit, chekli ayirmalar usuli.

Введение. Известно, что нефти многих месторождений имеют аномальные реологические свойства. Аномальные свойства нефти обусловлены наличием в её составе различных веществ, в частности, асфальтенов, смол, парафинов и др. Аномальная вязкость нефти отражается на её движении в системе сбора и внутрипромысловый подготовки, трубопроводного транспорта и др. Аномальная вязкость обычно оказывает более сильное влияние на процесс движения нефти в пласте [1], что отражается на законе фильтрации. Классический закон Дарси при этом нарушается.

В [2] показано, что для течения вязкой жидкости в упругих пористых средах получено дробное соотношение между силой и потоком.

Для количественной оценки потока жидкости в естественных геологических средах использовались различные формулы, описывающие поток, не подчиняющийся закону Дарси, однако не существует общего закона или формулы для расчёта сложной взаимосвязи между скоростью потока и градиентом давления для однофазного потока жидкости в естественных средах. Целью в работе [3] является предложение и оценка фрактальной модели закона Дарси для расчёта расхода жидкости в неоднородных нефтяных пластах.

В последнее время появились модели фильтрации, где широко стал использоваться аппарат дробного дифференцирования. Для лучшего описания потока и давления жидкостей закон Дарси был

модифицирован с целью введения общего формализма памяти, работающего с градиентами потока и давления [4], что подразумевает фильтрацию градиента давления без разделения.

В [5] представлен закон типа Дарси из дробного закона вязкости Ньютона, который предназначен для описания явлений напряжения сдвига в неоднородных пористых средах. В этом смысле закон вязкости Ньютона представляет собой обобщение классического закона Дарси.

В данной работе рассматривается обобщённая релаксационная дробно-дифференциальная модель фильтрации однородной жидкости в пористой среде с учётом плоскорадиальной фильтрации. Выведено уравнение релаксационной фильтрации с учётом плоскорадиальной фильтрации. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Оценено влияние плоскорадиальной фильтрации и релаксационных свойств на поле давления и скорости фильтрации.

Постановка задачи. Область фильтрации показана на рисунке 1. Фильтрация жидкости происходит в радиальном направлении в сторону центра области.

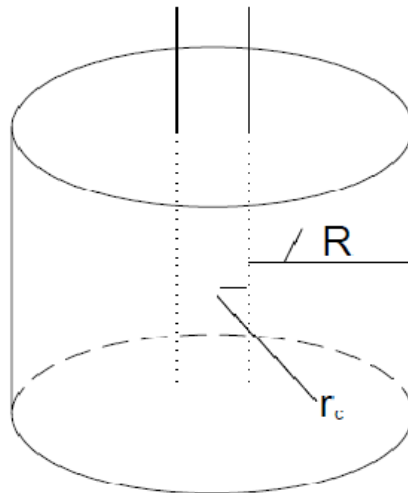


Рисунок 1. Область фильтрации

В центре находится скважина радиуса r_c . Внешний контур области имеет радиус R . Учитывая круговую симметрию, считается, что показатели фильтрации не зависят от угловой координаты, а зависят от радиальной координаты r и времени t . Закон фильтрации в радиальном случае с учётом релаксации по скорости фильтрации и градиента давления с использованием дробных производных записывается в виде:

$$v + \lambda_v D_t^\beta v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda_p D_t^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где λ_v , λ_p - времена релаксации скорости фильтрации v и давления p , k - проницаемость среды, μ - вязкость жидкости, r - координата, D_t^α , D_t^β - операторы дробной производной в смысле Капуто [4], по времени t порядка β и α , соответственно.

Заметим, что времена релаксации λ_v и λ_p в (1) имеют дробную размерность $[\lambda_p] = c^\alpha$, $[\lambda_v] = c^\beta$, соответственно.

Аналогично [6] на основе (1) выведено уравнение пьезопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial t} (p + \lambda_p D_t^\beta p) = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (p + \lambda_v D_t^\alpha p) \right], \quad (2)$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu \beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности.

Пусть в начальный момент в области было постоянное давление p_k . Начиная с $t > 0$ на скважине устанавливается постоянное давление p_c . На контуре пласта $r = R$ поддерживается первоначальное давление p_k , что соответствует режиму работы открытого пласта, где за счёт притока жидкости извне давление поддерживается на постоянном уровне.

При отмеченных условиях начальные и граничные условия принимаются в следующем виде:

$$p(0, r) = p_k, \quad D_t^\beta p(0, r) = 0, \quad (3)$$

$$p(t, r_c) = p_c, \quad p(t, R) = p_k \quad (4)$$

$$p_k, p_c = \text{const}.$$

Уравнение (2) решается при условиях (3), (4).

Численное решение задачи. В области $\Omega = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ введём равномерную сетку $\Omega = \{(r_i, t_j), r = r_c + ih, i = \overline{0, N}, h = R/N, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}$, где h – шаг сетки по координате r , τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке (r_i, t_j) обозначим через p_i^j .

Разностная аппроксимация уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \lambda_v \cdot \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2 \cdot p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot ((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta}) + \right. \\ \left. + \frac{p_i^{j+1} - 2 \cdot p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2} \right] = \kappa \frac{1}{r} \left(\frac{r_{i+0.5} \cdot p_{i+1}^{j+1} - (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot p_i^{j+1} + r_{i-0.5} \cdot p_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_p}{h^2} \left(\frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5} \cdot S_1}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} - \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot S_2}{\Gamma(2-\alpha)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5})}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5} \cdot S_3}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{\tau} \right) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$S_1 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \quad S_2 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - p_i^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}),$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}),$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2 \cdot p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot ((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta}),$$

$$r_{i+0.5} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}, \quad r_{i-0.5} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}, \quad r_i = (i-1) \cdot h, \quad k_v = \frac{\lambda_v}{\Gamma(3-\beta) \cdot \tau^\beta}, \quad k_p = \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot h^2}$$

$$r_1 = \frac{2 \cdot i \cdot h - h}{2}, \quad r_0 = \frac{2 \cdot i \cdot h - 3 \cdot h}{2},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

При известном $p(t, r)$ скорость фильтрации определяется из (1), после дискретизации которого имеем:

$$\begin{aligned} v_i^{j+1} + \frac{\lambda_v}{\Gamma(2-\beta) \cdot \tau^\beta} \sum_{k=0}^{j-1} (v_i^{k+1} - v_i^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\beta} - (j-k)^{1-\beta}) + (v_i^{j+1} - v_i^j) = \\ = - \frac{k}{\mu \cdot h} ((p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}) + \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{j-1} (p_i^{k+1} - p_i^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) - p_i^{j+1} + p_i^j \right)) \end{aligned} \quad (6)$$

При аппроксимации дробных производных в (5) использована методология [6-8].

Результаты и обсуждение. Задача (1)-(4) решена численно и проанализировано влияние λ_p , λ_v , α и β на распределение давления и скорости фильтрации в пласте для $k = 10^{-13} \text{ м}^2$; $\mu = 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $p_k = 20 \text{ МПа}$, $p_c = 15 \text{ МПа}$; $\beta^* = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $r_c = 0,1 \text{ м}$ $R = 40 \text{ м}$.

Результаты. Характеристики изменения v полностью согласуются с изменением p . При малых r , т.е. вблизи r_c скорость фильтрации резко возрастает, что объясняется уменьшением поперечного сечения фильтрационного потока. Это характерно для радиальных фильтрационных потоков. Как и в случае изменения давления, уменьшение β приводит к уменьшению значений v , а уменьшение α – к увеличению v . Влияние λ_v и λ_p на v также вполне аналогично с влиянием на p ; λ_v уменьшает, а λ_p увеличивает v . С увеличением времени t скорость фильтрации увеличивается во всей области.

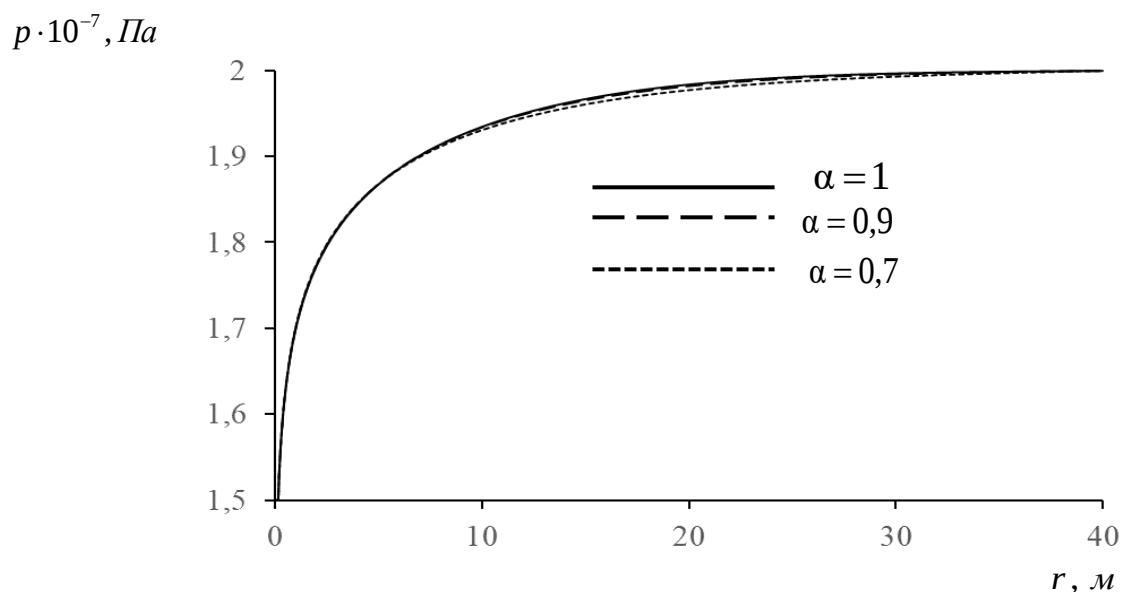


Рисунок 2. Профили давления при различных α при $t = 3600 \text{ с}$, $\lambda_v = 500 \text{ с}^\beta$, $\lambda_p = 500 \text{ с}^\alpha$, $\beta = 1$.

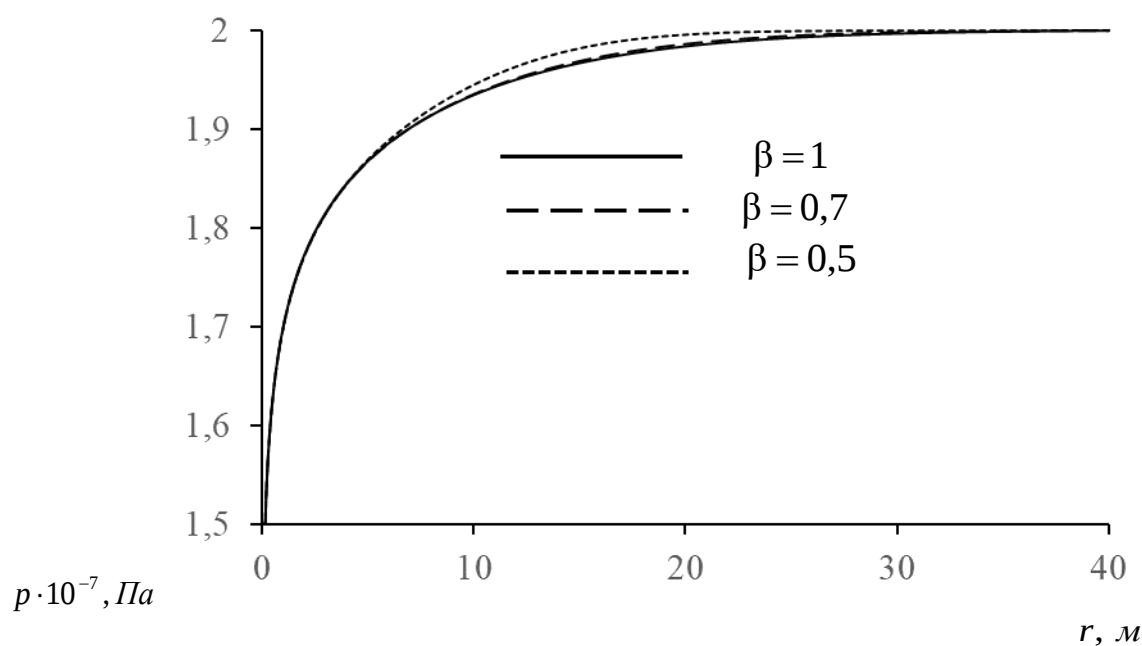


Рисунок 3. Профили давления при различных β при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 500$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\alpha = 1$.

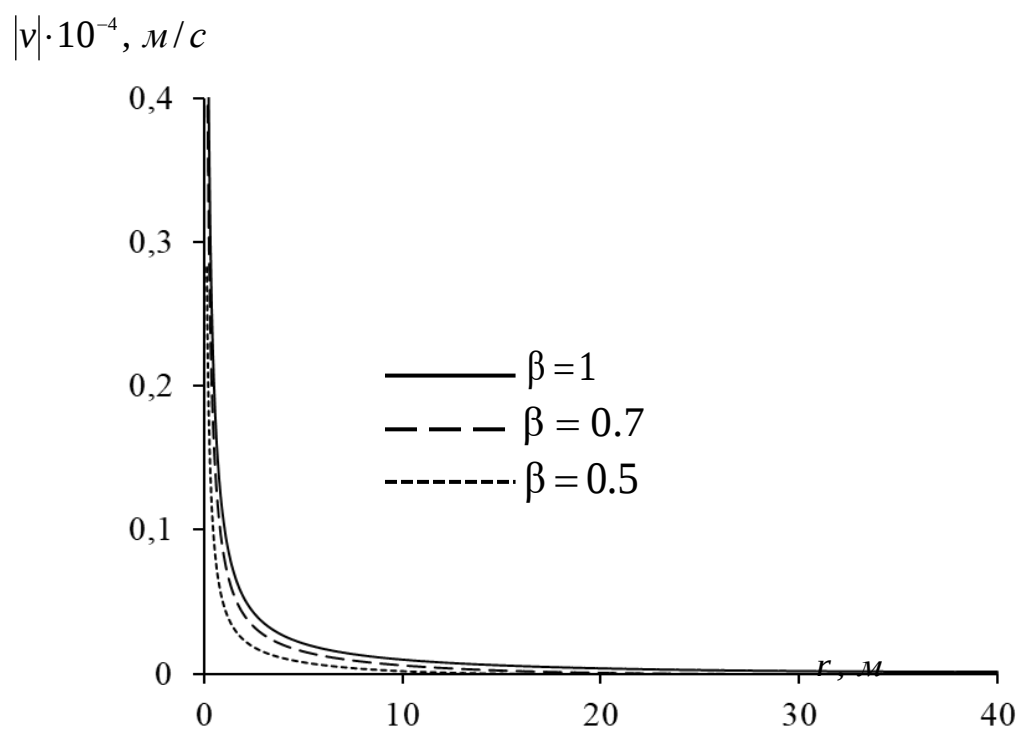


Рисунок 4. Профили изменения скорости при различных β при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 1000$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\alpha = 0.7$

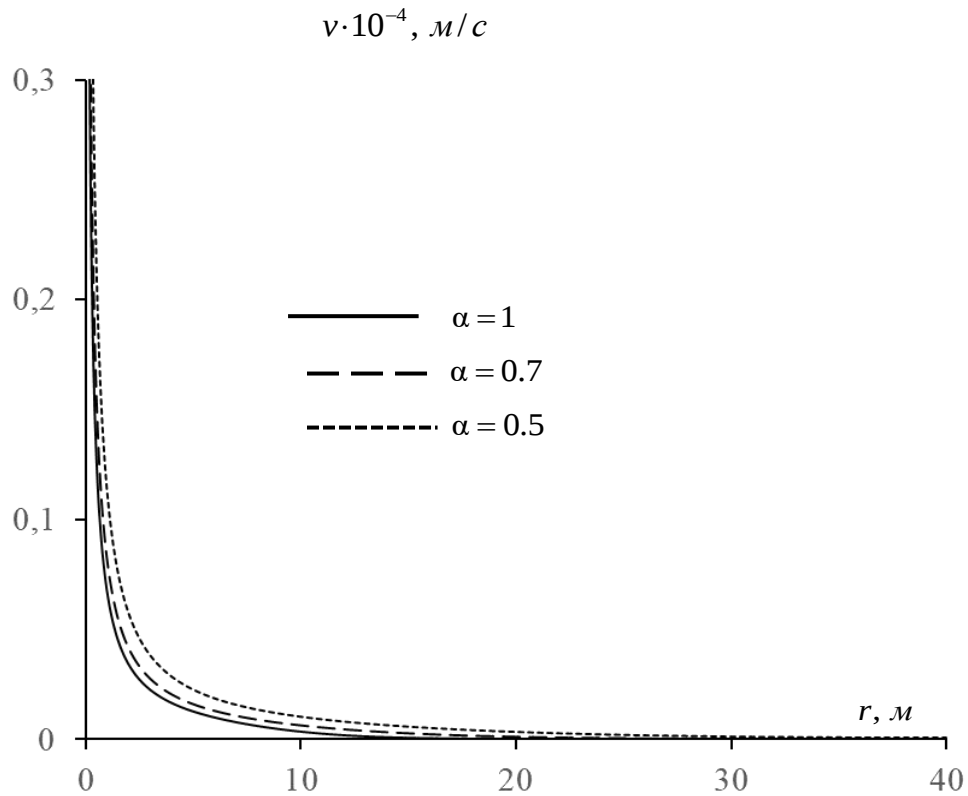


Рисунок 5. Профили изменения скорости при различных α при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 1000$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\beta = 0.7$.

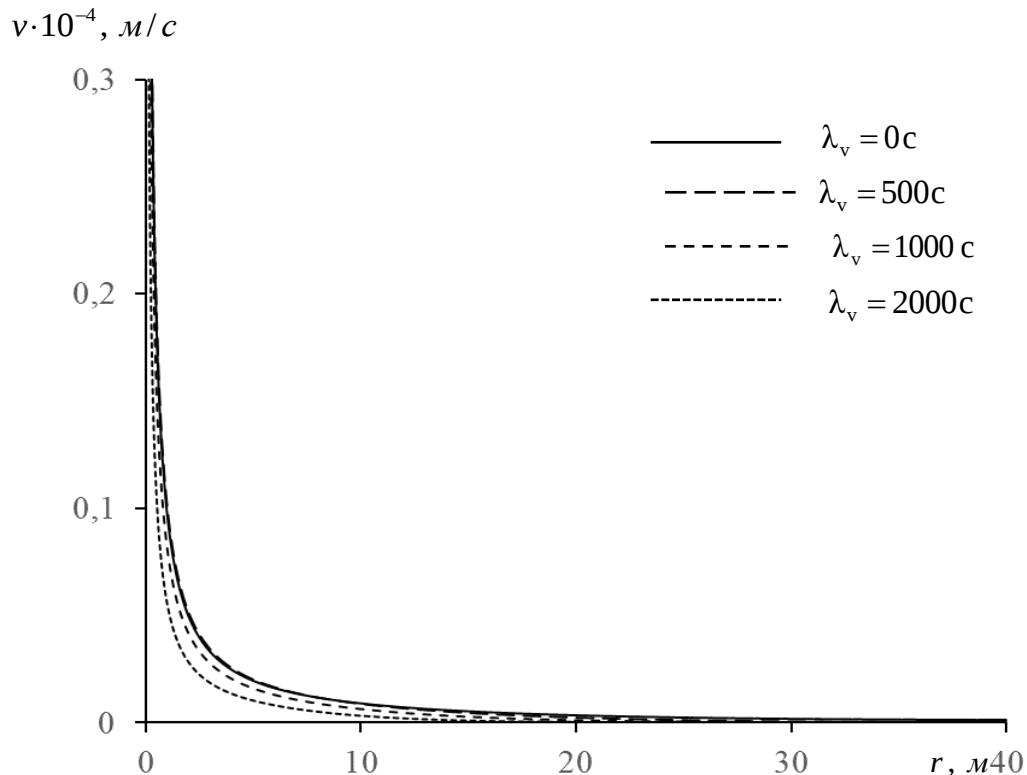


Рисунок 6. Профили изменения скорости при $t = 3600$ с, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ и различных λ_v .

Закключение. Численно решена задача аномальной фильтрации однородной жидкости в плоско – радиальной пористой среде. Показано, что уменьшение порядка производной в релаксационном члене по скорости фильтрации приводит к замедлению развития поля давления и скорости

фильтрации. Уменьшение порядка производной в релаксационном члене закона фильтрации по градиенту давления, наоборот, приводит к интенсификации развития полей давления и скорости фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М. Аномальные нефти. М.: «Недра», 1975. - 168 с.
2. Luca Deseri., Massimiliano Zingales. A mechanical picture of fractional-order Darcy equation // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 20. 2015 P.940–949. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.06.021>.
3. Ailian Chang., HongGuang Sun., Yong Zhang., Chunmiao Zheng., Fanlu Min. Spatial fractional Darcy's law to quantify fluid flow in natural reservoirs // *Physica A.* 0378-4371, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.11.040>.
4. Caputo M. Models of flux in porous media with memory // *Water Resources Research.* Vol. 36. №3. 2000, P. 693-705.
5. Alberto Ochoa-Tapia J., Francisco J., Valdes-Parada., Jose Alvarez-Ramirez. A fractional-order Darcy's law // *Physica A.* 374. 2007. P.1-14. doi: 10.1016/j.physa.2006.07.033.
6. Khuzhayorov B., Djiyanov T.O., Zokirov M.S, Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium. // *International Journal of Applied Mathematics.* Volume 37. №1. Pp.119–132. 2024. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10>.
7. Makhmudov J.M., Usmonov A.I., Kuljanov J.B. Solution of the Anomalous Filtration Problem in Two Dimensional Porous Media APAMCS, – 2022. – P. 68–80. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_7.
8. Y. Xia, J. C. Wu and L. Y. Zhou, "Numerical Solutionsof Time-Space Fractional Advection-Dispersion Equations," *ICCES*, Vol. 9, №.2, 2009, pp. 117-126.

X_9 TIPIDAGI MAXSUSLIKKA EGA BO'LGAN SIRTlarda MUJASSAMLASHGAN O'LCHOVLAR FURYE ALMASHTIRISHINING ANIQ L^p BAHOSI

Ikromova Dildora Isroil qizi,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti

ikromova_89@mail.ru

Xudoyberdiyev Dilshodbek G'ayrat o'g'li

Samarqand davlat pedagogika instituti

dilshodbekkhudoyberdiyev@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada R^3 fazoda X_9 tipdagi maxsuslikka ega bo'lgan silliq sirtlarda mujassamlashgan o'lchovlarning Furye almashtirishining aniq L^p -integrallanishi o'rganiladi. Sirt bosh egri chiziqlari nolga teng bo'lgan nuqtada silliq funksiyaning grafigi sifatida berilgan. Tebranma integrallar va masshtablash usullari yordamida Furye almashtirish $p > 3$ uchun $L^p(R^3)$ ga tegishli ekani va bu natija o'tkir (aniq) ekanligi isbotlanadi. Shuningdek, yuqori tartibli maxsusliklarda integrallanish buzilishi ko'rsatiladi, bu esa Furye kamayishining maxsuslik turiga bog'liqligini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: Furye almashtirish, sirt o'lchovi, L^p -integrallanish, degeneratsiyalangan sirtlar, X_9 -tipdagi maxsuslik, tebranma integrallar.

ТОЧНАЯ L^p -ОЦЕНКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МЕР, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА X_9

Аннотация. В работе исследуется точная L^p -интегрируемость преобразования Фурье мер, сосредоточенных на гладких гиперповерхностях в R^3 , обладающих особенностью типа X_9 . Гиперповерхность задаётся в виде графика гладкой функции, у которой в начале координат обе главные кривизны обращаются в нуль. С использованием оценок осцилляторных интегралов и масштабных преобразований доказывается, что преобразование Фурье принадлежит $L^p(R^3)$ для всех $p > 3$, и что этот результат является точным. Также показано, что для особенностей более высокого порядка L^p -интегрируемость нарушается, что подчёркивает зависимость убывания преобразования Фурье от типа особенности.

Ключевые слова: преобразование Фурье, поверхностная мера, L^p -интегрируемость, вырожденные гиперповерхности, особенность типа X_9 , осцилляторные интегралы.

EXACT L^p -ESTIMATE FOR THE FOURIER TRANSFORM OF MEASURES SUPPORTED ON SURFACES WITH AN X_9 -TYPE SINGULARITY

Abstract. This paper investigates the exact L^p -integrability of the Fourier transform of surface measures supported on smooth hypersurfaces in R^3 with an X_9 -type singularity. The hypersurface is given as the graph of a smooth function whose principal curvatures vanish at the origin. Using oscillatory integral estimates and scaling arguments, we prove that the Fourier transform belongs to $L^p(R^3)$ for all $p > 3$, and that this result is sharp. We also show that the integrability fails for higher-order singularities, highlighting the dependence of Fourier decay on the type of singularity.

Key words: Fourier transform, surface measure, L^p -integrability, degenerate hypersurfaces, X_9 -type singularity, oscillatory integrals.

Kirish. Biz bu maqolada o'lchov Furye almashtirishining aniq integrallanish ko'rsatkichining infimumi bo'lgan p_9 sonini toppish masalasini ko'rib chiqamiz. Bunda $S \subset R^3$ silliq sirt bo'lib, R^2 koordinatalar boshida X_9 tipdagi maxsuslikka ega bo'lgan silliq funksiyaning grafigi shaklida berilgan. Bu maxsuslikka ega bo'lgan funksiyaning Hessian matritsasining rangi 2 ga teng, shu sababli ma'lum bir nuqtalarda sirtning ikkala bosh egriliklari nolga aylanadi. Biz X_9 tipdagi maxsuslikka ega bo'lgan

funksiyaning grafigi shaklida berilgan sirt o'lchovining Furye almashtirishi ixtiyoriy $p > 3$ da $L^p(R^3)$ ga qarashli ekanligini isbotladik.

Ta'rif. Faraz qilaylik $S \subset R^3$ silliq gipersirt bo'lsin, va tashuvchisi kompakt bo'lgan $\varphi \in C_0^\infty(S)$ funksiya berilgan bo'lsin. $d\mu := \varphi(x)dS$ o'lchovni qaraymiz. Bu yerda dS sirt o'lchovi S gipersirtida aniqlangan. $d\mu$ o'lchovning Furye almashtirishini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int_S e^{ix\xi} d\mu(x) \quad (1)$$

bu integral $d\mu(x)$ ([1],[2]) orqali berilgan taqsimotning Furye almashtirishiga mos keladi. Bunda $x \cdot \xi$, x va ξ vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Maqolaning asosiy masalamiz quyidagi to'plamning infimumini (aniq quyi chegarasi) topishdan iborat:

$$p_S = \{p \geq 1: \widehat{d\mu} \in L^p(R^3), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(S)\}, \quad (2)$$

bu yerda $L^p(R^3)$, $1 \leq p < \infty$, Lebeg fazosi bo'lib, p -darajasi bilan integrallanuvchi bo'lgan funksiyalarning ekvivalentlik sinflaridan tashkil topgan funksiyalar fazosi. Bunda p_S soniga gipersirt S ustida mujassamlashgan o'lchov Furye almashtirishining aniq integrallanish ko'rsatkichi deyiladi.

Umuman aytganda, integrallanish ko'rsatkichining infimumi bo'lgan $p_S = \infty$ bo'lishi mumkin, masalan, gipertekislikda mujassamlashgan trivial bo'lmagan o'lchovning Furye almashtirishi p ning har qanday chekli qiymati uchun integrallanmaydi. Biroq, agar gipersirt E.M.Stain tomonidan kiritilgan "egrilik sharti" deb ataluvchi shartni qanoatlantirsa, u holda p_S chekli son bo'ladi ([5]).

Ta'rif. Faraz qilaylik, ϕ funksiya $0(0,0)$ nuqtaning U atrofida aniqlangan silliq funksiya bo'lsin va $\phi(0,0) = 0, \nabla\phi(0,0) = 0$ bo'lsin, Agar bu yerda shunday $\varphi: U \rightarrow R^2$ lokal diffeomorf akslantirish mavjud bo'lib:

1. $\varphi(0) = 0$;
2. Yakobi matritsasining determinanti nol nuqtada noldan farqli bo'lsa;
3. Quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa:

$$\phi(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) = y_1^4 + y_2^4 + a y_1^2 y_2^2$$

bunda $a \in C, a^2 \neq 4$. U holda ϕ funksiya $x = 0(0,0)$ nuqtada X_9 tipidagi maxsuslikka ega deyiladi [7].

Biz ϕ funksiya R^2 fazo koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofida aniqlangan deb faraz qilamiz. ϕ funksiya koordinatalar boshida X_9 tipidagi maxsuslikka ega bo'lgan silliq funksiya. Maqoladagi asosiy natijamiz quyidagi teoremdan iborat:

Teorema 1. Faraz qilaylik, $S \subset R^3$ silliq gipersirt $\phi(x_1, x_2)$ funksiyaning grafigi sifatida aniqlangan bo'lsin, ya'ni

$$S = \{x \in R^3: x_3 = \phi(x_1, x_2)\},$$

bu yerda ϕ quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi silliq funksiya:

1. Ixtiyoriy $(\alpha_1, \alpha_2) \in Z_+^2, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ shartni qanoatlantiruvchi multi-indekslar uchun $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \phi(0,0) = 0$ tenglik o'rinli;
2. ϕ nol nuqtada karraligi ko'pi bilan 9 bo'lgan maxsuslikka ega.

U holda nol nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\varphi \in C_0^\infty(U)$ zichlik funksiyasi uchun

$$\widehat{d\mu} \in L^{3+0}(R^3) := \bigcap_{p>3} L^p(R^3)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Izoh. Shuni ta'kidlash kerakki, agar

$$D^2\phi(0,0) := \begin{pmatrix} \partial_1^2\phi(0,0) & \partial_1\partial_2\phi(0,0) \\ \partial_1\partial_2\phi(0,0) & \partial_2^2\phi(0,0) \end{pmatrix} \neq 0$$

ya'ni sirtning ikkala bosh egrikliklaridan kamida bittasi R^3 fazoning boshida nolga aylanmasa, u holda 1-teoremaning natijasi o'rinli bo'lmaydi.

Misol 1. Sirt quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_3 = \phi(x_1, x_2)\} \\ \phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^5$$

bo'lsin, bu funksiya uchun kritik nuqtaning karraligi 4 ga teng [7]. U holda,

$$x_1 = |\xi_3|^{-1/2} u_1, \quad x_2 = |\xi_3|^{-1/5} u_2$$

shunda,

$$\varphi(x_1, x_2) = |\xi_3|^{-1} (x_1^2 + x_2^5).$$

Yakobiani:

$$dx_1 dx_2 = |\xi_3|^{-1/2} |\xi_3|^{-1/5} du_1 du_2 = |\xi_3|^{-7/10} du_1 du_2.$$

Integral:

$$I(\xi) = |\xi_3|^{-7/10} \int e^{-i\phi_\xi(u)} \mathcal{X}\left(|\xi_3|^{-1/2} u_1, |\xi_3|^{-1/5} u_2\right) du_1 du_2,$$

bu yerda,

$$\phi_\xi(u) = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \operatorname{sgn}(\xi_3)(u_1^2 + u_2^5)$$

bu yerda koeffitsiyentlar:

$$A_1 = \xi_1 |\xi_3|^{-1/2}, \quad A_2 = \xi_2 |\xi_3|^{-1/5}.$$

Katta $|\xi_3|$ lar uchun

$$\mathcal{X}\left(|\xi_3|^{-1/2} u_1, |\xi_3|^{-1/5} u_2\right) \rightarrow \mathcal{X}(0,0).$$

Shuning uchun chegarada:

$$\lim_{|\xi_3| \rightarrow \infty} |\xi_3|^{7/10} I(\xi) = \mathcal{X}(0,0) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(A_1 u_1 + A_2 u_2 + \operatorname{sgn}(\xi_3)(u_1^2 + u_2^5))} du_1 du_2$$

Agar (ξ_1, ξ_2) juda kichik bo'lsa:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

va limit:

$$C_0 = \mathcal{X}(0,0) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u_1^2 + u_2^5)} du_1 du_2.$$

Endi, L^p integrallanuvchanlikni tekshiramiz.

Konus ichida:

$$|I(\xi)| \gtrsim |\xi|^{-7/10}.$$

Shuning uchun L^p normani pastdan baholaymiz:

$$\int |I(\xi)|^p d\xi \gtrsim \int_{R_0}^{\infty} r^{-p \cdot 7/10} r^2 dr,$$

chunki $\mathbb{R}^3$ da sferik koordinatalarda $d\xi = r^2 dr d\omega$. Demak integral:

$$\int_{R_0}^{\infty} r^{2-p \cdot 7/10} dr.$$

Bu integral chegaralanmagan, agar

$$2 - p \cdot \frac{7}{10} \geq -1, \Rightarrow p \leq \frac{30}{7},$$

unda $I(\xi) \notin L^p$. Ayniqsa $p = \frac{22}{7} < \frac{30}{7}$. Shuning uchun: $I = \widehat{d\mu} \notin L^{\frac{22}{7}}(\mathbb{R}^3)$.

Boshqa tomondan, agar kritik nuqtaning karraligi 7 dan katta bo'lsa, u holda teorema 1 ning tasdig'i bajarilmaydi, buni biz E_8 tipidagi maxsuslikka ega bo'lgan funksiya misolida ko'rishimiz mumkin. Aniqroq qilib aytganda, agar ϕ funksiya E_8 maxsuslikning normal shakliga ega bo'lsa, ya'ni $\phi(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5$ bo'lsa, u holda $m(\phi) = 8$ va $\widehat{d\mu} \notin L^{22/7}(\mathbb{R}^3)$, ya'ni 1-teoremaning tasdig'i bajarilmaydi. Buni yuqoridagidek oson ko'rsatish mumkin.

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_3 = \phi(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5\}$$

va uning sirt o'lchovi:

$$d\mu := \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

bu yerda $\psi \in C_0^\infty$ -silliqlik zichlik funksiyasi.

Furye tasviri:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \phi(x_1, x_2)\xi_3)} \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Teorema 1 ga ko'ra: $\widehat{d\mu} \in L^p(R^3)$ har bir $p > 3$. Biz kritik nuqtaning karraligi 8 bo'lganda $p > \frac{22}{7}$ bo'lganda ham teoremaning tasdog'i o'rinli emasligini ko'rsatamiz.

Faza funksiyasi:

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_1^3\xi_3 + x_2^5\xi_3.$$

x_1 -bo'yicha integral

$$I_1(\xi_1, \xi_2) = \int e^{-i(x_1\xi_1 + x_1^3\xi_3)} \psi(x_1) dx_1.$$

Van der Korput 6 –darajali bahosiga ko'ra:

$$|I_1| \lesssim |\xi_3|^{\frac{1}{3}}.$$

x_2 -bo'yicha integral

$$I_2(\xi_1, \xi_2) = \int e^{-i(x_2\xi_2 + x_2^5\xi_3)} \psi(x_2) dx_2.$$

Van der Korputning 5-darajali bahosiga ko'ra:

$$|I_2| \lesssim |\xi_3|^{\frac{1}{5}}.$$

Ikki integralning ko'paytmasi

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \approx |I_1||I_2| \lesssim |\xi_3|^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = |\xi_3|^{-\frac{8}{15}}.$$

Endi L^p -integrallanishni tekshiramiz.

$$\int_{R^3} |\widehat{d\mu}(\xi)|^p d\xi < \infty.$$

Asosiy o'sish ξ_3 bo'yicha, shuning uchun quyidagini tekshiramiz:

$$\int_0^\infty |\xi_3|^{-p \cdot \frac{8}{15}} |\xi_3|^2 d\xi_3 < \infty.$$

R^3 fazoda radius r ga o'tish hajm elementi $r^2 dr$. Shunday qilib, yaqinlashish sharti:

$$-p \cdot \frac{8}{15} + 2 < -1. \Rightarrow p > \frac{45}{8} = \frac{22.5}{4} = 5.625.$$

Bizga esa $p > 3$ kerak edi. $p = \frac{22}{7}$ da ham $\widehat{d\mu} \notin L^{\frac{22}{7}}(R^3)$.

Demak, 1-teoramaning shartlari faqat 4,5,6,7 karrali maxsuslikka ega bo'lgan sirtlar uchun o'rinli. Ammo, bu teorema X_9 holi uchun ba'zi shartlarni bajarganda o'rinli bo'ladi. Buni quyidagi ikkinchi teoremda keltiramiz:

Teorema 2. Faraz qilaylik, S silliq gipersirt $\phi: R^2 \rightarrow R$ koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrifida aniqlangan silliq funksiya grafigi sifatida aniqlangan bo'lsin, ya'ni:

$$S := \{x \in R^3: x_3 = \phi(x_1, x_2)\},$$

ϕ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. $\partial^\alpha \phi(0,0) = 0, |\alpha| \leq 2$, ya'ni sirtning ikkala bosh egriligi 0 (0,0) da nolga teng;
2. ϕ funksiya koordinatalar boshida X_9 tipidagi maxsuslikka ega. Ya'ni, nol nuqtaning yetarlicha kichik atrofida shunday lokal diffeomorfizm φ topilib:

$$\phi(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) = y_1^4 + y_2^4 + ay_1^2 y_2^2, \quad a^2 \neq 4;$$

U holda nol nuqtaning shunday U zichlik funksiyasi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\psi \in C_0^\infty(U)$ zichlik funksiyasi uchun

$$\widehat{d\mu} \in L^{3+0}(R^3) := \bigcap_{p>3} L^p(R^3),$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Sirt o'lchovining Furye almashtirishi ta'rifiga ko'ra:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int e^{-i(x, \xi)} d\mu$$

Bu yerda

$$(x, \xi) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \phi(x_1, x_2).$$

Statsionarlik sharti:

$$\nabla_y(x, \xi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + \xi_3 \partial_1 \phi = 0, \\ \xi_2 + \xi_3 \partial_2 \phi = 0, \end{cases}$$

bu yerda,

$$\partial_1 \phi = 4y_1^3 + 2ay_1 y_2^2, \quad \partial_2 \phi = 4y_2^3 + 2ay_2 y_1^3.$$

Kichik y lar uchun

$$|y| \sim \left(\frac{|\xi_1, \xi_2|}{|\xi_3|} \right),$$

ya'ni statsionar nuqta $|\xi|^{1/3}$ tartibda o'zgaradi.

Hessian matritsasi:

$$H\phi(y) := \begin{pmatrix} 12y_1^2 + 2ay_2^2 & 4ay_1 y_2 \\ 4ay_1 y_2 & 12y_2^2 + 2ay_1^3 \end{pmatrix}.$$

Statsionar nuqta yaqinida

$$Hf(y) \sim |y|^2, \quad \det Hf(y) \sim |y|^4.$$

Tebranuvchan integralning lokal bahosi:

$$|I(\xi)| \lesssim |\xi_3|^{-1} (\det Hf(y(\xi)))^{-\frac{1}{2}}.$$

Bizda:

$$\det Hf(y(\xi)) \sim |y(\xi)|^4 \sim \left(\frac{|\xi_1, \xi_2|}{|\xi_3|} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Demak,

$$|I(\xi)| \lesssim |\xi_3|^{-1} \left(\frac{|\xi_1, \xi_2|}{|\xi_3|} \right)^{-\frac{2}{3}} = |\xi_3|^{-1+\frac{2}{3}} |\xi_1, \xi_2|^{-\frac{2}{3}}.$$

$|\xi_3| \sim |\xi|$ -tik yo'nalishda $|I(\xi)| \lesssim |\xi|^{-1}$.

$|\xi_1, \xi_2| \sim |\xi|$ -gorizontal yo'nalish $|\theta| \lesssim |\xi|^{-\frac{1}{3}}, |\xi|^{-2/3} \cdot |\xi|^{-\frac{1}{3}} = |\xi|^{-1}$.

Yuqoridagilardan quyidagi baho o'rinli:

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq |\xi|^{-1} \Rightarrow |\widehat{d\mu}(\xi)|^p \lesssim |\xi|^{-p}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-p} d\xi < \infty \Leftrightarrow p > 3.$$

Demak, $\widehat{d\mu} \in L^{3+0}(\mathbb{R}^3)$.

ADABIYOTLAR:

1. Alimov Sh. A. and Ashurov R.R. , *Matematik tahlil, II-qism, Toshkent, "Turon -Iqbol", 2017.*
2. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., *Trigonometric integrals. // Math. USSR-Izv. 15 (2), 211–239 (1980).*
3. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A., *Trigonometric sums in number theory and analysis. in: de Gruyter expositions in mathematics, vol.39. Berlin 2004, Translated from the 1987 Russian original.*
4. Arnol'd V. I., Gusein-Zade S. M. , Varchenko V. N., *Singularities of differentiable maps. The classification of critical points, Cauchy and Wave Fronts. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1985).*
5. Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M. and Varchenko, A.N., *Singularities of differentiable maps. Vol. II, Monodromy and asymptotics of integrals, Monographs in Mathematics, 83. Birkhäuser, Boston Inc., Boston, MA, 1988.*
6. Akramov I. Ibrohimbek , Ikromov A. Isroil A, *Estimates for oscillatory integrals with phase having D type singularities, // Journal of Mathematical Sciences, September 2024, DOI: 10.1007/s10958-024-07372-x.*
7. Akramova D.I., *On estimates for convolution operators. // Uzbek Mathematical Journal, 2019, (4), pp. 12–23.*

8. Akramova D.I., Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligi bilan bog'langan tebranuvchan integrallar haqida. // SamSU Scientific journal, 2020, 5 (123), pp. 15–27.
9. Akramova D.I., Ikromov I.A., Randol Maximal Functions and the Integrability of the Fourier Transform of Measures. // Mat. Zametki, 2021, 109, (5), pp 643–663.
10. Akramova D.I., Akramov I.I., Ikromov I.A., Estimates for convolution operators related to hyperbolic equations. // SamSU Scientific journal, 2016, 3 (97), pp. 6–11.
11. Akramova D.I., Soleev A., Newton polyhedra in estimates for the Fourier transform of characteristic functions and convolution operators. // SamSU Scientific journal, 2022, 3 (133), pp. 20–32.
12. Akramova D.I. Applications of oscillatory integrals to solutions of generalized hyperbolic equations, PhD thesis, SamSU, 2022.
13. Bourgain, J., Estimations de certaines fonctions maximales. C. R. Acad. // Sci. Paris Sér. I Math., 301 (1985) no. 10, 499–502.
14. Bergh I. and Löström I., “Interpolation Spaces,” Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.
15. Brenner P, On $L^p \rightarrow L^{p'}$ estimates for the wave-equation.// Math. Z.145 (1975), pp. 251–254.
16. Buschenhenke S., Dendrinis S., Ikromov I.A., Müller D., Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ with height $h < 2$: Part I, // Trans. Amer. Math. Soc., Volume 372, 2019, No. 2, pages 1363-1406.
17. Carbery, A., Wainger, S. and Wright, J., Singular integrals and the Newton diagram. Collect. Math., Vol. Extra (2006), 171–194.
18. M. A. Chakhkiev. On the exponent of convergence of a special integral of a multidimensional analogue of Tarry's problem. // Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 67(2):211-224, 2003.

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович,
Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз
siroj63@mail.ru

Халхаджаев Бахтиёр Батирович,
Ташкентский институт менеджмента и экономики
halxadjjev@timeedu.uz

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи с полунелокальными краевыми условиями для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода, четвёртого порядка в параллелепипеде. Для этой задачи методами Фурье, « ε -регуляризации», априорных оценок, последовательности приближений и сжимающихся отображений доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения обратной задачи в анизотропном пространстве Соболева.

Ключевые слова: трёхмерные уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка, линейная обратная задача с полунелокальными краевыми условиями, корректность задачи, методы Фурье, « ε -регуляризации», априорных оценок, последовательности приближений и сжимающихся отображений.

TO'RTINCHI TARTIBLI IKKINCHI TUR ARALASH TURDAGI TENGLAMA UCHUN CHIZIQLI TESKARI MASALA

Annotatsiya. Ushbu maqolada parallelepipedda ikkinchi turdagi to'rtinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masalaning korrektilik masalalari ko'rib chiqiladi. Furiye usuli, « ε -regulyarizatsiya», aprior baholar, ketma-ket yaqinlashishlar va qisqartirib aks ettirishlar usullari yordamida teskari masalaning anizotrop Sobolev fazosida regulyar yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremlari isbotlangan.

Kalit so'zlar: ikkinchi tur to'rtinchi tartibli uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama, yarim nolokal chegaraviy shartli chiziqli teskari masala, yechimning korrektiligi, Furiye usuli « ε -regulyarizatsiya», aprior baholar, ketma-ket yaqinlashishlar va qisqartirib aks ettirishlar usullari.

LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER MIXED-TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND

Abstract. In this article the correctness of a linear inverse problem with seminonlocal boundary conditions for a three-dimensional equation in a parallelepiped is considered. The equation itself is a fourth order mixed type equation of the second kind. The existence and uniqueness theorems for a generalized solution of the inverse problem in a certain class of integrable functions are proved using the methods of Fourier, " ε -regularization", a priori estimates, approximating sequences and contracting mappings.

Keywords: three-dimensional mixed-type fourth-order equation of the second kind, linear inverse problem with semi-nonlocal boundary conditions, well-posedness of the problem, Fourier methods, " ε -regularization", a priori estimates, sequences of approximations, contracting mappings.

Введение и постановка задачи. В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами [3,8-11]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики. [1,4,17,24,25]. Линейные обратные задачи для модельных уравнений смешанного типа второго порядка в плоскости изучены в работах А.Г.Меграбова, К.Б.Сабитова и их учеников, а для многомерных уравнений смешанного типа второго порядка как первого, так и второго рода в ограниченных областях с локальными условиями предложены и изучены в работах С.З.Джамалова, С.Г.Пяткова, а с нелокальными краевыми условиями изучены в работах С.З.Джамалова, Р.Р.Ашурова [12-14,21,23]. Прямые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка исследовались в работах [6,7,15,27], а обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка практически не исследовались. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе для исследования однозначной разрешимости обратных задач для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода, четвёртого порядка в параллелепипеде предлагается новый метод, основанный на сведении обратной задачи к прямым полунелокальным краевым задачам для семейства нагруженных дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода четвёртого порядка в прямоугольнике.

Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [20],[25].

В трёхмерном параллелепипеде

$$G = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q \times (0,\ell) = \{(x,t); 0 < x < 1; 0 < t < T < +\infty\}$$

рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвёртого порядка

$$Lu = Pu + Mu + Nu = \psi(x,t,y). \quad (1)$$

$$\text{Здесь} \quad Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x,t) D_t^i u; \quad Mu = au_{xxxx} - bu_{xxtt} - cu_{xx}; \quad Nu = u_{yyyy},$$

$$\text{где} \quad K_4(x,t) = K_4(t), \quad K_4(0) = K_4(T) = 0; \quad a, b, c - \text{const} > 0, \quad D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \quad (i = 0, 1, 2)$$

$$D_t^0 u = u.$$

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [3-5,9].

В дальнейшем будем предполагать, что $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$, где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ – заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x,t,y), h(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0; \quad u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0; \quad u_{yy}|_{y=0} = u_{yy}|_{y=\ell} = 0 \quad (4)$$

и дополнительному условию:

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \quad \text{где} \quad 0 < \ell_0 < \ell < +\infty, \quad (5)$$

и вместе с функцией $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}.$$

где $W_2^{4,3}(G)$ анизотропная пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{4,3}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^3 \|u_k(x,t)\|_{W_2^4(Q)}^2, \quad (A)$$

Здесь через $W_2^4(Q)$ обозначено пространства Соболева с нормой

$$\|g\|_{W_2^4(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 4} \int_Q |D^\alpha g|^2 dx dt, \quad \text{где} \quad \alpha - \text{это мультииндекс, } D^\alpha - \text{есть обобщённая производная по}$$

переменным x и t .

Очевидно, что пространство $W_2^{4,3}(G)$ с нормой (A) является банаховым пространством [11-14].

Определение 1. Регулярным решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,y) \in U$, удовлетворяющую уравнению (1) с краевыми условиями (2)-(5) почти всюду в области G .

Однозначную разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью метода Фурье, т.е. для нахождения решения задачи (1)-(5) применим метод Фурье по переменной y . А именно, решение задачи (1)-(5) ищем в виде:

$$u(x,t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) Y_k(y),$$

где функции $Y_k(y) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_k y$, $\mu_k = \frac{\pi k}{\ell}$, $k=1,2,3,\dots$ являются решениями спектральной задачи уравнения четвёртого порядка с условиями Дирихле, то есть

$$Y_k^{(IV)} = \mu_k^4 Y_k,$$

$$Y_k(0) = Y_k(\ell) = 0; Y_k''(0) = Y_k''(\ell) = 0$$

Известно, что система собственных функций $\{Y_k(y)\}$ – фундаментальна в пространстве $L_2[0, \ell]$ и в нём образует ортонормированный базис [16],[22], а функции $u_k(x,t)$; $k=1,2,3,\dots$ подлежат определению.

Будем требовать выполнения следующих условий.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области $\bar{Q}$, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов и правой части уравнения (1) и заданной функции $\varphi_0(x,t)$.

Условие 1:

Нелокальные условия:

$$K_{4t}(0) = K_{4t}(T); K_i(x,0) = K_i(x,T); i=0,2,3, \text{ для всех } x \in [0,1],$$

$$\gamma g(x,0,z) = g(x,T,z), \gamma f(x,0,z) = f(x,T,z).$$

Кроме того, пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения (1):

$$K_1(x,t) > 0, K_3(x,t) > 0 \text{ достаточно большие функции, } -(2K_3 + (2j-3)K_{4t} + 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0, j=0,1,2;$$

$$2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0, \lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_1 > 0, \text{ для любых } (x,t) \in \bar{Q}, \text{ где } \lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0, |\gamma| > 1.$$

$$\text{гладкость: } g(x,t,l_0) = g_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}), \quad f(x,t,l_0) = f_0(x,t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q}),$$

$$|f_0(x,t)| \geq \rho > 0; \quad f \in W_2^{3,3}(G), \quad g \in W_2^{1,3}(G).$$

Условие 2:

$$\varphi_0(x,t) \in W_2^5(Q); \gamma D_t^p \varphi_0|_{t=0} = D_t^p \varphi_0|_{t=T}, p=0,1,2,3; \quad \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{x=1} = 0, \varphi_{0xx}|_{x=0} = \varphi_{0xx}|_{x=1} = 0.$$

Чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $y = \ell_0$:

отсюда

$$Lu|_{y=\ell_0} = P\varphi_0 + M\varphi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k \sin \mu_k \ell_0 = g_0(x,t) + h(x,t) f_0(x,t)$$

Теперь, учитывая дополнительное условие (5) и то, что $f_0 \neq 0$, определим неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде интеграла:

$$h(x,t) = \frac{1}{f_0(x,t)} \left[\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k(x,t) \sin \mu_k \ell_0 \right],$$

$$\text{где } \Phi_0 = L_0 \varphi_0 - g_0; \quad g(x,t, \ell_0) = g_0(x,t); \quad L_0 \varphi_0 = P\varphi_0 + M\varphi_0;$$

$$P\varphi_0 = \sum_{i=0}^4 k_i(x,t) D_t^i \varphi_{i0}; \quad M\varphi_0 = a D_x^4 \varphi_0 - b D_{x,t}^{2,2} \varphi_0 - c D_x^2 \varphi_0, \text{ а для определения функций } u_k(x,t) \text{ в}$$

области $Q = (0,1) \times (0,T)$ получим бесконечное число нагруженных систем уравнений смешанного типа четвёртого порядка:

$$\begin{aligned} \Im u_k &= Pu_k + Mu_k + \mu_k^4 u_k = g_k(x,t) + \\ &+ \frac{f_k(x,t)}{f_0(x,t)} \left[\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^4 u_m(x,t) \sin \mu_m \ell_0 \right] = F(u_k) \end{aligned} \quad (6)$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^p u_k|_{t=0} = D_t^p u_k|_{t=T}; p = 0, 1, 2, \quad (7)$$

$$u_k|_{x=0} = u_k|_{x=1} = 0, \quad u_{kxx}|_{x=0} = u_{kxx}|_{x=1} = 0. \quad (8)$$

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполнены вышеперечисленные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнения (1), и пусть существует положительное число σ , такое, что для $\delta_0 = \min\{\delta_{03}, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_{02}, \delta_1 + (\frac{\pi}{\ell})^2\}$ имеют место оценки $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} = \delta > 0$, $q = M \|f\|_{W_2^{3,3}(G)}^2 < 1$, где $M = \sigma e^{\lambda T} m(\ell \delta)^{-1} \eta^{-2} \|f_0\|_{C_{x,t}^{0,1}(\bar{Q})}^2$, $m = 10c_1 c_2 c_3$ – коэффициенты теоремы вложения Соболева. Тогда существует единственное решение линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U .

Доказательство:

Сначала покажем, что решения задачи (1)-(4) $u(x, t, y)$, удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t)$.

Подходя от обратного, предположим, что $u(x, t, \ell_0) \neq \varphi_0(x, t)$, тогда для функции $z(x, t) = u(x, t, \ell_0) - \varphi_0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) \sin \mu_k \ell_0 - \varphi_0(x, t)$ в области Q , умножая (6)-(8) на $\sin \mu_k \ell_0$ и суммируя по k от 1 до ∞ , получим следующую задачу:

$$L_0 z = \sum_{i=0}^4 K_i D_t^i z + M z = 0 \quad (9)$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^p z|_{t=0} = D_t^p z|_{t=T}; p = 0, 1, 2, \quad (10)$$

$$z|_{x=0} = z|_{x=1} = 0; \quad z_{xx}|_{x=0} = z_{xx}|_{x=1} = 0. \quad (11)$$

Теперь докажем единственность решения задачи (9)-(11).

Для этого рассмотрим тождество $2(L_0 z, e^{-\lambda t} z_t)_0 = 0$. Интегрируя по частям тождество, учитывая условия теоремы 1 и условия (10),(11), получим неравенство $\|z\|_2 \leq 0$, откуда следует $z(x, t) = 0$, и задача (9)-(11) имеет единственное решение; значит, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t)$.

2. Семейство нагруженных дифференциальных уравнений пятого порядка с малым параметром.

Разрешимость задачи (6)-(8) докажем методами « ε – регуляризации», последовательных приближений и априорных оценок, а именно – в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ рассмотрим полунелокальную краевую задачу для семейства нагруженных дифференциальных уравнений пятого порядка (составного типа) с малым параметром:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_\varepsilon u_k = -\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}}{\partial t} + P u_{k,\varepsilon} + M u_{k,\varepsilon} + \mu_k^4 u_{k,\varepsilon} = g_k(x, t) + \\ + \frac{f_k(x, t)}{f_0(x, t)} [\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^4 u_{m,\varepsilon}(x, t) \sin \mu_m \ell_0] = F(u_{k,\varepsilon}), \end{aligned} \quad (12)$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}|_{t=T}; p = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (13)$$

$$u_{k,\varepsilon}|_{x=0} = u_{k,\varepsilon}|_{x=1} = 0, \quad u_{k,\varepsilon xx}|_{x=0} = u_{k,\varepsilon xx}|_{x=1} = 0, \quad (14)$$

где ε – малое положительное число.

В дальнейшем при доказательстве корректности задачи (12)-(14) нам понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы.

Дальше при доказательстве теоремы 1 и корректности задачи (12)-(14) нам понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы.

Определим пространства вектор-функций $W_i(Q) = \{g_k : g_k \in W_2^i(Q)\}$ где $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, 3, \dots$ с конечной нормой

$$\langle g_k \rangle_i^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^3 \|g_k\|_{W_2^i(Q)}^2; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (C)$$

Очевидно, что пространство $W_i(Q)$ с определённой нормой (C) является банаховым пространством. Из определения пространств $W_2^i(Q)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ следует

$$W_4(Q) \subset W_3(Q) \subset W_2(Q) \subset W_1(Q) \subset W_0(Q).$$

Через $W(Q)$ ниже будем обозначать класс вектор-функций $\{g_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что

$\{g_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty} \in W_4(Q)$, $\{\frac{\partial}{\partial t} \Delta^2 g_k\}_{k=1}^{\infty} \in W_0(Q)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (13), (14).

Определение. Решением задачи (12)-(14) будем называть вектор-функцию $\{u_{s,\varepsilon}(x, t)\} \in W$, удовлетворяющую уравнению (12) почти всюду в области Q .

Теперь разрешимость задачи (12)-(14) в области Q докажем методами последовательных приближений [2], [22].

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\varepsilon} u_{k,\varepsilon}^{(l)} = & -\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} + P u_{k,\varepsilon}^{(l)} + M u_{k,\varepsilon}^{(l)} + \mu_k^4 u_{k,\varepsilon}^{(l)} = g_k(x, t) + \\ & + \frac{f_k(x, t)}{f_0(x, t)} [\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^4 u_{m,\varepsilon}^{(l-1)}(x, t) \sin \mu_m \ell_0] = F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}) \end{aligned} \quad (15)$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (16)$$

$$u_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=0} = u_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_{k,\varepsilon xx}^{(l)} \Big|_{x=0} = u_{k,\varepsilon xx}^{(l)} \Big|_{x=1} = 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $\{u_{\varepsilon}^{(-1)}\} = 0$.

В дальнейшем при получении различных априорных оценок мы часто используем неравенство Коши с σ [12], то есть

$$\forall u, g \geq 0; \forall \sigma > 0; \quad 2u \cdot g \leq \sigma u^2 + \sigma^{-1} g^2.$$

Лемма 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда для решения задачи (15)-(17) справедливы следующие оценки:

$$I). \quad \frac{\varepsilon}{\delta} (\langle u_{k,\varepsilon tt}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon ttx}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon tt}^{(l)} \rangle_0^2) + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2 \leq \text{const}(\mathcal{I}, \mathcal{E}, \mu_k),$$

$$II). \quad \frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_4^2 \leq \text{const}(\mathcal{I}, \mathcal{E}, \mu_k).$$

Символом $\text{const}(\mathcal{I}, \mathcal{E}, \mu_k)$ здесь и далее обозначим постоянную, не зависящую от l, ε, μ_k параметров.

Доказательство леммы 1. Докажем справедливость оценки I).

Для этого рассмотрим тождество:

$$\left| -2 \left(\mathfrak{I}_{\varepsilon} u_{k,\varepsilon}^{(l)}, e^{-\lambda t} u_{k,\varepsilon}^{(l)} \right)_0 \right| = \left| -2 \left(F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}), e^{-\lambda t} u_{k,\varepsilon}^{(l)} \right)_0 \right| \quad (18)$$

где постоянную $\lambda > 0$ выберем позже.

В силу условий теоремы 1 и краевых условий (16), (17), интегрированием по частям тождество (18) и применяя неравенства Коши с σ [12], из тождества (18) легко получить первую априорную оценку снизу:

$$\left| -2 \int_Q e^{-\lambda t} \mathfrak{T}_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(l)} \cdot u_{k,\varepsilon t}^{(l)} d x dt \right| \geq \varepsilon e^{-\lambda T} (\|u_{k,\varepsilon t t t}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t t x}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t x x}^{(l)}\|_0^2) + \delta_0 e^{-\lambda T} \|u_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_2^2. \quad (19)$$

где $\delta_0 = \min\{\delta_{03}, \lambda a, \lambda b, \lambda c, \delta_{02}, \delta_1 + (\frac{\pi}{\ell})^2\}$

Далее, применяя неравенство Коши с σ к тождеству (18), справа сверху получим:

$$\begin{aligned} & \left| -2 \left(F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}), e^{-\lambda t} u_{k,\varepsilon t}^{(l)} \right)_0 \right| \leq \\ & \leq \left| 2 \left(g_k + \frac{f_k(x,t)}{f_0(x,t)} \left[\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_k \ell_0 \right], e^{-\lambda t} u_{k,\varepsilon t}^{(l)} \right)_0 \right| \leq \\ & \leq 3\sigma^{-1} \|\hat{u}_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_1^2 + 2\sigma \left[\|g_k\|_0^2 + 2\eta^{-2} \|f_k\|_{C(Q)}^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 \sigma \ell^{-1} \eta^{-2} \|f_k\|_{C(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^3 \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_1^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $T_0 = 2 \max \left\{ \|K_i(x,t)\|_{C(Q)} \mid (i = \overline{0,4}; \lambda \{a,b,c\}) \right\}; \quad c_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^8}{(1 + \mu_k^4)^3}.$

Объединяя неравенства (19) и (20), получаем:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\|u_{k,\varepsilon t t t}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t t x}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t x x}^{(l)}\|_0^2) + (\delta_0 - 3e^{\lambda T} \sigma^{-1}) \|\hat{u}_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_2^2 \leq \\ & + 2\sigma e^{\lambda T} \left[\|g_k\|_0^2 + 2\eta^{-2} \|f_k\|_{C(Q)}^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 \sigma \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} \|f_k\|_{C(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя теоремы вложения Соболева $\|\hat{f}\|_{C(Q)}^2 \leq c_2 \|\hat{f}\|_{W_2^2(Q)}^2$ [17,18] к неравенству (21), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\|u_{k,\varepsilon t t t}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t t x}^{(l)}\|_0^2 + \|u_{k,\varepsilon t x x}^{(l)}\|_0^2) + (\delta_0 - 3e^{\lambda T} \sigma^{-1}) \|\hat{u}_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_2^2 \leq \\ & + 2\sigma e^{\lambda T} \left[\|g_k\|_0^2 + 2\eta^{-2} c_2 \|f_k\|_{W_2^2(Q)}^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 c_2 \sigma \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} \|f_k\|_{W_2^2(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_2^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая условие теоремы, $\delta_0 - 3e^{\lambda T} \sigma^{-1} > \delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} \geq \delta > 0$, разделяя неравенства (22) на $\delta > 0$, умножая $(1 + \mu_k^4)^3$ и суммируя по k от 1 до ∞ ,

получим первую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\delta} (\langle u_{k,\varepsilon t t t}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon t t x}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon t x x}^{(l)} \rangle_0^2) + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2 \leq \\ & + 2\sigma \delta^{-1} e^{\lambda T} \left[\langle g_k \rangle_0^2 + 2\eta^{-2} c_2 \langle f_k \rangle_2^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] + \\ & + 2c_1 c_2 \sigma \delta^{-1} \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} \langle f_k \rangle_2^2 \langle u_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \rangle_2^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Введём обозначение $2\sigma \delta^{-1} e^{\lambda T} \left[\langle g_k \rangle_0^2 + 2\eta^{-2} c_2 \langle f_k \rangle_2^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] = A$ и, учитывая условия теоремы 1 $2c_1 c_2 \sigma \delta^{-1} \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} \langle f_k \rangle_2^2 < q = M \langle f_k \rangle_3^2 < 1$, из рекуррентной формулы (23) получим справедливость оценки I). Действительно, для этого в качестве «начального приближения» возьмём функцию $\{\hat{u}_\varepsilon^{(-1)}\} \equiv \{0\}$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{\delta} \left(\langle u_{k,\varepsilon ttt}^{(0)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon ttx}^{(0)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon txx}^{(0)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(0)} \rangle_2^2 \right) \leq \\ & \leq 2\sigma\delta^{-1}e^{\lambda T} \left[\langle g_k \rangle_0^2 + 2\eta^{-2}c_2 \langle f_k \rangle_2^2 \left(T_0^2 \|\varphi_0\|_{W_2^4(Q)}^2 + \|g_0\|_0^2 \right) \right] \equiv A. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, методом индукции получим первую априорную оценку для любой функции $\{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\}, \forall l \geq 0$

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left(\langle u_{k,\varepsilon ttt}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon ttx}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon txx}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2 \right) \leq A \cdot \sum_{k=0}^l q^k < \frac{A}{1-q} \quad (24)$$

Теперь докажем справедливость оценки II).

Для этого рассмотрим тождество:

$$\left| -2 \int_Q \Im_{\varepsilon} u_{k,\varepsilon}^{(l)} \cdot e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(l)} dx dt \right| = \left| -2 \int_Q F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}) \cdot e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(l)} dx dt \right|, \quad (25)$$

$$\text{где } P u_{k,\varepsilon}^{(l)} \equiv \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial^2 \Delta u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^2} + 3\lambda^2 \frac{\partial \Delta u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} - \frac{\lambda u_{k,\varepsilon ttt}^{(l)}}{2} + \frac{\lambda^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{16},$$

$$\frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,\varepsilon tttt}^{(l)} + 2u_{k,\varepsilon ttxx}^{(l)} + u_{k,\varepsilon xxxx}^{(l)}).$$

Интегрируя по частям (25), с учётом условий теоремы 1 и краевых условий (16), (17), получим слева снизу необходимую вторую оценку:

$$\left| -2 \int_Q \Im_{\varepsilon} u_{k,\varepsilon}^{(l)} \cdot P u_{k,\varepsilon}^{(l)} dx dt \right| \geq \varepsilon e^{-\lambda T} \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\|_0^2 + \delta_0 e^{-\lambda T} \|u_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_4^2. \quad (26)$$

Теперь, применяя неравенство Коши с σ к правой части тождества (25), нетрудно получить справа сверху следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| -2 \int_Q F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}) \cdot e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(l)} dx dt \right| = \left| -2(g_k + \frac{f_k}{f_0} \cdot [\Phi_0 + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_k \ell_0], e^{-\lambda t} P u_{k,\varepsilon}^{(l)} dx dt)_0 \right| \leq \\ & \leq 31\sigma^{-1} e^{\lambda T} \|u_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_4^2 + 15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\|g_k\|_1^2 + 2\eta^{-2}c_1 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_{C^1(Q)}^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] + \\ & + 6\sigma\lambda^4 \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} c_1 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_{C^1(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \cdot \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_4^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{где } T_1 = 2 \max \{ \|K_i(x, t)\|_{C^1(Q)} (i = \overline{0, 4}); \lambda \{a, b, c\} \}$$

Объединяя оценки (26) и (27), получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\|_0^2 + \left(\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} \right) \|u_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_4^2 \leq \\ & \leq 15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\|g_k\|_1^2 + 2\eta^{-2} \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_{C^1(Q)}^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] + \\ & + 6\sigma\lambda^4 \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} c_1 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_{C^1(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \cdot \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_4^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя теоремы вложения Соболева $\|f_k\|_{C^1(Q)}^2 \leq c_2 \|f_k\|_{W_2^3(Q)}^2$ к неравенству (28), получим:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\|_0^2 + \left(\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} \right) \|u_{k,\varepsilon}^{(l)}\|_4^2 \leq \\ & \leq 15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\|g_k\|_1^2 + 2\eta^{-2} c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_3^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] + \\ & + 6\sigma\lambda^4 \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} c_1 c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \|f_k\|_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^s \cdot \|u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\|_4^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Разделяя неравенство (29) на $\delta_0 - 31e^{\lambda T} \sigma^{-1} \geq \delta > 0$, умножая $(1 + \mu_k^4)^3$ и суммируя по k от 1 до ∞ , получим вторую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_4^2 \leq \\ \leq 15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\langle g_k \rangle_1^2 + 2\eta^{-2} c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \langle f_k \rangle_3^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] + \\ + 6\sigma\lambda^4 \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} c_1 c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \langle f_k \rangle_3^2 \langle u_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \rangle_4^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Введём обозначение $15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\langle g_k \rangle_1^2 + 2\eta^{-2} c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \langle f_k \rangle_3^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] \equiv A_1$ и, учитывая условия теоремы 1, что $6\sigma\lambda^4 \ell^{-1} \eta^{-2} e^{\lambda T} c_1 c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \langle f_k \rangle_3^2 < q = M \langle f_k \rangle_3^2 < 1$, из рекуррентной формулы (30), получим справедливость оценки II).

Действительно, для этого в качестве «начального приближения» возьмём функцию $\{u_{k,\varepsilon}^{(-1)}\} \equiv \{0\}$. Тогда для «нулевого приближения» имеем:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(0)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(0)} \rangle_2^2 \leq 15\sigma\lambda^4 e^{\lambda T} \cdot [\langle g_k \rangle_1^2 + 2\eta^{-2} c_2 \|f_0\|_{C^1(Q)}^2 \langle f_k \rangle_3^2 [T_1^2 \|\varphi_0\|_5^2 + \|g_0\|_1^2]] \equiv A_1$$

Продолжая этот процесс, методом индукции получим вторую априорную оценку для любой функции $\{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\}, \forall l \geq 0$

$$\frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2 \leq A_1 \cdot \sum_{k=0}^l q^k \leq \frac{A_1}{1-q}.$$

Отсюда, как при доказательстве оценки I), легко получается оценка II).

Лемма 1 доказана.

Введём новую функцию из $W(Q)$ по формуле $\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} = u_{k,\varepsilon}^{(l)} - u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}; \varepsilon > 0; l = 0, 1, 2, 3, \dots$

Тогда для неё справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для функции $\{\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q)$ справедливы следующие оценки:

$$\text{III). } \frac{\varepsilon}{\delta} (\langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2) \leq Aq^{(l)},$$

$$\text{IV). } \frac{\varepsilon}{\delta} \left\langle \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_4^2 \leq A_1 q^{(l)}.$$

Доказательство леммы 2. Из (15)-(17) для функции $\{\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q)$ получим следующую задачу:

$$\mathfrak{T}_\varepsilon \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} + L_0 \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} + \mu_k^4 \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{f_k(x, t)}{f_0(x, t)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_k \ell_0 \equiv F(\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l-1)}) \quad (31)$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma D_t^q \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=0} = D_t^q \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=T}; q = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (32)$$

$$\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=0} = \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=1} = 0, \quad \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=0} = \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x=1} = 0, \quad (33)$$

где $\varepsilon > 0, l = 0, 1, 2, \dots$;

Следовательно, как и в доказательстве леммы 1, для функции $\{\mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)}\} = \{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\} - \{u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\} \in W(Q)$ получим третью рекуррентную формулу:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} (\langle \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2 + \langle \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_0^2) + \langle \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_2^2 \leq q \langle \mathcal{G}_{k,\varepsilon}^{(l-1)} \rangle_2^2 \quad (34)$$

и, повторяя рассуждения леммы 1, из (34) получим априорную оценку III).

Аналогично доказывается оценка IV). Лемма 2 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (15)-(17) однозначно разрешима в $W(Q)$.

Доказательство. Теорему 2 докажем методом сжимающихся отображений [9]. Пусть $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ – оператор, соответствующий дифференциальному выражению (15) и условиям (16),(17). Обозначим через $\mathfrak{Z}_\varepsilon^{-1}$ формальный обратный оператор. Определим в пространстве $W(Q)$ оператор

$$u_{k,\varepsilon}^{(l)} = \mathfrak{Z}_\varepsilon^{-1} F(u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}) \equiv P u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}.$$

1. Покажем, что оператор P отображает пространство $W(Q)$ в себя.

Пусть $\{u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\} \in W(Q, R)$, тогда для решения задачи (15)-(17), справедливо утверждение леммы 1, т.е. справедлива оценка II). Отсюда следует, что для любых $l=1, 2, 3, \dots$ получаем $\{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q)$.

Таким образом, $P: W(Q) \rightarrow W(Q)$.

2. Покажем, что P – сжимающий оператор.

Пусть $\{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\}, \{u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\} \in W(Q)$. Рассмотрим новую функцию $\{g_{k,\varepsilon}^{(l)}\} = \{u_{k,\varepsilon}^{(l)}\} - \{u_{k,\varepsilon}^{(l-1)}\}$, для неё справедливо утверждение леммы 2, т.е. справедлива оценка IV), т.е.

$$IV). \quad \varepsilon \left\langle \frac{\partial \Delta^2 g_{k,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t} \right\rangle_0^2 + \langle g_{k,\varepsilon}^{(l)} \rangle_4^2 \leq A_1 q^{(l)}.$$

Таким образом, P – сжимающий оператор. Теперь по известному принципу сжимающих отображений задача (15)-(17) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W(Q)$, при $\varepsilon > 0$. Отсюда имеем $u_{k,\varepsilon}^{(l)} \rightarrow u_{k,\varepsilon}$ при $l \rightarrow \infty$ [6-8, 11, 12].

3. Семейство нагруженных дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода, четвёртого порядка.

Теперь докажем однозначную разрешимость задачи (6)-(8). При этом семейство нагруженных дифференциальных уравнений пятого порядка составного типа (12) с условиями (13),(14) используем в качестве « ε – регуляризирующего» уравнения для уравнения (6) с условиями (7),(8) [3, 4-12].

Пусть $\{u_{k,\varepsilon}\} \in W(Q)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ есть единственное решение задачи (12)-(14). Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство IV). По теореме о слабой компактности [13, 24], из ограниченной последовательности $\{u_{k,\varepsilon}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функции $\{u_{k,\varepsilon_j}\}$, такую, что $u_{k,\varepsilon_j} \rightarrow u_k$ слабо в $W(Q)$. Покажем, что предельная функция $u_k(x, t)$ удовлетворяет уравнению (8) почти всюду в $W(Q)$. Действительно, так как подпоследовательность $\{u_{k,\varepsilon_j}\}$ слабо сходится в $W(Q)$, а оператор $\mathfrak{Z}$ – линеен, то имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}u_k - F(u_k) &= \mathfrak{Z}u_k - F(u_{k,\varepsilon_j}) - [F(u_k) - F(u_{k,\varepsilon_j})] = \varepsilon_j \frac{\partial \Delta^2 u_{k,\varepsilon_j}}{\partial t} + L_0(u_k - u_{k,\varepsilon_j}) + \\ &+ \mu_k^4(u_k - u_{k,\varepsilon_j}) - [F(u_k) - F(u_{k,\varepsilon_j})]. \end{aligned} \quad (35)$$

Переходя к пределу в (35) при $\varepsilon_j \rightarrow 0$, получим $\mathfrak{Z}u_k = F(u_k)$. Значит функция $u_k(x, t)$ будет единственным решением задачи (6)-(8) из $W(Q)$.

Тем самым доказана теорема 2. Теперь докажем теорему 1.

Так как выполнены все условия теоремы-1, используя равенства Парсеваля – Стеклова [11-13] для решения задачи (6)-(8), получим решение задачи (1)-(5) из указанного класса U .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Аниканов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.-120с
2. Березинский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук.думка, 1965.
3. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122, № 4. С. 167--170.

4. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений. ВЦ. СО АН СССР. Новосибирск. 1987. Препринт №713, с.84
5. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
6. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С 5-13.
7. Егоров И.Е, Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995, с.133
8. Дезин.А.А. Общие вопросы теории граничных задач. - М: Наука, 1980.
9. Джамалов.С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. // Мат. заметки СВФУ, 2017. №4, -С.17-28.
10. Джамалов С.З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. //Журнал Средне Волжского мат общества. 2019г, Т.21, №1, с. 24-33.
11. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. // Монография. Ташкент. 2021г, с.176.
12. Джамалов С.З., Аиуоров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2019. Т.55. № 1, с.34-44.
13. Джамалов С.З., Аиуоров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. // Известия вузов. Математика. 2019, №6, с.1-12.
14. Джамалов С.З, Пятков С.Г. Некоторые классы обратных задач для уравнений смешанного типа второго порядка. // Матем, заметки СВФУ, 2018, Т.25, №4, с.3-15. <https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.100.20550>.
15. Джамалов С.З, Пятков С.Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка. // Сибирский математический журнал, 2020, Т.61, № 4, с.777-795.
16. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.1973.с.407.
17. Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969.с-67.
18. Лионс Ж.Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.Мир.1971.
19. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Издательство: «Мир». Москва. 1965.
20. Nakhushhev A.M., Loaded Equations and their Application (Nauka, Moscow, 2012) [in Russian].
21. Меграбов А.Г. Некоторые обратные задачи для уравнения смешанного типа //ДАН СССР, 1977, т.234, С.305-307.
22. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство: «Наука». Москва. 1988.
23. Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // Изв. вузов. Математика. 2011, №2, с.71-85.
24. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи (Новосибирск, Сибирское научное издательство, 2009).
25. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, №4. С.694-716.
26. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва. Наука, с-494.
27. Чуешев А.В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка, Сиб. матем. журн., 2002, том 43, № 2, 454–472.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА
ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исломов Бозор Исломович,

Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан,

islomovbozor@yandex.com;

Абсоатова Хусинора Гофур кизи

Наманганский государственный университет,
г. Наманган, Узбекистан,

rhmtvfarhod@gmail.com

Аннотация. В данной работе для уравнения смешанного типа дробного порядка в смысле Капуто со спектральным параметром изучена краевая задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения поставленной задачи. Само решение построено в виде суммы ортогонального ряда, и показана его сходимости в классе регулярных решений данного уравнения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с дробными производными, задача Дирихле, ортогональный ряд, критерий единственности, существование.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED EQUATION OF MIXED TYPE WITH A
FRACTIONAL ORDER AND A SPECTRAL PARAMETER

Annotatsiya. Ushbu ishda Kaputo ma'nosida spektral parametrga ega bo'lgan kasr tartibli aralash tipdagi tenglama uchun to'g'ri to'rtburchak sohada qo'yilgan chegaraviy masala o'rganilgan. Qo'yilgan masala yechimini yagonaligi mezoni o'rganilgan. Masalaning yechimi ortogonal qator yig'indisi ko'rinishida topilgan va uning klassik yechimlar sinfida yaqinlashishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: kasr hosilali aralash tipdagi tenglama, Dirixle masalasi, ortogonal qator, yagonalik mezoni, mavjudlik.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED EQUATION OF MIXED TYPE WITH A
FRACTIONAL ORDER AND A SPECTRAL PARAMETER

Abstract. This paper investigates a boundary value problem in a rectangular domain for a mixed-type fractional-order equation in the sense of Caputo with a spectral parameter. A criterion for the uniqueness of the solution to the stated problem is established. The solution is constructed in the form of a sum of an orthogonal series, and its convergence in the class of regular solutions of the given equation is proved.

Keywords: mixed-type equation with fractional derivatives, Dirichlet problem, orthogonal series, uniqueness criterion, existence.

Введение. Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие производные дробного порядка, имеют важные приложения в различных областях [1]–[6], и полученные результаты, безусловно, представляют большое значение из-за их новизны. Такие дифференциальные уравнения в частных производных невозможно классифицировать из-за наличия дробной производной, так как не удаётся написать соответствующее характеристическое уравнение.

В связи с этим предлагаю следующее определение классификации таких уравнений по типам.

Определение 1. Дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие производную дробного порядка γ , назовем параболическим, эллиптическим и гиперболическим, если при каком-то значении γ из промежутка его изменения они становятся, соответственно, дифференциальным уравнением параболического, эллиптического и гиперболического типов по существующей классификации дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 2. Если в различных частях области задания дифференциальное уравнение в частных производных, содержащее дробную производную, принадлежит различным типам в указанном выше смысле, то такое дифференциальное уравнение следует называть уравнением смешанного типа в этой области.

В данной работе изучается краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа дробного порядка со спектральным параметром в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Само решение построено в виде суммы ортогонального ряда, и показана его сходимость в классе регулярных решений данного уравнения.

Формулировка задачи.

Рассмотрим уравнение:

$$0 = Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_c D_{0y}^\alpha u - \lambda^2 u, & (x, y) \in \Omega_1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u_{xx} - {}_c D_{y0}^\beta u - \lambda^2 u & (x, y) \in \Omega_2, \quad 1 < \beta \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l, -p < y < q\}$, где $p > 0, q > 0, l, \lambda$ – заданные действительные числа, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < q\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) : x \in (0, l) : -p < y < 0\}$

$J = \{(x, y): 0 < x < l, y = 0\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$, а ${}_c D_{0y}^\gamma$ – оператор дробного порядка в смысле Капуто [2, с. 14], [7, с. 38]:

$${}_c D_{ay}^\gamma f(y) = (\text{sign}(y-a))^n {}_c D_{ay}^{\gamma-n} f^{(n)}(y), \quad n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

здесь ${}_c D_{ay}^\delta g(y)$ – интегро-дифференциальный оператор Римана – Лиувилля порядка $\delta \in \mathbb{C}$:

$${}_c D_{ay}^\delta g(y) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(y-a)^\gamma}{\Gamma(-\delta)} \int_a^y \frac{g(t)dt}{(y-t)^{1+\delta}}, & \delta < 0, \\ g(y), & \delta = 0, \\ (\text{sign}(y-a))^n \frac{d^n}{dy^n} {}_c D_{ay}^{\delta-n} f(y), & \delta > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Класс C_θ^k . Через $C_\theta^k(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными по θ до k – го порядка включительно в области M .

Задача T_λ . Требуется найти функции $u(x, y)$ со следующими свойствами:

$$u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega_1 \cup \Omega_2), \quad {}_c D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega_1), \quad {}_c D_{y0}^\beta u \in C(\Omega_2), \quad (4)$$

$$y^{1-\alpha} u_y(x, y) \in C(\Omega_1 \cup J), \quad u_y(x, y) \in C(\Omega_2 \cup J);$$

$$Lu(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad (5)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(l, y) = 0, \quad -p \leq y \leq q; \quad (6)$$

$$u(x, -p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (7)$$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in J, \quad (8)$$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Построение решения задачи T_λ

Для получения решения задачи T_λ мы используем метод разделения переменных. Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (5) и (6) относительно $X(x)$, получим известную спектральную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

Собственные функции и значения задачи (10) и (11) определяются формулами:

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Система функций (12) полна и образует ортонормированный базис в $L_2[0, l]$ [8-9].

Следуя работам [10-11], введём функции:

$$u_k(y) = \int_0^l u(x, y) X_k(x) dx. \quad (13)$$

Рассмотрим вспомогательные функции:

$$u_k^\varepsilon(y) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) X_k(x) dx. \quad (14)$$

В силу (6) и (14) из (1) получим:

$$\begin{aligned} {}_c D_{0y}^\alpha u_k^\varepsilon(y) &= \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} {}_c D_{0y}^\alpha u(x, y) X_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \sin \mu_k x dx - \\ &- \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} u_x(x, y) \sin \mu_k x \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \sqrt{\frac{2}{l}} u(x, y) \cos \mu_k x \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \\ &- \mu_k^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx - \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx. \text{ при } y > 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} {}_c D_{y0}^\beta u_k^\varepsilon(y) &= \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} {}_c D_{y0}^\beta u(x, y) X_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \sin \mu_k x dx - \\ &- \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} u_x(x, y) \sin \mu_k x \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \sqrt{\frac{2}{l}} u(x, y) \cos \mu_k x \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \\ &- \mu_k^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx - \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx. \text{ при } y < 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (15) и (16) с учетом (6), (13), имеем

$${}_c D_{0y}^\alpha u_k(y) + \rho_k^2 u_k(y) = 0, \quad 0 < y < q, \quad \rho_k = \sqrt{\mu_k^2 + \lambda^2}, \quad (17)$$

$${}_c D_{y0}^\beta u_k(y) + \rho_k^2 u_k(y) = 0, \quad -p < y < 0, \quad k \in N. \quad (18)$$

Общие решения уравнений (17) и (18) имеют вид [1, стр.102]

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k E_{\alpha,1}(-\rho_k^2 y^\alpha), & 0 < y < q, \\ c_k y E_{\beta,2}(-\rho_k^2 (-y)^\beta) - b_k E_{\beta,1}(-\rho_k^2 (-y)^\beta), & -p < y < 0, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)}, \quad z, \delta, \gamma \in C, \quad \operatorname{Re}(\delta) > 0, \operatorname{Re}(\gamma) > 0 \quad (20)$$

- функция типа Миттаг-Леффлера [12, с.117], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, a_k, b_k, c_k – произвольные постоянные.

Тогда функции (19) по построению удовлетворяют в областях $\Omega_j (j=1,2)$ уравнению (5) и нулевым граничным условиям (6) при любых a_k, b_k и c_n . Следовательно, в силу линейности и однородности уравнения (5) сумма частных решений:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k E_{\alpha,1}(-\rho_k^2 y^\alpha) X_k(x), & 0 \leq y \leq q, \\ \sum_{k=1}^{+\infty} [c_k |y| E_{\beta,2}(-\rho_k^2 |y|^\beta) - b_k E_{\beta,1}(-\rho_k^2 |y|^\beta)] X_k(x), & -p \leq y \leq 0, \end{cases} \quad (21)$$

также удовлетворяет уравнению (5) и граничным условиям (6).

Теперь находим коэффициенты a_k, b_k и c_n . В силу (8) с учётом

$$E_{\delta,1}(0) = 1, \quad E_{\delta,2}(0) = 1, \quad E_{\delta,\gamma}(z) = 1/\Gamma(\gamma) + z \cdot E_{\delta,\delta+\gamma}(z), \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0$$

из (21) получим:

$$a_k = -\Gamma(\alpha) c_k / \rho_k^2, \quad b_k = \Gamma(\alpha) c_k / \rho_k^2. \quad (22)$$

Используя разложения в ряд по синусам функции $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n X_n(x)$ с учетом (7) и (22) из (21)

при $-p < y < 0$ имеем:

$$c_k \left[p \rho_k^2 E_{\beta,2}(-\rho_k^2 p^\beta) - \Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_k^2 p^\beta) \right] = \rho_k^2 \psi_k, \quad (23)$$

где

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx. \quad (24)$$

Из равенств (22) и (23) находим коэффициенты a_k , b_k и c_k :

$$-a_k = b_k = \Gamma(\alpha) \psi_k / \Delta_k(p, \beta), \quad c_k = \rho_k^2 \psi_k / \Delta_k(p, \beta), \quad (25)$$

при условии, что при всех $k \in N$

$$\Delta_k(p, \beta) \equiv p \rho_k^2 E_{\beta,2}(-\rho_k^2 p^\beta) - \Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_k^2 p^\beta) \neq 0. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (21), находим формальное решение задачи T_λ в виде:

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha) \psi_k}{\Delta_k(p, \beta)} E_{\alpha,1}(-\rho_k^2 y^\alpha) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (27)$$

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\Delta_k(p, \beta)} \times \\ \times \left[\rho_k^2 |y| E_{\beta,2}(-\rho_k^2 |y|^\beta) - \Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_k^2 |y|^\beta) \right] \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad -p \leq y \leq 0. \quad (28)$$

Единственность решения задачи T_λ

Теорема 1. Если существует решение $u(x, y)$ задачи T_λ , то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (26) при всех $k \in N$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\psi(x) \equiv 0$ и $\Delta_k(p, \beta) \neq 0$ при всех $k \in N$. Тогда из формул (19), (24), (25) и (13) имеем:

$$\int_0^l u(x, y) X_k(x) dx = 0 \quad (29)$$

при всех $k \in N$ и $y \in [-p, q]$. Отсюда в силу полноты системы (12) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $y \in [-p, q]$. Поскольку в силу условия (4) функции $u(x, y)$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Следовательно, решение задачи T_λ единственно при выполнении условия (26).

Теорема 1 доказана.

Пусть $k = m \in N$ и при некоторых p, α, β нарушено условие (26), т.е. $\Delta_m(p, \beta) = 0$. Тогда задача T_λ в случае, когда $\psi(x) = 0$ имеет нетривиальное решение:

$$u_m(x, y) = \begin{cases} d_m \Gamma(\alpha) E_{\alpha,1}(-\rho_m^2 y^\alpha) X_m(x), & 0 \leq y \leq q, \\ d_m \left[\rho_m^2 |y| E_{\beta,2}(-\rho_m^2 |y|^\beta) - \Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_m^2 |y|^\beta) \right] X_m(x), & -p \leq y \leq 0, \end{cases} \quad (30)$$

здесь $d_m \neq 0$ — произвольная постоянная.

В силу $\Delta_m(p, \beta) = 0$ заключаем, что построенная функция (30) удовлетворяет условиям (6), (8)

и

$$u_m(x, -p) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (31)$$

Существование решения задачи T_λ

Решение задачи T_λ при условии (26) получено формально в виде сумм ортогональных рядов (27) и (28). Поскольку $\Delta_k(p, \beta)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи T_λ необходимо показать существование чисел p, q, α и k таких, что при больших k выражение $\Delta_k(p, \beta)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой. В противном случае возникает вопрос о существовании нулей $\Delta_k(p, \beta)$. Отметим, что

функция $E_{\delta,\gamma}(z)$ при $z \geq 0$ положительна, а при $z < 0$ имеет конечное число нулей [12, стр.224-225], [2, стр. 93-99]. В силу этого $\Delta_k(p, \beta)$ может иметь нули. Чтобы оценить их количество, изучим поведение $\Delta_k(p, \beta)$ при больших $k \gg 1$.

Для этого воспользуемся асимптотической формулой $E_{\beta,\mu}(z)$ функций Миттаг-Леффлера (смотрите [12], страница 134, формула (2.24)) для больших значений аргументов z :

$$E_{\beta,\mu}(z) = -\sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \beta k)} + O(|z|^{-1-p}), \quad p \geq 1, \quad \chi\pi \leq |\arg z| \leq \pi, \quad \chi \in (\beta/2; \beta). \quad (32)$$

Из (32) найдём оценки при больших $k (k \gg 1)$ для функций:

$$E_{\beta,1}(-\rho_k^2 p^\beta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\rho_k^2 p^\beta} + O\left(\frac{1}{\rho_k^4 p^{2\beta}}\right) = \frac{w_1(\rho_k^2 p^\beta)}{\rho_k^2 p^\beta}, \quad (33)$$

$$\rho_k^2 p^\beta E_{\beta,2}(-\rho_k^2 p^\beta) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} + \frac{w_2(\rho_k^2 p^\beta)}{\rho_k^2 p^\beta}, \quad (34)$$

где

$$w_1(\rho_k^2 p^\beta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + O\left(\frac{1}{\rho_k^2 p^\beta}\right), \quad w_2(\rho_k^2 p^\beta) = \frac{1}{\Gamma(2-2\beta)} + O\left(\frac{1}{\rho_k^2 p^\beta}\right),$$

причём

$$|w_1(\rho_k^2 p^\beta)| \leq C_1, \quad |w_2(\rho_k^2 p^\beta)| \leq C_2 \quad (35)$$

при этом константы C_1 и C_2 зависят только от β .

Лемма. Пусть $1 < \beta < 2$ и $p \geq 1$. Тогда существует постоянная $p_0 = p_0(\rho_1, \beta)$ такая, что при $p \geq p_0$ справедлива оценка:

$$\Delta_k(p, \beta) > \gamma_0 > 0, \quad k \geq 1, \quad (36)$$

где константа $\gamma_0 = \gamma_0(p)$ не зависит от ρ_k , $\gamma_0(p) = 1/2 p^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)$.

Доказательство. Установим оценку снизу величины

$$\Delta_k(p, \beta) \equiv p \rho_k^2 E_{\beta,2}(-\rho_k^2 p^\beta) - \Gamma(\alpha) E_{\beta,1}(-\rho_k^2 p^\beta). \quad (37)$$

В силу (33) и (34) из (37) при $p \geq 1$ имеем:

$$\Delta_k(p, \beta) = \frac{1}{p^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)} + \frac{1}{\rho_k^2 p^\beta} \left[\frac{w_2(\rho_k^2 p^\beta)}{p^{\beta-1}} - w_1(\rho_k^2 p^\beta) \right]. \quad (38)$$

Принимая во внимание равенство (38) и неравенство (35) заключаем, что существует постоянная $z_0(p) \geq 1$, что при $z \geq z_0(p)$ справедлива оценка:

$$\frac{1}{z} \left| \frac{w_2(z)}{p^{\beta-1}} - w_1(z) \right| \leq \frac{1}{z} \left[\frac{C_2}{p^{\beta-1}} + C_1 \right] \leq \frac{1}{2 p^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)}, \quad (39)$$

где $z = \rho_k^2 p^\beta$, $z_0(p) = \max\{1, 2\Gamma(2-\beta)(C_2 + p^{\beta-1}C_1)\}$.

Так как $\beta > 1$, то существует $p_0 = p_0(\rho_1, \beta)$ такое, что при $p \geq p_0$ имеем $\rho_1^2 p^\beta \geq z_0(p)$. Тогда для всех $k \geq 1$ имеем $z_k = \rho_k^2 p^\beta \geq z_1 \geq z_0(p)$. Следовательно, в силу (39) из (37) получим $\Delta_k(p, \beta) > \gamma_0 > 0$.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнено условие Леммы и пусть $\psi(x)$ удовлетворяет условиям $\psi(x) \in C^4[0, l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи T_λ и это решение определяется рядами (27) и (28), которые сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, l]$ и по $t \in [-p, q]$.

Теорема 2 доказывается методом, указанным в работах [5], [13-14].

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований (проект Ф3-202009211).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН. 2000. 299с.
2. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик. 2005. 186 с.
3. Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh. On a Boundary-value Problem for aParabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator inRectangular Domain. // Lobachevskii J.of Math.. 2020. 41(9). P. 1801--1810.
4. Islomov B., Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with Caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order. // Russian Mathematics. 2020. 64(10). P. 29–42.
5. Ashurov R.R., Zunnunov R.T. Inverse Problem for Determining the Order of the Fractional Derivative in Mixed-Type Equations. // Lobachevskii J. Math. 2021. 42(12). P. 2714–2729.
6. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными // Изв.вузов. Матем. 2022. № 9. С. 83–94.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника.1987. 688 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 724 с.
9. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений. // УМН. 1960. Т. 15. Вып. 2(92). С. 97–154.
- 10.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука. 1973. 448 с.
- 11.Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи. //«Дифференциальные уравнения». 1999. 35(8). С.1094-1100.
- 12.Джрбабян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
- 13.Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Москва: Наука, 2016. 271 с.
- 14.Islomov B. I., Kylyshbaeva G. K. On a boundary value problem for a third order elliptic-hyperbolic equation with superposition operators of the first and second orders in a rectangular domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. 45(11). P. 5413–5423.

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA KARRALI VA TAKRORIY LIMITLARINING
O'ZARO MUNOSABATLARI

Tursunov Ikrom Eshpo'latovich,

Toshkent gumanitar fanlar universiteti dotsenti, p.f.f.d. (PhD)

i.tursunov1506@mail.ru

Annotatsiya. Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning karrali va takroriy limitlari orasidagi o'zaro munosabatlar chuqur tahlil qilingan. Ishda karrali limit mavjud bo'lganda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymatlari bilan bog'liq teoremlar va ushbu teoremlardan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan hamda qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab berilgan. Shuningdek, takroriy limitlar mavjud bo'lib, karrali limit mavjud bo'lmagan holatlar hamda aksincha vaziyatlar misollarini yordamida ko'rsatib berilgan. Keltirilgan misollar orqali ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlarini hisoblashda karrali va takroriy limit tushunchalarining bir-biriga bog'liq emasligi yoki muayyan shartlar ostida tenglashishi yoritilgan.

Kalit so'zlar: ko'p o'zgaruvchili funksiya, karrali limit, takroriy limit, limitning mavjudligi, ketma-ketliklar usuli, matematik analiz, limitlar nazariyasi, funksiyalar limitlari, oliy matematika.

ВЗАИМОСВЯЗЬ КРАТНЫХ И ПОВТОРНЫХ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ
ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. В данной статье проведён углублённый анализ взаимосвязи между кратными и повторными пределами функций многих переменных. В работе приведены теоремы, связанные с существованием повторных пределов при наличии кратного предела, а также результаты, вытекающие из этих теорем, которые обоснованы строгими математическими доказательствами. Кроме того, с помощью примеров показаны случаи, когда повторные пределы существуют, тогда как кратный предел не существует, и наоборот. На основе приведённых примеров раскрывается, что при вычислении пределов функций многих переменных понятия кратного и повторного пределов могут быть как независимыми друг от друга, так и совпадать при выполнении определённых условий.

Ключевые слова: функция многих переменных, кратный предел, повторный предел, существование предела, метод последовательностей, математический анализ, теория пределов, пределы функций, высшая математика.

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN MULTIPLE AND ITERATED LIMITS OF
FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Abstract. This article provides an in-depth analysis of the relationship between multiple and iterated limits of multivariable functions. The paper presents theorems concerning the existence of iterated limits under the condition that a multiple limit exists, along with results derived from these theorems, which are justified through rigorous mathematical proofs. In addition, examples are given to illustrate cases in which iterated limits exist while the corresponding multiple limit does not, as well as the converse situations. The presented examples demonstrate that, in the process of computing limits of multivariable functions, the concepts of multiple and iterated limits may be independent of each other or may coincide under certain conditions.

Keywords: multivariable function, multiple limit, iterated limit, existence of limits, sequence method, mathematical analysis, limit theory, limits of functions, higher mathematics.

Kirish. Matematik analiz fanida ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi muhim bo'limlardan biri bo'lib, unda funksiyaning limitlari, uzluksizligi va differensiallanuvchanligi kabi tushunchalar asosiy o'rin tutadi. Ayniqsa, ikki va undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq funksiyalarning limitlarini o'rganish nazariy va amaliy jihatdan murakkab masalalardan hisoblanadi. Bunday funksiyalar uchun limit tushunchasi bir nechta yondashuvlar orqali aniqlanadi, jumladan, karrali limit va takroriy limit tushunchalari keng qo'llaniladi.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlari masalasida asosiy muammolardan biri karrali va takroriy limitlar orasidagi o'zaro bog'liqlikni aniqlashdan iboratdir. Ma'lumki, ayrim hollarda takroriy limitlar

mavjud bo'lsa-da, karrali limit mavjud bo'lmashligi mumkin yoki aksincha, karrali limit mavjud bo'lib, takroriy limitlar mavjud bo'lmashligi holatlari uchraydi. Shu sababli bu ikki tushunchaning o'zaro munosabatlarini aniq shartlar asosida tahlil qilish matematik analiz nazariyasini chuqurlashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Masalaning qo'yilishi. Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun karrali va takroriy limitlarning mavjudligi, ularning tengligi hamda bir-biridan farq qiladigan holatlari batafsil o'rganiladi. Ishda karrali limit mavjud bo'lgan sharoitda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymati bilan bog'liq teoremlar keltirilib, qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab beriladi. Shuningdek, misollar yordamida karrali va takroriy limitlar o'rtasida bog'liqlik mavjud bo'lmagan holatlar ham ko'rsatib beriladi.

Asosiy natija.

1-teorema. Agar

1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning (karrali) limiti:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

mavjud;

2) har bir tayinlangan x_1 da quyidagi

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2)$$

takroriy limit ham mavjud bo'lib,

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'ladi.

Isboti: $f(x_1, x_2)$ funksiya $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da karrali

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

limitga ega bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, ushbu

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

to'plamning barcha (x_1, x_2) nuqtalari uchun

$$|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi teoremaning 2) shartini inobatga olib, x_1 o'zgaruvchining $|x_1 - x_1^0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatini tayinlab, $x_2 \rightarrow x_2^0$ da $|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$ tengsizlikda limitga o'tib

$$|\varphi(x_1) - d| \leq \varepsilon$$

ni topamiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x_1 - x_1^0| < \delta$ bo'lganda

$$|\varphi(x_1) - d| \leq \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \varphi(x_1) = d$$

bo'lishini bildiradi. Keyingi munosabatdan

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'lishi kelib chiqadi. ■

2-teorema. Agar

1) $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da $f(x_1, x_2)$ funksiyaning karrali limiti:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

mavjud;

2) har bir tayinlangan x_2 da quyidagi

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_2)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

takroriy limit ham mavjud bo'lib,

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'ladi.

Isboti: $f(x_1, x_2)$ funksiya $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)$ da karrali

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = d$$

limitga ega bo'lsin. Limitning ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topiladiki, ushbu

$$\{(x_1, x_2) \in R^2: |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta\} \subset M$$

to'plamning barcha (x_1, x_2) nuqtalari uchun

$$|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi teoremaning 2) shartini inobatga olib, x_2 o'zgaruvchining $|x_2 - x_2^0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatini tayinlab, $x_1 \rightarrow x_1^0$ da $|f(x_1, x_2) - d| < \varepsilon$ tengsizlikda limitga o'tib $|\varphi(x_2) - d| \leq \varepsilon$

ni topamiz. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x_2 - x_2^0| < \delta$ bo'lganda

$$|\varphi(x_2) - d| \leq \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \varphi(x_1) = d$$

bo'lishini bildiradi. Keyingi munosabatdan

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2) = d$$

bo'lishi kelib chiqadi. ■

Ushbu yuqoridagi ikkita teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija: Agar bir vaqtning o'zida 1 va 2-teoremlarning shartlari bajarilsa, u holda

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^0, x_2^0)} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow x_2^0} \lim_{x_1 \rightarrow x_1^0} f(x_1, x_2)$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning $(0,0)$ nuqtadagi karrali va takroriy limitlarini hisoblang.

Yechish: Avvalo karrali limitni topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{2\sin^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \\ &= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot x_1^2 x_2^2}{\sin^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}{\sin \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \right]^2 \cdot \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \\ &= 2 \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}{\sin \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \right] \cdot \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

So'ngra $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{2x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0.$$

Demak,

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = 0.$$

Endi

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning takroriy limitlarini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{0}{1 - \cos x_1^2} = 0, \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{0}{1 - \cos x_2^2} = 0. \end{aligned}$$

Demak,

$$f(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)x_1^2 x_2^2}{1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)}$$

funksiyaning takroriy limitlari $(0,0)$ ga teng ekan. Ya'ni karrali va takroriy limitlar bir-biriga teng ekan.

2-misol. Quyidagi

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning $(1,0)$ nuqtadagi karrali va takroriy limitlarini hisoblang.

Yechish: Eng avvalo karrali limitni topamiz:

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \ln 2.$$

Demak,

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \ln 2.$$

Endi

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning takroriy limitlarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow 1} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow 1} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\ln(x_1 + 1)}{x_1} = \ln 2, \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 1} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 1} \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^{x_2})}{\sqrt{1 + x_2^2}} = \ln 2. \end{aligned}$$

$$\ln t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Demak,

$$f(x_1, x_2) = \frac{\ln(x_1 + e^{x_2})}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

funksiyaning takroriy limitlari $(\ln 2, \ln 2)$ ga teng ekan. Ya'ni karrali va takroriy limitlar bir-biriga teng ekan.

Ba'zi bir ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning limitini topayotgan vaqtda karrali limit mavjud, ammo takroriy limitlar mavjud bo'lmaydi yoki aksincha takroriy limitlar mavjud bo'ladi, karrali limitlar esa yo'q. Bunda karrali limitni topishni takroriy limitni topishga aloqasi bo'lmaydi yoki aksincha. Shuning uchun, biz quyida karrali va takroriy limitlarning bog'liq emasligiga doir bir nechta misollar ko'rib chiqamiz:

3-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

funksiyaning $(0,0)$ nuqtada karrali va takroriy limitlari mavjudmi?

Yechish: Takroriy limitlarni topishni qaraylik:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0, \\ \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Demak, berilgan funksiyaning takroriy limitlari 0 ga teng ekan. Ravshanki,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2).$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bu funksiyaning $(0; 0)$ nuqtadagi karrali limiti mavjud emas. Haqiqatdan ham, $(0; 0)$ nuqtaga intiluvchi

$$(x_{1n}, x_{2n}) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$$

$$(x'_{1n}, x'_{2n}) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$$

ketma-ketliklar mos ravishda

$$f(x_{1n}, x_{2n}) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2} = 1,$$

$$f(x'_{1n}, x'_{2n}) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{4n^2 + 1}$$

bo'lib,

$$\lim f(x_{1n}, x_{2n}) = 1,$$

$$\lim f(x'_{1n}, x'_{2n}) = 0$$

bo'ladi. Bu esa berilgan funksiyaning karrali limitining mavjud emasligini ko'rsatadi.

4-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

funksiyaning $(0, 0)$ nuqtadagi karrali va takroriy limitlari mavjudmi?

Yechish: Eng birinchi karrali limit mavjudligini tekshiramiz. Aytaylik, (x_1, x_2) nuqta $(0, 0)$ nuqtaga tekislikdagi $x_2 = kx_1$ to'g'ri chiziqli bo'yicha intilsin. U holda

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{k x_1^2}{x_1^2 + k^2 x_1^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

bo'ladi. Demak, (x_1, x_2) nuqta turli to'g'ri chiziqlar bo'yicha $(0, 0)$ ga intilganda limitning qiymati turlicha bo'ladi. Bu hol qaralayotgan limitning mavjud emasligini bildiradi.

Demak,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

funksiyaning $(0, 0)$ nuqtadagi karrali limiti mavjud emas ekan.

Endi takroriy limitlarini topamiz:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0.$$

Demak, berilgan funksiyaning takroriy limitlari 0 ga teng ekan. Ravshanki,

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2).$$

5-misol. Ushbu

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$$

funksiyaning (∞, ∞) nuqtada karrali va takroriy limitlari mavjudmi?

Yechish: Eng avvalo, takroriy limitlarni qaraylik:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \lim_{x_2 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} = 0,$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \lim_{x_1 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} = 0.$$

Demak, berilgan funksiyaning takroriy limitlari ikkalasi ham 0 ga teng ekan. Ya'ni, $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$. Shuni ta'kidlash lozimki, bu funksiyaning $(\infty; \infty)$ nuqtadagi

karrali limiti mavjud emas. Haqiqatdan ham, $(\infty; \infty)$ nuqtaga intiluvchi

$$\begin{aligned}(x_{1n}, x_{2n}) &= (n, n^2) \rightarrow (\infty; \infty) \\ (x'_{1n}, x'_{2n}) &= (n, -n^2) \rightarrow (\infty; \infty)\end{aligned}$$

ketma-ketliklar uchun mos ravishda

$$\begin{aligned}f(x_{1n}, x_{2n}) &= \frac{n^4}{2n^4} = \frac{1}{2} \\ f(x'_{1n}, x'_{2n}) &= -\frac{n^4}{2n^4} = -\frac{1}{2} \\ \lim f(x_{1n}, x_{2n}) &= \frac{1}{2} \\ \lim f(x'_{1n}, x'_{2n}) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

bo'ladi. Bu esa berilgan funksiyaning karrali limitining mavjud emasligini ko'rsatadi.

Xulosa. Mazkur maqolada ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun karrali va takroriy limit tushunchalari, ularning mavjudligi hamda o'zaro bog'liqlik masalalari batafsil tahlil qilindi. Tadqiqot davomida karrali limit mavjud bo'lgan sharoitda takroriy limitlarning mavjudligi va ularning qiymati karrali limitga teng bo'lishi bilan bog'liq teoremlar keltirildi hamda qat'iy matematik isbotlar orqali asoslab berildi. Shuningdek, maqolada karrali va takroriy limitlar o'rtasida bevosita bog'liqlik mavjud bo'lmagan holatlar ham aniq misollar yordamida ko'rsatildi. Xususan, ayrim funksiyalar uchun takroriy limitlar mavjud bo'lsa-da, karrali limitning mavjud emasligi yoki aksincha holatlar yuz berishi mumkinligi yoritildi. Bu holatlar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlarini hisoblashda faqat takroriy limitlarga tayangan holda umumiy xulosa chiqarish har doim ham to'g'ri bo'lmashligini ko'rsatadi.

Olingan natijalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limitlari nazariyasini chuqurroq anglashga xizmat qiladi hamda matematik analiz fanining nazariy asoslarini boyitadi. Tadqiqot natijalari oliy ta'lim muassasalarida "Matematik analiz" fanini o'qitishda, xususan, karrali va takroriy limitlar mavzusini tushuntirishda metodik jihatdan foydali bo'lishi mumkin. Kelgusida ushbu masalalarni yuqori tartibli limitlar, uzluksizlik va differensiallanuvchanlik bilan bog'liq holda o'rganish ilmiy jihatdan istiqbolli yo'nalishlardan biri hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Zorich V.A. *Matematik analiz. I jild.* – Moskva: "Fizmatlit", 2019.
2. Zorich V.A. *Matematik analiz. II jild.* – Moskva: "Fizmatlit", 2018.
3. Demidovich B.P. *Matematik analizdan masalalar va mashqlar to'plami.* – Moskva: "Nauka", 2016.
4. Fikhtengolts G.M. *Differensial va integral hisob asoslari. II jild.* – Moskva: "Nauka", 2015.
5. Kudryavtsev L.D. *Matematik analiz kursi.* – Moskva: "Vysshaya shkola", 2014.
6. Apostol T.M. *Calculus. Vol. II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra.* – New York: "Wiley", 2009.
7. Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis.* – New York: "McGraw-Hill", 1976.
8. Stewart J. *Calculus: Multivariable.* – Boston: "Cengage Learning", 2016.
9. Malik A., Arora S. *Mathematical Analysis.* – New Delhi: "Wiley India", 2014.
10. Ismoilov E., Barakayeva M. *Matematik analiz fanidan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi.* – Toshkent: "O'qituvchi", 2020.
11. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementlar funksional analiz nazariyasi.* – Moskva: "Nauka", 2017.
12. Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics.* – New York: "Wiley", 2011.

ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ НУЛЕВОМ ПОРЯДКЕ В ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Хасанов Иброхим Ихтиёрович

преподаватель Бухарского

государственного университета

ihasanov998@gmail.com, i.i.hasanov@buxdu.uz

Аннотация. В работе рассматриваются прямая начально-краевая задача и обратная задача определения коэффициента при младшем члене для многомерного уравнения с дробной производной Герасимова–Капуто. Устанавливается единственность разрешимости прямой задачи, и выводятся априорные оценки её решения в весовых функциональных пространствах. Полученные оценки являются ключевым инструментом при исследовании обратной задачи. Показано, что обратная задача сводится к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению. Для доказательства существования и единственности решения данного уравнения используется принцип неподвижной точки. Полученные результаты могут быть применены при анализе обратных задач для уравнений дробной диффузии и способствуют развитию теории уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: дробная производная, производная Герасимова–Капуто, многомерное уравнение, уравнение диффузии, начально-краевая задача, обратная задача, определение коэффициента, единственность разрешимости, априорные оценки, весовые пространства, нелинейное интегральное уравнение, принцип неподвижной точки, функция Грина.

KASR TARTIBLI HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMADA NOL TARTIBLI HAD OLDIDAGI KOEFFITSIENTNI ANIQLASH MASALASI

Annotatsiya. Mazkur ishda Gerasimov–Kaputo turidagi kasr tartibli hosilaga ega bo‘lgan ko‘p o‘lchovli tenglama uchun to‘g‘ri boshlang‘ich-chegaraviy masala hamda pastki had oldidagi koefitsientni aniqlashga doir teskari masala o‘rganiladi. Avvalo, to‘g‘ri masalaning yagona yechimga ega ekanligi asoslanadi va uning yechimi uchun og‘irlikli funksional fazolarda aprior baholar olinadi. Ushbu baholar teskari masalani tadqiq etishda muhim rol o‘ynaydi. Teskari masala mos keluvchi ekvivalent nochiziqli integral tenglamaga keltiriladi. Olingan integral tenglamaning yagona yechimga ega ekanligi harakatsiz nuqta prinsipi yordamida isbotlanadi. Natijalar kasr tartibli diffuziya tenglamalarining teskari masalalarini o‘rganishda nazariy ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli hosila, Gerasimov–Kaputo hosilasi, ko‘p o‘lchovli tenglama, diffuziya tenglamasi, boshlang‘ich-chegaraviy masala, teskari masala, koefitsientni aniqlash, yagona yechim, aprior baholar, og‘irlikli fazolar, nochiziqli integral tenglama, harakatsiz nuqta prinsipi, Green funksiyasi.

THE PROBLEM OF DETERMINING THE ZERO-ORDER COEFFICIENT IN A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE

Abstract. This paper studies a direct initial-boundary value problem and an inverse problem of determining the coefficient of the lower-order term for a multidimensional equation with the Gerasimov–Caputo fractional derivative. The unique solvability of the direct problem is proved, and a priori estimates of its solution are obtained in weighted functional spaces. These estimates play a crucial role in the analysis of the inverse problem. It is shown that the inverse problem can be reduced to an equivalent nonlinear integral equation. The existence and uniqueness of the solution to this integral equation are established by applying the fixed point principle. The obtained results are of theoretical importance for the study of inverse problems for fractional diffusion equations and contribute to the development of fractional differential equation theory.

Keywords: fractional derivative, Gerasimov–Caputo derivative, multidimensional equation, diffusion equation, initial-boundary value problem, inverse problem, coefficient identification, unique solvability, a priori estimates, weighted spaces, nonlinear integral equation, fixed point principle, Green function.

Введение и постановка задачи. Дробные дифференциальные уравнения являются обобщением дифференциальных уравнений до произвольного (нецелого) порядка. Эти уравнения вызывают значительный интерес в прикладных науках благодаря своей способности моделировать сложные явления. Конвективно-диффузионный перенос играет важную роль во многих процессах тепло- и массообмена. Уравнение диффузии с конвективным членом служит математической

моделью для его описания. Введение дробного интегро-дифференцирования в уравнение переноса позволяет более адекватно описывать физические процессы, происходящие в пористых средах. Следует также отметить, что эти уравнения отражают нелокальные связи в пространстве и времени с ядрами памяти степенного вида.

В данной работе рассматривается начально-краевая задача для дифференциального уравнения с дробной производной

$$u_t + {}^C D_{0+}^\alpha u - Lu + q(t)u = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная n -мерная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]$$

— самосопряжённый дифференциальный оператор эллиптического типа, то есть такой, что во всей области Ω выполняются условия:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$f(x, t)$, $\varphi(x)$ — заданные функции, $T > 0$ — фиксированное число.

Обратная задача. Определить $q(t)$, если известно дополнительное условие относительно решения задачи (1) – (3)

$$\int_{\Omega} p(x) u(x, t) dx = h(t), \quad (5)$$

где $p(x)$ и $h(t)$ — известные гладкие функции.

Создателем теории дробного интегро-дифференцирования является Ж. Лиувиль. В 1832 году в своей исторической работе он предложил дробное интегрирование функций. В настоящее время дробные интегралы и производные носят имена выдающихся математиков XIX века Б. Римана и Ж. Лиувилля (дробное интегро-дифференцирование Римана–Лиувилля). Существует несколько различных способов обобщения понятия дробной дифференциации, но все они совпадают с понятием обычной производной в случае натурального порядка. Возможно, наиболее часто используется дробная производная Герасимова–Капуто. Что касается первого применения этой производной в механике, то оно было предложено российским учёным А. Герасимовым в работе. Фактически А. Герасимов использовал дробную производную, аналогичную капутовской, в задачах вязкоупругости за 20 лет до Капуто.

Существует обширная математическая литература, посвящённая обратным задачам для классических дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа. Наиболее часто изучаются линейные обратные задачи для источника и нелинейные обратные задачи для коэффициентов с различными типами начально-краевых условий (прямая задача) и условий переопределения. В этих работах авторы обсуждают единственность разрешимости задач и условную устойчивость их решений, а также численные методы решения таких задач.

В направлении дробных уравнений отметим монографию, которая отражает основные подходы к изучению различных прямых задач для уравнений дробной диффузии и уравнений диффузии–волны (смотрите также обширную библиографию по данному вопросу). В настоящее время коэффициентные обратные задачи для дробных диффузионных уравнений изучены мало. Отметим лишь линейные задачи определения источника и нелинейные задачи определения коэффициентов с различными типами условий переопределения, когда прямая задача представлена задачей Коши и начально-краевой задачей (смотрите, например, и приведённые там ссылки). Основные результаты этих работ теоремы существования и единственности, а также устойчивость решения задачи определения реакционного коэффициента в уравнении диффузии с дробной производной по времени.

Основная цель данной работы — вопрос единственного определения коэффициента $q(t)$ при младшем члене уравнения (1) при дополнительном условии (5), заданном относительно решения

задачи (1)–(3). Следует отметить, что, в отличие от вышеупомянутых работ, рассматриваемое здесь уравнение (1) содержит как классическую, так и дробную производные. Заметим, что для уравнения (1) в случае $L = \partial^2 / \partial x^2$ с оператором дробного Римана–Лиувилля в задача Коши исследовалась с использованием фундаментального решения. Уравнение (1) в одномерном случае описывает химический процесс переноса неподвижного растворённого вещества.

Исследование прямой задачи

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и выполняются условия

- $\varphi(x) \in W_2^{(n_0+1)}(\Omega)$ и, кроме того, $\varphi = L\varphi = \dots = L^{(\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor)}\varphi = 0$ при $x \in \partial\Omega$, где $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$;
- $f(x, t) \in W_2^{(n_0+1)}(\Omega \times [0, T])$ и, кроме того, $f = Lf = \dots = L^{(\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor)}f = 0$ при $x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$, где $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$;

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ обеспечивают существование классических собственных функций оператора L , то есть принадлежат классам $a_{ij}(x) \in C^{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}(\Omega)$, и удовлетворяют условиям эллиптичности (5) в Ω (см.). Тогда существует единственное регулярное решение прямой задачи (1) – (3).

Доказательство. Будем формально искать общее решение смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) \omega_m(t), \quad (6)$$

где $v_m(x)$ — собственные функции спектральной задачи:

$$\left. \begin{aligned} Lv_m + \lambda_m v_m &= 0, \\ v_m|_{x \in \partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\omega_m(t) = \int_{\Omega} u(x, t) v_m(x) dx.$$

Классическими собственными функциями задачи (7) (или оператора L называются такие тождественно ненулевые функции $v_m(x)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) являются непрерывными в замкнутой области $\bar{\Omega}$;
- 2) имеют непрерывные производные до второго порядка внутри области Ω ;
- 3) для некоторого λ_m удовлетворяют внутри Ω уравнению $Lv_m + \lambda_m v_m = 0$;
- 4) обращаются в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω .

Значения λ_m , при которых существуют собственные функции, называются собственными значениями задачи (7).

Умножив обе части уравнения (1) на функцию $v_m(x)$, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$\omega'_m(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} \omega_m(t) + \lambda_m \omega_m(t) = F_m(t; \omega_m, q, f_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где

$$F_m(t; \omega_m, q, f_m) = f_m(t) - q(t) \omega_m(t), \quad f_m(t) = \int_{\Omega} f(x, t) v_m(x) dx.$$

Если условие (2) умножить скалярно на $v_m(x)$, то получим следующее.

$$\omega_m(0) = \varphi_m, \quad (9)$$

где

$$\varphi_m = \int_{\Omega} \varphi(x) v_m(x) dx.$$

Таким образом, мы получили обыкновенные дробные дифференциальные уравнения (8) для неизвестных функций $\omega_m(t)$ с начальными условиями (9). Для их решения формально применим преобразование Лапласа. Тогда получаем следующее выражение:

$$s\hat{\omega}_m - \varphi_m + s^\alpha \hat{\omega}_m - s^{\alpha-1} \varphi_m + \lambda_m \hat{\omega}_m = \hat{F}_m(s; \hat{\omega}_m, \hat{q}, \hat{f}_m), \quad (10)$$

где

$$\hat{\omega}_m(s) = \mathcal{L}[\omega_m(t)](s), \quad \hat{F}_m(s; \hat{\omega}_m, \hat{q}, \hat{f}_m) = \mathcal{L}[F_m(t; \omega_m, q, f_m)](s).$$

Решая уравнение (10), получаем:

$$\hat{\omega}_m(s) = \frac{\varphi_m}{s + s^\alpha + \lambda_m} + \frac{s^{\alpha-1} \varphi_m}{s + s^\alpha + \lambda_m} + \frac{\hat{F}_m(s; \hat{\omega}_m, \hat{q}, \hat{f}_m)}{s + s^\alpha + \lambda_m}. \quad (11)$$

Теперь из функции (11) возьмём обратное преобразование Лапласа. Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{1}{s + s^\alpha + \lambda_m}.$$

Теперь вышеуказанное выражение при условиях $|\lambda_m| < |s + s^\alpha|$ запишем в следующем удобном виде:

$$\frac{1}{s + s^\alpha + \lambda_m} = \frac{1}{s + s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_m}{s + s^\alpha}} = \frac{1}{s + s^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_m)^k \left(\frac{1}{s + s^\alpha} \right)^k.$$

Используя формулу, применим обратное преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_m)^k \frac{s^{-\alpha(k+1)}}{(1 + s^{1-\alpha})^{1+k}} &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_m)^k t^k E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-t^{1-\alpha}) \right] = \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)k} E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-\lambda_m t) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично, возьмём обратное преобразование Лапласа для следующих функций:

$$\begin{aligned} \frac{s^{\alpha-1}}{s + s^\alpha + \lambda_m} &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)(k+1)} E_{1, (1-\alpha)(k+1)+1}^{k+1}(-\lambda_m t) \right], \\ \frac{\hat{F}_m(s)}{s + s^\alpha + \lambda_m} &= \mathcal{L}[F_m(t; \omega_m, q, f_m)] \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)k} E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-\lambda_m t) \right]. \end{aligned}$$

Опираясь на известную теорему о преобразовании Лапласа свёртки двух функций, приходим к следующему формальному решению задач (8) и (9):

$$\omega_m(t) = \varphi_m G_m(t) + \varphi_m \mathcal{G}_m(t) + \int_0^t G_m(t - \tau) F_m(\tau; \omega_m, q, f_m) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где введены обозначения:

$$G_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)k} E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-\lambda_m t), \quad (13)$$

$$\mathcal{G}_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)(k+1)} E_{1, (1-\alpha)(k+1)+1}^{k+1}(-\lambda_m t). \quad (14)$$

Покажем, что ряды (13) и (14) для каждого $m = 1, 2, \dots$ при $0 \leq t \leq T$ сходятся абсолютно и равномерно и определяют непрерывные функции $G_m(t)$ и $\mathcal{G}_m(t)$. Для этого, используя формулу, выразим трёхпараметрическую функцию Миттага–Леффлера через функцию Фокса H следующим образом:

$$\begin{aligned} G_m(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)k} E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-\lambda_m t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(1-\alpha)k}}{k!} H_{1,2}^{1,1} \left[\lambda_m t |_{(0,1), (-(1-\alpha)k, 1)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathcal{G}_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(1-\alpha)k}}{k!} H_{1,2}^{1,1} \left[\lambda_m t \middle| \begin{matrix} (-k, 1) \\ (0, 1), (-(1-\alpha)(k+1), 1) \end{matrix} \right]. \quad (16)$$

Имеем следующее утверждение:

Лемма 1. Если $0 < \alpha \leq \gamma < 1$, то для функции $u_n(t)$ и её целых и дробных производных справедлива следующая оценка:

$$|\omega_m(t)| \leq C_1(|\varphi_n| + \|f_n\|), \quad (17)$$

$$\left| t^\gamma \left({}^C D_{0+,t}^\alpha \omega_m(t) \right) \right| \leq C_2(|\varphi_n| + \|f_n\|), \quad (18)$$

$$|t^\gamma \omega'_m(t)| \leq C_3 \lambda_n (|\varphi_n| + \|f_n\|). \quad (19)$$

Доказательство. Сначала докажем, что функциональный ряд $\mathcal{G}_m(t)$ сходится. Для этого рассмотрим H — функцию Фокса. Возможные особенности для H могут возникать только при $t \rightarrow 0$, получаем

$$H_{1,2}^{1,1} \left[\lambda_m t \middle| \begin{matrix} (-k, 1) \\ (0, 1), (-(1-\alpha)k, 1) \end{matrix} \right] = O(1), \quad t \rightarrow 0.$$

Так как $H_{1,2}^{1,1}[\cdot]$ является аналитической функцией на интервале $[0, T]$, имеем следующую оценку:

$$H_{1,2}^{1,1} \left[\lambda_m t \middle| \begin{matrix} (-k, 1) \\ (0, 1), (-(1-\alpha)k, 1) \end{matrix} \right] \leq M.$$

В результате, принимая во внимание (15), приходим к следующей асимптотической оценке для функции $G_m(t)$:

$$|G_m(t)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(1-\alpha)k}}{k!} = M e^{t^{1-\alpha}} \leq C, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Аналогично, получаем асимптотическую оценку для функции $\mathcal{G}_m(t)$:

$$|\mathcal{G}_m(t)| \leq C. \quad (21)$$

Докажем существование решения интегрального уравнения (12) в пространстве $C[0, T]$ методом последовательных приближений. Для этого уравнения рассмотрим на области $[0, T]$ последовательность функций:

$$(\omega_m)_k(t) = - \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) (\omega_m)_{k-1}(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} |(\omega_m)_0(t)| &\leq |\varphi_m G_m(t)| + |\varphi_m \mathcal{G}_m(t)| + \left| \int_0^t G_m(t-\tau) f_m(\tau) d\tau \right| = \\ &= \Phi_m^0(t) \leq \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)|, \end{aligned}$$

$$(\omega_m)_1(t) = - \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) (\omega_m)_0(\tau) d\tau.$$

Получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} |(\omega_m)_1(t)| &\leq C_T \left| \int_0^t q(\tau) \Phi_m^0(\tau) d\tau \right| \leq C_T \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)| \|q\|_{C_\sigma} \left| \int_0^t \tau^{-\sigma} d\tau \right| \leq \\ &\leq C_T \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)| \|q\|_{C_\gamma} \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |(\omega_m)_2(t)| &= \left| \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) (\omega_m)_1(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq C_T \left| \int_0^t q(\tau) (\omega_m)_1(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)|}{2!} (C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma})^2. \end{aligned}$$

Для произвольного $k = 1, 2, \dots$ имеем:

$$|(\omega_m)_k(t)| \leq C_T \int_0^t q(\tau) (\omega_m)_{k-1}(\tau) d\tau \leq \frac{\max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0|}{k!} (C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma})^k.$$

Из приведённых оценок следует, что ряд

$$\omega_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\omega_m)_k(t) \quad (22)$$

сходится равномерно на $[0, T]$. Действительно, (22) можно мажорировать на $[0, T]$ сходящимся числовым рядом следующим образом:

$$\begin{aligned} |\omega_m(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (\omega_m)_k(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0|}{k!} (C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma})^k = \\ &= \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0| \exp\left(C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = C_1(|\varphi_n| + \|f_n\|). \end{aligned}$$

Теперь вычислим дробную производную ${}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t)$:

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t) &= \varphi_m {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) + \\ &+ \varphi_m {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) + {}^C D_{0+}^\alpha \int_0^t G_m(t-\tau) F_m(\tau; \omega_m, q, f_m) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

В данном случае имеем:

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k {}^C D_{0+}^\alpha [t^{(1-\alpha)k} E_{1, (1-\alpha)k+1}^{k+1}(-\lambda_m t)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)k-\alpha} E_{1, (1-\alpha)k+1-\alpha}^{k+1}(-\lambda_m t). \\ {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(1-\alpha)(k+1)-\alpha} E_{1, (1-\alpha)(k+1)+1-\alpha}^{k+1}(-\lambda_m t). \end{aligned}$$

Далее вычислим дробную производную второго слагаемого в правой части формулы (23):

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^\alpha \left(\int_0^t G_m(t-\tau) F_m(\tau) d\tau \right) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_0^s G_m(s-\tau) F_m(\tau) d\tau \frac{ds}{(t-s)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{G_m(0) F_m(s)}{(t-s)^\alpha} ds + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^s \frac{G'_m(s-\tau) F_m(\tau)}{(t-s)^\alpha} d\tau ds \\ &= G_m(0) I_t^{1-\alpha} F_m(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_\tau^t \frac{G'_m(s-\tau) F_m(\tau)}{(t-s)^\alpha} ds d\tau \\ &= G_m(0) I_t^{1-\alpha} F_m(t) + \int_0^t (\partial_t^\alpha G_m)(t-\tau) F_m(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательный вид функции ${}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t)$:

$${}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t) = \varphi_m {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) + \varphi_m {}^C D_{0+}^\alpha G_m(t) + \int_0^t {}^C D_{0+, \tau}^\alpha G_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau.$$

Аналогично вышеизложенному, получаем оценки для функции ${}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t)$:

$$\begin{aligned} |t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha \omega_m(t))| &\leq |\varphi_m t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| + |\varphi_m t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| + \\ &+ \left| \int_0^t t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t-\tau)) f_m(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t t^\gamma ({}^C D_{0+, \tau}^\alpha G_m(t-\tau)) q(\tau) \omega_m(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq |\varphi_m t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| + |\varphi_m t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| + \\ &+ \left| \int_0^t t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t-\tau)) f_m(\tau) d\tau \right| + T^{1-\gamma} \|q\|_{C_\gamma} \max_{t \in [0, T]} |t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| \max_{t \in [0, T]} |\omega_m| B(1-\gamma, 1-\gamma), \end{aligned}$$

где

$$|t^\gamma ({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| \leq M t^{\gamma-\alpha} e^{t^{1-\alpha}} \leq C t^{\gamma-\alpha},$$

$$|t^\gamma({}^C D_{0+}^\alpha G_m(t))| \leq M t^{\gamma-\alpha} e^{t^{1-\alpha}} \leq C t^{\gamma-\alpha}.$$

Оценка функции $\omega'_m(t)$ следует из уравнения (8). Лемма 1 доказана.

Выше мы показали, что интегральное уравнение (12) имеет непрерывное решение. Теперь можно показать, что функция $u(x, t)$, построенная в виде ряда (6), является классическим решением задачи (1)-(3), как это было сделано:

$$|u(x, t)| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\omega_m(t)| |v_m(x)| \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m^2(x)}{\lambda_m^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2(t) \lambda_m^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}. \quad (24)$$

На основании Леммы 1 можно заключить, что первый ряд в правой части (24) является абсолютно и равномерно сходящимся, а второй ряд, согласно Лемме 5 из [1], также является абсолютно и равномерно сходящимся.

Далее, формально дифференцируя почленно ряд в формуле (6), получаем:

$$\left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\omega_m(t)| \left| \frac{\partial^2 v_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial^2 v_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2}{\lambda_m^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2(t) \lambda_m^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}. \quad (25)$$

Как и выше, на основании Леммы 1 из [1], первый ряд правой части (25) является абсолютно и равномерно сходящимся, а второй ряд, согласно Лемме 5, также абсолютно и равномерно сходится. Отсюда следует, что сумма ряда (6) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (1) – (3). Теорема 1 доказана.

Выведем теперь оценку нормы разности между решением исходного интегрального уравнения (12) и решением этого уравнения с возмущёнными функциями $\tilde{\varphi}_m$, $\tilde{f}_m$ и $\tilde{q}$. Пусть $\tilde{\omega}_m$ — решение интегрального уравнения (12), соответствующее функциям $\tilde{\varphi}_m$, $\tilde{f}_m$ и $\tilde{q}$, тогда имеем:

$$\tilde{\omega}_m(t) = \tilde{\varphi}_m G_m(t) + \tilde{\varphi}_m \mathcal{G}_m(t) + \int_0^t G_m(t-\tau) (\tilde{f}_m(\tau) - \tilde{q}(\tau) \tilde{\omega}_m(\tau)) d\tau, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (26)$$

Вычитая уравнения (12) и (26) друг из друга и вводя обозначения $\omega_m - \tilde{\omega}_m = \bar{\omega}_m$, $f_m - \tilde{f}_m = \bar{f}_m$, $q - \tilde{q} = \bar{q}$ и $\varphi_m - \tilde{\varphi}_m = \bar{\varphi}_m$, получаем интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_m(t) &= \bar{\varphi}_m G_m(t) + \bar{\varphi}_m \mathcal{G}_m(t) + \int_0^t G_m(t-\tau) \bar{f}_m(\tau) d\tau - \\ &- \int_0^t G_m(t-\tau) (\bar{q}(\tau) \omega_m(\tau) + \tilde{q}(\tau) \bar{\omega}_m(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя метод последовательных приближений к уравнению (27) по схеме:

$$|(\omega_m)_0(t)| \leq 2C|\bar{\varphi}_m| + CT \max_{t \in [0, T]} |\bar{f}_m(t)| + CT \|\bar{q}\|_{C_Y} \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)| e^{C\|\bar{q}\|_{C_Y} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}},$$

$$|(\omega_m)_k(t)| \leq \int_0^t G_m(t-\tau) \bar{q}(\tau) |(\omega_m)_{k-1}(\tau)| d\tau,$$

получаем следующую оценку для $t \in [0, T]$ и $m = 1, 2, 3, \dots$:

$$|\bar{\omega}_m(t)| \leq CT \left(2|\bar{\varphi}_m| + \max_{t \in [0, T]} |\bar{f}_m(t)| + \|\bar{q}\|_{C_Y} \max_{t \in [0, T]} |\Phi_m^0(t)| e^{C\|\bar{q}\|_{C_Y} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \right) e^{C\|\bar{q}\|_{C_Y} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}}$$

что будет использовано в следующем разделе.

Обратная задача

Умножив обе части уравнения (1) на $p(x)$ и проинтегрировав по переменной x по области Ω , получим:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} p(x) u_t(x, t) dx + \int_{\Omega} p(x) {}^C D_{0+}^\alpha u(x, t) dx - \int_{\Omega} p(x) Lu(x, t) dx + \\ &+ \int_{\Omega} p(x) q(t) u(x, t) dx = \int_{\Omega} p(x) f(x, t) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Если воспользоваться дополнительным условием (5), то уравнения (28) примут вид:

$$h'(t) + {}^C D_{0+}^\alpha h(t) - \int_{\Omega} p(x) Lu(x, t) dx + q(t) h(t) = \phi(t), \quad (29)$$

где

$$\phi(t) = \int_{\Omega} p(x) f(x, t) dx.$$

Применим интегрирование по частям в интеграле уравнения (29) и получим:

$$\int_{\Omega} p(x) Lu(x, t) dx = \int_{\Omega} u(x, t) Lp(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(p(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} - u(x, t) \frac{\partial p(x)}{\partial n} \right) ds.$$

С учётом условий (3) имеем:

$$\int_{\Omega} p(x) Lu(x, t) dx = \int_{\Omega} u(x, t) Lp(x) dx.$$

В силу этого уравнение (29) примет вид:

$$h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) - \int_{\Omega} u(x, t) Lp(x) dx + q(t)h(t) = \phi(t).$$

Разложим функцию $u(x, t)$ в системе $v_m(x)$ в ряд Фурье и получим равенство:

$$h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) - \int_{\Omega} Lp(x) \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(t) v_m(x) dx + q(t)h(t) = \phi(t),$$

или

$$h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(t) p_m^* + q(t)h(t) = \phi(t), \quad (30)$$

где

$$p_m^* = \int_{\Omega} Lp(x) v_m(x) dx.$$

Используя (12), перепишем уравнение (30) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m p_m^* (G_m(t) + \mathcal{G}_m(t)) - \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) f_m(\tau) d\tau + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) \omega_m(\tau) d\tau + q(t)h(t) = \phi(t). \end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно $q(t)$, получаем:

$$q(t) = H(t) - \frac{1}{h(t)} \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) \omega_m(\tau) d\tau, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} H(t) = -\frac{1}{h(t)} (h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m p_m^* (G_m(t) + \mathcal{G}_m(t)) - \\ - \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) f_m(\tau) d\tau - \phi(t)). \end{aligned}$$

Введём оператор A , действующий по формуле:

$$A[q] = H(t) - \frac{1}{h(t)} \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) q(\tau) \omega_m(\tau) d\tau.$$

Тогда уравнение (31) можно записать в более компактной форме:

$$q(t) = A[q](t). \quad (32)$$

Положим

$$\begin{aligned} \|H\|_{C_{\sigma}} = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{t^{\sigma}}{h(t)} \left(h'(t) + {}^C D_{0+}^{\alpha} h(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m p_m^* (G_m(t) + \mathcal{G}_m(t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) f_m(\tau) d\tau + \phi(t) \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq h_0 T^\sigma \max_{t \in [0, T]} (|h'(t) + \partial_t^\alpha h(t)| + 2C_T \|Lp\|_{L_2(\Omega)} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \\ + C_T \|Lp\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} T + |\phi(t)|) =: H_0, \\ \text{где } |h(t)| \geq \frac{1}{h_0} > 0.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

- $\varphi(x) \in W_2^{(n_0+1)}(\Omega)$ и, кроме того, $\varphi = L\varphi = \dots = L^{(\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor)} \varphi = 0$ при $x \in \partial\Omega$, где $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$;
 - $f(x, t) \in W_2^{(n_0+1)}(\Omega \times [0, T])$ и, кроме того, $f = Lf = \dots = L^{(\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor)} f = 0$ при $x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$,
- где $n_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$;

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ обеспечивают существование классических собственных функций оператора L , то есть принадлежат классам $a_{ij}(x) \in C^{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)}(\Omega)$, и удовлетворяют условиям эллиптичности (4) в Ω (см.).

- $p(x)|_{\partial\Omega} = 0, p(x) \in C^2(\Omega)$,
- $h(t) \in C^1[0, T], |h(t)| \geq \frac{1}{h_0} = \text{const} > 0$ для всех $t \in [0, T], \int_{\Omega} p(x) \varphi(x) dx = h(0)$.

Тогда существует число $T^* > 0$ такое, что для любого $T \in (0, T^*)$ уравнения (32) имеет единственное решение в шаре $B_{H_0}[H(t)] = \{q(t) \in C_\gamma[0, T]: \|q - H\|_{C_\gamma[0, T]} \leq H_0\}$, где $H_0 := \|H\|_{C_\gamma[0, T]}, \beta \leq \gamma < 1$.

Доказательство. Рассмотрим шар в пространстве $C_\gamma[0, T]$:

$$B(H(t), H_0) = \{q(t): q(t) \in C_\gamma[0, T], \|q - H\|_{C_\gamma} \leq H_0\}$$

радиуса H_0 с центром в точке $H(t)$.

Выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\Phi_m^0\| |p_m^*| \leq \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \|\Phi_m^0\|^2 \sum_{m=1}^{\infty} |p_m^*|^2} \leq \|\Phi^0\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \|Lp(x)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Пусть функция $q \in B(H(t), H_0)$. Докажем, что при соответствующем выборе $T > 0$ оператор A на множестве $B(H(t), H_0)$ является сжимающим. Сначала покажем, что при правильном выборе $T > 0$ оператор A отображает шар в себя, то есть $A[q] \in B(H(t), H_0)$.

Для этого, используя оценки, справедливые для $q \in B(H(t), H_0)$,

$$\|q\|_{C_\gamma} \leq \|q - H\|_{C_\gamma} + \|H\|_{C_\gamma} \leq 2H_0, \quad (33)$$

имеем

$$\|A[q] - H\|_{C_\gamma} = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{t^\gamma}{h(t)} \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t - \tau) q(\tau) \omega_m(\tau) d\tau \right| \leq \\ \leq \|q\|_{C_\gamma} C_T h_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \max_{t \in [0, T]} |t^\gamma \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \max_{t \in [0, t]} |\Phi_m^0(t)| d\tau| e^{C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \leq \\ \leq 2C_T h_0 H_0 \frac{T}{1-\sigma} e^{C_T \|q\|_{C_\gamma} \frac{T^{1-\sigma}}{1-\sigma}} \|\Phi^0\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \|Lp(x)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Пусть T_1 есть положительный корень уравнения

$$W_1(T) = 2C_T h_0 H_0 \frac{T}{1-\gamma} e^{2C_T H_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \|\Phi^0\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} \|Lp(x)\|_{L_2(\Omega)} = H_0.$$

Тогда для любого $T \in [0, T_1]$ оператор A отображает шар в себя, то есть из $q(t) \in B(H(t), H_0)$ следует $A[q] \in B(H(t), H_0)$.

Теперь рассмотрим две функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$, принадлежащие шару $B(H(t), H_0)$, и оценим расстояние между их образами $A[q](t)$ и $A[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C_\gamma[0, T]$. Функция $\tilde{u}_n(t)$, соответствующая $\tilde{q}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (26) с функциями $\varphi_n = \tilde{\varphi}_n$ и

$f_n(t) = \tilde{f}_n(t)$. Составив разность $A[q](t) - A[\tilde{q}](t)$ с использованием уравнений (12), (26) и затем, применяя (33), оценим её норму:

$$\begin{aligned} \|A[q] - A[\tilde{q}]\|_{C_Y} &= \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{t^\gamma}{h(t)} \sum_{m=1}^{\infty} p_m^* \int_0^t G_m(t-\tau) (\omega_m(\tau) \bar{q}(\tau) + \tilde{q}(\tau) \bar{\omega}_m(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq h_0 C_T \|\bar{q}\|_{C_Y} \frac{T}{1-\gamma} e^{C_T \|q\|_{C_Y} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \left(1 + \|\tilde{q}\|_{C_Y} T C_T e^{C_T \|\tilde{q}\|_{C_Y} \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} |p_m^*| \|\Phi_m^0\|_{C([0, T])} \leq \\ &\leq h_0 C_T \|\bar{q}\|_{C_Y} \frac{T}{1-\gamma} e^{2C_T H_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \times \\ &\times \left(1 + 2H_0 T C_T e^{2C_T H_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \right) \|Lp\|_{L_2(\Omega)} \|\Phi^0\|_{C([0, T], L_2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Пусть T_2 — положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} W_2(T) &= h_0 C_T \frac{T}{1-\gamma} e^{2C_T H_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \times \\ &\times \left(1 + 2H_0 T C_T e^{2C_T H_0 \frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}} \right) \|Lp\|_{L_2(\Omega)} \|\Phi^0\|_{C([0, T], L_2(\Omega))} = 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что функции W_1 и W_2 неотрицательны и возрастают, причём $W_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$), и по этой причине всегда существуют константы T_1 и T_2 , такие что $W_1(T_1) = H_0$ и $W_2(T_2) = 1$. Тогда при $T \in (0, T^*)$ оператор A сжимает расстояние между элементами $q(t), \tilde{q}(t) \in B(H(t), H_0)$. Следовательно, если выбрать $T^* < \min(T_1, T_2)$, то оператор A является сжимающим в шаре $B(H(t), H_0)$. Тогда, в соответствии с теоремой Банаха, оператор A имеет единственную неподвижную точку в шаре $B(H(t), H_0)$, то есть существует единственное решение уравнения (32). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. (Amsterdam, Elsevier, 2006).
2. Толстов Г.П. *Ряды Фурье*, (Москва, Наука, 1980).
3. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В., Вторая начально-граничная задача для В-гиперболического уравнения, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 10, 75–86 DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-75-86
4. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В., “Начальная задача для В-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода”, *Дифференц. уравнения*, 54:1 (2018), 123–135
5. Пулькин С. П., “О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 6, 214–225.
6. Хасанов И.И., Акрамова Д.И., Рахмонов А.А. Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана-Лиувилля. // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2023. Т. 27, № 1. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1952>.
7. Дурдиев У.Д. Задача об определении коэффициента реакции с дробным уравнением диффузии. // *Диф. Урав.*, 2021, том 57, № 9, с. 1220- 1229.
8. Durdiev D.K., Jumaev J.J. Inverse Coefficient Problem for a TimeFractional Diffusion Equation in the Bounded Domain. // *Lobachevskii Journal of Mathematics* vol. 44, pp. 548-557, (2023).
9. Дурдиев Д.К. Об определении коэффициента уравнения смешанного парабологиперболического типа с нехарактеристической линией изменения. // *Диф. Урав.*, 2022, том 58, № 12, с. 1633-1644.
10. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J.: *The H-function*. // *Theory and applications*. Springer, Dordrecht (2010) 269 p.

INVESTIGATION OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR A SEMILINEAR
DIFFUSION EQUATION WITH INITIAL–BOUNDARY AND OVERDETERMINATION
CONDITIONS

Jumaev Jonibek Jamolovich,

*DSc student, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan,
Bukhara State University
jonibekjj@mai.ru*

Abstract. This paper is devoted to the investigation of direct and inverse problems for a class of semilinear diffusion equations with generalized Caputo-type fractional derivatives under initial–boundary and overdetermination conditions. The generalized fractional derivative is represented in convolution form with a weakly singular kernel, covering classical, multiterm, distributed-order, and tempered fractional derivatives as special cases. For the direct problem, the existence and uniqueness of a weak solution are established using Rothe’s time discretization method combined with energy estimates discrete Gronwall-type inequalities. Uniform a priori estimates are derived for the discrete solutions, which ensure convergence of the Rothe approximations to a variational solution of the continuous problem. For the inverse problem, an integro-differential diffusion equation with an unknown time-dependent convolution kernel is considered, subject to an additional integral observation representing the total population density. By transforming the inverse problem into an equivalent coupled system for the state variable and the unknown kernel, the existence and uniqueness of the solution pair are proved within appropriate functional spaces. The obtained results provide a rigorous theoretical foundation for the analysis of semilinear diffusion models with memory effects and fractional dynamics.

Keywords: generalized fractional diffusion equation, Caputo-type derivative, integro-differential equation, Rothe method, inverse problem, existence and uniqueness.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УСЛОВИЯМИ
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация. Настоящая статья посвящена исследованию прямых и обратных задач для класса полулинейных диффузионных уравнений с обобщёнными дробными производными типа Капуто при начально–краевых и переопределённых условиях. Обобщённая дробная производная задаётся в свёрточной форме с слабо сингулярным ядром, что позволяет охватить классические, многотерминные, распределённого порядка и темперированные дробные производные в качестве частных случаев. Для прямой задачи доказаны существование и единственность слабого решения с использованием метода Роте на основе дискретизации по времени в сочетании с энергетическими оценками и дискретными неравенствами типа Гронуолла. Для дискретных решений получены априорные равномерные оценки, обеспечивающие сходимость приближений Роте к вариационному решению непрерывной задачи. Для обратной задачи рассматривается интегро-дифференциальное диффузионное уравнение с неизвестным временным свёрточным ядром, при этом учитывается дополнительное интегральное наблюдение, представляющее собой общую плотность популяции. Путём сведения обратной задачи к эквивалентной связанной системе для состояния и неизвестного ядра доказаны существование и единственность пары решений в соответствующих функциональных пространствах. Полученные результаты создают строгую теоретическую основу для анализа полулинейных моделей диффузии с эффектами памяти и дробной динамикой.

Ключевые слова: обобщённое дробное диффузионное уравнение, производная типа Капуто, интегро-дифференциальное уравнение, метод Роте, обратная задача, существование и единственность.

BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY VA QO‘SHIMCHA SHARTLAR BILAN YARIM
CHIZIQLI DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALARNI
TADQIQ QILISH

Annotatsiya. Mazkur maqola umumlashgan Caputo turidagi kasr tartibli hosila ishtirokidagi yarimchiziqli diffuziya tenglamalari uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq etishga bag‘ishlangan. Kasr

tartibli hosila kuchsiz singulyar yadrolar orqali o'rama ko'rinishda aniqlanib, u klassik, ko'p hadli, taqsimlangan tartibli hamda temperlangan kasr hosilalarni o'z ichiga oladi. To'g'ri masala uchun Rothe usuliga asoslangan vaqt bo'yicha diskretizatsiya yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi. Diskret masala uchun energiya baholari olinib, diskret Gronvall tengsizliklari yordamida Rothe yaqinlashuvlarining uzluksiz masalaning variatsion yechimiga yaqinlashishi ko'rsatiladi. Teskari masalada esa vaqtga bog'liq noma'lum konvolyutsion yadroni aniqlash masalasi qo'shimcha integral kuzatuv sharti asosida ko'rib chiqiladi. Masala holat funksiyasi va noma'lum yadrodan iborat ekvivalent bog'langan sistemaga keltirilib, u uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi mos funksional fazolarda isbotlanadi. Olingan natijalar xotirali va kasr tartibli dinamikaga ega diffuziya modellarining nazariy tahlili uchun muhim asos yaratadi.

***Kalit so'zlar:** kasr tartibli diffuziya tenglamasi, umumlashgan Caputo hosilasi, integro-differensial tenglama, Rothe usuli, teskari masala, mavjudlik va yagonalik.*

Introduction. Diffusion processes play a fundamental role in various fields of science and engineering, ranging from heat and mass transfer to population dynamics. In many realistic scenarios, the dynamics are not purely local but involve memory effects, which can be modeled using fractional derivatives in time. Semilinear diffusion equations with fractional time derivatives have received significant attention in recent years due to their ability to capture anomalous diffusion phenomena and nonlocal temporal behavior [1,4].

A central problem in this context is the investigation of direct and inverse problems for semilinear fractional diffusion equations. The **direct problem** concerns the existence and uniqueness of solutions given initial and boundary data, whereas the **inverse problem** typically aims at identifying unknown source terms or convolution kernels from additional measurements, such as integral observations over the spatial domain. Inverse source problems for time-fractional diffusion equations have been studied by Slodička and Šišková [1], where the reconstruction of the source term was addressed in the presence of semilinearity and fractional dynamics.

The **Rothe method**, originally introduced by Rothe [3] and further developed in [2], is a powerful time-discretization technique for proving existence and uniqueness of solutions to evolution equations, particularly for parabolic and fractional problems. This method reduces the continuous problem to a sequence of elliptic problems at discrete time levels, allowing rigorous energy estimates and compactness arguments to establish convergence to a variational solution. Applications of the Rothe method to semilinear parabolic equations with convolution-type terms and integral overdetermination have been explored by De Staelen and colleagues [4,7], providing both theoretical and numerical frameworks for kernel reconstruction.

Moreover, semilinear problems with memory-dependent terms frequently lead to integro-differential formulations, where the unknown convolution kernel must be identified from additional global measurements. Accurate reconstruction in such cases requires careful error analysis and stability estimates [4,7], highlighting the importance of Lipschitz continuity and boundedness assumptions in proving well-posedness. Comprehensive treatments of nonlinear partial differential equations and functional analysis techniques that underpin these results can be found in [5,6].

Recent advances in the theory and numerical analysis of time-fractional diffusion equations have further emphasized the importance of accurately recovering unknown coefficients, source functions, and convolution kernels from additional integral or overdetermination data [8-15]. In particular, [8,11,15] established rigorous theoretical results for the existence and uniqueness of solutions to inverse source and kernel determination problems in bounded domains. Subsequent works [9,11] focused on numerical methods for solving these inverse problems, including schemes for recovering two unknowns simultaneously in semilinear or integro-differential settings. Moreover, studies on inverse coefficient problems with periodic boundary and integral overdetermination conditions [11,14] highlighted the role of boundary observations and integral measurements in stabilizing the solution and ensuring uniqueness. These contributions provide a solid foundation for extending the Rothe method to more general semilinear fractional diffusion models with memory effects, where both analytical proofs and numerical implementations are crucial for understanding and simulating the underlying dynamics.

Motivated by these studies, the present work investigates direct and inverse problems for a class of semilinear diffusion equations with generalized Caputo-type fractional derivatives, incorporating initial-boundary and overdetermination conditions. We employ the Rothe method to establish existence and uniqueness of weak solutions for both the direct and inverse problems. The inverse problem focuses on

recovering an unknown time-dependent convolution kernel from integral observations, thereby extending existing results to a more general fractional and semilinear setting.

Formulation of problem 1. We focus on the following initial-boundary value problem for a semilinear diffusion equation in the domain $(x, t) \in Q$, involving a generalized fractional derivative:

$$D_t^k u(x, t) + a(t)(-\Delta)u(x, t) = \int_0^t F(x, s, u(x, s))ds + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$Bu(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (3)$$

where, the generalized Caputo fractional derivative of a function $u(x, t)$ is commonly represented in convolution form as:

$$D_t^k u(x, t) = \int_0^t k(t-\tau)u_\tau(x, \tau)d\tau = (k * \partial_t u(x, \cdot))(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

Let $k(t)$ denote the generalized kernel of the fractional derivative, which satisfies the following conditions:

- a) a singularity at $t = 0$ (i.e., they blow up at $t = 0$),
- b) be nonnegative and monotonically decreasing for $t > 0$,
- c) be integrable over a finite interval $(0, T)$, and their derivatives are locally integrable on $(0, T)$.

We list some kernels $k(t)$ that satisfy conditions a), b) and c):

Classical Caputo Fractional Derivative: $k(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$

Multiterm Caputo Fractional Derivative: $k(t) = \sum_{j=1}^m q_j \frac{t^{-\alpha_j}}{\Gamma(1-\alpha_j)}, \quad 0 < \alpha_m < \dots < \alpha_1 < 1.$

Distributed Order Caputo Fractional Derivative: $k(t) = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}\mu(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}d\alpha.$

This extension considers a distribution $\mu(\alpha)$ over different fractional orders.

Tempered Caputo Fractional Derivative: $k(t) = \frac{\alpha t^{-\alpha} e^{-\lambda t}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda > 0.$

Here,

$$Bu(x, t) = \nabla u \cdot \nu,$$

where ν denotes the unit outward normal vector to $\partial\Omega$.

Δ is the Laplace differential operator with domain $D(-\Delta) = H^2(\Omega)$. We associate a bilinear form with the Laplace differential operator as follows

$$(-\Delta u, \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi) - (g, \varphi)_{\partial\Omega}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Definition 1. By a weak solution of problem (1)-(3), we mean a function $u: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ such that

1. $u \in C([0, T], H^1(\Omega))$;
2. u has a strong derivative $\partial_t u \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$;
3. $u(0) = \phi$ in $H^1(\Omega)$;
4. the following equality holds for any for any $\varphi \in H^1(\Omega), t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & ((k * \partial_t u)(t), \varphi) + a(t)(\nabla u, \nabla \varphi) = a(t)(g(t), \varphi)_{\partial\Omega} \\ & + \left(\int_0^t F(\tau, u(\tau))d\tau, \varphi \right) + (f(t), \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

The relation (5) represent the variational formulation of (1)-(3).

We make the following assumptions to prove our main result:

- (A1) $a(t) \in C[0, T]$, with $0 < C_0 \leq a(t) \leq C_1$ for $t \in [0, T]$, where C_i are constants,
- (A2) $\phi(x) \in H^1(\Omega)$,
- (A3) $g \in C^1(\partial\Omega \times [0, T])$, and $(g(t), 1)_{\partial\Omega} \neq 0$,
- (A4) F is a globally Lipschitz continuous function in all variables,
- (A5) $f \in C^1(\Omega \times [0, T])$.

Using these properties, during the estimation of the function $u(x, t)$, we derive the following relations that hold for the second term of (5).

$$a(t)(\nabla u, \nabla \varphi) \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, \varphi \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

and

$$a(t)(\nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq C_0 \|\nabla \varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (7)$$

Let H be a real Hilbert space with scalar product $(\cdot, \cdot)$ and the corresponding norm $\|\cdot\|_H$.

Lemma 1 (see [1, Lemma 2.1]) Assume that $T > 0$, $k \in L^1(0, T)$, $k' \in L^1_{loc}(0, T)$, $k' \leq 0$, $k \geq 0$. If $u: [0, T] \rightarrow H$ such that $u(0) \in H$, $u \in H^1((0, T), H)$ then

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \left(\frac{d}{dt} (k * u)(t), u(t) \right) dt &\geq \frac{1}{2} (k * \|u\|_H^2)(\xi) \\ + \frac{1}{2} \int_0^\xi k(t) \|u(t)\|_H^2 dt &\geq \frac{k(T)}{2} \int_0^\xi \|u(t)\|_H^2 dt \end{aligned}$$

for any $\xi \in [0, T]$.

Investigation of the problem 1. The existence of the solution is shown by Rothe's time-discretization method. The time interval $[0, T]$ is divided into $n \in \mathbb{N}$ equidistant subintervals $[t_{i-1}, t_i]$ with length $\tau = \frac{T}{n}$. The approximation of a function u at time $t = t_i$, $0 \leq i \leq n$ is denoted by u_i . Moreover, we approximate the time derivative at time t_i by the backward Euler difference, i.e.

$$\partial_t u(t_i) \approx \delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Finally, the time-discrete convolution is defined as follows

$$(k * u)(t_i) \approx (k * u)_i := \sum_{j=1}^i k_{j+1-i} u_j \tau.$$

We define

$$(k * u)_0 = 0.$$

It is notice that the above definition allows blow-up of the kernel function k at 0 . We can calculate that

$$\delta(k * u)_i = \frac{(k * u)_i - (k * u)_{i-1}}{\tau} = k_1 u_i + \sum_{j=1}^{i-1} \delta k_{i+1-j} u_j \tau, \quad i \geq 1.$$

Similarly, we can also write

$$\delta(k * u)_i = k_i u_0 + \sum_{j=1}^i \delta u_j k_{i+1-j} \tau = k_i u_0 + (k * \delta u)_i, \quad i \geq 1. \quad (8)$$

We approximate problem (5) and (6) at time t_i as follows:

$$(k * \delta u)_i(\varphi) + a_i(\nabla u_i, \nabla \varphi) = a_i(g_i, \varphi)_{\partial \Omega} + \left(\sum_{k=1}^i F(t_k, u_{k-1}) \tau, \varphi \right) + (f_i, \varphi), \quad (9)$$

The equation (9) is linear in u_i . Therefore, for a given $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, we solve (9). After that, we increment i to $i + 1$ and repeat the process.

Lemma 2. Let conditions (A1)-(A4) be met. Then for each $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ there exists a unique $(u_i) \in H^1(\Omega)$ solving (9).

Proof. The relation (9) can be rewritten as

$$\begin{aligned} k(\tau)(u_i, \varphi) + a_i(\nabla u_i, \nabla \varphi) &= a_i(g_i, \varphi)_{\partial \Omega} + \left(\sum_{j=1}^i F(t_j, u_{j-1}) \tau, \varphi \right) \\ - \sum_{j=1}^{i-1} k(t_{i+j-1})(\delta u_j, \varphi) \tau &+ k(\tau)(u_{i-1}, \varphi) + (f_i, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

The left-hand side defines a continuous and coercive bilinear form in $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. If $u_0, u_1, \dots, u_{i-1}$ belong to $L^2(\Omega)$, then the right-hand side represents a linear and bounded functional on

$H^1(\Omega)$. By applying the Lax-Milgram theorem from the theory of linear elliptic partial differential equations, we conclude the existence and uniqueness of u_i in $H^1(\Omega)$.

Some energy estimates. The following two lemmas are required to ensure the existence of a solution to (5) and to prove the convergence of approximations towards this solution.

We introduce the following notation:

$$(k * \|u\|^2)_i = \sum_{j=1}^i k(t_{i-j+1}) \|u_j\|^2 \tau.$$

Lemma 3. *Let the assumptions of (A1)-(A4) be fulfilled. Then there exist positive constants C and τ_0 such that for any $0 < \tau < \tau_0$ and every $i = 1, 2, \dots, n$, the following relation hold*

$$\max_{1 \leq i \leq n} (k * \|u\|^2)_i + \sum_{i=1}^n k(t_i) \|u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \tau \leq C.$$

Proof. Set $\varphi = u_i \tau$ in (9) and sum the result up for $i = 1, \dots, j$ to have

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j ((k * \delta u)_i, u_i) \tau + \sum_{i=1}^j a_i(\nabla u_i, \nabla u_i) \tau = \sum_{i=1}^j a_i(g_i, u_i)_{\partial \Omega} \tau \\ & + \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i F(t_k, u_{k-1}) \tau, u_i \right) \tau + \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Using (8) and Lemma 1 we see that

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l (k * \delta u)_i, u_i \tau \stackrel{(10)}{=} \sum_{i=1}^j (\delta(k * u)_i - k_i u_0, u_i) \tau \\ & \geq \frac{1}{2} (k * \|u\|^2)_l + \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \sum_{i=1}^l k_i \|u_i\|^2 \tau + \frac{k_l}{4} \sum_{i=1}^l \|u_i\|^2 \tau - C(\epsilon). \end{aligned}$$

It follows from (7) that

$$\sum_{i=1}^j a_i(\nabla u_i, \nabla u_i) \tau \geq C_0 \sum_{i=1}^l \|\nabla u_i\|^2 \tau.$$

Using Cauchy, Young's inequalities and the Trace theorem, we can estimate the first term on the right-hand side of (10)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^i a_i(g_i, u_i)_{\partial \Omega} \tau \right| \leq \epsilon \sum_{j=1}^i a_i \|u_i\|_{\partial \Omega}^2 \tau + C(\epsilon) \\ & \leq C_1(\epsilon) \sum_{j=1}^i \|u_i\|^2 \tau + C_1(\epsilon) \sum_{j=1}^i \|\nabla u_i\|^2 \tau + C(\epsilon). \end{aligned}$$

But owing to assumption (A4), for the next terms on the right-hand side of (10), we have that

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i F(t_k, u_{k-1}) \tau, u_i \right) \tau \right| \leq \epsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + C(\epsilon) + C(\epsilon) \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^{i-1} \|u_k\|^2 \tau^2. \\ & \left| \sum_{i=1}^j (f_i, u_i) \tau \right| \leq C(\epsilon) + \epsilon \sum_{i=1}^l \|u_i\|^2 \tau. \end{aligned}$$

Putting all estimates together we arrive at

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (k * \|u\|^2)_l + \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \sum_{i=1}^l k_i \|u_i\|^2 \tau \\ & + \left(\frac{k_l}{4} - C_1(\epsilon)\right) \sum_{i=1}^l \|u_i\|^2 \tau + (C_0 - C_1(\epsilon)) \sum_{i=1}^l \|\nabla u_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

$$\leq C(\epsilon) + C(\epsilon) \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^{i-1} \|u_k\|^2 \tau^3$$

hence, applying Gronwall's lemma in discrete form for fixing small $0 < \epsilon < 1$ we get for $0 < \tau < \tau_0$ that

$$(k * \|u\|^2)_l + \sum_{i=1}^l k_i \|u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^l \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \tau \leq C.$$

We denote by

$$(k * \|\delta u\|^2)_j = \sum_{i=1}^j k_{j+1-i} \|\delta u_i\|^2 \tau.$$

Lemma 4. Let (A1)-(A5) are met. Then there exist positive constants C and τ_0 such that for any $0 < \tau < \tau_0$ we have

$$\max_{1 \leq \tau \leq n} (k * \|\delta u\|^2)_l + \sum_{i=1}^n k(t_i) \|\delta u_i\|^2 \tau + \sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \tau \leq C.$$

The proof is analogous to that of Lemma 3.

Rothe method and existence of the problem solution. We introduce the following piecewise linear Rothe functions in time $u_n, \bar{u}_n, \tilde{u}_n: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$

$$u_n: t \mapsto \begin{cases} u_0 & t = 0 \\ u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i & t \in (t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$\bar{u}_n: t \mapsto \begin{cases} u_0 & t = 0 \\ u_i & t \in (t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

and

$$\tilde{u}_n: t \mapsto \begin{cases} u_0 & t \in [0, \tau] \\ \bar{u}_n(t - \tau) & t \in (t_{i-1}, t_i], 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Analogously, we define for the functions $\bar{k}_n, \bar{m}'_n, \bar{g}_n, \bar{F}_n$.

Using these so-called Rothe's functions, variational system (9) can be rewritten on the whole time frame as (for $t \in (t_{i-1}, t_i]$)

$$(\bar{k}_n * \partial_t u_n, \varphi) + \bar{a}_n(\nabla \bar{u}_n, \nabla \varphi) = \bar{a}_n(\bar{g}_n, \varphi)_{\partial\Omega} + \left(\int_0^{t_i} \bar{F}_n(s, \tilde{u}_n(s)) ds, \varphi \right) + (\bar{f}_n, \varphi), \quad (11)$$

Now, we are in a position to prove the existence of a variational solution to (5).

Theorem 1 (Existence of a solution). Suppose (A1)-(A5) are met. Then there exists a solution u to (5) obeying $u \in C([0, T], H^1(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2([0, T], H^1(\Omega))$.

Proof. We define the Rothe's approximation $a_n: [0, T] \rightarrow R$ and corresponding step functions $\bar{a}_n$

$$a_n: t \mapsto \begin{cases} a_0 & t = 0 \\ a_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta a_i & t \in (t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$\bar{a}_n: t \mapsto \begin{cases} a_0 & t = 0 \\ a_i & t \in (t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Lemma 3, 4 say that $\|\bar{u}_n(t)\|_{H^1(\Omega)} + \int_0^T \|\partial_t u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C$. Due to the compact embedding $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ we may invoke [[2], Lemma 1.3.13] to claim the existence of $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T), H^1(\Omega))$ which is time-differentiable in $[0, T]$ and a subsequence of $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ such that

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{in } C([0, T], L^2(\Omega)), \\ u_n(t) \rightarrow u(t) & \text{in } H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, T], \\ \bar{u}_n(t) \rightarrow u(t) & \text{in } H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, T], \\ \partial_t u_n \rightarrow \partial_t u & \text{in } L^2((0, T), L^2(\Omega)). \end{cases}$$

It has been proven in [1] that u satisfies the variational problem (5) for a uniformly elliptic operator. Therefore, we leave the proof to the reader.

Theorem 2 (uniqueness). Suppose that the conditions of (A1)-(A5) are fulfilled. If problem (5) has a solution, then this solution is unique.

Proof. The existence of a solution follows from Theorem 1. Now we prove the uniqueness of a solution. We suppose that $u_i, i = 1, 2$ be the weak solutions of (1)-(3). Then we know that $u_i, i = 1, 2$ solve the variational problem. Then, the difference $u = u_1 - u_2$ is satisfying

$$\begin{aligned} & ((k * \partial_t u)(t), \varphi) + a(t)(\nabla u, \nabla \varphi) = a(t)(g(t), \varphi)_{\partial\Omega} \\ & + \left(\int_0^t (F(\tau, u_1(\tau)) - F(\tau, u_2(\tau))) d\tau, \varphi \right) - a_2(t)(\nabla u, \nabla \varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

Integrating equation (12) with respect to time over $t \in (0, \xi) \subset (0, T)$, taking $\varphi = u(t)$. $(k * \partial_t u)(t) = \partial_t(k * u)(t)$ because of $u(0) = 0$, we have

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi (\partial_t(k * u)(t), u(t)) dt + \int_0^\xi a(t)(\nabla u, \nabla u) dt = \int_0^\xi a(t)(g(t), u(t))_{\partial\Omega} dt \\ & + \int_0^\xi \left(\int_0^t (F(\tau, u_1(\tau)) - F(\tau, u_2(\tau))) d\tau, u(t) \right) dt - \int_0^\xi a_2(t)(\nabla u, \nabla u) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

First, we estimate the lower bound on the left side of the above equation. Hence, using Lemma 4.2.1 and (A1), we get that

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi (\partial_t(k * u)(t), u(t)) dt + \int_0^\xi a(t)(\nabla u(t), \nabla u(t)) dt \\ & \geq \frac{k(T)}{2} \int_0^\xi \|u(t)\|^2 dt + C_0 \int_0^\xi \|\nabla u(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Then we estimate the upper bound on the left side of the above equation. As we know, we have $u_1 \in C([0, T]; H^1(\Omega))$ from the Theorem 2 so $\|u_1(t)\|$ is bounded. In addition, we can get rid of that last term on the right-hand side of (13) because a_2 is nonnegative. Therefore, using the Cauchy and Young's inequalities, and combining the global Lipschitz continuity of F we arrive at

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi a(t)(g(t), u(t))_{\partial\Omega} dt + \int_0^\xi \left(\int_0^t (F(\tau, u_1(\tau)) - F(\tau, u_2(\tau))) d\tau, u(t) \right) dt \\ & \leq \epsilon \int_0^\xi \|\nabla u(t)\|^2 dt + C_\epsilon \int_0^\xi \int_0^t \|u(s)\|^2 ds dt. \end{aligned}$$

Assembling these estimates, we obtain the following.

$$\frac{k(T)}{2} \int_0^\xi \|u(t)\|^2 dt + (C_0 - \epsilon) \int_0^\xi \|\nabla u(t)\|^2 dt \leq C_\epsilon \int_0^\xi \int_0^t \|u(s)\|^2 ds dt.$$

Fixing a sufficiently small positive ϵ , applying the Gronwall lemma, we obtain $\int_0^\xi \|u(t)\|^2 dt = 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T)$. Differentiating with respect to ξ gives that $u = 0$ a.e. in $\Omega \times (0, T)$.

Formulation of the problem 2. We are concerned with the following initial-boundary value problem for a semilinear integro-differential diffusion equation with a generalized fractional derivative

$$D_t^k u(x, t) + L(x, t)u(x, t) + c(t)u(x, t) = \int_0^t K(s)u(x, t-s)ds + f(x, t, u, \nabla u), (x, t) \in Q, \quad (14)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (15)$$

$$Pu(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (16)$$

where the generalized Caputo fractional derivative of a function $u(x, t)$ is commonly represented in convolution form as (4), with the kernel satisfying conditions (a)-(c) in Section 1.

the asymmetric elliptic operator with space-time dependent coefficients is defined by

$$L(x, t)u = \nabla \cdot (-A(x, t)\nabla u - b(x, t)u), \quad (17)$$

and

$$A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{i,j=1,\dots,d}, \quad b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_d(x, t))^T.$$

Moreover, the boundary operator Pu is defined by

$$Pu = (-A(x, t)\nabla u - b(x, t)u) \cdot \nu,$$

where $\mathbf{v}$ is the unitary outer normal vector of $\partial\Omega$.

For convenience, we introduce the bilinear form $\mathfrak{L}$ associated with the differential operator L as follows

$$\begin{aligned}(Lu, \varphi) &= (A(x, t)\nabla u + b(x, t)u, \nabla \varphi) + (g, \varphi)_{\partial\Omega} \\ &=: (\mathfrak{L}u, \varphi) + (g, \varphi)_{\partial\Omega}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),\end{aligned}$$

i.e.

$$(\mathfrak{L}u, \varphi) = (A(t)\nabla u + b(t)u, \nabla \varphi).$$

The missing time-convolution kernel $K(t)$ will be recovered from the following integral-type measurement

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

which represents the population density over the domain Ω at time t .

For the convenience, we introduce the notation $r(t) = \int_0^t K(s) ds$ and get following equation from (14)

$$D_t^k u(x, t) + L(x, t)u(x, t) + c(t)u(x, t) = r(t)\phi(x) + \int_0^t r(s)u_s(x, t-s)ds + f(x, t, u, \nabla u). \quad (19)$$

After that, we will investigate recovering $u(x, t), r(t)$ functions from the inverse problem (19),(15),(16),(18).

By integrating equation (19) over the domain Ω , applying Green's formula, and considering condition (18), we obtain the following result:

$$(k * m')(t) - (g(t), 1)_{\partial\Omega} + c(t)m(t) = r(t)(\phi(x), 1) + \int_0^t r(s)m'(t-s)ds + (f(t, u, \nabla u), 1). \quad (20)$$

Definition 2. By a weak solution of problem (19),(15),(16),(18), we mean a function $u: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ such that

1. $u \in C([0, T], H^1(\Omega))$;
2. u has a strong derivative $\partial_t u \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$;
3. $u(0) = \phi$ in $H^1(\Omega)$;
4. the following equality holds for any for any $\varphi \in H^1(\Omega), t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}((k * \partial_t u)(t), \varphi) + \mathfrak{L}(u, \varphi) + c(t)(u, \varphi) &= (g(t), \varphi)_{\partial\Omega} \\ + r(t)(\phi, \varphi) + \left(\int_0^t r(\tau)u_\tau(t-\tau)d\tau, \varphi\right) &+ (f(t), \varphi).\end{aligned} \quad (21)$$

The relations (20) and (21) represent the variational formulation of (19),(15),(16),(18).

We use the following assumptions to prove our main result:

- (B1) $r(t) \in C^1[0, T], \quad t \in [0, T]$,
- (B2) $\phi(x) \in H^1(\Omega), (\phi(x), 1) \neq 0$,
- (B3) $g \in C^1(\partial\Omega \times [0, T])$,
- (B4) f is a globally Lipschitz continuous function in all variables,
- (B5) $m(t) \in C^2[0, T]$.

We assume that the coefficients of the elliptic operator satisfy the following conditions:

$$a_{ij}, b_i \in C(\bar{\Omega} \times [0, T]), \quad |a_{ij}| + |b_i| \leq C, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (22)$$

$$c \in C[0, T], \quad 0 < p_0 \leq c \leq p_1, \quad t \in [0, T], \quad (23)$$

$$(\mathfrak{L}(t)\varphi, \varphi) \geq C_0 \|\nabla \varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (24)$$

The existence and uniqueness of the solution to problems (19), (15), (16), and (18) are proved by the Rothe method in a manner similar to the previous problem. Therefore, we omit the proof of existence and uniqueness for this problem.

Theorem 3. (Existence of a solution). Suppose (B2)-(B5) and (22)-(24) are met. Then there exists a solution (u, r) to (20) and (21) obeying $u \in C([0, T], H^1(\Omega))$ with $\partial_t u \in L^2([0, T], H^1(\Omega)), r \in C^1[0, T]$.

Theorem 4. (Uniqueness of a solution). Assume that $\phi \in H^1(\Omega), |(\phi, 1)| \geq \omega > 0$, and $m \in C^1[0, T]$. The function f is supposed to be Lipschitz continuous in all variables. Then problem (21), (20) has at most one solution $(u, r) \in L^2((0, T), H^1(\Omega)) \times C^1[0, T]$.

REFERENCES:

1. Slodička M., Šišková K. An inverse source problem in a semilinear time-fractional diffusion equation. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 72, Iss. 6 (2016), 1655–1669. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.07.029>
2. Kačur J. *Method of Rothe in Evolution Equations*. Teubner-Texte zur Mathematik, 1985.
3. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben, *Mathematische Annalen*, vol. 102, (1930), pp. 650–670.
4. De Staelen, R. H. and Slodicka, M. Reconstruction of a convolution kernel in a semilinear parabolic problem based on a global measurement. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2015, vol. 112, pp. 43–57. DOI: 10.1016/j.na.2014.09.002.
5. Roubicek, T. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Springer Science and Business Media, 2013, vol. 153.
6. Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
7. De Staelen, R. H., Van Bockstal, K. and Slodicka, M. Error analysis in the reconstruction of a convolution kernel in a semilinear parabolic problem with integral overdetermination. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, vol. 275, pp. 382–391.
8. D.K. Durdiev, J.J. Jumaev, Recovering source function and kernel for a time-fractional diffusion equation in the bounded domain, // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 45(4) (2024), 1691–1702.
9. J.J. Jumaev, Numerical analysis of inverse problems for the diffusion equation with initial-boundary and overdetermination conditions, // *Journal of Mathematical Sciences*, (2025). <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07467-5>
10. Jumaev J.J., Durdiev D.K., Bozorov Z.R., Solvability of an inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 15(6) (2025), 1536–1549.
11. Jumaev J.J., Bozorov Z.R., Durdiev D.K., Numerical solution of the problem of determining two unknowns in time-fractional diffusion equations, // *Izvestiya VUZ. Matematika*, No. 7 (2025), 36–52. <https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm>
12. Durdiev D.K., Jumaev J.J., Inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation in the bounded domain, // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44(2) (2023), 548–557. [
13. Durdiev D.K., Jumaev J.J., Turdiev H.H., Inverse problem for determining time-dependent coefficient and source functions in a time-fractional diffusion equation, // *Journal of Mathematical Sciences*, (2024). <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07204-y>
14. Durdiev D.K., Jumaev J.J., Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions, // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki (J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.)*, 29(1) (2025), 21–36. <https://doi.org/10.14498/vsgtu2083>
15. Durdiev D.K., Jumaev J.J., Inverse problem of determining the kernel of the integro-differential fractional diffusion equation in bounded domain, // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, No. 10 (2023), 22–35; *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 67(10) (2023), 1–13.

GENERAL ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A WEIGHTED OPTIMAL QUADRATURE FORMULA IN HILBERT SPACE

Babaev Samandar Samiyevich,

Doctor of Philosophy(PhD) on Physical and Mathematical Sciences,
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences, 46,
University str., Tashkent 100170, Uzbekistan;
Tashkent International University, 7,
Kichik Khalka yoli str., Tashkent 100084, Uzbekistan.
bssamandar@gmail.com

Abstract. This work discusses the general algorithm for constructing weighted optimal quadrature formulas. Initially, the form of the norm for the error functional of the quadrature formula is determined. Subsequently, a system of linear algebraic equations is derived to find the coefficients that minimise this norm. To solve this system using the Sobolev method, a discrete analogue of a known differential operator is employed. Finally, an analytical expression for the coefficients of the optimal quadrature formula is obtained.

Keywords: Hilbert space, optimal quadrature formula, error functional, extremal function, differential operator, optimal coefficients.

HILBERT FAZOSIDA VAZNLI OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR QURISHNING UMUMIY ALGORITMI

Annotatsiya. Ushbu ishda vaznli optimal kvadratur formulalarni qurishning umumiy algoritmi muhokama qilinadi. Bunda dastlab kvadratur formulaning xatolik funksionalining normasining ko'rinishi topiladi. So'ngra normaga minimum qiymat beruvchi koeffitsiyentlarni topish uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi olinadi. Ushbu sistemani Sobolev usulida yechish uchun ma'lum differensial operatorning diskret analogidan foydalaniladi. Optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlarining analitik ko'rinishi topiladi.

Kalit so'zlar: Hilbert fazosi, optimal kvadratur formula, xatolik funksionali, ekstremal funksiya, differensial operator, optimal koeffitsiyentlar.

ОБЩИЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЗВЕШЕННОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В данной работе рассматривается общий алгоритм построения взвешенных оптимальных квадратурных формул. Вначале определяется вид нормы для функционала погрешности квадратурной формулы. Затем выводится система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов, минимизирующих эту норму. Для решения этой системы методом Соболева применяется дискретный аналог известного дифференциального оператора. В итоге получено аналитическое выражение для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы.

Ключевые слова: гильбертово пространство, оптимальная квадратурная формула, функционал погрешности, экстремальная функция, дифференциальный оператор, оптимальные коэффициенты.

Introduction. Many practical problems are modelled by differential equations, integral equations, or integro-differential equations. Their solutions are expressed as integrals of known functions. Usually, calculating these integrals accurately is either very difficult or impossible. Therefore, quadrature formulas are used to compute integrals with high precision. In this work, we present a general algorithm for constructing an optimal quadrature formula via the Sobolev method, grounded in variational principles.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\varphi(x_{\beta}), \quad (1)$$

where $p(x)$ is a non-negative weight function defined in the interval $[0,1]$, C_{β} are the coefficients and x_{β} are nodes of the quadrature formula. Weighted quadrature rules are useful because they can manage the problematic behavior of $p(x)$ by including it in the weight function. If you design a rule that accounts for $p(x)$, you can get fast convergence as long as $\varphi(x)$ is smooth. You can also use the same rule for different $\varphi(x)$, as long as $p(x)$ does not change.

Many scientific studies have focused on developing optimal quadrature formulas with a weight function $p(x)$ in works [1–4], with the weight function $p(x) = e^{2\pi i \omega x}$, which is highly oscillatory, using Sard's approach [5–9] developed these formulas for numerically integrating Fourier integrals in Hilbert and Sobolev spaces and applied them to reconstruct computed tomography images.

Here functions $\varphi(x)$ belong to the linear space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ which is defined as follows (see [10,11])

$$W_2^{(m,m-1)}(0,1) = \{\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)} \text{ is abs. cont, and } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\}.$$

The inner product of two functions $\varphi(x)$ and ψ in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ is defined as

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x))(\psi^{(m)}(x) + \psi^{(m-1)}(x))dx.$$

The norm of the function in this space is determined as

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m,m-1)}} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$$

provided that $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x))^2 dx < \infty$.

The error for the quadrature formula (1) is given by the following difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\varphi(x_{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx. \quad (2)$$

This error leads to the following linear functional, known as the error functional

$$\ell(x) = p(x)\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta}\delta(x - x_{\beta}), \quad (3)$$

Here is the characteristic function for the interval $[0,1]$, and $\delta(x)$ is Dirac's delta function.

Problem 1. Find the coefficients C_{β} that give the minimum value to the quantity $\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}}$ and calculate

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}} = \inf_{C_{\beta}} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}},$$

where

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}} = \sup_{\|\varphi\|_{W_2^{(m,m-1)}} \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|}. \quad (4)$$

Indeed, from (4) for the absolute value of the error (2), we get the following inequality

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{W_2^{(m,m-1)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}}. \quad (5)$$

Therefore, the absolute value of the error in (2) can be estimated from the norm of the error functional. To make the formula more accurate, we should minimise the right-hand side of the last inequality, either by adjusting the coefficients or the nodes. If we fix the nodes and minimize the norm of the error functional

$\ell(x)$ by changing the coefficients C_β , we get the optimal quadrature formula of the form (1) as described by Sard [12–14].

Algorithm for constructing an optimal quadrature formula. To solve Problem 1, we first compute the norm of the error functional (4). We use the extremal function for this calculation [11]

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x) + d e^{-x}, \quad (6)$$

here

$$G_m(h\beta) = \frac{\text{sgn}(h\beta)}{2} \left(\frac{e^{h\beta} - e^{-h\beta}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(h\beta)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right). \quad (7)$$

And we have

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1)*}}^2 &= (\ell, \psi_\ell) = \\ &= (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) + \int_0^1 \int_0^1 p(x) \cdot p(y) G_m(x - y) dx dy - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_0^1 p(x) G_m(x - h\beta) dx \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

a. In addition, for the error functional (3) to be defined on the space, the following must be met:

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m-2, \quad (\ell, e^{-x}) = 0. \quad (9)$$

To minimise the norm (8) with respect to the coefficients under the conditions (9), we use the Lagrange method to find the conditional extremum.

So we get the following system of $N + m + 1$ linear equations

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \cdot G_m(h\beta - h\gamma) + \sum_{\alpha=0}^{m-2} d_\alpha (h\beta)^\alpha + d_{m-1} e^{-h\beta} = f_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma (h\gamma)^k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \cdot e^{-h\gamma} = g_{m-1}, \quad (12)$$

where $f_m(h\beta) = \int_0^1 p(x) \cdot G_m(x - h\beta) dx$, $G_m(x)$ is defined by (7), $g_\alpha = \int_0^1 p(x) x^\alpha dx$, $g_{m-1} = \int_0^1 p(x) e^{-x} dx$. Here C_β ($\beta = 0, 1, \dots, N$), d_α ($\alpha = \overline{0, m-2}$) and d_{m-1} are $N + m + 1$ unknowns.

Systems (10)-(12) have a unique solution for $N + 1 \geq m$ that minimises the square of the norm (8) of the error functional (2) under conditions (9).

Assuming $C_\beta = 0$ for $\beta < 0$ and $\beta > N$, we rewrite the above system in convolution form

$$C_\beta * G_m(h\beta) + \sum_{k=0}^{m-2} d_k x_\beta^k + d_{m-1} e^{-x_\beta} = f_m(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$C_\beta = 0, \quad \beta < 0, \quad \beta > N, \quad (14)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma (h\gamma)^k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \quad (15)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \cdot e^{-h\gamma} = g_{m-1}. \quad (16)$$

For convenience in calculations, we will introduce the following notations

$$v_m(h\beta) = G_m(x_{\beta}) * C_{\beta} \quad (17)$$

$$u_m(h\beta) = v_m(h\beta) + \sum_{k=0}^{m-2} d_k x_{\beta}^k + d_{m-1} e^{-x_{\beta}}.$$

Next, we will write the coefficients C_{β} in terms of the function $u_m(h\beta)$. To do this, we use the discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$, which satisfies the following equality (see [15,16])

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta_d(h\beta),$$

$$\text{where } \delta_d(h\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \neq 0, \\ 1, & \beta = 0 \end{cases} \text{ is the discrete delta-function.}$$

The discrete analogue has the form

$$D_m(h\beta) = \frac{1}{p_{2m-2}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ -2e^h + \sum_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 1, \\ 2C + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases} \quad (18)$$

where

$$C = 1 + (2m-2)e^h + e^{2h} + \frac{e^h \cdot p_{2m-3}}{p_{2m-2}},$$

$$A_k = \frac{2(1-\lambda_k)^{2m-2} [\lambda_k(e^{2h} + 1) - e^h(\lambda_k^2 + 1)] p_{2m-2}}{\lambda_k \mathcal{P}_{2m-2}'(\lambda_k)},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2m-2}(\lambda) &= \sum_{s=0}^{2m-2} p_s \lambda^s \\ &= (1-e^{2h})(1-\lambda)^{2m-2} - 2(\lambda(e^{2h} + 1) - e^h(\lambda^2 + 1)) \\ &\quad \times \left[h(1-\lambda)^{2m-4} + \frac{h^3(1-\lambda)^{2m-6}}{3!} E_2(\lambda) + \dots + \frac{h^{2m-3} E_{2m-4}(\lambda)}{(2m-3)!} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

p_{2m-2}, p_{2m-3} are the coefficients of the polynomial $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$ defined by equality (19), λ_k are the roots of the polynomial $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$ which absolute values are less than 1, and $E_k(\lambda)$ is the Euler-Frobenius polynomial of degree k (the definition of the Euler-Frobenius polynomial is given, for example, in [17,18]).

For optimal coefficients, we have

$$C_{\beta} = D_m(h\beta) * u_m(h\beta). \quad (20)$$

Thus, if we find the function $u_m(h\beta)$ then the optimal coefficients C_{β} can be found from equality (20). To calculate the convolution (20), it is required to find the representation of the function $u_m(h\beta)$ for

all integer values of β . From equality (13) we get that $u_m(h\beta) = f_m(h\beta)$ when $x_\beta \in [0,1]$ ($x_\beta = h\beta$). We now see the representation of the function $u_m(h\beta)$ when $\beta < 0$ and $\beta > N$.

Since $C_\beta = 0$ when $x_\beta \notin [0,1]$ then

$$C_\beta = D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0, \text{ for } x_\beta \notin [0,1].$$

Now we calculate the convolution $v_m(h\beta) = G_m(h\beta) * C_\beta$ when $x_\beta \notin [0,1]$. Suppose $\beta \leq 0$ then taking into account equalities (7), (15) and (16), we have

$$\begin{aligned} v_m(h\beta) &= \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) = -\frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma \left(\frac{e^{h\beta-h\gamma} - e^{-h\beta+h\gamma}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(h\beta - h\gamma)^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \\ &= -\frac{e^{h\beta}}{4} g_{m-1} + De^{-h\beta} + Q_{2m-3}(h\beta) + R_{m-2}(h\beta). \end{aligned}$$

Thus when $\beta \leq 0$ we get

$$v_m(h\beta) = -\frac{e^{h\beta}}{4} g_{m-1} + De^{-h\beta} + Q_{2m-3}(h\beta) + R_{m-2}(h\beta),$$

where

$$\begin{aligned} Q_{2m-3}(h\beta) &= \sum_{i=0}^{2m-3} q_i(h\beta)^i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]-1} \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(h\beta)^{2k-1-i} (-1)^i g_i}{(2k-1-i)! i!} + \sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(h\beta)^{2k-1-i} (-1)^i g_i}{(2k-1-i)! i!} \right) \end{aligned}$$

is the polynomial of degree $2m-3$ with respect to $h\beta$,

$$R_{m-2}(h\beta) = \sum_{i=0}^{m-2} r_i(h\beta)^i = \frac{1}{2} \sum_{k=\left[\frac{m+1}{2}\right]}^{m-1} \sum_{i=m-1}^{2k-1} \frac{(h\beta)^{2k-1-i} (-1)^i}{(2k-1-i)! i!} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma (h\gamma)^i$$

is unknown polynomial of degree $m-2$ of $h\beta$,

$$D = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{h\gamma}.$$

Similarly, in the case $\beta \geq N$ for the convolution, we obtain

$$v_m(h\beta) = \frac{e^{h\beta}}{4} g_{m-1} - De^{-h\beta} - Q_{2m-3}(h\beta) - R_{m-2}(h\beta).$$

We denote

$$\begin{aligned} R_{m-2}^-(h\beta) &= P_{m-2}(h\beta) + R_{m-2}(h\beta), \\ a^- &= d_{m-1} + D, \\ R_{m-2}^+(h\beta) &= P_{m-2}(h\beta) - R_{m-2}(h\beta), \\ a^+ &= d_{m-1} - D. \end{aligned}$$

So, we have

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} -\frac{e^{h\beta}}{4} g_{m-1} + a^- e^{-h\beta} + Q_{2m-3}(h\beta) + R_{m-2}^-(h\beta), & \beta \leq 0, \\ f_m(h\beta), & 0 \leq \beta \leq N, \\ \frac{e^{h\beta}}{4} g_{m-1} + a^+ e^{-h\beta} - Q_{2m-3}(h\beta) + R_{m-2}^+(h\beta), & \beta \geq N. \end{cases}$$

Here $R_{m-2}^-(h\beta)$ and $R_{m-2}^+(h\beta)$ are unknown polynomials of degree $m-2$ with respect to $h\beta$, a^- and a^+ are unknown constants.

Thus, by using the following equality, we find the unknowns in the function $u_m(h\beta)$

$$D_m(h\beta) * u_m(h\beta) = 0, \text{ for } x_\beta \notin [0,1].$$

Now we consider the case $m \geq 2$. In this case, the following is true.

Theorem 1. Coefficients of optimal quadrature formulas (1) with equally spaced nodes $x_\beta = h\beta$ in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ when $m \geq 2$ have the the following form

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{p} \left[-2e^h \left[f_m(h) - \frac{1}{4} e^{-h} g_{m-1} + a^- e^h + \sum_{i=0}^{2m-3} q_i (-h)^i + \sum_{i=0}^{m-2} r_i^- (-h)^i \right] \right. \\ &\quad \left. + 2Cf_m(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k} \left\{ \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^\gamma f_m(h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k \right\} \right], \\ C_\beta &= \frac{1}{p} \left[2Cf_m(h\beta) - 2e^h [f_m(h(\beta-1)) + f_m(h(\beta+1))] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k} \left\{ \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^{|\beta-\gamma|} f_m(h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k \right\} \right], \\ C_N &= \frac{1}{p} \left[2Cf_m(1) - 2e^h \left[f_m(1-h) + \frac{1}{4} e^{1+h} g_{m-1} + a^+ e^{1-h} - \sum_{i=0}^{2m-3} q_i (1+h)^i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{m-2} r_i^+ (1+h)^i \right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k} \left\{ \sum_{\gamma=0}^N \lambda_k^{N-\gamma} f_m(h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k \right\} \right], \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{\lambda_k g_{m-1}}{4(\lambda_k - e^h)} + \frac{a^- \lambda_k e^h}{1 - \lambda_k e^h} + \sum_{i=1}^{2m-3} q_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (-h)^j \sum_{v=1}^j \frac{\lambda_k^v \Delta^v 0^j}{(1 - \lambda_k)^{v+1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-2} r_i^- \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} (-h)^j \sum_{v=1}^j \frac{\lambda_k^v \Delta^v 0^j}{(1 - \lambda_k)^{v+1}} + \frac{(q_0 + r_0^-) \lambda_k}{1 - \lambda_k}, \\ N_k &= \frac{\lambda_k e^{1+h} g_{m-1}}{4(1 - \lambda_k e^h)} + \frac{a^+ \lambda_k}{e(e^h - \lambda_k)} - \sum_{i=1}^{2m-3} q_i \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} h^j \sum_{v=1}^j \frac{\lambda_k^v \Delta^v 0^j}{(1 - \lambda_k)^{v+1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-2} r_i^+ \sum_{j=1}^i \binom{i}{j} h^j \sum_{v=1}^j \frac{\lambda_k^v \Delta^v 0^j}{(1 - \lambda_k)^{v+1}} + \frac{(r_0^+ - q_0) \lambda_k}{(1 - \lambda_k)}, \end{aligned}$$

$$p = p_{2m-2} = 1 - e^{2h} + 2e^h \left(h + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^{2m-3}}{(2m-3)!} \right),$$

$$a^- = f_m(0) + \frac{1}{4}g_{m-1} - \sum_{i=0}^{2m-3} q_i - \sum_{i=0}^{m-2} r_i^-,$$

$$a^+ = e \left(f_m(1) - \frac{e}{4}g_{m-1} + \sum_{i=0}^{2m-3} q_i - \sum_{i=0}^{m-2} r_i^+ \right)$$

and r_i^- , r_i^+ , $i = 0, 1, \dots, m-2$ are known, λ_k , A_k and C are given.

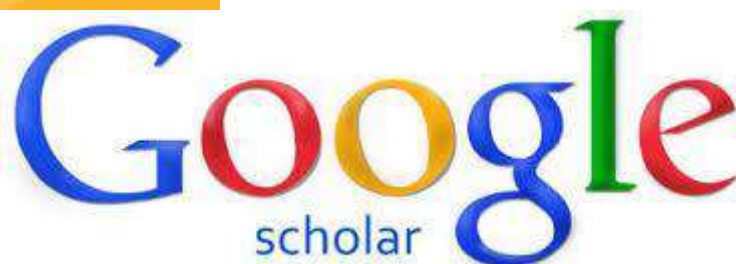
Conclusion. This study introduces a simple, effective, and novel method for constructing optimal quadrature formulas to achieve more accurate integration. Uniquely, by first defining a specific approach to measuring calculation errors, we developed a new mathematical system to identify the optimal coefficients that minimise these errors. Employing the Sobolev method and discrete operators, we further simplified the traditionally complex equations into a manageable form. As a result, we derived new, explicit analytical formulas for these coefficients, providing a novel tool for high-precision, efficient numerical integration.

Acknowledgment. The author expresses his gratitude to Tashkent International University and the V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics for providing comfortable work conditions and a supportive environment for this research.

REFERENCES:

1. Babaev S.S. Consecutive optimization of the weighted quadrature formulas with derivative // *Filomat*. 2025. Vol. 39, № 8. P. 2805–2815.
2. Shadimetov Kh.M. A method of construction of weight optimal quadrature formulas with derivatives in the Sobolev space // *Uzb. Math. J.* 2018. Vol. No. 3. P. 140–146.
3. Babaev S.S. The weighted optimal quadrature formula with derivatives in the Hilbert space // *Probl. Comput. Appl. Math. Uzb.* 2024. Vol. 60, № 4/2. P. 99–107.
4. Babaev S.S. A weighted optimal quadrature formula with derivative // *Uzb. Math. J.* 2024. Vol. 68, № 1. P. 19–26.
5. Boltaev N.D. et al. Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space. // *J. Appl. Anal. Comput.* 2017. Vol. 7. P. 1233–1266.
6. Hayotov A.R., Khayriev U.N., Azatov F. Exponentially weighted optimal quadrature formula with derivative in the space $L_2^{(2)}$ // *AIP Conf. Proc.* 2023. Vol. 2781. P. 20050.
7. Hayotov A.R., Babaev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in $W_2^{(m,m-1)}$ space // *AIP Conf. Proc.* 2021. Vol. 2365. P. 20021.
8. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Bozarov B.I. Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space // *J. inequalities Appl. Springer*. 2022. Vol. 103. P. 1–21.
9. Hayotov A.R., Jeon S., Lee C.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$. // *J. Comput. Appl. Math.* 2020. Vol. 372. P. 112713.
10. Shadimetov Kh.M. Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces. Tashkent: Fan va texnologiya., 2019.
11. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space // *Calcolo*. 2014. Vol. 51. P. 211–243.
12. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas // *Amer. J. Math.* 1949. Vol. 71. P. 80–91.
13. Sard A. Linear Approximation // *Amer. Math. Soc.* 1963.
14. Sard A. Integral Representations of Remainders // *Duke Math. J.* 1948. Vol. 15. P. 333--345.
15. Shadimetov K.M., Hayotov A.R. Construction of the discrete analogue of the differential operator $d^{2m} / dx^{2m} - d^{2m-2} / dx^{2m-2}$ // *Uzb. Mat. J.* 2004. № 2. P. 85–95.

16. Shadimetov K.M., Hayotov A.R. *Properties of the discrete analogue of the differential operator $d^{2m} / dx^{2m} - d^{2m-2} / dx^{2m-2}$* // *Uzb. Mat. J.* 2004. № 4. P. 72–83.
17. Frobenius F.G. *On Bernoulli numbers and Euler polynomials* // *Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*. 1910. P. 809–847.
18. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. *The Theory of Cubature Formulas*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. 413 p.



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
<https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/>
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
29.12.2025 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish
Bukhari street, 190 B-house