E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

10(1)/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

10(1)/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2025, № 10, oktabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo‘yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo‘yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo‘yicha, **tarix** fanlari bo‘yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, O‘zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY’ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Bosh muharrir o‘rinbosari: Samiyev Kamoliddin A’zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), dotsent
Mas’ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)
Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)
Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)
Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)
Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)
Mo‘minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)
Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor
Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Rasulov To‘lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor
Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor
Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor
Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a’zosi (akademigi)
Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor
Bo‘riyev Sulaymon Bo‘riyevich, biologiya fanlari doktori, professor
Jumayev Rustam G‘aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent
Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor
Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor
Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor
Murodov G‘ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor
O‘rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor
Navro‘z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor
To‘rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor
Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor
Eshtayev Alisher Abdug‘aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor
Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor
Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor
Bekova Nazora Jo’rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor
Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent
Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent
Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent
Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori
Jo‘rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor
Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor
Artikova Hafiza To‘ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor
Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor
Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor
Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor
Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor
Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent
Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor
Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent
Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor
Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor
Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor
Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor
Ochilov Alisher To‘lis o‘g‘li, tarix fanlari doktori, dotsent
Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent
G‘aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

SERIYA: **A N I Q VA T A B I I Y F A N L A R. T I L SH U N O S L I K**

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
MATEMATIKA * MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА**		
Karimov Sh.T., Mo‘ydinov I.M.	Iteratsiyalangan yuqori tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini Riman usulida yechish	4
Тўлашева Ё.И.	Об одном методе решения начальных и начально-граничных задач для уравнения колебаний балки	9
Esanov N.Q.	RD 10-400-01 kompensatorining erkin tebranishlari va bo‘ylama ko‘chishlarning uzunlikka bog‘liq tahlili	14
Khasanov J.O.	Nonlinear diffusion PDEs for population-water dynamics: self-similar solutions and asymptotics	18
Бегимкулов Ф.Х., Кадиркулов Б.Ж.	Решение задачи типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом	26
Bobokhojaeva N.Sh.	On a non-homogeneous Boussinesq type equation with non-local conditions	37
Qobilova D.G‘.	Mittag-Leffler funksiyasi	44
Xudoykulov Sh.Sh.	Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegaralanmagan parallelepiped ko‘rinishidagi sohada nolokal chegaraviy shartli to‘g‘ri masala	49
Mingboyev A.A.	Xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish uchun algoritmlar va dasturiy vositalarni shakllantirish	55
Jo‘rayeva D.U.	Asimptotik usullarning spektral masalalarga tadbiqlari	60
Kungirov M.N.	Bifurcation of cycles in two-dimensional hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities	67
Жалолов И.И.	Алгоритм построения дискретного аналога $D^{h}_{1,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$	71
Khamidov Sh.I., Ibrogimov U.B.	The discrete spectrum of two-particle Schrödinger operators on lattices	79
FIZIKA * PHYSICS *** ФИЗИКА**		
Шарипов М.З., Низомова Ш.К., Бадриддинов И.М., Чориева М.Ж.	Теоретические описания динамических микромагнитных явлений	89
Саидханов Н.Ш.	Когерентная дифракционная диссоциация протонов на ядрах	97

Razikov T.M., **Kuchkarov Q.M.,** **Ergashev B.A.,** **Xurramov R.R.,** **Bobomuradov Sh.M.**	Sb_2Se_3 yupqa qatlamli quyosh elementlarining fizik xossalari va olinish usullari	104
Kasimakhunova A.M., **Norbutaev M.A.**	Modeling the impact of enhanced current density in thermoelectric generator branches on heat transfer processes	113
Hayitov D.E.	Disproziy ferrit granatining magnit kompensatsiya harorati yaqinida texnik magnitlanish jarayonining xususiyatlari	119
Komilov M.M., **Aliev S.R.,** **Ziyoitdinov J.N.**	Ikki tomonlama sezgir quyosh elementining sirt qatlamida optimal tekstura hosil qilish orqali nur yutish xususiyatini oshirish	124
Saipnazarov J.M.	Qovushqoq-elastik qatlamli muhitlarda erkin to‘lqinlarning tarqalishi	132
Мавлонов Т., **Алиев А.Э.**	Динамический расчёт и исследование собственных колебаний оболочечных конструкций	140
Ёкубов У.А., **Мирзаев С.З.,** **Аллаев Б.А.,** **Трунилина О.В.**	Бетонни модификациялаш учун нанокремнезёмдан фойдаланиш	144
Андреева Н.П., **Бункин Ф.В.,** **Власов Д.В.,** **Каршиев Қ.,** **Кравцов Ю.А.**	Наблюдение самофокусировки звуковых пучков на границе раздела двух сред	148
Ражабов С.Х.	Исследование нестационарного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале на модели Максвелла	154
Хамраев Ю.Б., **Янке В.Г.,** **Абдурахмонов М.,** **Тошмуродов Н.П.**	Первичные галактические космические лучи и геомагнитные эффекты	164
Uktamov U.X., **Davlataliyev A.A.,** **Mardiyev I.R.**	Loop kvant gravitatsiyasida tashqi asimptotik bir jinsli magnit maydondagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘raning to‘rt potensialini hisoblash	169

Davlataliyev A.A., **Uktamov U.X.,** **Alloqulov M.U.,** **Karshiboyev Sh.E.**	Starobinsky-Bel-Robinson gravitatsiya nazariyasida bir jinsli bo‘lmagan plazma muhitida gravitatsion linzalanish	174
Haydarov U.E., **Muzafarov A.M.**	Texnogen hududlardagi atmosfera havosining radiatsion ko‘rsatkichlarini radiometrik usullar yordamida baholash	183
Dusmatov O.M., **Xodjabekov M.U.,** **Xasanov J.A.**	Doiraviy plastinkaning dinamik so‘ndirgich bilan chiziqlimas ko‘ndalang tebranishlari ustuvorligini tekshirish	191
BIOLOGIYA * BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ**		
Matsafayeva Sh.T., **Normatov A.M.**	Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni ajratish va ularni oziq-ovqat sanoatida qo‘llash	200
Mirzayev J.D., **Davlatova E.J.,** **Turdiyeva D.A.**	Mahalliy bug‘doy donlaridan navli un tortishda, ularning texnologik, reologik va fizik-kimyoviy xossalarining ahamiyati	207
Shaxriddinov F.F., **Usmonova Sh.E.,** **Pardayev Z.T.**	Un mahsulotidan non ishlab chiqarishda nonning sifatini yaxshilovchi qo‘shimchalar	212
Mirzayev J.D., **Davlatova E.J.,** **Turdiyeva D.A.**	Mahalliy bug‘doy donlari navlarining qiyosiy tahlili hamda tadqiqotlar uchun muqobillari	219
Zokirov B.U., **Jalilov G‘.O.**	Metanolli ozuqa muhitida metilatrofik achitqini ko‘paytirish	223
Kamilova Sh.B., **Mirxodjayeva D.D.**	Zardob asosidagi funksional siroplarning ishlab chiqilishi va ularning inson salomatligidagi ahamiyati	227
KIMYO * CHEMISTRY *** ХИМИЯ**		
Khakberdiev E.O., **Norkobilov A.A.,** **Bozorboeva G.A.,** **Normuradov N.F.,** **Berdinazarov K.N.,** **Ashurov N.R.**	Effect of nano-calcium carbonate on the mechanical properties of PVC composites	232
Телманова Д.З., **Рузиев И.Х.**	Влияние природы растворителя и температуры на кинетику Альдер-еновой реакции 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона с 2-кареном	237

UO‘K 51

ITERATSIYALANGAN YUQORI TARTIBLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASINI RIMAN USULIDA YECHISH

Karimov Shaxobiddin Tuychiboyevich,
Farg‘ona davlat universiteti
Amaliy matematika kafedrasi professori
Mo‘ydinov Ilhomjon Ma’mirali o‘g‘li,
Farg‘ona davlat texnika universiteti
Oliy matematika kafedrasi stajyor-tadqiqotchisi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada iteratsiyalangan yuqori tartibli chiziqli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasi yechimi o‘rganilgan. Tadqiqot Riman usulini qo‘llashga asoslangan bo‘lib, bu usul ushbu ko‘rinishdagi masalalar uchun ilgari qo‘llanilmagan. Muammoni hal qilish uchun xarakteristik koordinatalarga o‘tish va tegishli differensial operatorlar uchun qo‘shma operator tushunchasini joriy etish orqali yondashuv ishlab chiqilgan. Riman funksiyasi aniq ko‘rinishda qurilgan bo‘lib, uning yordamida Koshi masalasining yechimi aniq formula shaklida ifodalangan. Olingan yechimning yagonaligi isbotlangan. Natijalar matematik fizikaning turli sohalaridagi yuqori tartibli giperbolik tenglamalar bilan bog‘liq muammolarni hal qilishda qo‘llanilishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *iteratsiyalangan yuqori tartibli giperbolik tenglama, Koshi masalasi, Riman funksiyasi, Grin formulasi, qo‘shma tenglama.*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ РИМАНА ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Аннотация. *В данной статье изучается решение задачи Коши для итерационного линейного гиперболического уравнения высокого порядка. Исследование основано на применении метода Римана, ранее не применявшегося для задач подобного вида. Для решения задачи разработан подход, основанный на переходе к характеристическим координатам и введении понятия сопряжённого оператора для соответствующих дифференциальных операторов. Функция Римана построена в явном виде, с помощью которого решение задачи Коши выражается в виде явной формулы. Доказана единственность полученного решения. Результаты могут быть использованы для решения задач, связанных с гиперболическими уравнениями высокого порядка, в различных областях математической физики.*

Ключевые слова: *итерационное гиперболическое уравнение высокого порядка, задача Коши, функция Римана, формула Грина, сопряжённое уравнение.*

SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ITERATED HIGH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION USING THE RIEMANN METHOD

Abstract. *This article examines the solution of the Cauchy problem for an iterated linear hyperbolic equation of higher order. The research is based on applying the Riemann method, which has not been previously used for problems of this type. To solve the problem, an approach has been developed by transitioning to characteristic coordinates and introducing the concept of a conjugate operator for the corresponding differential operators. The Riemann function is constructed in explicit form, which is then used to express the solution to the Cauchy problem as an explicit formula. The uniqueness of the obtained solution has been proven. The results can be applied in solving problems related to higher-order hyperbolic equations in various fields of mathematical physics.*

Keywords: *iterated higher-order hyperbolic equation, Cauchy problem, Riemann function, Green's formula, conjugate equation.*

Kirish. Yuqori tartibli chiziqli giperbolik xususiy hosilali differensial tenglamalar zamonaviy matematik fizikaning fundamental muammolaridan biri bo‘lib, to‘lqin tarqalishi, elastiklik nazariyasi, elektromagnit dinamika va kvant mexanikasi kabi sohalarda keng qo‘llaniladi.

Quyidagi ko‘rinishdagi yuqori tartibli tenglamalarni o‘rganishning ahamiyatiga A. V. Bitsadze [1] ishora etgan:

$$L^m u = 0,\ m = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

bu yerda L — ikkinchi tartibli chiziqli differensial operator, $L^m = L^{m-1}L$ esa shu operatorning m-marta kompozitsiyasidir.

Ushbu yo‘nalishda [2] ishini ko‘rsatish mumkin, unda (1) tenglama $m \geq 1$ va $L \equiv \partial^2 / \partial x^2 + signx\left(\partial^2 / \partial y^2\right)$ Lavrentyev-Bitsadze operatori bo‘lganda o‘rganilgan. $m = 2$ bo‘lganda Lavrentyev-Bitsadze operatori bilan (1) tenglama uchun turli masalalar [3] va [4] ishlarida o‘rganilgan.

To‘lqinli ko‘paytuvchilarga ajraladigan differensial tenglama uchun Koshi masalasining analogi [5] da o‘rganilgan. [6] ishida (1) tenglama uchun Koshi masalasi, bu yerda L — to‘lqin operatori, Riss usuli bilan yechilgan, bunda yechim oddiy va qo‘sh qatlamli ko‘p o‘lchovli giperbolik potentsiallar yig‘indisi shaklida olingan.

[7] ishda bir va ko‘p o‘zgaruvchili yuqori tartibli (1) tenglama uchun Koshi masalasi sferik o‘rta qiymat usulidan foydalani bir o‘zgaruvchili tenglamaga keltirib yechilgan, bunda L — to‘lqin operatori. Ushbu ishda olingan aniq yechimdan foydalanib [8-10] ishlarda bir yoki bir nechta o‘zgaruvchilari bo‘yicha Besselning singular differensial operatori qatnashgan, ko‘p o‘lchovli polito‘lqinli tenglama uchun Koshi masalasi analogining aniq yechimlari almashtirish operatorlari usuli yordamida qurilgan. [11] ishda bir yoki bir nechta o‘zgaruvchilari bo‘yicha Besselning singular differensial operatori qatnashgan tenglamalar uchun Riman funksiyasini qurish bayon etilgan. [12] monografiyada mazkur masala bo‘yicha adabiyotlar tahlili berilgan.

Ushbu maqolada Koshi masalasini Riman usuli bilan yechishni ko‘rib chiqamiz. Bu ko‘rinishdagi masalani Riman usuli bilan yechish ilgari o‘rganilmagan.

$\Omega = \left\{ (x,t) : -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty \right\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$L_1(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^m u(x,t) = f(x,t), \quad m \in N, \tag{2}$$

bu yerda $u(x,t)$ noma’lum funksiya, $f(x,t)$ esa uzluksiz funksiya.

Koshi masalasi. (2) tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x,t) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\overline{\Omega})$ sinfga teng va quyidagi boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya topilsin.

$$\left.\frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}}\right|_{t=0} = \varphi_\alpha(x), \quad \left.\frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial t^{2\alpha+1}}\right|_{t=0} = \psi_\alpha(x), \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

bu yerda $\varphi_\alpha(x)$ va $\psi_\alpha(x)$ berilgan funksiyalar bo‘lib, yetarlicha silliq bo‘lgan funksiyalar.

$u(x,t) = w(\xi,\eta),\ \xi = x + t,\ \eta = x - t$ xarakteristik koordinatalarga o‘tamiz. (2) tenglama va (3) boshlang‘ich shartlar mos ravishda (4) va (5) ko‘rinishlarga keladi.

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial \xi^m \partial \eta^m} w(\xi,\eta) = \frac{1}{4^m} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2} \right), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2\alpha} w}{\partial n_1^{2\alpha}}\right|_{\eta=\xi} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2\alpha} \varphi_\alpha(\xi), \quad \left.\frac{\partial^{2\alpha+1} w}{\partial n_1^{2\alpha+1}}\right|_{\eta=\xi} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2\alpha+1} \psi_\alpha(\xi), \tag{5}$$

bu yerda $\vec{n_1}$, $\eta = \xi$ chiziqqa o‘tkazilgan birlik normal vektor bo‘lib, $\vec{n_1} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ ga teng.

(4) tenglamani chap tomonini $M(w)$ bilan belgilaylik ya’ni

$$M(w)=\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi^m\partial\eta^m}w.$$

Endi bu operatorga qo‘shma deb ataluvchi $M^*(v)$ operatorni qabul qilaylik:

$$M^*(v)=\frac{\partial^{2m}v}{\partial\xi^m\partial\eta^m}.$$

Bularga asosan quyidagilarni yozamiz:

$$vM(w)-wM^*(v)=\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}, \tag{6}$$

bu yerda $P=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k-2}v}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta^{k-1}}\times\frac{\partial^{2m-2k+1}w}{\partial\xi^{m-k}\partial\eta^{m+1-k}}$, $Q=-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial\xi^{k}\partial\eta^{k-1}}\times\frac{\partial^{2m-2k}w}{\partial\xi^{m-k}\partial\eta^{m-k}}$,

$v=v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ Riman funksiyasi bo‘lib, quyidagi shartlarni o‘z ichiga oladi:

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial\xi^m\partial\eta^m}v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial^{\beta}v}{\partial\xi^{\beta}}\right|_{\xi=\xi_0}=0,\ \beta=\overline{0,m-2},$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1}v}{\partial\xi^{m-1}}\right|_{\xi=\xi_0}=\frac{(\eta-\eta_0)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^{\beta}v}{\partial\xi^{\beta}}\right|_{\eta=\eta_0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1}v}{\partial\eta^{m-1}}\right|_{\eta=\eta_0}=\frac{(\xi-\xi_0)^{m-1}}{(m-1)!}. \tag{9}$$

(6) tenglikga Grin formulasini qo‘llab (10) tenglikka ega bo‘lamiz.

$$\iint_{\Omega_0'}\left[vM(w)-wM^*(v)\right]d\xi d\eta=\iint_{\Omega_0'}\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta=\int_{\partial\Omega_0'}-Qd\xi+Pd\eta=$$

$$=\int_{ABC}-Qd\xi+Pd\eta=0. \tag{10}$$

(10) tenglikda o‘ng tomondagi integral chegarasi uch qismdan iborat bo‘lgani uchun, uni har bir qismda alohida hisoblaymiz. Bu yerda ABC-uchburchakdan iborat bo‘lib, Ω_0' ga teng va $C(\xi_0,\eta_0)$-ixtiyoriy olingan nuqta.

$\overline{BC}=\{(\xi,\eta):\eta_0\le\xi\le\xi_0,\eta=\eta_0\}$,

$\overline{CA}=\{(\xi,\eta):\eta_0\le\eta\le\xi_0,\xi=\xi_0\}$,

$\overline{BA}=\{(\xi,\eta):\eta=\xi,\ \eta_0\le\xi\le\xi_0\}$.

a) $\overline{BC}$ da $\eta=\eta_0$, $d\eta=0$, $\eta_0\le\xi\le\xi_0$, shuning uchun

$$\int\limits_{BC}(-Q)d\xi+Pd\eta=\int\limits_{BC}(-Q)d\xi=-\int\limits_{\eta_0}^{\xi_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial\xi^k\partial\eta^{k-1}}\times\frac{\partial^{2m-2k}w}{\partial\xi^{m-k}\partial\eta^{m-k}}\right]_{\eta=\eta_0}d\xi=0.$$

b) $\overline{CA}$ da $\xi=\xi_0$, $d\xi=0$, $\eta_0\le\eta\le\xi_0$, bo‘lganligi uchun

$$\int\limits_{CA}(-Q)d\xi+Pd\eta=\int\limits_{CA}Pd\eta=\int\limits_{\eta_0}^{\xi_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^{2k-2}v}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta^{k-1}}\times\frac{\partial^{2m-2k+1}w}{\partial\xi^{m-k}\partial\eta^{m+1-k}}\right]_{\xi=\xi_0}d\eta=$$

$$=\varphi_0(\xi_0)-w(\xi_0,\eta_0).$$

c) $\overline{BA}$ da $\eta=\xi$, $d\eta=d\xi$, $\eta_0\le\xi\le\xi_0$, shuning uchun

$$\int\limits_{BA}(-Q)d\xi+Pd\eta=\int\limits_{\eta_0}^{\xi_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial^{2k-1}v}{\partial\xi^k\partial\eta^{k-1}}\times\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left(\varphi_j(\xi)-\psi_j(\xi)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^{2k-2}v}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta^{k-1}}\times\frac{1}{2^{2k-2}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left(\varphi_j(\xi)\right)\right]d\xi\right.$$

bu yerda $\binom{k-1}{j}=\frac{(k-1)!}{j!(k-j-1)!}$.

Topilganlarni (10) ga qo‘yib, (4) tenglama uchun Koshi masalasi yechimini ixtiyoriy $C(\xi_0,\eta_0)\in\Omega'$ nutada aniqlovchi

$$w(\xi_0,\eta_0)=\varphi_0(\xi_0)+\int\limits_{\eta_0}^{\xi_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\left[\left.\frac{\partial^{2k-1}v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\partial\xi^k\partial\eta^{k-1}}\right|_{\eta=\xi}\times\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(-1)^j\binom{k-1}{j}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\varphi_j^{(k-1-j)}(\xi)\right)\right]+\left.\frac{\partial^{2k-2}v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta^{k-1}}\right|_{\eta=\xi}\times\frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(-1)^j\binom{k-1}{j}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\varphi_j^{(k-1-j)}(\xi)-\psi_j^{(k-1-j)}(\xi)\right)\right]\right]d\xi-\frac{1}{4^m}\iint\limits_{\Omega_0'}v\,fd\xi d\eta,\qquad(11)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

(7) tenglamani ξ bo‘yicha ξ_0 dan ξ gacha va η bo‘yicha η_0 dan η gacha bo‘lgan oraliqlarda integrallaymiz. (8) va (9) shartlardan foydalanib quyidagi Riman funksiyasini hosil qilamiz.

$$v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\frac{(\xi-\xi_0)^{m-1}}{(m-1)!}\times\frac{(\eta-\eta_0)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

x,t o‘zgaruvchilarga qaytib va $\xi_0=x_0+t_0$, $\eta_0=x_0-t_0$ belgilash kiritib, Koshi masalasi uchun Riman funksiyasini topamiz:

$$v(x,t;x_0,t_0)=\frac{\left[(x-x_0)^2-(t-t_0)^2\right]^{m-1}}{\left[(m-1)!\right]^2}.\qquad(12)$$

(12) Riman funksiyasidan foydalanib (11) yechimni oshkor ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin.

$$u(x_0,t_0)=\varphi_0(x_0+t_0)+\int\limits_{x_0-t_0}^{x_0+t_0}\left[\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\xi-x_0-t_0)^{m-k}}{(m-k)!}\right]\times\frac{(\xi-x_0+t_0)^{m-k}}{(m-k)!}\times\frac{1}{2^{2k-1}}\right.\right.\right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{k-1}\left[(-1)^j\binom{k-1}{j}\times\left(\varphi_j^{(k-1-j)}(\xi)\right)\right]+\frac{\left(\left(\xi-x_0\right)^2-t_0^2\right)^{m-k}}{\left[(m-k)!\right]^2}\times\frac{1}{2^{2k-2}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(-1)^j\binom{k-1}{j}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\varphi_j^{(k-1-j)}(\xi)-\psi_j^{(k-1-j)}(\xi)\right)\right]\Bigg]d\xi-\frac{1}{4^m}\iint\limits_{\Omega_0}\frac{\left[\left(x-x_0\right)^2-\left(t-t_0\right)^2\right]^{m-1}}{\left[(m-1)!\right]^2}f(x,t)\,dxdt \tag{13}$$

Teorema. Agar φ_α, ψ_α va $f(x,t)$ funksiyalar uchun $\varphi_\alpha(x)\in C^{2(m-\alpha)}(R)$, $\psi_\alpha(x)\in C^{2(m-\alpha)-1}(R)$ va $f(x,t)\in C(\Omega)$ shartlar bajarilsa, u holda Koshi masalasining yagona yechimi (13) tenglik bilan aniqlanadi.

ADABIYOTLAR:

1. *Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных - М.: Наука, -1981. 448 с.*
2. *Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка. Доклады АН. -1962. Т. 136. No 2. С. 274-276.*
3. *Смирнов М. М. Модельное уравнение смешанного типа четвёртого порядка. – Ленинград: Изд – во ЛГУ. – 1972. 123 с.*
4. *Мередов М. М. О единствнности решения кравеых задач для уравнения смешанного типа четвёртого порядка. Известия АН Туркм. Серия физ. – техн., хим. и геол. наук. 1967. No 4. С. 11-16.*
5. *Гальперин С. А., Кондрашов В. Е. Задача Коши для дифференциальних операторов, распадающихся на волновые множители. Труды Московского мат. общества. 1967. Т. 16. С. 109 – 136.*
6. *Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Изд – во «Гылым». – 1994. – 168 с.*
7. *Каримов Ш. Т. Решение задачи Коши для поливолнового уравнения сферическим методом. // УзМУ хабарлари, Тошкент – 2016.*
8. *Каримов Ш. Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложения. // Вестник КРАУНЦ. Физ-мат. науки. 2017. №2(18). С. 20-40. ISSN 2079-6641.*
9. *A. K. Urinov, Sh. T. Karimov. On the Cauchy Problem for the Iterated Generalized Two-axially Symmetric Equation of Hyperbolic Type. ISSN 1995 – 0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 1, pp. 102 – 110.*
10. *Karimov Sh. T. The Cauchy Problem for the Iterated Klein – Gordon Equation with the Bessel Operator. ISSN 1995 – 0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 5, pp. 772 – 784.*
11. *Karimov Sh. T., Oripov Sh. A. On a Method for Constructing the Riemann Function for Partial Differential with a Singular Bessel Operator. ISSN 1995 – 0802, // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1087 – 1093.*
12. *Уринов А. К., Каримов Ш.Т. Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. Издательство «Фаргона». 2021.*

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Тулашева Ёркиной Илхомжон кизи,
докторант кафедры математики
Наманганского государственного университета
yorqinoytulasheva@gmail.com

Аннотация. *В настоящей работе исследованы начальные и начально-граничные задачи для дифференциального уравнения колебаний балки. Предложен новый метод решения этих задач, и показано, что с его помощью можно решать задачи, поставленные для вырождающихся дифференциальных уравнений. Предложенный подход очень эффективен и позволяет построить точное решение сформулированной задачи.*

Ключевые слова: *уравнение колебаний балки, уравнение Шрёдингера, задача Коши.*

BALKA TEBRANISHLARI TENGLAMASI UCHUN BOSHLANG‘ICH VA BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHNING BIR USULI HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu ishda balka tebranishlarining differensial tenglamasi uchun boshlang‘ich va boshlang‘ich-chegaraviy masalalar tadqiq qilingan. Bu masalalarni yechishning yangi usuli taklif etilgan va uning yordamida aynigan differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan masalalarni ham yechish mumkinligi ko‘rsatib berilgan. Taklif etilgan yondashuv juda samarali bo‘lib, qo‘yilgan masalaning aniq yechimini topish imkonini beradi.*

Kalit so‘zlar: *balka tebranishlari tenglamasi, Shredinger tenglamasi, Koshi masalasi.*

ON A METHOD FOR SOLVING INITIAL AND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE BEAM VIBRATION EQUATION

Abstract. *In this paper, initial and initial-boundary value problems for the differential equation of beam vibrations are investigated. A new method for solving these problems is proposed, and it is demonstrated that this method can be used to solve problems formulated for degenerate differential equations. The proposed approach is highly effective and allows for the construction of an exact solution to the formulated problem.*

Keywords: *beam vibration equation, Schrödinger equation, Cauchy problem.*

Введение. Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = g(x,t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, которое перепишем в следующем виде:

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ / \rho S,\ f(x,t) = g(x,t) / \rho S.$

Отметим, что к уравнению (1) приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2]. Задачи о колебательных процессах балок, стержней и пластин играют важную роль в строительной механике [3, с. 326].

Теория колебаний стержней, балок и пластин сложнее теории колебаний идеально упругих струн, в частности, потому, что, в то время как решения волнового уравнения $u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0$ являются суммами двух бегущих волн, распространяющихся без изменения формы в противоположных направлениях со скоростью a (которая является константой в волновом уравнении), это не относится к уравнению (1), где константа α не может рассматриваться как любая скорость, так как скорость распространения зависит от длины волны [1].

Некоторые начально-краевые задачи для уравнения (1) были исследованы в [10,11], где построены решения в виде рядов, и доказаны теоремы о единственности, существовании и устойчивости этих задач.

Следует отметить, что вопросы, связанные с исследованием уравнений колебаний балки, подробного рассмотрены в работах С.П. Тимошенко [5], И. Снеддон [12], У.Д. Дурдиева [14]. В частности, К.Б. Сабитов внёс значительный вклад в развитие теории колебаний балки, рассмотрев прямые и обратные задачи для уравнений изгибных колебаний.

Научная новизна данной работы заключается в применении нового метода, отличного от классических, позволяющего исследовать начальные и начально-граничные задачи для уравнения $Lu=0$ при $\alpha=1$. Такой подход расширяет возможности анализа вырождающихся дифференциальных уравнений и может быть использован для дальнейшего изучения смежных задач математической физики.

1. Постановка задачи.

В области $\Omega=\{(x,t):x\in R, t\in R, t>0\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача Коши. Найти решение $V(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$V(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(\Omega)\cap C^{1}_{t}\left(\Omega\cup\{t=0\}\right)\cap C(\Omega), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}=0, \tag{3}$$

$$V(x,0)=\varphi(x),\quad V_t(x,0)=\psi(x),\quad x\in R, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Согласно классификации дифференциальных уравнений высшего порядка [13, с. 13], уравнение (3) является уравнением параболического типа на всей плоскости переменных (x,t), а прямые $t=const$ являются его характеристиками.

Сначала построим решение уравнения (3), удовлетворяющее полуоднородным начальным условиям:

$$V(x,0)=\varphi(x),\quad V_t(x,0)=0,\quad x\in R, \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема [16].

Теорема 1. Для того, чтобы функция $V(x,t)$ была решением задачи {(2), (3), (5)} необходимо и достаточно, чтобы функция

$$U(x,y)=V(x,y)+i\int_0^t V_{xx}(x,\tau)d\tau, \tag{6}$$

была решением уравнения

$$U_y-iU_{xx}=0,\ (x,t)\in\Omega, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$U(x,0)=\varphi(x), x\in R, \tag{8}$$

где i -мнимая единица.

Из теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть функция $U(x,t)\in M$ является решением задачи {(7),(8)}, где $\varphi(x)-$действительная функция. Тогда функция $V(x,t)=\mathrm{Re}U(x,t)$ является решением задачи {(2), (3), (5)}, где $\mathrm{Re}U-$означает действительную часть функции $U(x,t)$.

Для решения задачи {(2), (3), (5)}, применим следствие теоремы 1. В этом случае уравнение (7) переходит в одномерное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial U}{\partial t}-i\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0.$$

Решение задачи {(7),(8)} в данном случае примет вид [17]

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left[i\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Тогда, в силу следствия теоремы 1, решение задачи {(2), (3), (5)}, имеет вид:

$$V_1(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G_1(x,t,\xi)d\xi, \tag{9}$$

где

$$G_1(x,t,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right].$$

Теперь в уравнении (9) выполним замену переменной $\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=\eta,$ и получим

$$V_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2\eta\sqrt{t})\cos\left(\eta^2-\frac{\pi}{4}\right)d\eta. \tag{10}$$

Теперь мы рассматриваем задачу о нахождении решения уравнения (3), удовлетворяющего условиям:

$$V\left(x,0\right)=0,\ V_t\left(x,0\right)=\psi(x),\ x\in R, \tag{11}$$

Будем искать решение задачи {(2),(3),(22)} в виде:

$$V_2(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)G_2(x,t,\xi)d\xi, \tag{12}$$

где

$$G_2(x,t,\xi)=\int_0^t G_1(x,\tau,\xi)d\tau\ ,$$

тогда $\frac{\partial}{\partial t}G_2(x,t,\xi)=G_1(x,t,\xi)$ и $G_2(x,0,\xi)=0$. Вычислим интеграл:

$$G_2(x,t,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\tau^{-1/2}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}-\frac{\pi}{4}\right]d\tau. \tag{13}$$

Интегрируем (24) по частям

$$\frac{d}{d\tau}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{(\xi-x)^2}{4\tau^2}\sin\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}-\frac{\pi}{4}\right],$$

$$\int_0^t\tau^{-1/2}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}-\frac{\pi}{4}\right]d\tau=2\sqrt{t}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right]-\frac{(\xi-x)^2}{2}\int_0^t\tau^{-3/2}\sin\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}-\frac{\pi}{4}\right]d\tau.$$

Используем формулы Френеля [15] и получим

$$\int_0^t\tau^{-3/2}\sin\left[\frac{\alpha}{\tau}-\frac{\pi}{4}\right]d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[C\left(\frac{\alpha}{t}\right)-S\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right],\quad \alpha=\frac{(\xi-x)^2}{4}.$$

Умножаем на $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ и используем тождества

$$\cos(z-\frac{\pi}{4})=\sin(z+\frac{\pi}{4})\ \text{и}\ (C-S)=(S-C),$$

получаем

$$G_2(x,t,\xi)=\sqrt{\frac{t}{\pi}}\sin\left[\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}+\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\xi-x}{2}\left[S\left(\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}\right)-C\left(\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}\right)\right]. \tag{14}$$

Сделаем в интегралах (12) и (14) выполним замену переменной $\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}=\eta,$ и получим

$$V_2(x,t)=2\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x+2\eta\sqrt{t})G_2(x,t,x+2\eta\sqrt{t})d\eta, \tag{15}$$

где

$$G_2(x,t,x+2\eta\sqrt{t})=\sqrt{\frac{t}{\pi}}\sin\left[\eta^2+\frac{\pi}{4}\right]+\eta\sqrt{t}\left[S\left(\eta^2\right)-C\left(\eta^2\right)\right].$$

Задача Коши (2)-(4) решается в виде:

$$V(x,t)=V_1(x,t)+V_2(x,t)\,. \tag{16}$$

Решение (16) совпадает с результатами работы [18], где аналогичный результат был получен другим методом и теоретически обоснован на основе независимого аналитического подхода.

Начально-граничная задача. В области $\Omega^+=\{(x,t):0<x<+\infty,0<t<+\infty\}$ найти решение $V(x,t)$ уравнения (3), удовлетворяющее условиям:

$$V(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(\Omega^+)\cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega^+}), \tag{17}$$

$$V(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x<+\infty,\quad V_t(x,0)=0,\ 0<x<+\infty\,, \tag{18}$$

$$V_x(0,t)=0,\quad V_{xxx}(0,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{19}$$

где $\varphi(x)-$заданная функция.

Имеется решение задачи {(2),(17),(18)}.

Для решения задачи {(2),(17),(18),(19)}нельзя непосредственно воспользоваться формулой (9), так как для отрицательных значений аргумента функция $\varphi(x)$ не определена. Продолжим функцию $\varphi(x)$ чётным образом на отрицательную часть оси Ox и обозначим через $\varphi_0(x)$ продолженную функцию. Таким образом, мы обеспечим выполнение однородного граничного условия (18) и правом пользования формулой (9), которая имеет вид:

$$V(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(\xi)\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right]d\xi. \tag{20}$$

Учитывая чётность функции $\varphi_0(x)$ равенство (20) представим в виде:

$$V(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)G_1(x,t,\xi)d\xi, \tag{21}$$

где

$$G_1(x,t,\xi)=\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left[\frac{(\xi-x)^2}{4t}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{\sqrt{2t}}\left[\cos\frac{(\xi-x)^2}{4t}+\sin\frac{(\xi-x)^2}{4t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{t}}\left[\cos\frac{(x+\xi)^2}{4t}+\sin\frac{(x+\xi)^2}{4t}+\cos\frac{(x-\xi)^2}{4t}+\sin\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right].$$

Далее применяя формулу [19]

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(px^2)\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[\cos\frac{b^2}{4p}+\sin\frac{b^2}{4p}\right],$$

при $b=x\pm\xi$, $p=t$, имеем:

$$G_1(x,t,\xi)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(t\eta^2)\cos((x+\xi)\eta)d\eta+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(t\eta^2)\cos((x-\xi)\eta)d\eta=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(t\eta^2)\left[\cos((x+\xi)\eta)+\cos((x-\xi)\eta)\right]d\eta\,,$$

применим формулу произведения в сумму

$$\cos(x\eta)\cos(\xi\eta)=\frac{1}{2}\left[\cos((x+\xi)\eta)+\cos((x-\xi)\eta)\right],$$

Имеем:

$$G_1(x,t,\xi)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(t\eta^2)\cos(x\eta)\cos(\xi\eta)d\eta.$$

В работах [20,21] авторы использовали эти задачи в качестве вспомогательных.

Заключение. В данной работе предложен новый метод решения задачи Коши и начально-граничных задач для уравнения колебаний балки. Основные результаты таковы: с помощью идеи редукции задача связана с вспомогательным уравнением типа Шредингера, на основе чего построены явные интегральные представления решения, с использованием интегралов Френеля строго

проверены предельные переходы. Предложенный метод может быть распространён на вырождающиеся и сингулярные коэффициенты в балочных моделях, в этом направлении перспективны дальнейшие исследования. Полученный результат был применён к исследованию задачи Коши для вырождающегося уравнения колебаний балки[20]. В частности, в работе [21], в качестве объекта исследования рассматривалась начально-граничная задача для вырождающегося дифференциального уравнения. Эти результаты можно рассматривать как применение методологического подхода, разработанного в нашей статье.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с. (изд. 2).*
2. *Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012. 447 с. (изд. 2).*
3. *Тихонов А.Н. и Самарский А.А., Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1966.*
4. *Коренов Б.Г., Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании, Москва, 1967.*
5. *Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, Москва, Наука, 1967.*
6. *Коллатз Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями, Москва, Наука, 1968.*
7. *Гоулд С.Х. Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна, Москва: Мир, 1970.*
8. *Бидерман В.Л., Теория механических колебаний, Москва:Высшая школа, 1980.*
9. *Andrianov I. V., Danishevskii V.V., Ivankov A.O. Asymptotic Methods in the Theory of Vibrations of Beams and Plates, Dnepropetrovsk, Prydniprovska State Academy of Civil engineering and Architecture: Dnipro, Ukraine, 2010; p. 217.*
10. *Сабитов К.Б., Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки, в математические методах и моделях в строителстве, архитектуре и дизайне, Самара, 2015, ст. 34-42.*
11. *Sabitov K.B., Vibrations of a beam with clamped ends, Vestn. Samar. Gos. Univ. Ser. Fiz-Mat. Nauki, 2015, vol. 19, no 2, pp. 311-324.*
12. *И. Снеддон, Преобразования Фурье.-М.: Иностранная литература, 1955. – 668 с.*
13. *Бицадзе А.В., Пашковский В.И. К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна// Докл. АН СССР. – 1974. – No 2. – С. 9-10.*
14. *Durdiyev U.D. Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation, // Differential Equations, 2022, vol. 58, Issue 1, pp. 3744.*
15. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. - 2-е изд., исправ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.*
16. *Karimov Sh.T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order. // Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 15, pp. 853–862 . (2018).*
17. *Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 576 с.*
18. *Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т.53. №5. С. 665–671.*
19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, Рядов и произведений, Москва: Физматлит, 2011, ст. 1108.*
20. *S. Sitnik, Sh. T. Karimov, Y. I. Tulasheva The Cauchy problem for the degenerate beam vibration equation, // Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer), Vol. 277, No.3, pp., 458-466 December 7, 2023.*
21. *Тулашева Ё. Приложения операторов преобразования к решению начально-краевой задачи для уравнения колебания балки, содержащий квадрат оператора Бесселя // Научный вестник Наманганского Государственного Университета, №12, ст 95, 2024.*

UO‘K 51

RD 10-400-01 KOMPENSATORINING ERKIN TEBRANISHLARI VA BO‘YLAMA KO‘CHISHLARNING UZUNLIKKA BOG‘LIQ TAHLILI

Esanov Nuriddin Qurbonovich,
Osiyo Xalqaro Universiteti dotsenti
esanovnuriddin06@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada RD 10-400-01 turdagi kompensatorning mexanik xususiyatlari, xususan, uning erkin tebranish holatlari va bo‘ylama ko‘chishlarning uzunlikka bog‘liq holdagi o‘zgarishlari tahlil qilingan. Matematik model sifatida kompensator sterjen ko‘rinishida qabul qilindi va uning tabiiy chastotalari hisoblandi. Material sifatida po‘lat olingan bo‘lib, uning moduli* $E = 2 \cdot 10^5$ MPa *deb qabul qilindi. Hisoblash natijalari turli chastotalarda olingan bo‘ylama ko‘chish grafiklari orqali namoyon etildi. Olingan natijalardan ko‘rinishicha, element uzunligi ortayotgan sari bo‘ylama ko‘chish oshadi, biroq uzunlik o‘sishi bilan umumiy qattiqlikning pasayishi kuzatildi.*

Kalit so‘zlar: *kompensator, erkin tebranish, bo‘ylama ko‘chish, uzunlik ta’siri, qattiqlik, tabiiy chastota, mexanik sistema, quvur, barqarorlik, egilish-to‘g‘rilash, kuchlanish, harorat o‘zgarishi, deformatsiya, siljish, nasos.*

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПЕНСАТОРА RD 10-400-01 И АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КАК ФУНКЦИИ ДЛИНЫ

Аннотация. *В статье анализируется механическое поведение компенсатора типа RD 10-400-01, с акцентом на режимы его свободных колебаний и длино-зависимые изменения продольных перемещений. Компенсатор моделируется в виде стержня (бруса), рассчитываются его собственные частоты. В качестве материала принята сталь, модуль Юнга обозначен как* $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. *Результаты вычислений представлены в виде графиков продольных перемещений, полученных на различных частотах. Показано, что с увеличением длины элемента продольное перемещение возрастает, тогда, как общая жёсткость уменьшается по мере роста длины.*

Ключевые слова: *компенсатор, свободные колебания, продольное перемещение, влияние длины, жёсткость, собственная частота, механическая система, труба, устойчивость, изгиб–выпрямление, напряжение, изменение температуры, деформация, смещение, насос.*

FREE VIBRATIONS OF THE RD 10-400-01 COMPENSATOR AND ANALYSIS OF LONGITUDINAL DISPLACEMENTS AS A FUNCTION OF LENGTH

Abstract. *This article analyzes the mechanical behavior of an RD 10-400-01–type compensator, focusing on its free-vibration states and the length-dependent variation of axial (longitudinal) displacements. The compensator is modeled as a bar (rod), and its natural frequencies are computed. Steel is adopted as the material, with the Young’s modulus taken as* $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. *The computational results are presented as plots of axial displacement obtained at different frequencies. The findings indicate that axial displacement increases with the element’s length, while the overall stiffness decreases as the length grows.*

Keywords: *compensator, free vibrations, longitudinal displacement, length effect, stiffness, natural frequency, mechanical system, pipe, stability, bending–straightening, stress, temperature variation, deformation, displacement, pump.*

Kirish. Zamonaviy texnika va inshootlarda quvurli tuzilmalarda yuzaga keladigan tebranishlar va kuchlanish holatlarini aniqlash muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan, quvur kompensatorlari turli tashqi kuchlar va ishchi muhit ta’sirida deformatsiyalanadi va ularning ishonchliligi butun sistema barqarorligi uchun hal qiluvchi ahamiyatga ega. Shu bois, kompensatorning erkin tebranishlari va bo‘ylama ko‘chishlarini tadqiq etish, ularning uzunlikka bog‘liq holda qanday o‘zgarishini tahlil qilish ilmiy va amaliy jihatdan dolzarb vazifa hisoblanadi.

RD 10-400-01 kompensatori, quvur sistemalarida ishlatiladigan maxsus element bo‘lib, quvurlardagi harorat o‘zgarishi, bosim va tebranishlar natijasida hosil bo‘ladigan uzayish, qisqarish yoki siljishlarni qabul qilib, ularni kompensatsiya qiladi.RD 10-400-01 – bu davlat standarti (Rukovodyaщiy Dokument- me’yoriy hujjat turi) bo‘yicha ishlab chiqilgan belgilangan turdagi quvur kompensatori hisoblanadi. U quvurli sistemalarda yuzaga keladigan mexanik deformatsiyalarni yumshatish va sistema barqaror ishlashini ta’minlash uchun xizmat qiladi.Asosiy vazifalari–ishchi muhit ta’sirini kamaytirish, quvurdagi issiqlik ta’sirida metalning uzayishi yoki qisqarishi natijasida yuzaga keladigan kuchlanishlarni kamaytiradi. Vibratsiya va zarbani yumshatish – nasoslar, kompressorlar, ventilatorlar va boshqa agregatlar ishida yuzaga keladigan tebranishlarni so‘ndirib, quvur sistemaini himoya qiladi.Bosim o‘zgarishini qabul qilish – quvurdagi bosimning dinamik o‘zgarishlarini kompensatsiya qiladi.Mexanik muvozanatni ta’minlash – quvur yo‘nalishidagi og‘ishlarni to‘g‘rilaydi va konstruksiyaning umumiy barqarorligini ta’minlaydi.

Tuzilishi va ishlash prinsipi qanday? Asosiy qismi – odatda metall quvurdan tayyorlangan gofrlangan element (prujinasimon yoki «garmoshkasimon» shaklda).Makamlash elementlari – ikki tomonida flanes yoki qulfli tutashmalar bo‘ladi.Ishlash prinsipi – quvurdagi uzunlik o‘zgarishi (ΔL) bo‘lganda, kompensatorning gofr qismi egilish-to‘g‘rilash hisobiga bu o‘zgarishni qabul qiladi. Shu tariqa quvurdagi ortiqcha kuchlanish yo‘qotiladi.RD 10-400-01 belgisi nima anglatadi?RD – Rukovodyaщiy Dokument (me’yoriy hujjat turi).

10 – konstruksiya seriyasi yoki ishlab chiqarish turi.400 – kompensatorning shartli diametri (mm).01 – modifikatsiya raqami (birinchi tur).Ya’ni RD 10-400-01 kompensator – shartli diametri 400 mm bo‘lgan, 01-modifikatsiyali quvur kompensatori.Issiqlik elektr stansiyalari (quvurli issiqlik uzatish sistemalari)da, neft va gaz sanoati quvurlarida, suv ta’minoti va kanalizatsiya tarmoqlarida, zavod va fabrikalardagi texnologik quvur sistemalarida, ventilyatsiya va konditsionerlash sistemalarida qo‘llaniladi.

RD 10-400-01 kompensator asosan quyidagi elementlardan iborat.Gofrlangan quvur (prujinasimon element) – asosiy ishchi qism bo‘lib, uzunlik o‘zgarishi va tebranishlarni qabul qiladi.Quvur uchlari (patrubkalar) – kompensatorni quvur sistemasiga ulash uchun xizmat qiladi.

Flaneslar yoki qulfli tutashmalar – montaj va demontaj uchun qulay tutashtiruvchi qismlar.Quvur korpusi – gofrlangan qismni tashqi ta’sirdan himoya qiladi.Quvvatlantiruvchi halqalar (stabilizatorlar) – gofrning qattiqligini ta’minlaydi va yuqori bosimda deformatsiyani cheklaydi.

Asosiy parametrlari (RD 10-400-01 uchun)			
№	Parametr nomi	Belgisi	Qiymati / Izoh
1	Shartli diametri	DN	400 mm
2	Konstruksiya turi	—	01 (birinchi modifikatsiya)
3	Material	E	Po‘lat (E = $2\cdot10^5$ MPa)
4	Ishchi bosim	P	1,6 – 2,5 MPa (shartli)
5	Harakat quvvati	ΔL	±40 mm (uzayish, qisqarish)
6	Gofr soni	n	8 – 12 ta
7	Tashqi diametri	D	≈ 420 mm
8	Uzunligi (o‘rnatish holatida)	L	600 – 700 mm
9	Qo‘llanilish harorati	T	–20°S … +450°S
10	Massa	m	40 – 60 kg

Metodika. Tadqiqotda RD 10-400-01 turdagi kompensator model sifatida qabul qilindi. Quvur-sterjenning ikki tomoni qattiq mahkamlangan holdagi erkin tebranishlari ko‘rib chiqildi.Material sifatida po‘lat olingan: $E = 2\cdot10^5\,\text{MPa}$ .Geometrik parametrlar: $B = 2,\ H = 2,\ L_1 = 3,\ L_2 = 3,\ R = 1$ hajmiy model asosida aniqlangan.Chiziqli dinamik model asosida tebranish tenglamalari chiqarilib, tabiiy chastotalar λ bo‘yicha hisoblashlar amalga oshirildi. Hisoblash jarayonida element uzunligi L o‘zgartirildi va uning bo‘ylama ko‘chishlarga ta’siri tahlil qilindi.

Natijalar. Hisoblash natijalari 2-rasmda keltirilgan bo‘ylama ko‘chish grafiklari asosida tahlil qilindi. Turli chastotalar uchun quyidagi qiymatlar olindi:

$\lambda = 1.051$ – kichik chastotada bo‘ylama ko‘chish deyarli sezilarli emas;

$\lambda = 5.553$ – uzunlik ortgan sari bo‘ylama ko‘chish sezilarli darajada oshib borishi kuzatiladi;

$\lambda = 3.192$ – o‘rtacha chastotada ham uzunlik ta’siri ko‘chishning o‘rtasidan keyin aniq namoyon bo‘ladi. Grafiklardan ko‘rinishicha, uzunlik ortishi bilan bo‘ylama ko‘chish ortib boradi, ammo shu bilan birga elementning umumiy qattiqligi pasayadi. Bu holat, ayniqsa, yuqori chastotalardagi tebranishlarda yaqqol namoyon bo‘ladi.

Material moduli. Material sifatida po‘lat olingan: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa

Sterjenning asosiy dinamik tenglamasi

Erkin tebranishlarda (yoki majburiy kuchlarsiz holda):

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

bu yerda: E –Yung modul, I – inersiya momenti, ρ – zichlik, A– kesim maydoni, w(x,t) – ko‘chish.

Tabiiy chastotalarning umumiy ko‘rinishi $\omega_n = \lambda_n^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}},$

bu yerda: λ_n – chegaraviy shartlarga bog‘liq parametr (masalan, ikki tomoni mahkamlangan holda λ ≈ 4.73, 7.85, ...), L – element uzunligi.

Bo‘ylama kuchlanishlar uchun tenglama $\sigma(x,t) = \frac{M(x,t)\cdot y}{I},$

bu yerda:σ– normal kuchlanish, M(x,t) – egilish momenti, y – neytral o‘qdan masofa, I – inersiya momenti.

Bo‘ylama ko‘chishlar (uzunlikka bog‘liq) $u(x) = \frac{PL}{EA},$

bu yerda:P – uzunlik bo‘ylab kuch, L – element uzunligi, A – kesim maydoni.

Dinamik deformatsiya energiyasi

$$U = \tfrac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

Kinetik energiya

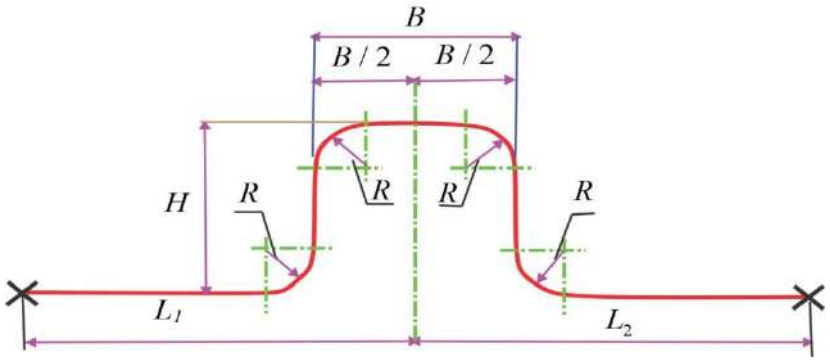
$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx.$$

Lagranj tenglamasi orqali umumiy harakat tenglamasi

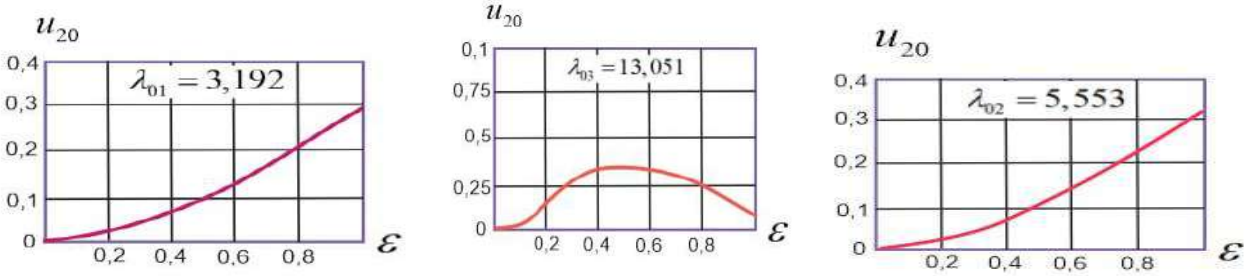
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0.$$

Bo‘ylama ko‘chishlarning uzunlikka bog‘liq funksiyalari (grafik uchun asos)

$u(L) \sim f(\lambda, L, E, I, \rho, A)$



1-rasm. RD 10-400-01 kompensatorining umumiy ko‘rinishi



2-rasm. Bo‘ylama ko‘chishning L ga bog‘liq o‘zgarishi (turli chastotalar uchun)

Rasmdan ko‘rinishicha, L uzunlik oshgan sari bo‘ylama ko‘chish ham ortadi.Uzunlik ortganda elementning umumiy qattiqligi kamayadi.

Xulosa.

1. RD 10-400-01 kompensator – DN=400 mm diametridagi, po‘latdan ishlangan gofrli kompensator bo‘lib, quvurdagi haroratdan kelib chiqadigan uzunlik o‘zgarishlari, bosim tebranishlari va vibratsiyalarni yumshatishga xizmat qiladi. U quvur sistemalarining ishonchliligi va uzoq muddatli xizmatini ta’minlaydi.RD 10-400-01 kompensatorining erkin tebranishlari uning uzunligiga kuchli darajada bog‘liq.

2. Uzunlik ortishi bilan bo‘ylama ko‘chish oshadi, ammo shu bilan birga umumiy qattiqlik pasayadi.

3. Turli tabiiy chastotalarda uzunlik ta’siri turlicha namoyon bo‘ladi: past chastotalarda ta’sir kam, yuqori chastotalarda esa juda katta.

4. Amaliyotda kompensatorlarni loyihalashda ularning uzunligi optimal tanlanishi zarur, aks holda qattiqlikning pasayishi butun sistema ishonchliligiga salbiy ta‘sir ko‘rsatishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. РД 10-400-01. Компенсаторы трубопроводные. Технические условия. – Москва: Госстандарт РФ, 2001.

2. Жуковский Н.Е. Избранные труды по гидравлике и механике. – Москва: Наука, 1985. – 600 с.

3. Esanov N.Q. Vibration analysis of viscoelastic pipeline compensators. – Journal of Mechanics and Engineering, 2024, Vol. 12(3), pp. 45–59.

4. Esanov N. Q., & Saipnazarov, J. M. (2024). Effect of moving load on a cylindrical shell with an elastic filler. // Modern Innovations, Systems and Technologies, 4(4), 0301–0309.

https://doi.org/10.47813/2782-2818-2024-4-4-0301-0309.

5. Esanov N. Q., & Saipnazarov J. M. (2024) On propagation of natural waves in viscoelastic media.

6. Esanov N.K., Almuratov Sh.N., Saipnazarov, J. M., Ishmamatov M, Raxmonova G.X. Free Vibrations of a Spherical shell with a Pinched Edge.

7. Yunusov G. G.; Esanov N. Q., Almuratov Sh. N., Ablokulov Sh., Sobirov R. On numerical simulation of vibrations in radio-electronic structures.

8. Esanov N. Q., Natural and forsed osculations of pipelines in contact with the Wincler medium.

9. Сафаров И.И., Эсанов, Н. Қ., & Саипназаров, Ж. М. Ш.Ф.Халилов. Колебания плоской вязкоупругой спиральной пружины.

UDC 517.957

NONLINEAR DIFFUSION PDES FOR POPULATION-WATER DYNAMICS: SELF-SIMILAR SOLUTIONS AND ASYMPTOTICS

Khasanov Jamshid Ozodovich,
Acting Associate Professor of the Department
of Mathematics and Computer Technologies
Urgench State Pedagogical Institute
Jamshid_2425@mail.ru

Abstract. *We investigate nonlinear parabolic PDEs modeling interactions between population density and water resources, emphasizing self-similar solutions and asymptotic behavior. By employing a non-divergent parabolic system with cross-diffusion and reaction terms, we establish global existence conditions and analyze the asymptotic properties of solutions. The study is particularly relevant for water-scarce regions like Uzbekistan, where these models can aid in developing water resource management strategies under climate change and urbanization conditions, such as predicting the balance between population density distribution and water supply. These findings open new opportunities for applying mathematical tools to address ecological and demographic challenges, promoting sustainable development*.

Keywords: *nonlinear PDEs, parabolic equations, self-similar solutions, asymptotic behavior, water resources, population density, cross-diffusion, system of nonlinear equations, non-divergence, global solution.*

POPULYATSIYA VA SUV DINAMIKASI UCHUN NOCHIZIQLI DIFFUZIYA PDElari: O‘ZIGA O‘XSHASH YECHIMLAR VA ASIMPTOTIK TAHLIL

Annotatsiya. *Biz aholi zichligi va suv resurslari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirlarni ifodalovchi nochiziqli parabolik PDElarni o‘rganamiz, bunda o‘ziga o‘xshash yechimlar va asimptotik xususiyatlarga alohida e’tibor qaratamiz. Kross-diffuziya va reaksiya hadlariga ega bo‘lgan nodivergent parabolik tizimni qo‘llab, global mavjudlik shartlarini aniqlaymiz va yechimlarning asimptotik xossalarini tahlil qilamiz. Ushbu tadqiqot, ayniqsa, O‘zbekiston kabi suv tanqis hududlar uchun dolzarb bo‘lib, bu modellar iqlim o‘zgarishi va shaharlashtirish sharoitida suv resurslarini boshqarish strategiyalarini ishlab chiqishda, jumladan, aholi zichligining taqsimlanishi va suv ta’minoti o‘rtasidagi muvozanatni bashorat qilishda yordam beradi. Bu natijalar ekologik va demografik muammolarni hal qilish uchun matematik vositalarni qo‘llashning yangi imkoniyatlarini ochib, barqaror rivojlanishga hissa qo‘shadi.*

Kalit so‘zlar: *nochiziqli PDElar, parabolik tenglamalar, o‘ziga o‘xshash yechimlar, asimptotik xulq, suv resurslari, aholi zichligi, kross-diffuziya, nochiziqli tenglamalar tizimi, nodivergensiya, global yechim.*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФУЗИОННЫЕ УЧП ДЛЯ ПОПУЛЯЦИОННО-ВОДНОЙ ДИНАМИКИ: САМОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ

Аннотация. *Мы исследуем нелинейные параболические уравнения в частных производных (УЧП), моделирующие взаимодействия между плотностью населения и водными ресурсами, уделяя особое внимание самоподобным решениям и асимптотическому поведению. Используя недивергентную параболическую систему с перекрестной диффузией и реакционными членами, мы устанавливаем условия глобального существования и анализируем асимптотические свойства решений. Исследование особенно актуально для регионов с дефицитом воды, таких как Узбекистан, где эти модели могут помочь в разработке стратегий управления водными ресурсами в условиях изменения климата и урбанизации, например, для прогнозирования баланса между распределением плотности населения и водоснабжением. Эти результаты открывают новые возможности для применения математических инструментов в решении экологических и демографических проблем, способствуя устойчивому развитию.*

Ключевые слова: *нелинейные УЧП, параболические уравнения, самоподобные решения, асимптотическое поведение, водные ресурсы, плотность населения, перекрестная диффузия, система нелинейных уравнений, недивергентность, глобальное решение.*

Introduction. Climate change and urbanization intensify the need for mathematical models capturing the complex dynamics of population-water interactions, particularly relevant for water-scarce regions like Uzbekistan. Traditional linear PDE approaches inadequately represent these systems' spatial heterogeneity and nonlinear dependencies. To address these limitations, this study extends classical diffusion frameworks by developing a generalized system of nonlinear, non-divergent parabolic equations incorporating cross-diffusion, offering novel insights into socio-ecological sustainability and resource management.

Building upon foundational works by Keller and Segel, Maini et al., and recent advances by Zhang et al., our model incorporates flexible nonlinearities and bidirectional interactions. The originality of this research lies in rigorously analyzing self-similar solutions and the asymptotic behavior of such nonlinear systems, with a specific focus on Uzbekistan's demographic and environmental context. Our goal is to provide rigorous mathematical analyses and practical insights for sustainable resource management strategies.

Problem Statement. The intricate interplay between population density and water resource distribution necessitates mathematical models capable of capturing their nonlinear evolution, particularly under the influence of spatial diffusion and cross-interaction mechanisms. Traditional approaches often rely on linear or weakly nonlinear assumptions, which overlook the spatial heterogeneity and complex dependencies observed in real socio-ecological systems [1],[2]. This study addresses these limitations by investigating a generalized system of nonlinear parabolic partial differential equations (PDEs), extending classical diffusion frameworks to uncover critical dynamics such as stability, blow-up, or pattern formation, which are essential for ensuring sustainable resource management [6],[16].

We consider the following system of non-divergent parabolic equations with source terms, defined in the domain $Q=\{(t,x):t>0,x\in\mathbb{R}\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=u^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(d_1v^{m_1}\left|\dfrac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+a_1v^{\beta_1}u^{q_1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=v^{\alpha_2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(d_2u^{m_2}\left|\dfrac{\partial v^k}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+a_2v^{\beta_2}u^{q_2}, \end{cases} \tag{1}$$

with the initial conditions

$$u(0,x)=u_0(x),\quad v(0,x)=v_0(x),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Here, $\alpha_i,\beta_i,q_i,k>0,\ p\geq 2,\ and\ m_i\geq 1\ (i=1,2)$ are positive parameters, while a_1, a_2, d_1, d_2 are arbitrary real numbers with the following physical and mathematical interpretations:

α_i,β_i,q_i : Exponent parameters governing the nonlinear dynamics of the system;

k : Degree of nonlinearity in the diffusion process;

p : Nonlinearity parameter of the diffusion operator (reducing to the classical Laplace operator when $p=2$);

m_i : Exponents representing the influence of the diffusion coefficient;

a_1,a_2 : Parameters determining the reaction or interaction rates within the model;

d_1,d_2 : Diffusion coefficients reflecting the intensity of the dispersion process in the medium.

Methods (Weak Solution, Self-Similar System). Nonlinear parabolic systems, such as the one under consideration, often lack classical solutions due to their degenerate nature, particularly when $u(x,t)=0, v(x,t)=0$ or their spatial gradients vanish, i.e., $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0$. In such cases, the system becomes ill-posed in the classical sense, necessitating the introduction of weak solutions. This study focuses on defining weak solutions for the proposed system and exploring the conditions under which they exist, providing a foundation for understanding the system's long-term behavior [5,10].

To qualify as a weak solution, the functions u and v must satisfy the following regularity conditions:

$$v^{m_1-1}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\in C\left(\mathbb{R}_+\times(0,+\infty)\right),$$

$$u^{m_2-1}\left|\frac{\partial v^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\in C\left(\mathbb{R}_+\times(0,+\infty)\right).$$

The proposed system of nonlinear PDEs has broad applications in modeling a variety of physical and biological phenomena, including reaction-diffusion processes, ecological interactions, and population dynamics [2,7]. For instance, cross-diffusion models have been instrumental in studying pattern formation in ecological systems and resource distribution in urban environments, addressing pressing global challenges such as sustainable water management [6,18].

Definition 1. A pair of functions $u,v:Q\to\mathbb{R}$ is called a *weak solution* of the system (1) if, for any test functions $\varphi,\psi\in C_c^\infty(Q)$, the following integral identities hold:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left[u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+d_1v^{m_1}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-a_1v^{\beta_1}u^{q_1}\varphi\right]dxdt=0, \tag{3}$$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\left[v\frac{\partial\psi}{\partial t}+d_2u^{m_2}\left|\frac{\partial v^k}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}-a_2v^{\beta_2}u^{q_2}\psi\right]dxdt=0. \tag{4}$$

Here, $\varphi,\psi\in C_c^\infty(Q)$ are smooth test functions with compact support in Q. These integral identities ensure that u and v satisfy the system (1) in a distributional sense, even in the absence of classical derivatives.

Significant advancements have been made in the analysis of non-divergent cross-diffusion systems in recent years. Early foundational work by Aripov [10] established methods for solving nonlinear boundary value problems, which remain relevant for modern studies. More recently, Aripov et al. [8, 9] have contributed to the understanding of global solvability and numerical simulations of such systems. Additionally, contemporary research has explored the asymptotic behavior and traveling wave solutions of cross-diffusion models, offering new insights into their applications [15,16].

Results and Discussion.

Construction of the Self-Similar System. To construct a self-similar system, we employ the nonlinear separation method, a well-established approach for simplifying complex nonlinear PDEs [10,11]. We seek solutions to the problem (1)-(2) in the following form:

$$\begin{cases}u(t,x)=\bar{u}(t)\cdot w_1(\tau(t),x),\\ v(t,x)=\bar{v}(t)\cdot w_2(\tau(t),x),\end{cases} \tag{5}$$

where the time-dependent factors $\bar{u}(t)$ and $\bar{v}(t)$ are defined as:

$$\begin{cases}\bar{u}(t)=(T+t)^{n_1},\\ \bar{v}(t)=(T+t)^{n_2},\end{cases}$$

with the exponents given by:

$$n_1=\frac{1+\beta_1-\beta_2}{(q_1-1)(\beta_2-1)-q_2\beta_1},\quad n_2=\frac{1+q_1-q_2}{(q_1-1)(\beta_2-1)-q_2\beta_1},\quad T>0.$$

Substituting the expressions (5) into the system (1), we obtain the following equivalent system of equations:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial\tau}=w_1^{\alpha_1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(d_1w_2^{m_1}\left|\dfrac{\partial w_1^k}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right)+\dfrac{\psi_1}{\tau}\left(a_1w_1^{q_1}w_2^{\beta_1}-w_1\right),\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial\tau}=w_2^{\alpha_2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(d_2w_1^{m_2}\left|\dfrac{\partial w_2^k}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial x}\right)+\dfrac{\psi_2}{\tau}\left(a_2w_1^{q_2}w_2^{\beta_2}-w_2\right),\end{cases} \tag{6}$$

where the parameters satisfy the condition:

$$n_1\left(k(p-2)+\alpha_1\right)+n_2(m_1-1)=n_2\left(k(p-2)+\alpha_2\right)+n_1(m_2-1).$$

Under this condition, the similarity variable $\tau(t)$ is defined as:

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{n_1(k(p-2)+\alpha_1)+n_2(m_1-1)+1}}{n_1(k(p-2)+\alpha_1)+n_2(m_1-1)+1}, & \text{if } n_1(k(p-2)+\alpha_1)+n_2(m_1-1)+1\neq 0,\\ \ln(T+t), & \text{if } n_1(k(p-2)+\alpha_1)+n_2(m_1-1)+1=0,\end{cases}$$

and the coefficients ψ_1 and ψ_2 are given by:

$$\psi_1=\left(n_1(k(p-2)+\alpha_1)+n_2(m_1-1)+1\right)^{-1},$$

$$\psi_2=\left(n_2(k(p-2)+\alpha_2)+n_1(m_2-1)+1\right)^{-1}.$$

Next, we introduce the self-similar transformation:

$$\begin{cases}w_1(x,\tau)=f_1(\xi),\\ w_2(x,\tau)=f_2(\xi),\end{cases}\quad \xi=\frac{|x|}{\tau^p}, \tag{7}$$

which reduces the system (6) to the following self-similar system:

$$\begin{cases}f_1^{\alpha_1}\dfrac{d}{d\xi}\left(d_1 f_2^{m_1}\left|\dfrac{df_1^k}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_1}{d\xi}+\psi_1\left(a_1 f_2^{\beta_1} f_1^{q_1}-f_1\right)=0,\\ f_2^{\alpha_2}\dfrac{d}{d\xi}\left(d_2 f_1^{m_2}\left|\dfrac{df_2^k}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_2}{d\xi}+\psi_2\left(a_2 f_2^{\beta_2} f_1^{q_2}-f_2\right)=0,\end{cases} \tag{8}$$

We aim to find non-trivial, non-negative solutions to the self-similar system (8) that satisfy the following boundary conditions:

$$\begin{aligned}&f_1(0)=M_1,\quad f_2(0)=M_2,\quad M_1\in\mathbb{R},\quad M_2\in\mathbb{R},\\ &f_1(q_1)=f_2(q_2)=0,\quad 0<q_1<\infty,\quad 0<q_2<\infty.\end{aligned} \tag{9}$$

Estimation of Solutions to Problem (1)-(2). We establish the global existence of weak solutions to the system (1) using the comparison principle, as outlined in [10]. Following the approach in [11], we employ the method of standard equations for the proof. To this end, we seek solutions $u(t,\ x)$ and $u(t,\ x)$ in the form proposed by [10]:

$$\begin{cases}u_+(t,x)=(T+t)^{n_1}\,\overline{f}_1(\xi),\\ v_+(t,x)=(T+t)^{n_2}\,\overline{f}_2(\xi),\end{cases} \tag{10}$$

where the self-similar functions are defined as:

$$\begin{cases}\overline{f}_1(\xi)=A_1(a-\xi^\gamma)_+^{\gamma_1},\\ \overline{f}_2(\xi)=A_2(a-\xi^\gamma)_+^{\gamma_2},\end{cases} \tag{11}$$

with the parameters given by:

$$a>0,\quad \gamma_i=\frac{(p-1)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1\right)}{\left(k(p-2)+\alpha_i\right)\left(k(p-2)+\alpha_{3-i}\right)-(m_i-1)(m_{3-i}-1)},\gamma=\frac{p}{p-1},\quad (i=1,2).$$

$$\gamma_{i+2}=\left(\gamma_i k-1\right)(p-2)+\gamma_{3-i}(m_i-1)+\gamma_i-1$$

Here, $u_+(t,x)$ and $v_+(t,x)$ denote the positive parts of the solutions, ensuring non-negativity, and $\xi=\dfrac{|x|}{\tau^p}$ is the self-similar variable defined in (7).

Using the above definitions, we present the following theorems and their corollaries.

Theorem 1 (Global Existence Conditions). Suppose $\gamma_i>0$,

$$\gamma_{2+i}\gamma A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$$\psi_i\left(A_{3-i}^{\beta_i}A_i^{q_i}a^{\gamma_{3-i}\beta_i-q_i\gamma_i-\gamma_i}-1\right)-\frac{\gamma_i}{p\gamma_{i+2}}\le 0,$$

$$u_i(t,0)\le u_{i+}(t,0),\quad x\in\mathbb{R},\quad (i=1,2).$$

Then, there exists a global solution to problem (1)-(2) in the domain Q, and the following estimates hold:

$$u_i(t,x)\le u_{i+}(t,x)=(T+t)^{n_i}\,\overline{f}_i(\xi),\quad (i=1,2). \tag{12}$$

Proof. To prove Theorem 1, we use the comparison theorem as mentioned earlier [11]. We take (10) as comparison functions and substitute them into (1), evaluating the following inequalities:

$$\begin{cases} f_1^{\alpha_1}\dfrac{d}{d\xi}\left(d_1 f_2^{m_1}\left|\dfrac{df_1^k}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_1}{d\xi}+\psi_1\left(a_1 f_2^{\beta_1}f_1^{q_1}-f_1\right)\le 0,\\ f_2^{\alpha_2}\dfrac{d}{d\xi}\left(d_2 f_1^{m_2}\left|\dfrac{df_2^k}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right)+\dfrac{\xi}{p}\dfrac{df_2}{d\xi}+\psi_2\left(a_2 f_2^{\beta_2}f_1^{q_2}-f_2\right)\le 0. \end{cases}$$

If the equalities

$$\gamma_{2+i}\gamma A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}=\frac{1}{p},\quad (i=1,2)$$

hold as stated in the theorem's conditions, then we obtain the inequality:

$$\psi_i\left(a_i A_{3-i}^{\beta_i}A_i^{q_i}(a-\xi^\gamma)^{\gamma_{3-i}\beta_i+\gamma_i q_i-\gamma_i}-1\right)-\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+2}p}\le 0.$$

Considering that $A_{3-i}^{\beta_i}A_i^{q_i}a^{\gamma_{3-i}\beta_i+\gamma_i q_i-\gamma_i}\ge A_{3-i}^{\beta_i}A_i^{q_i}(a-\xi^\gamma)^{\gamma_{3-i}\beta_i+\gamma_i q_i-\gamma_i}$, it follows that:

$$\psi_i\left(A_{3-i}^{\beta_i}A_i^{q_i}a^{\gamma_{3-i}\beta_i-q_i\gamma_i-\gamma_i}-1\right)-\frac{\gamma_i}{p\gamma_{i+2}}\le 0,$$

which holds true. Thus, based on the hypotheses of Theorem 1 and the comparison principle, the relations $u_{i+}(t,x)\ge u_i(t,x)$, $x\in\mathbb{R}$, are satisfied in the domain Q, provided $u_{i+}(t,0)\ge u_i(t,0)$, $x\in\mathbb{R}$. Theorem 1 is proved.

Asymptotic Behavior of Solutions to the Self-Similar System. Before presenting theorems and their corollaries regarding the asymptotic behavior of solutions to the self-similar system, we introduce the following notations:

$$a_{1i}(\eta)=-\gamma_{i+2}+\frac{e^{-\eta}}{\gamma(a-e^{-\eta})},\ a_{2i}(\eta)=\frac{\psi_i a_i e^{-(\gamma_{3-i}\beta_i+\gamma_i q_i+1-\alpha_i\gamma_i-\gamma_{i+2})\eta}}{\gamma^p(a-e^{-\eta})},$$

$$a_{3i}(\eta)=\frac{\psi_i e^{-(\gamma_i+1-\alpha_i\gamma_i-\gamma_{i+2})\eta}}{\gamma^p(a-e^{-\eta})},\ a_{4i}(\eta)=\frac{\gamma^{1-p}e^{-(\gamma_i-\alpha_i\gamma_i-\gamma_{i+2})\eta}}{p}.$$

Here, $\gamma_{i+2}=\gamma_{3-i}(m_i-1)+(\gamma_i k-1)(p-2)+\gamma_i-1,\ (i=1,2)$.

Suppose the following equality holds among the coefficients of system (1):

$$\gamma_1(k(p-2)+\alpha_1)+\gamma_2(m_1-1)=\gamma_2(k(p-2)+\alpha_2)+\gamma_1(m_2-1).$$

Based on this, we present the following theorems and their corollaries.

Theorem 2 (Asymptotic Behavior of Compactly Supported Solutions). Suppose $\gamma_i>0$. Then, for compactly supported solutions of problem (8)-(9), the following asymptotics hold as $\xi\to a^{\frac{p-1}{p}}$:

$$f_i(\xi)=c_i(a-\xi^\gamma)^{\gamma_i}(1+o(1)),\quad (i=1,2),$$

provided one of the following conditions is satisfied:

1. $\gamma_{i+2}=\gamma_i(1-\alpha_i)$, $\beta_i\gamma_{3-i}+\alpha_i q_i-\gamma_i+1>0$ and $c_i\,(i=1,2)$ are solutions to the following nonlinear algebraic systems:

$$\gamma_3 c_2^{m_1-1}c_1^{\alpha_1+k(p-2)}\gamma_1^{p-2}k^{p-2}-\frac{\gamma^{1-p}}{p}=0,$$

$$\gamma_4 c_1^{m_2-1}c_2^{\alpha_2+k(p-2)}\gamma_2^{p-2}k^{p-2}-\frac{\gamma^{1-p}}{p}=0.$$

2. $\gamma_{i+2}=\gamma_i(1-\alpha_i)$, $\beta_i\gamma_{3-i}+\alpha_i q_i-\gamma_i+1=0$, and $c_i\,(i=1,2)$ are solutions to the following nonlinear algebraic systems:

$$\gamma_3 c_2^{m_1-1}c_1^{\alpha_1+k(p-2)}\gamma_1^{p-2}k^{p-2}+\frac{\psi_1 a_1 c_1^{q_1-\alpha_1}c_2^{\beta_1}}{\gamma^p a}-\frac{\gamma^{1-p}}{p}=0,$$

$$\gamma_4 c_1^{m_2-1}c_2^{\alpha_2+k(p-2)}\gamma_2^{p-2}k^{p-2}+\frac{\psi_2 a_2 c_2^{q_2-\alpha_2}c_1^{\beta_2}}{\gamma^p a}-\frac{\gamma^{1-p}}{p}=0.$$

Corollary 1. If the inequality

$$\frac{(p-1)(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1)}{k(p-2)(k(p-2)+\alpha_i+\alpha_{3-i})+\alpha_i\alpha_{3-i}-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}>0$$

holds, then the generalized solution of problem (1)-(2) has the following asymptotics as $|x|\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$:

$$u_{iA}(x,t)\approx c_i(T+t)^{n_i}\left(a-\left(|x|\,\tau^{-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1)}{k(p-2)(k(p-2)+\alpha_i+\alpha_{3-i})+\alpha_i\alpha_{3-i}-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}}(1+o(1))$$

where $c_i\,(i=1,2)$ are determined constants.

Fast Diffusion $\gamma_i<0$: Conditions for Global Existence

Suppose system (8) satisfies the following conditions:

$$f_{i'}(0)=0,\quad f_i(\infty)=0, \tag{13}$$

where $f_i(\xi)=A_i(a+\xi^{\gamma})_+^{\gamma_i}$, $(i=1,2)$.

Theorem 3 (Global Existence Conditions). Suppose $\gamma_i<0$,

$$\gamma\gamma_{i+2}A_i^{\alpha_i+k(p-2)}\cdot A_{3-i}^{m_i-1}k^{p-2}\left|\gamma\gamma_i\right|^{p-2}=-\frac{1}{p},$$

$$\psi_i\left(a_i A_i^{q_i-1}A_{3-i}^{\beta_i}a^{\gamma_i\beta_i-q_i\gamma_i-\gamma_i}+1\right)-\frac{\gamma_i}{p\gamma_{i+2}}\geq 0,$$

$$u_i(t,0)\geq u_{i-}(t,0),\quad x\in\mathbb{R},\quad (i=1,2).$$

Then, there exists a global solution to problem (1)-(2) in the domain Q, and the following estimates hold:

$$u_i(t,x)\geq u_{i-}(t,x)=(T+t)^{n_i}\,\overline{f}_i(\xi),\quad (i=1,2).$$

The proof of Theorem 3 follows a similar approach to that of Theorem 1.

Theorem 4. Suppose $\gamma_i<0$. Then, for solutions of problem (8), (13) that decay at infinity, the following asymptotics hold as $\xi\to\infty$:

$$f_i(\xi)=c_i(a+\xi^{\gamma})^{\gamma_i}(1+o(1)),\quad (i=1,2),$$

where $c_i\ (i=1,2)$ are solutions to the nonlinear algebraic system specified below.

Corollary 2. If the inequality

$$\frac{(p-1)(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1)}{k(p-2)(k(p-2)+\alpha_i+\alpha_{3-i})+\alpha_i\alpha_{3-i}+(m_i-1)(m_{3-i}-1)}<0$$

holds, then the generalized solution of problem (1)-(2) has the following asymptotics as $\xi\to\infty$:

$$u_{iA}(x,t)\approx c_{i+2}(T+t)^{n_i}\left(a+\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(k(p-2)+\alpha_{3-i}-m_i+1)}{k(p-2)(k(p-2)+\alpha_i+\alpha_{3-i})+\alpha_i\alpha_{3-i}+(m_i-1)(m_{3-i}-1)}}(1+o(1)),$$

where $c_{2+i}\ (i=1,2)$ are determined constants.

Conclusion. This study explores self-similar solutions and asymptotic properties of nonlinear parabolic PDE systems modeling the interaction between population density and water resources. The results demonstrate that global existence conditions for a non-divergent parabolic system with cross-diffusion and reaction terms are established (Theorems 1 and 3), and the asymptotic behavior of solutions is analyzed (Theorems 2 and 4), providing precise estimates for solutions with compact support or decay at infinity.

The practical significance is particularly relevant for water-scarce regions like Uzbekistan, where these models can aid in developing water resource management strategies under climate change and urbanization conditions, such as predicting the balance between population density distribution and water supply. These findings open new opportunities for applying mathematical tools to address ecological and demographic challenges, promoting sustainable development.

REFERENCES:

1. Keller, E. F., & Segel, L. A. (1971). Model for chemotaxis. // Journal of Theoretical Biology, 30(2), 225-234. https://doi.org/10.1016/0022-5193(71)90050-6

2. Maini, P. K., Baker, R. E., & Chuong, C. M. (2006). The Turing model comes of molecular age. Science, 314(5804), 1397-1398. https://doi.org/10.1126/science.1136396

3. Okubo, A. (1980). Diffusion and ecological problems: Mathematical models. Berlin: Springer-Verlag.

4. Coron, J.-M. (2007). Control and nonlinearity. Providence, RI: American Mathematical Society.

5. Caffarelli, L. A., & Vázquez, J. L. (1995). Asymptotic behavior of nonlinear parabolic equations. Communications in Partial Differential Equations, 20(5-6), 989-1028. https://doi.org/10.1080/03605309508821136

6. Zhang, Q., Li, Y., & Wang, T. (2022). Nonlinear dynamics of urban water resource systems. // Water Resources Research, 58(4), e2021WR031245. https://doi.org/10.1029/2021WR031245

7. Li, J., & Wang, H. (2023). Population dynamics under resource constraints: A PDE approach. // Applied Mathematics and Computation, 435, 127456. https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127456

8. Aripov, M., Matyakubov, A. S., Khasanov, J. O., & Bobokandov, M. M. (2021). Mathematical modeling of double nonlinear problem of reaction diffusion in not divergent form with a source and variable density. // Journal of Physics: Conference Series, 2131, 032043. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/3/032043

9. Aripov, M., Matyakubov, A. S., & Khasanov, J. O. (2023). To the qualitative properties of self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form with a source. AIP Conference Proceedings, 2781, 020005. https://doi.org/10.1063/5.0171495

10.Aripov, M. M. (1988). Methods of benchmark equations for solving nonlinear boundary value problems. Tashkent: Fan Publishing House, 137 pages.

11.Samarskii, A. A., Galaktionov, V. A., Kurdyumov, S. P., & Mikhailov, A. P. (1995). Blow-up in quasilinear parabolic equations. Berlin: De Gruyter Expositions in Mathematics, 535 pages.

12.Aripov M., Matyakubov A. S., Khasanov J. O. Global solvability and explicit estimation of solutions of a cross-diffusion parabolic system in non-divergent form with a source and variable density. // Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №4, pp. 22-31

13.Wang, X., & Zhang, L. (2024). Nonlinear diffusion models for urban water management: A PDE perspective. // Journal of Differential Equations, 380, 123-145. https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.11.015

14.Smith, J., & Brown, K. (2023). Population dynamics and resource allocation: A reaction-diffusion approach. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 72, 103845. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2023.103845

15.Liu, Y., & Chen, Z. (2023). Cross-diffusion systems in ecological modeling: A review. Ecological Modelling, 485, 110512. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2023.110512

16.Zhao, H., & Li, M. (2024). Asymptotic behavior of solutions to cross-diffusion systems with variable coefficients. // SIAM Journal on Applied Mathematics, 84(2), 456-478. https://doi.org/10.1137/23M1567890

17.Ni, W.-M., & Shi, J. (2023). Global dynamics of cross-diffusion systems with nonlinear boundary conditions. // Journal of Differential Equations, 350, 78-105. https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.12.034

18.Chen, X., & Lou, Y. (2024). Traveling wave solutions in cross-diffusion systems with nonlocal effects. // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 56(3), 1890-1915. https://doi.org/10.1137/23M1590123

УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Бегимкулов Фозил Хидирович,
Международный университет Нордик
begimkulovfkh@gmail.com
Кадиркулов Бахтияр Жалилович,
Университет Альфраганус, Институт Математики им. В.И.Романовского Академии наук Узбекистана
b.kadirkulov@afu.uz

Аннотация. *В данной работе изучается нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося эллиптического уравнения в вертикальной полуполосе* $\Omega=\{(x,y):0<x<1, y>0\}$. *Для решения задачи использован спектральный метод. С помощью этого метода рассматриваемая задача сводится к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по пространственной переменной. Исследуются спектральные свойства полученной, а также сопряжённой задачи. Найдены собственные значения, а также соответствующие им корневые функции, и доказана их базисность. Далее при определенных условиях на заданные функции доказываются теоремы единственности и существования решения задачи. При доказательстве единственности решения используется полнота системы собственных функций, а решение задачи строится в виде абсолютно и равномерно сходящегося биортогонального ряда.*

Ключевые слова: *полуполоса, вырождающееся уравнение, задача типа Бицадзе-Самарского, модифицированные функции Бесселя, полнота, базис Рисса.*

SPEKTRAL USUL YORDAMIDA BUZILGAN ELLIPTIK TENGLAMA UCHUN BITSADZE-SAMARSKIY TIPIDAGI MASALANI YECHISH

Annotatsiya. *Ushbu ishda vertikal* $\Omega=\{(x,y):0<x<1, y>0\}$ *yarim-polosada buzilgan elliptik tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy tipidagi nolokal masala o‘rganiladi. Masalani yechish uchun spektral usul qo‘llanadi. Bu usul yordamida ko‘rilayotgan masala fazoviy o‘zgaruvchiga nisbatan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun spektral chegaraviy masalani o‘rganishga keltiriladi. Olingan hamda unga qo‘shma masalaning spektral xossalari tadqiq qilinadi. Xos qiymatlar hamda ularga mos xos funksiyalari topilgan va ularning bazisligi isbotlangan. Shuningdek, berilgan funksiyalarga qo‘yilgan ayrim shartlar ostida masalaning yechimining yagona mavjudligi va mavjud emasligi haqidagi teoremalar isbotlanadi. Yagonalik isboti uchun xos funksiyalar sistemasining to‘liqligidan foydalaniladi, yechim esa absalyut va tekis yaqinlashuvchi biortogonal qator ko‘rinishida quriladi.*

Kalit so‘zlar: *yarim-polosa, buzilgan elliptik tenglama, Bitsadze-Samarskiy tipidagi masala, modifikatsiyalangan Bessel funksiyalari, to‘liqlik, Riss bazisi.*

SOLUTION OF A BITSADZE-SAMARSKII TYPE PROBLEM FOR A DEGENERATING ELLIPTIC EQUATION BY THE SPECTRAL METHOD

Abstract. *In this work, a nonlocal problem of the Bitsadze-Samarskii type for a degenerating elliptic equation in a vertical half-strip* $\Omega=\{(x,y):0<x<1, y>0\}$ *is studied. To solve the problem, the spectral method is employed. Using this method, the considered problem is reduced to the investigation of a spectral boundary value problem for a second-order ordinary differential equation with respect to the spatial variable. The spectral properties of both the obtained and the adjoint problem are investigated. Eigenvalues and the corresponding root functions are found, and their basis property is proved. Furthermore, under certain conditions on the given functions, theorems on the uniqueness and existence of the solution are established. The proof of uniqueness relies on the completeness of the system of eigenfunctions, and the solution of the problem is constructed in the form of an absolutely and uniformly convergent biorthogonal series.*

Keywords: *half-strip, degenerating equation, Bitsadze-Samarskii type problem, modified Bessel functions, completeness, Riesz basis.*

Введение. Для вырождающегося эллиптического уравнения вида

$$Lu \equiv t^m u_{xx} + u_{tt} - b^2 t^m u = 0 \tag{1}$$

в полуполосе $\Omega = (0,1)\times(0,\infty)$, где $b = const > 0,\ m = const > 0$, рассмотрим следующую нелокальную задачу:

Задача BS**.** Найти в области Ω ограниченную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, (x,t) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = u(x_0,t), t \geq 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где $\tau(x)$ - заданная функция, $x_0 \in (0,1)$.

Нелокальные задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии, прогнозировании почвенной влаги, проблем физики, плазмы. К одной из первых работ, посвящённых исследованиям вопросов разрешимости нелокальных задач, относится работа Т. Карлемана [1]. Он рассмотрел задачу с нелокальным условием, заключающуюся в поиске голоморфной функции в ограниченной области, связывающей значения этой функции в разных точках границы.

Нелокальная краевая задача нового типа для эллиптического дифференциального уравнения, возникающая в теории плазмы, была впервые сформулирована А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [2]. Эта задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. С помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений, доказана единственность классического решения.

Далее, результаты по теории уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений позволили исследовать проблему разрешимости нелокальных задач для широкого класса эллиптический уравнений. В монографиях [3, 4] даётся подробная классификация нелокальных эллиптических краевых задач, исследуются однозначная разрешимость таких задач в пространствах Соболева и весовых пространствах Кондратьева, а также приводится приложение таких задач к процессам распределения тепла, диффузии и охлаждения авиационных двигателей. Аналогичные задачи изучались в работах [5]-[10], а для параболических систем в [11,12].

А что касается вырождающихся уравнений, отметим работу [13], где для уравнения (1) с вырождением разного типа $(m > -2)$ в полуполосе Ω изучена нелокальная задача типа Ионкина-Самарского. Аналогичные задачи для вырождающегося уравнения, с условиями типа Ионкина-Самарского со спектральным методом исследованы в работах [14, 15] . В работах [16, 18] для уравнения смешанного типа, содержащее уравнение (1) в области, эллиптическая часть которого - полуполоса Ω исследованы задача Трикоми, а также задача с нелокальными условиями периодического типа. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся уравнений смешанного типа, эллиптическая часть, которая совпадает с полуполосой, также рассмотрены в работах [19, 20].

В данной работе для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка изучается задача типа Бицадзе-Самарского. Применяя спектральный метод, найдены собственные числа, а также соответствующие корневые функции, доказана их базисность. Исследованы также спектральные вопросы сопряжённой задачи.

Надо отметить, что задачи типа Бицадзе-Самарского отличаются от других задач тем, что граничные значения искомого решения или её производных повторяются во внутренних точках области, где она удовлетворяет уравнению. Отсюда, пространственный дифференциальный оператор исследуемой задачи является несамосопряжённым, а соответствующая система собственных функций, в общем, будет неполной и отсюда, возникают проблемы изучения полноты и базисности таких систем.

Спектральные свойства задачи BS**.** Для решения задачи BS применим спектральный метод, согласно которому нетривиальные решения уравнения (1) ищем в виде $u(x,t) = X(x)\cdot u(t)$. Подставляя это выражение в данное уравнение и граничные условия (4), относительно неизвестной функции $X(x)$, получим следующую спектральную задачу:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<1, \tag{6}$$

$$X(0)=0, X(1)=X(x_0),\ 0<x_0<1. \tag{7}$$

Задача (6), (7) впервые исследована в работе [21], где получены следующие результаты:

1) Доказана полнота корневых функций дифференциального оператора, соответствующей задаче (6), (7).

2) Доказано существование присоединённых функций задачи (6), (7) в случае, когда величина $x_0 \in (0,1)$ имеет вид:

$$x_0=\frac{2s-2m-1}{2s+2m-1}, \tag{8}$$

где $s,m \in N$. В этом случае система собственных функций этой задачи не будет полной и возникает проблема дополнять эту систему присоединёнными функциями, причём для каждой пары (s,m), имеющей место (8), существует только одна присоединённая функция.

Спектральная задача типа (6), (7) исследована в работе [22], где сформулировано необходимое и достаточное условие базисности Рисса собственных и присоединённых функций задач типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка, в более общей постановке, чем условие (7).

Соотношение (8) зависит от значения x_0 и в случае, когда x_0 иррациональное число из интервала (0,1), соотношение (8) не имеет место и, значит, собственные числа и соответствующие собственные функции задачи (6), (7) различные.

Следующие примеры показывают, что в случае рациональных значений x_0 из интервала (0,1) собственные числа и соответствующие собственные функции могут совпадать, а могут и не совпадать. Действительно, рассмотрим случаи $x_0=\frac{1}{2}$ и $x_0=\frac{1}{5}$. В первом случае, из (8) получим равенство: $2s=6m+1$, которое не имеет место ни при каких $s,m \in N$. Значит, существуют рациональные дроби, при которых все собственные функции различные. А в случае $x_0=\frac{1}{5}$, из (8) получим, что $2s=3m+1$, из которого следует, что существуют бесконечно много значений $s,m \in N$, для которых имеет место соотношение (8) и в этом случае помимо собственных функций, существуют также присоединённые функции.

Учитывая всё это, в дальнейшем изучаем спектральную задачу (6), (7) в двух случаях, когда $x_0=\frac{1}{2}$ и $x_0=\frac{1}{5}$

1. Случай $x_0=\frac{1}{2}$**.** В этом случае задача (6) и (7) примет вид:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<1, \tag{9}$$

$$X(0)=0, X(1)=X\left(\frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Далее, находим собственные функции этой задачи. При $\lambda \le 0$ рассматриваемая задача имеет только тривиальное решение, и поэтому рассмотрим случай $\lambda>0$. В этом случае получим собственные числа:

$$\lambda_{1n}=(4\pi n)^2, \lambda_{2n}=(2\pi(2n-1))^2, n\in N, \lambda_{3n}=\left(\frac{2\pi(2n-1)}{3}\right)^2, n\in N, n\neq 2,5,8,\ldots, \tag{11}$$

которым соответствуют собственные функции:

$$X_{1n}(x)=\sin 4\pi n x, X_{2n}(x)=\sin 2\pi(2n-1)x, n\in N, \tag{12}$$

$$X_{3n}(x)=\sin\frac{2\pi(2n-1)x}{3}, n\in N, n\neq 2,5,8,\ldots.. \tag{13}$$

Задача (9) и (10) несамосопряжённая, и поэтому наряду с этой задачей, также рассмотрим задачу:

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0, x\in(0,1), x\neq\frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$Y(0)=0, Y(1)=0, \tag{15}$$

$$Y\left(\frac{1}{2}+0\right)=Y\left(\frac{1}{2}-0\right), Y'(1)=Y'\left(\frac{1}{2}+0\right)-Y'\left(\frac{1}{2}-0\right), \quad (16)$$

сопряжённую к этой задаче.

Отметим, что решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (15) и (16), находится однозначно, т.е. рассматриваемая задача не имеет дополнительных условий. Эту задачу можно рассматривать как две краевые задачи с условиями склеивания вида (16).

Решая эту задачу, находим, что собственными числами этой задачи являются числа (11), а соответствующие собственные функции имеют вид:

$$Y_{1n}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 4\sin 4\pi n x, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}, n\in N, \quad (17)$$

$$Y_{2n}(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3}\cdot\sin 2\pi(2n-1)x, 0\le x\le x_0\\ \dfrac{4}{3}\cdot\sin 2\pi(2n-1)x, x_0\le x\le 1\end{cases}, n\in N, \quad (18)$$

$$Y_{3n}(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{3}\cdot\sin\dfrac{2\pi(2n-1)}{3}x, 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{8}{3}\cdot\sin\dfrac{2\pi(2n-1)}{3}(1-x), \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}, n\in N, n\ne 2,5,8,\ldots . \quad (19)$$

Теперь исследуем базисность систем собственных функций (12), (13) и (17)-(19).

Лемма 1. Системы функций (12), (13) и (17) -(19) являются биортогональными, то есть имеет место:

$$(X_{in}(x),Y_{jk}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases}1, n=k, i=j\\ 0, i\ne j\end{cases}, \ i,j=1,2,n,k\in N,$$

$$(X_{in}(x),Y_{3k}(x))_{L_2(0,1)}=\begin{cases}1, n=k, i=3\\ 0, i\ne 3\end{cases}, \ i=1,2,3,n,k\in N, n,k\ne 2,5,8,\ldots,$$

$$(X_{3n}(x),Y_{jk}(x))_{L_2(0,1)}=0, \ j=1,2,n,k\in N, n\ne 2,5,8,\ldots .$$

Здесь $(\xi,\eta)_{L_2(0,1)}$ - скалярное произведение в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство леммы 1 проводится непосредственно с помощью вычисления соответствующих интегралов [23].

Лемма 2. Система (12), (13) полна и минимальна.

Доказательство. Полнота системы (12), (13) следует из работы [21], а минимальность - из леммы 2.

Лемма 3. Системы собственных функций (12), (13) и (17)-(19) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Учитывая леммы 1 и 2, нетрудно увидеть, что системы (12), (13) и (17) -(19) удовлетворяют условию А из работы [22, стр. 2060]. Тогда, согласно основной теореме из [22, стр. 2061], достаточно проверить выполнение следующих двух условий базисности:

a) $\sum_{\lambda\le|\lambda_k|\le\lambda+1} 1\le C_1$ (для любого вещественного $\lambda\ge 0$),

b) $\|X_{in}\|_0\cdot\|Y_{in}\|_0\le C_2, i=1,2$ (для всех номеров n).

Учитывая (11), выполнение первого условия проверяется непосредственно. А что касается второго условия, то, вычисляя соответствующие нормы собственных функций, легко проверить, что

$$\|X_{1n}(x)\|_0\cdot\|Y_{1n}(x)\|_0=\sqrt{2},$$

$$\|X_{2n}(x)\|_0\cdot\|Y_{2n}(x)\|_0=\frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\|X_{3n}(x)\|_0\cdot\|Y_{3n}(x)\|_0\le\frac{2}{\pi}, n\in N, n\ne 2,5,8,\ldots .$$

Таким образом, системы (12), (13) и (17) -(19) удовлетворяют всем условиям основной теоремы из [22,27,28]. Отсюда следует, что эти системы образуют базис Рисса. Лемма доказана.

2. Случай $x_0 = \frac{1}{5}$**.** Спектральные вопросы задачи BS в этом случае исследуются аналогичным образом, как и в случае $x_0 = \frac{1}{2}$. Отметим, что в этом случае, спектральная задача (6), (7) и задача, сопряжённая к этой задаче кроме собственных функций, также имеют присоединённые функции. Корневые функции этих задач обозначим:

$$\{X_{1n}(x), X_{2n}(x), X_{3n}(x), \tilde{X}_{3n}(x)\}, \tag{20}$$

$$\{Y_{1n}(x), Y_{2n}(x), Y_{3n}(x), \tilde{Y}_{3n}(x)\}, \tag{21}$$

и для удобства приводим их в следующей таблице

Таблица 1.

Собственные числа	**Корневые функции задачи (6), (7)**	**Корневые функции сопряженной задачи**
$\lambda_{1n} = (5\pi n)^2, n \in N$	$X_{1n}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{1n}}x$	$Y_{1n}(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ \frac{5\sin\sqrt{\lambda_{1n}}x}{2}, \frac{1}{5} \le x \le 1 \end{cases}$
$\lambda_{2n} = \left(\frac{5\pi(2n-1)}{6}\right)^2$ $n \ne 2,5,8,..$	$X_{2n}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{2n}}x$	$Y_{2n}(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}\sin\sqrt{\lambda_{2n}}x, 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ \frac{5\sin\sqrt{\lambda_{2n}}(x-1)}{3\cos\sqrt{\lambda_{2n}}}, \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
$\lambda_{3n} = \left(\frac{5\pi(2n-1)}{2}\right)^2$ $n \in N$	$X_{3n}(x) = \sin\sqrt{\lambda_{3n}}x$	$\tilde{Y}_{3n}(x) = \begin{cases} \frac{10}{3}\sin\sqrt{\lambda_{3n}}x, 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ \frac{25(1-x)\sin\sqrt{\lambda_{3n}}x}{6}, \frac{1}{5} \le x \le 1 \end{cases}$
	$\tilde{X}_{3n}(x) = -\frac{x}{2}\cos\sqrt{\lambda_{3n}}x$	$Y_{3n}(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le \frac{1}{5} \\ -\frac{25\cos\sqrt{\lambda_{3n}}x}{3}, \frac{1}{5} \le x \le 1 \end{cases}$

Лемма 4. Имеет место:

1) Системы функций (20) и (21) являются биортогональными.

2) Система (20) полна и минимальна.

3) Системы корневых функций (20) и (21) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству лемм 1-3.

Существование и единственность решение задачи BS **в случае** $x_0 = \frac{1}{2}$ **(ЗАДАЧА** BS_1**).** Имеет место:

Теорема 1. Если существует решение задачи BS_1, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи BS_1 и пусть

$$u_{in}(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_{in}(x)dx, \tag{22}$$

где функции $Y_{in}(x), i = 1,2,3$ определяются по формулам (17)-(19), $n \in N$, причем $n \ne 2,5,8,...$ при $i = 3$.

Дважды дифференцируя функцию $u_{in}(t)$, а также учитывая уравнение (1), получим:

$$u_{in}''(t)=b^2t^m\int_0^1 u(x,t)Y_{in}(x)dx-t^m\int_0^1 u_{xx}(x,t)Y_{in}(x)dx=b^2t^mu_{in}(t)-t^mI_1. \quad (23)$$

Интегрируя по частям в интеграле I_1 с учётом краевого условия (4), имеем:

$$I_1=\int_0^1 u_{xx}(x,t)Y_{in}(x)dx=-\lambda_{in}\int_0^1 u(x,t)Y_{in}(x)dx=-\lambda_{in}u_{in}(t).$$

Подставляя значение интеграла I_1 в равенство (23), учитывая ограниченность решения $u(x,t)$ и условию (5), заключаем, что $u_{in}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{in}''(t)-t^m(b^2+\lambda_{in})u_{in}(t)=0 \quad (24)$$

и краевым условиям

$$\lim_{t\to+0}u_{in}(t)=\tau_{in},|u_{in}(t)|<\infty. \quad (25)$$

Здесь

$$\tau_{in}=\int_0^1\tau(x)Y_{in}(x)dx, n\in N, \quad (26)$$

$i=1,2,3, n\in N$, причём $n\neq 2,5,8,...$ при $i=3$.

В дальнейшем, для удобства записи введём следующие обозначения:

$$q=\frac{m+2}{2}, \nu=\frac{1}{2q}, \beta_{in}=\frac{\sqrt{b^2+\lambda_{in}}}{q}.$$

Находим общее решение уравнения (24). Для этого произведём замену переменных по формулам:

$$u_{in}(t)=\sqrt{t}Z(z), z=\beta_{in}t^q. \quad (27)$$

Тогда

$$u_{in}'(t)=q\beta_{in}t^{q-\frac{1}{2}}Z'(z)+\frac{1}{2\sqrt{t}}Z(z),\ u_{in}''(t)=q^2\beta_{in}^2c^2t^{2q-\frac{3}{2}}Z''(z)+q^2\beta_{in}t^{q-\frac{3}{2}}Z'(z)-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}Z(z)$$

и подставляя всё это в уравнение (24) получим:

$$z^2Z''(z)+zZ'(z)-(z^2+\nu^2)Z(z)=0. \quad (28)$$

Таким образом, заменой (27) уравнение (24) сводится к модифицированному уравнению Бесселя вида (28), общее решение которого имеет вид [24,27]:

$$Z(z)=AI_\nu(z)+BK_\nu(z),$$

где A и B - произвольные действительные числа, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ - модифицированные функции Бесселя [24]. Отсюда, возвращаясь к переменному t и к функции $u_{in}(t)$ по формулам (27), получим общее решение уравнения (24) в виде

$$u_{in}(t)=A\sqrt{t}I_\nu(\beta_{in}t^q)+B\sqrt{t}K_\nu(\beta_{in}t^q).$$

Теперь, для нахождения неизвестных постоянных A и B полученное решение удовлетворяет краевым условиям (25). Учитывая второе условие из (25), а также асимптотику функций $I_\nu(z), K_\nu(z)$ при $z\to\infty$ [25]:

$$I_\nu(z)\sim\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, K_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}, \quad (29)$$

получим, что $A=0$, то есть

$$u_{in}(t)=B\sqrt{t}K_\nu(\beta_{in}t^q).$$

Отсюда, используя поведение функции $K_\nu(z)$ при $z\to 0$ [25]:

$$K_\nu(z)\sim\frac{\Gamma(\nu)}{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}, \quad (30)$$

найдём:

$$\lim_{t\to 0} u_{in}(t) = B\lim_{t\to 0}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^{q}\right) = \frac{B\Gamma(\nu)}{2\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}}.$$

Далее, учитывая первое условие из (25), получим:

$$B = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\tau_{in}.$$

Таким образом, решение задачи (24), (25) примет вид:

$$u_{in}(t) = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^{q}\right)\tau_{in}, \tag{31}$$

где $n\in N$ и $n\neq 2,5,8,...$ при $i=3$.

Из (31) легко следует единственность решения задачи BS_1, так как если $\tau(x)=0$ на $[0,1]$, то $u_{in}(t)=0$ для $n=1,2,...$ и $u_{3n}(t)=0$ для $n\in N, n\neq 2,5,8,...$ на $[0,\infty)$. Следовательно, в силу полноты системы (17)-(19) в пространстве $L_2(0,1)$, из (22) следует, что функция $u(x,t)=0$ для всех $x\in[0,1]$, $y\in[0,\infty)$. Тем самым, единственность решения задачи BS_1 доказана.

Переходим к доказательству существования решения задачи BS_1. Имеет место:

Теорема 2. Если $\tau(x)\in C^{1}[0,1], \tau''(x)\in L_2(0,1), \tau(0)=0, \tau(1)=\tau\left(\frac{1}{2}\right)$, то решение задачи BS_1 существует, и оно представимо в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}u_{in}(t)\cdot X_{in}(x) + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2,5,8,...}}^{\infty} u_{3n}(t)\cdot X_{3n}(x), \tag{32}$$

где функции $u_{in}(t), i=1,2,3$ определяются формулами (31).

Доказательство. Поскольку системы функций (12), (13) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$, то функцию $u(x,t)$ можно представить в виде биортогонального ряда (32) по системе функций (12), (13), которая для каждого $x\in(0,1)$ сходится в $L_2(0,\infty)$. Подставляя (31) в (32), функцию $u(x,t)$ представим в виде

$$u(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^{q}\right)\tau_{in}\cdot X_{in}(x) - \sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2,5,8,...}}^{\infty}\frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^{q}\right)\tau_{3n}\cdot X_{3n}(x). \tag{33}$$

Как следует из (29), функция $K_{\nu}(z)$ экспоненциально убывает при $n\to\infty$, тогда ряд (33) и её производные любого порядка сходятся равномерно при $y\geq\delta>0$, где δ - достаточно малое. Отсюда следует, что этот ряд удовлетворяет уравнению (1).

Покажем, что ряд (33) также удовлетворяет условиям (4) и (5). Для этого достаточно установить равномерную сходимость этого ряда при $t\geq 0$, что даёт непрерывность функции $u(x,t)$ в $\bar{\Omega}$. Учитывая условия $\tau(x)$, нетрудно получить:

$$|\tau_{in}| = \left|\int_0^1 \tau(x)Y_{in}(x)dx\right| \leq \frac{1}{\lambda_{in}}\left|\int_0^1 \tau''(x)Y_{in}(x)dx\right| \leq \frac{C_{in}}{\lambda_{in}}, \tag{34}$$

где $n\in N$ и $n\neq 2,5,8,...$ при $i=3$.

Далее, учитывая формулу (30), оценим функции из (33) при фиксированном $n\in N$ и малых $y\geq 0$

$$|u_{in}(t)| = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\left|\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^{q}\right)\tau_{in}\right| \leq \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}\,\frac{\Gamma(\nu)}{2\left(\beta_{in}t^{q}\right)^{\nu}} \leq C_i|\tau_{1n}|, i=1,2,3. \tag{35}$$

Оценки (34) и (35) для коэффициентов ряда (33) обеспечивают его равномерную сходимость в области $\bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Существование и единственность решения задачи BS в случае $x_0 = \frac{1}{5}$ Задача BS_2. Переходим к доказательству существования и единственности решения задачи BS_2. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи BS_2 и пусть

$$u_{in}(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_{in}(x)dx,\ i = 1,2,3, \tag{36}$$

$$\tilde{u}_{3n}(t) = \int_0^1 u(x,t)\tilde{Y}_{3n}(x)dx, \tag{37}$$

где функции $Y_{in}(x), \tilde{Y}_{3n}(x), i = 1,2,3$ определяются по формулам (21), согласно таблице 1, где $n \in N$, при этом $n \neq 2,5,8,...$ в случае $i = 2$.

Рассмотрим функцию $u_{in}(t)$. Дважды дифференцируя её, а также учитывая уравнение (1) и краевые условия (4) и (5), получим, что $u_{in}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$u''_{in}(t) - t^{2q-2}q^2\beta_{in}^2 u_{in}(t) = 0 \tag{38}$$

и краевым условиям:

$$\lim_{t\to+0} u_{in}(t) = \tau_{in}, |u_{in}(\infty)| < \infty. \tag{39}$$

Здесь

$$\tau_{in} = \int_0^1 \tau(x)Y_{in}(x)dx. \tag{40}$$

Как следует из (24) и (25), единственное решение этой задачи имеет вид:

$$u_{in}(t) = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^q\right)\tau_{in}, \tag{41}$$

где $i = 1,2,3$, $n \in N$, причем $n \neq 2,5,8,...$ при $i = 2$.

Найдём теперь функцию $\tilde{u}_{3n}(t)$. Дифференцируя равенство (37) дважды, с учётом уравнения (1), получим:

$$\tilde{u}''_{3n}(t) = b^2t^m\int_0^1 u(x,t)\tilde{Y}_{3n}(x)dx - t^m\int_0^1 u_{xx}(x,t)\tilde{Y}_{3n}(x)dx = b^2t^m u_{3n}(t) - t^m I_2. \tag{42}$$

Интегрируя по частям в интеграле I_2 с учётом краевого условия (4), нетрудно получить, что

$$I_2 = \int_0^1 u_{xx}(x,t)\tilde{Y}_{3n}(x)dx = -\lambda_{3n}\tilde{u}_{3n}(t) + \sqrt{\lambda_{3n}}u_{3n}(t).$$

Тогда из (42), с учётом значения интеграла I_2, следует, что функция $\tilde{u}_{3n}(t)$ является решением следующей задачи:

$$\tilde{u}''_{3n}(t) - t^{2q-2}(b^2 + \lambda_{3n})\tilde{u}_{3n}(t) = -t^{2q-2}\sqrt{\lambda_{3n}}u_{3n}(t), \tag{43}$$

$$\lim_{t\to+0}\tilde{u}_{3n}(t) = \tau_{3n}, |\tilde{u}_{3n}(\infty)| < \infty, \tag{44}$$

где

$$\tilde{\tau}_{3n} = \int_0^1 \tau(x)\tilde{Y}_{3n}(x)dx, n \in N. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что общее решение уравнение (43) имеет вид:

$$u_{in}(t) = A\sqrt{t}I_{\nu}\left(\beta_{in}t^q\right) + B\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_{in}t^q\right) + \frac{\mu_{3n}}{2q^2\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu-1} t^{q+\frac{1}{2}}K_{\nu-1}\left(\beta_n t^q\right)\tau_{3n},$$

где последняя слагаемая есть частное решение неоднородного уравнения (43).

Тогда, удовлетворяя последнее условиям (44), получим, что решение задачи (43), (44) имеет вид:

$$\tilde{u}_{3n}(t) = \frac{2}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu}\sqrt{t}K_{\nu}\left(\beta_n t^q\right)\tilde{\tau}_{3n} + \frac{\mu_{3n}}{2q^2\Gamma(\nu)}\left(\frac{\beta_{in}}{2}\right)^{\nu-1} t^{q+\frac{1}{2}}K_{\nu-1}\left(\beta_n t^q\right)\tau_{3n}. \tag{46}$$

Единственность решения задачи BS_2 при условии её существования, легко следует из (41) и (46) (смотрите задачу BS_1), а также из полноты системы (21). Поэтому покажем существование решения задачи BS_2. Поскольку системы функций (20) и (21) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$, то решение задачи BS_2 в Ω ищем в виде:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{1n}(t)\cdot X_{1n}(x)+\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2,5,8,\ldots}}^{\infty}u_{2n}(t)\cdot X_{2n}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_{3n}(t)\cdot X_{3n}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_{3n}(t)\cdot \tilde{X}_{3n}(x), \qquad (47)$$

где $u_{in}(t), i=1,2,3$ и $\tilde{u}_{3n}(t)$ - неизвестные функции.

Нетрудно увидеть, что, подставляя функцию (47) в (1) и удовлетворяя условиям (3) -(5) относительно искомых функций получим задачи (38), (39) и (43), (44), решения которых имеют вид (41) и (46).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде ряда (47), который, для каждого $x\in(0,1)$ сходится в $L_2(0,\infty)$. Из (38), (39) и (43), (44) также видно, что при $y\geq\delta>0$, где δ - достаточно малое, ряд (47) вместо со своими производными любого порядка сходится равномерно в силу экспоненциального убывания при $n\to\infty$ функция $K_{\nu}(z)$. Отсюда следует, что ряд (47) удовлетворяет уравнению (1).

Покажем, что ряд (47) также удовлетворяет условиям (4) и (5). Для этого покажем равномерную сходимость этого ряда в области $\bar{\Omega}$.

Пусть функция $\tau(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\tau(x)\in C^1[0,1],\tau''(x)\in L_2(0,1),\tau(0)=0,\tau(1)=\tau\left(\frac{1}{5}\right). \qquad (48)$$

Тогда, из (40) и (45), аналогично оценкам (34), несложно получить

$$\tau_{in}=-\frac{1}{\lambda_{in}}(\tau''(x),Y_{in}(x)),|\tau_{in}|\leq\frac{C_i}{\lambda_{in}},i=1,2,3,$$

$$(49)\ \tilde{\tau}_{3n}=-\frac{1}{\lambda_{3n}}\left(\tau''(x),\tilde{Y}_{3n}(x)\right)-\frac{1}{\sqrt{\lambda_{3n}}^3}\left(\tau''(x),Y_{3n}(x)\right),|\tilde{\tau}_{3n}|\leq\tilde{C}_3\left(\frac{1}{\lambda_{3n}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{3n}}^3}\right). \qquad (50)$$

Здесь $n\in N$ при $i=1,2$ и $n\in N, n\neq 2,5,8,\ldots$ при $i=2$.

Далее, учитывая формулу (30), аналогично оценке (35), при фиксированном $n\in N$ и малых $y\geq 0$ оценим функции (41) и (46):

$$|u_{in}(t)|\leq C_i|\tau_{in}|,|\tilde{u}_{3n}(t)|\leq C_i\left(|\tilde{\tau}_{in}|+n^{\nu}|\tau_{in}|\right),i=1,2,3. \qquad (51)$$

Оценки (49)-(51) обеспечивают равномерную сходимость ряда (47) в области $x\in[0,1]$, $y\in[0,\infty)$. Таким образом, имеет место:

Теорема 2. Если функция $\tau(x)$ удовлетворяет условиям (48), тогда существует единственное решение задачи BS_2 и она представима в виде суммы ряда (47), где функции $u_{in}(t), i=1,2,3$ определяются соответственно формулами (41) и (46).

Заключение. В настоящей работе рассмотрена нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка, заданного в полуполосе. Использование спектрального метода позволило свести исходную постановку к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, что существенно упростило анализ.

Проведено детальное исследование спектральных свойств как основной, так и сопряжённой задачи. Найдены собственные значения, построены соответствующие им корневые функции, а также доказана их полнота и минимальность в пространстве $L_2(0,1)$. Установлено, что системы собственных и присоединённых функций образуют базис Рисса, что обеспечивает корректность биортогональных разложений и возможность построения решения в явном виде.

Показано, что при выполнении определённых условий на заданные функции удаётся доказать теоремы существования и единственности решения. Решение задачи представлено в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда по системе собственных функций, что обеспечивает удобство для дальнейшего анализа поведения решений и их асимптотики.

Полученные результаты не только уточняют спектральные характеристики рассматриваемой задачи, но и позволяют выявить влияние параметров нелокального условия на структуру спектра и корневых функций. Выявленные закономерности могут быть использованы для исследования широкого круга краевых задач для уравнений с вырождением, в том числе для задач Ионкина-Самарского и Трикоми, а также при анализе задач с условиями периодического типа.

Таким образом, разработанный в работе подход расширяет возможности применения спектрального метода к нелокальным задачам для вырождающихся эллиптических уравнений. Полученные формулы дают основу для построения численных алгоритмов и могут быть востребованы при моделировании процессов математической физики, таких как распространение тепла, диффузия, задачи теории плазмы и прогнозирование динамики различных сред.

Результаты исследования могут служить отправной точкой для дальнейших работ, направленных на изучение более общих классов нелокальных задач, содержащих сингулярные коэффициенты или более сложные граничные условия, а также для разработки эффективных вычислительных схем решения подобных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich, 1 (1932), 138–151.

2. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR 185 (1969), 739–740. [Engl. transl. Soviet Math. Dokl. 10 (1969), 398–400.]

3. Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems. I // Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. 26 (2007), 3–132; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) 155 (2008), 199–334.

4. Skubachevskii A.L. Nonclassical boundary value problems. II // Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. 33 (2009), 3–179; transl. in J. Math. Sci. (N.Y.) 166 (2010), 377–561.

5. Khubiev K.U. The Bitsadze-Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic–parabolic equation // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 23(4) (2019), 789–796.

6. Хубиев К.У. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Математические заметки СВФУ, 2019, т. 26, вып. 2, 31–40.

7. Karachik V., Turmetov B. On solvability of some nonlocal boundary value problems for the biharmonic equation // Mathematica Slovaca 70(2) (2020), 329–342.

8. Al-Shamsi H., Kadirkulov B.J., Kerbal S. The Bitsadze–Samarskii type problem for a mixed type equation in the domain with the deviation from the characteristics // Lobachevskii Journal of Mathematics 41 (2020), 1021–1030.

9. Хубиев К.У. Задача Бицадзе–Самарского для нагруженного гиперболо-параболического уравнения с вырождением порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры, 2021, т. 198, 123–132.

10.Ashurov R.R., Kadirkulov B.J., Jalilov M.A. On an inverse problem of the Bitsadze–Samarskii type for a parabolic equation of fractional order // Bol. Soc. Mat. Mex. (2023) 29:70.

11.Baderko E.A., Cherepova M. Solution of the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system in a semibounded domain // Differential Equations 53(10) (2017), 1294–1302.

12.Baderko E.A., Cherepova M. Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Complex Variables and Elliptic Equations 64(5) (2018), 753–765.

13.Лернер М.Е., Репин О.А. О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // Дифференц. уравнения 35(8) (1999), 1087–1093.

14.Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения 35(8) (1999), 1094–1100.

15.Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды междунар. конф., Стерлитамак, 2003, 213–219.

16.Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой — полуполоса // Дифференц. уравнения 32(4) (1996), 565–567.

17.Лернер М.Е., Репин О.А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сиб. матем. журнал 40(6) (1999), 1260–1276.

18.Рузиев М.Х. Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой — полуполоса // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки 1(18) (2009), 33–40.

19.Абашкин А.А. Об одной задаче для обобщённого двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в бесконечной полуполосе // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки 1(26) (2012), 39–45.

20.Абашкин А.А. О задаче типа Дирихле в бесконечной полуполосе для двуосесимметричного уравнения Гельмгольца // Научные ведомости. Сер.: Математика. Физика 11(130), вып. 27 (2012).

21.Eroshenkov E.P. The spectrum of the Bitsadze–Samarskii problem // (Russian) Differentsial'nye Uravneniya 19(1) (1983), 169–171.

22.Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения 22(12) (1986), 2059–2071.

23.Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. Зап. МГУ, Москва, 1951, т. 148, вып. 4, 69–107.

24.Lebedev N.N. Special Functions and Their Applications. New York: Dover Publications, 1972, xi + 308 pp.

25.Olver F. W. J. Asymptotics and Special Functions. Transl. from English, ed. A. P. Prudnikov. Moscow: Nauka, 1990, 528 pp.

26.Kadirkulov B.J., Begimqulov F.X. On a Nonlocal Problem of the Bitsadze–Samarskii Type for an Elliptic Equation with Degeneration // Lobachevskii Journal of Mathematics 46(1) (2025), 447–455.

27.Kadirkulov B.J., Begimqulov F.X. On the Solvability of the Bitsadze–Samarskii Type Problem for a Fractional Analogue of the Laplace Equation // Bulletin of the Institute of Mathematics 7(6) (2025), 152–158. ISSN 2181-9483.

UDC 517.927.4

ON A NON-HOMOGENEOUS BOUSSINESQ TYPE EQUATION WITH NON-LOCAL CONDITIONS

Bobokhojaeva Nazokat Shodmon kizi,
1st year doctoral student, National University of Uzbekistan
nazokatbobokhujayeva@gmail.com

Abstract. *The non-local problem for a Boussinesq type equation is investigated in this paper. The main focus is on proving the existence and uniqueness of the solution. The problem is solved using the Fourier method, and an analytical solution in the form of a spectral expansion is presented. In addition, sufficient conditions ensuring the solvability of the problem are discussed, and the role of non-local boundary conditions in the formulation is analyzed. The obtained results confirm the correctness of the problem statement and demonstrate the stability of the solution.*

Keywords: *Laplace operator, Boussinesq type equation, eigenvalues, self-adjoint operator, uniqueness, existence, non-local conditions.*

BUSSINESK TIPIDAGI BIR JINSLI BO‘LMAGAN NOLOKAL SHARTLAR BILAN BERILGAN MASALA HAQIDA

Annotatsiya. *Ushbu maqolada bir jinsli bo‘lmagan Bussinesq tipidagi nolokal shartli masala ko‘rib chiqiladi. Tadqiqotning asosiy e’tibori yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlashga qaratilgan. Masala Fur’ye usuli yordamida yechilib, spektral kengaytma ko‘rinishida analitik yechim topilgan. Shuningdek, yechimning mavjudligi va barqarorligini ta’minlovchi shartlar hamda nolokal chegaraviy shartlarning qo‘yilishdagi ahamiyati tahlil qilingan. Olingan natijalar masalaning to‘g‘ri qo‘yilganini tasdiqlaydi hamda yechimning barqarorligini ko‘rsatadi.*

Kalit so‘zlar: *Laplas operatori, Bussinesk tenglamasi, xos qiymatlar, o‘z-o‘ziga qo‘shma, yagonalik, mavjudlik, nolokal shartlar.*

О НЕОДНОРОДНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА БУССИНЕСКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. *В данной статье рассматривается неоднородная задача типа Буссинеска с нелокальными условиями. Основное внимание уделяется доказательству существования и единственности решения. Задача решается с использованием метода Фурье, и получено аналитическое решение в виде спектрального разложения. Кроме того, обсуждаются условия, обеспечивающие существование и устойчивость решения, а также роль нелокальных граничных условий в постановке задачи. Полученные результаты подтверждают корректность постановки задачи и демонстрируют устойчивость решения.*

Ключевые слова: *оператор Лапласа, уравнение Буссинеска, самосопряжённый, собственные значения, единственность, существование, нелокальные условия.*

Introduction. In recent years, the study of differential equations with non-local conditions has become one of the important directions in mathematical physics and applied modeling. Boussinesq type equations are widely used to describe wave processes, elasticity theory, and many other physical models. The problem of existence and uniqueness of solutions for such equations has attracted the attention of many researchers, and various approaches have been presented in works [1–5].

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an arbitrary bounded domain with piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ and $T > 0$.

Consider in the cylinder $\Omega \times (0,T)$ the following equation

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + v^2 \Delta u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

where parameter v is a positive number.

Let A be a positive self-adjoint extension of Laplace operator $-\Delta$: $Au = -\Delta u$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$(Au,u) \geq \mu(u,u), \quad \mu > 0, \quad u \in D(A)$$

We assume that A has a compact inverse operator A^{-1}. In particular, this self-adjoint extension may be produced by the boundary conditions like

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

with some appropriate $\alpha(x)$ and $\beta(x)$.

We consider non-local conditions

$$u(x,0) = u(x,T), \tag{2}$$

$$\int_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x) \tag{3}$$

The research most relevant to our work is presented in [4] by Sh. A. Alimov and A.R. Khalmukhamedov. Their study proved the existence and uniqueness of solutions to a similar non-local problem. The primary analytical approach employed in that work was the Fourier method, which also forms the foundation of our current study. It differs in the sign in front of the v^2 term, as well as in this work proved nonhomogeneous problem. In [5], a related problem is also studied and the existence and uniqueness of the solution are established, but it involves a different form of the operator and nonlocal conditions. Moreover, our work includes the inverse problem reconstructing the right-hand side of the equation was considered due to its importance in real-world applications.

Definition 1. We say that a function $u(x,t)$ is a solution to the non-local problem (1), (2) and (3) if the following conditions are satisfied:

1) $u(\cdot,t) \in D(A)$ for all $t \in (0,T)$, and the function $u(x,t)$ is continuous with respect to t in the norm of $L_2(\Omega)$;

2) the function $u(x,t)$ and $Au(x,t)$ are twice continuously differentiable with respect to t on the open interval $(0,T)$ in the $L_2(\Omega)$-norm;

3) the function $u(x,t)$ satisfies equation (1) and the non-local conditions (2) and (3).

In order to formulate the results on existence and uniqueness we introduce some important parameters. Let λ_k and $v_k(x)$ be the eigenvalues and corresponding eigenfunctions of the self-adjoint operator A:

$$Av_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

The spectral decomposition of any function $\varphi \in L_2(\Omega), f \in L_2(\Omega)$ has the form

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad \varphi_k = (\varphi, v_k) \tag{5}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x), \quad f_k = (f, v_k) \tag{6}$$

According to our assumptions, $\mu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots \leq \lambda_k \to \infty$. Set

$$\nu_k = \nu\sqrt{\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}} \tag{7}$$

Theorem 1. Let $\varphi \in D(A)$ and $f \in L_2(\Omega)$. Then, the solution of the problem (1), (2) and (3) exists and is unique.

Spectral expansion of the solution.

We can rewrite (1) as

$$(I+A)u_{tt} - \nu^2 Au = f(x) \quad or \quad u_{tt} - \nu^2 A(I+A)^{-1}u = (I+A)^{-1}f(x) \tag{8}$$

Assume that $u(x,t)$ is solution of the problem (8), (2) and (3). Then, the spectral decomposition of the solution has the form

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)v_k(x) \qquad (9)$$

where

$$u_k(t)=(u,v_k)=\int_{\Omega}u(x,t)v_k(x)dx.$$

If we multiply both sides of (8) by $v_k(x)$, we obtain

$$(u_{tt},v_k)-v^2(A(I+A)^{-1}u,v_k)=((I+A)^{-1}f,v_k) \qquad (10)$$

According to definition 1, we have

$$(u_{tt},v_k)=\frac{d^2}{dt^2}(u,v_k)=u_k''(t).$$

Recall that operator A is self-adjoint. Taking into account the equation (4), we can rewrite

$$(A(I+A)^{-1}u,v_k)=(u,A(I+A)^{-1}v_k)=\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}(u,v_k)=\frac{\lambda_k}{1+\lambda_k}u_k(t).$$

$$((I+A)^{-1}f,v_k)=(f,(I+A)^{-1}v_k)=\frac{1}{1+\lambda_k}(f,v_k)$$

Using the notation (7), we can write

$$v^2(A(I+A)^{-1}u,v_k)=v_k^2u_k(t) \qquad (11)$$

It follows that $u_k''(t)-v_k^2u_k(t)=\frac{f_k}{1+\lambda_k}$ By solving this equation we get

$$u_k(t)=A_kch(v_kt)+B_ksh(v_kt)-\frac{f_k}{v^2\lambda_k} \qquad (12)$$

Using the conditions (2) and (3)

$$u_k(0)=u_k(T) \qquad (13)$$

$$\int_0^T u_k(t)dt=\varphi_k \qquad (14)$$

Simple calculations show that

$$A_k\left(1-ch(v_kT)\right)=B_ksh(v_kT)$$

$$-A_ksh^2\frac{v_kT}{2}=B_ksh\frac{v_kT}{2}ch\frac{v_kT}{2} \qquad (15)$$

For all $k=1,2,3,\ldots$ $sh\frac{v_kT}{2}\neq 0.$ Set $D_k=\frac{A_k}{ch(v_kT/2)}=-\frac{B_k}{sh(v_kT/2)}$

Then, according to (12)

$$u_k(t)=D_k\left(ch\frac{v_kT}{2}chv_kt-sh\frac{v_kT}{2}shv_kt\right)-\frac{f_k}{v^2\lambda_k}.$$

Hence, it can be shown that,

$$u_k(t)=D_kch[v_k(t-T/2)]-\frac{f_k}{v^2\lambda_k}.$$

Further, according to (14), we have

$$\varphi_k=\int_0^T u_k(t)dt=D_k\int_0^T\left(ch[v_k(t-T/2)]-\frac{f_k}{v^2\lambda_k}\right)dt=\frac{2D_k}{v_k}sh(v_kT/2)-\frac{T}{v^2\lambda_k}f_k.$$

Therefore, it is true that

$$D_k = \frac{\nu_k}{2sh(\nu_k T/2)}\left(\varphi_k + \frac{f_k T}{\nu^2 \lambda_k}\right)$$

By substituting $u_k(t)$ to the series (9), we have

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\nu_k}{2sh(\nu_k T/2)}\left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2\lambda_k} f_k\right) ch\left[\nu_k\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] - \frac{f_k}{\nu^2\lambda_k}\right] v_k(x) \qquad (16)$$

Thus, if the solution of the problem (1), (2) and (3) exists, then it has the form as above.

In particular, formula (16) implies the uniqueness of the solution to the problem (1) under the conditions (2) and (3). Indeed, if there are $\varphi = 0$ and $f = 0$ in the problem, then $u(t) \equiv 0$. To show that (16) is a real solution, we check whether it satisfies the conditions of Definition 1.

Proof of the theorem 1.

Denote the partial sum of (16) by

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\nu_k}{2sh(\nu_k T/2)}\left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2\lambda_k} f_k\right) ch[\nu_k(t - T/2)] - \frac{f_k}{\nu^2\lambda_k}\right] v_k(x)$$

Then,

$$A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_n(x,t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k^3\left[\frac{ch[\nu_k(t - T/2)]}{2sh(\nu_k T/2)}\left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2\lambda_k} f_k\right)\right]\lambda_k v_k$$

According to Parseval's equality one has

$$\left\|A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_n(t)\right)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \nu_k^6 \lambda_k^2 \left|\frac{ch[\nu_k(t - T/2)]}{2sh(\nu_k T/2)}\left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2\lambda_k} f_k\right)\right|^2$$

For all $k \geq 1$

$$\left\|A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_n(t)\right)\right\|^2 \leq \left(\nu^3 \frac{ch[\nu(t - T/2)]}{2sh(\nu T/2)}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \left|\varphi_k + \frac{T}{\nu^2\lambda_k} f_k\right|^2$$

Finally,

$$\left\|A\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_n(t)\right)\right\|^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 + C_2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |f_k|^2 \qquad (17)$$

where $C_1 = C_1(\nu, t, T) = const.$, $C_2 = C_2(\nu, t, T) = const.$

According to (17) we have $\Delta u_{tt} \in L_2(\Omega)$. Similarly, one can show $u_{tt}, \Delta u \in L_2(\Omega)$.

Thus, we have proved theorem 1.

Inverse problem. In this section, we study the following inverse problem: find a pair $\{u(x,t), f\}$ of a function $u(x,t)$ satisfying the Definiton 1 and additional condition

$$u(x, t_0) = \psi(x), \quad 0 < t_0 < T \qquad (18)$$

Remark. Consider the following equation:

$$\tau ch\alpha\tau - sh\tau = 0$$

where $\alpha = \frac{2t_0}{T} - 1$ and t_0 are positive parameters, with $0 < t_0 < T$.

The uniqueness of the solution to the corresponding inverse problem is directly related to this equation: if the equation admits no solution, then the inverse problem has a unique solution. Conversely, if a solution exists, the uniqueness of the inverse problem may fail. This condition highlights the critical role of

the parameter t_0 in determining the solvability and uniqueness of the inverse problem. The uniqueness of the problem directly related to the position of fixed number t_0.

There are two points T_1^* and T_2^* in the interval $(0,T)$ such that for $t_0 \in (T_1^*, T_2^*)$, the inverse problem has a unique solution. In the remaining parts of the interval $(0,T)$, the uniqueness of the solution is not guaranteed. (The values of T_1^* and T_2^* and approximately correspond to $T/4$ and $3T/4$, respectively)

Theorem 2. Let $t_0 \in (T_1^*, T_2^*)$. Then, for arbitrary $\psi \in D(A)$ the inverse problem (1),(2),(3)-(18) has a unique solution $\{u(x,t), f\}$ and this solution is defined as

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\nu_k}{2sh(\nu_k T/2)} \left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2 \lambda_k} f_k \right) ch[\nu_k (t - T/2)] \right] v_k(x) - \frac{1}{\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} v_k(x)$$

where

$$f_k = \frac{1}{\nu^2 \lambda_k} \cdot \frac{2\psi_k sh\big((\nu_k T/2)\big) - \nu_k \varphi_k}{T\nu_k ch[\nu_k (t_0 - T/2)] - 2sh(\nu_k T/2)} \; ch[\nu_k (\mathrm{t_0} - T/2)]$$

and $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k(x)$.

Proof of the theorem 2. If f is known then problem (1)-(3) has the solution (16). To define f, using the additional condition (18). we have the equation

$$u(x,t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\nu_k}{2sh(\nu_k T/2)} \left(\varphi_k + \frac{T}{\nu^2 \lambda_k} f_k \right) ch[\nu_k (t_0 - T/2)] \right] v_k(x) - \frac{1}{\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k(x)$$

After simplifications we have

$$\left(\frac{T\nu_k}{2\nu^2 \lambda_k sh(\nu_k T/2)} ch[\nu_k (t_0 - T/2)] - \frac{1}{\nu^2 \lambda_k} \right) f_k = \psi_k - \frac{\nu_k \varphi_k}{2sh(\nu_k T/2)} ch[\nu_k (t_0 - T/2)]$$

$$f_k = \frac{2\psi_k sh(\nu_k T/2) - \nu_k \varphi_k ch[\nu_k (t_0 - T/2)]}{T\nu_k ch[\nu_k (t_0 - T/2)] - 2sh(\nu_k T/2)} \nu^2 \lambda_k \qquad (19)$$

Then, element f has the following form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\psi_k sh(\nu_k T/2) - \nu_k \varphi_k ch[\nu_k (t_0 - T/2)]}{T\nu_k ch[\nu_k (t_0 - T/2)] - 2sh(\nu_k T/2)} \nu^2 \lambda_k \right] v_k(x) \qquad (20)$$

Denote by $F_n(t)$ the partial sum of (20). Then by Parseval's equality

$$\|F_n(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{2\psi_k sh\left(\frac{\nu_k T}{2}\right) - \nu_k \varphi_k ch\left[\nu_k \left(t_0 - \frac{T}{2}\right)\right]}{T\nu_k ch\left[\nu_k \left(t_0 - \frac{T}{2}\right)\right] - 2sh\left(\frac{\nu_k T}{2}\right)} \nu^2 \lambda_k \right|^2$$

$$\|F_n(t)\|^2 \le \nu^2 \left(\frac{4sh\left(\frac{\nu T}{2}\right)}{T\nu ch\left[\nu\left(t_0 - \frac{T}{2}\right)\right] - 2sh\left(\frac{\nu T}{2}\right)} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} |\psi_k \lambda_k|^2 + \nu^2 \left(\frac{\nu ch[\nu(t_0 - T/2)]}{T\nu ch[\nu(t_0 - T/2)] - 2sh(\nu T/2)} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k \lambda_k|^2$$

Therefore,

$$\|F_n(t)\|^2 \le C_1 \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |\psi_k|^2 + C_2 \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |\varphi_k|^2$$

Thus, if $\varphi, \psi \in D(A)$, then $f \in L_2(\Omega)$. Since $f \in L_2(\Omega)$, then the satisfaction of the solution $u(x,t)$ of all conditions of Definition 1 is checked in the same way as above.

To prove the uniqueness of the solution, we use the standard method, which we show that the solution $\{u(x,t), f\}$ of the homogeneous inverse problem

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + v^2 \Delta u = f(x), \quad 0 < t < T$$

$$u(x,0) = u(x,T)$$

$$\int_0^T u(x,t)dt = 0$$

$$u(x,t_0) = 0$$

is zero. Suppose that $\{u(x,t), f\}$ is an arbitrary solution. If we define $u_k(t)$ then since operator A is self-adjoint, we have

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = (\Delta u_{tt} - v^2 \Delta u + f, v_k) = (-u_{tt} + v^2 u + f, \lambda_k v_k) = -\lambda_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + v^2 \lambda_k u_k + f_k$$

Using initial conditions and solving problem as above we obtain

$$u_k(t) = \frac{f_k}{v^2 \lambda_k}\left[\frac{T v_k}{2sh(v_k T/2)} ch[v_k(t - T/2)] - 1\right]$$

Applying the additional condition we get

$$u_k(t) = \frac{f_k}{v^2 \lambda_k}\left[\frac{T v_k}{2sh(v_k T/2)} ch[v_k(t_0 - T/2)] - 1\right]$$

According to Remark, $f_k = 0$ for all $k \geq 1$. Therefore, $u_k = 0$ for all $k \geq 1$. Thus due to completeness of the system of eigenfunctions $\{v_k\}$, we have $u(x,t) \equiv 0$. Theorem 2 is completely proven.

Conclusion. In conclusion, this paper considered a non-local problem for a non-homogeneous Boussinesq type equation. Using the Fourier method, the existence and uniqueness of the solution were proved, and an analytical solution in the form of a spectral expansion was presented. The inverse problem was also studied, and the necessary conditions for its uniqueness were identified. The obtained results can be applied both to the further theoretical investigation of non-local boundary value problems and to solving applied models.

REFERENCES:

1. Boussinesq J., "Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond," // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2e série, 17, 55–108 (1872).

2. Berezanskii Yu. M., Expansions in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968. 809 p.

3. Yuldashev T. K., Mixed differential equation of a Boussinesq type, // Vestnik Volgograd State University, Series 1, Mathematics, Physics, 2(33), 13–26 (2016) (in Russian).

4. Alimov Sh. A., Khalmukhamedov A. R., On a Non-Local Problem for a Boussinesq Type Differential Equation, // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 4, 916-923.

5. Dekhkonov Kh. T., Fayziyev Yu. E., Ashurov R. R., On the non-local Problem for a Boussinesq Type Equations, // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 3, pp. 1023-1031.

6. Yuldashev T. K., Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type. // Differential Equations, 54, 1384–1393 (2018).

7. Yuldashev T. K., On a nonlocal problem for the nonhomogeneous Boussinesq type integro-differential equation with degenerate kernel, // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Series: Physical and Mathematical Sciences, 159, 88–99 (2017).

8. Khalmukhamedov A. R. and Kuchkorov E. I., On the solvability of a nonlocal problem for a Boussinesq type differential equation, // Russian Mathematics (Izvestiya VUZov) 67 (10), 54-62 (2023).

9. Ashurov R. R. and Fayziev Yu. E.,"On eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator with a singular potential, // Differential Equations 41(2), 254–263 (2005).

10.Khalmukhamedov A. R., Complex powers of the Schrödinger operator with singular potential, // Contemporary Mathematics, Vol. 672, pp. 205–215 (2016).

UO‘K 51

MITTAG-LEFFLER FUNKSIYASI

Qobilova Dildora G‘ulom qizi,
Samarqand davlat pedagogika instituti tayanch doktoranti

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Mittag-Leffler funksiyasining nazariy asoslari, analitik xossalari hamda fraksion differensial tenglamalar yechimlarida qo‘llanilishlari yoritilgan. Funksiyaning umumlashgan ko‘rinishlari, asosan fraksion hisoblash va matematik fizikaning dolzarb masalalarida tutgan o‘rni misollar asosida ko‘rsatib beriladi. Funksiya eksponensial funksiyaning umumlashgan ko‘rinishi sifatida ko‘rib chiqilib, uning bir va ikki parametrli umumlashmalari, analitik va asimptotik xossalari, shuningdek, konvergensiya shartlari ilmiy asosda tahlil qilingan. Tadqiqotda ushbu funksiyaning fraksion differensial tenglamalar yechimlarida tabiiy vosita sifatidagi ahamiyati ochib beriladi hamda trigonometrik funksiyalar bilan uzviy bog‘liqligi misollar orqali isbotlangan. Shuningdek, kvant mexanikasi, signalni qayta ishlash, anomal diffuziya jarayonlari kabi amaliy sohalardagi qo‘llanish imkoniyatlari ham ko‘rsatib o‘tiladi. Natijada, Mittag–Leffler funksiyasi nazariy matematikaning muhim obyekti va amaliy modellashtirishning samarali vositasi ekanligi asoslanadi.*

Kalit so‘zlar: *Mittag-Leffler funksiyasi, fraksion hisoblash, analitik funksiyalar, differensial tenglamalar.*

ФУНКЦИЯ МИТТАГА-ЛЕФФЛЕРА

Аннотация. *В данной статье освещаются теоретические основы функции Миттага–Леффлера, её аналитические свойства и применение при решении дробных дифференциальных уравнений. Обобщённые формы функции, в частности, её роль в задачах дробного исчисления и математической физики, демонстрируются на основе примеров. Функция рассматривается как обобщение экспоненциальной функции; проанализированы её одно- и двухпараметрические обобщения, аналитические и асимптотические свойства, а также условия сходимости. В исследовании показано значение данной функции как естественного инструмента при решении дробных дифференциальных уравнений, а также доказана её связь с тригонометрическими функциями. Кроме того, указаны возможности применения в квантовой механике, обработке сигналов, моделировании аномальной диффузии и других областях. В результате обосновано, что функция Миттага–Леффлера является важным объектом теоретической математики и эффективным инструментом прикладного моделирования.*

Ключевые слова: *функция Миттага-Леффлера, фракционное исчисление, аналитические функции, дифференциальные уравнения.*

MITTAG-LEFFLER FUNCTION

Abstract. *This article examines the theoretical foundations of the Mittag–Leffler function, its analytical properties, and its applications in solving fractional differential equations. The generalized forms of the function, particularly their role in fractional calculus and mathematical physics, are demonstrated through illustrative examples. The function is regarded as a generalization of the exponential function, and its one- and two-parameter extensions, analytical and asymptotic properties, as well as convergence conditions are rigorously analyzed. The study highlights the importance of this function as a natural tool for solving fractional differential equations and substantiates its connections with trigonometric functions. Furthermore, potential applications in quantum mechanics, signal processing, anomalous diffusion modeling, and related fields are discussed. As a result, the Mittag–Leffler function is justified as a significant object of theoretical mathematics and an effective instrument for applied modeling.*

Keywords: *Mittag-Leffler function, fractional calculus, analytic functions, differential equations.*

Kirish. Matematikaning zamonaviy rivojlanishida fraksion hisoblash usullari keng qo‘llanilmoqda. Bu borada Mittag-Leffler funksiyasi alohida ahamiyatga ega bo‘lib, u 1903-yilda shved matematigi G. Mittag-Leffler tomonidan ta’riflangan. Funksiya klassik eksponensial funksiyaning umumlashgan ko‘rinishi sifatida qaraladi va fraksion differensial tenglamalar yechimlarida muhim rol o‘ynaydi. Bu funksiya 1903-yilda G. Mittag-Leffler tomonidan ta’riflanganidan so‘ng, qator nazariyasi, integral transformatsiyalar va fraksion

hisoblash sohalarida chuqur o‘rganila boshlandi. Uning eng muhim nazariy ustunliklaridan biri shundaki, u kompleks tekislikda butun funksiya (holomorf) bo‘lib, barcha nuqtalarda uzluksiz va differensiallanuvchi hisoblanadi. Shu jihati bilan Mittag–Leffler funksiyasi ko‘plab maxsus funksiyalarni o‘z ichiga oluvchi umumiy konstruksiya sifatida qaraladi. Eksponensial funksiyaning yechim sifatida ko‘rinadigan klassik differensial tenglamalar bilan cheklanganligi ma’lum. Ammo ko‘plab tabiiy jarayonlar, masalan, issiqlik o‘tkazuvchanligi, suyuqliklar oqimi, signalni tarqalishi yoki anomal diffuziya jarayonlari klassik model bilan to‘liq ifodalanmaydi. Bunday hollarda fraksion differensial tenglamalar qo‘llaniladi va ularning tabiiy yechimi sifatida aynan Mittag–Leffler funksiyasi yuzaga chiqadi. Shuning uchun ham bu funksiya fraksion hisoblash nazariyasida markaziy o‘rin tutadi.

Tahlil va natijalar. So‘nggi yillarda ushbu funksiya kvant mexanikasi, signalni qayta ishlash, anomal diffuziya jarayonlarini modellash va boshqa ko‘plab sohalarda keng tadqiq qilinmoqda. Mittag-Leffler funksiyasi eksponensial funksiyaning tabiiy umumlashmasi hisoblanadi. Ma’lumki, klassik differensial tenglamalarning ko‘pchilik yechimlari eksponenta orqali ifodalanadi. Fraksion differensial tenglamalar esa o‘z navbatida, klassik matematik usullar bilan yechilmaydigan ko‘plab jarayonlarni modellashtiradi. Bunday hollarda eksponenta o‘rnini aynan Mittag-Leffler funksiyasi egallaydi. Shu bois, ushbu funksiya fraksion hisoblash nazariyasining markaziy obyektlaridan biri sifatida qaraladi.

Shu jihatdan olib qaraganda, Mittag-Leffler funksiyasini nazariy jihatdan chuqur o‘rganish va uning xossalarini misollar orqali asoslab berish matematikaning ham nazariy, ham amaliy tarmoqlari uchun muhimdir. Ushbu maqolada funksiyaning asosiy ta’rifi, uning umumlashgan ko‘rinishlari, analitik xossalari va differensial tenglamalardagi tatbiqlari bayon qilinadi. Shuningdek, aniq misollar orqali uning eksponenta va trigonometrik funksiyalar bilan bog‘lanishi ko‘rsatilib, nazariy asoslari tasdiqlanadi.

Funksiyaning nazariy ahamiyati uning qatorli ifodasi, konvergensiya shartlari va asimptotik xossalari orqali yaqqol namoyon bo‘ladi. Masalan, katta argumentlar uchun u eksponentaga qaraganda sekinroq so‘nadi, bu esa fizik va muhandislik masalalarida uzoq muddatli xotira effektlarini ifodalashda qo‘l keladi. Bundan tashqari, funksiyaning ikki parametrli umumlashmalari trigonometrik funksiyalar bilan bevosita bog‘lanishi mumkinligi aniqlangan. Bu esa sinus va kosinus funksiyalarining ham umumlashtirilgan shaklini berib, matematik modellashtirish imkoniyatlarini kengaytiradi. Nazariy jihatdan yana bir muhim xususiyat shuki, Mittag–Leffler funksiyasi turli integral transformlar, jumladan, Laplas va Mellin transformlari orqali ham tadqiq qilinadi. Bu yondashuv uni matematik fizika, operatorlar nazariyasi va ehtimollar nazariyasida keng qo‘llashga imkon beradi. Ayniqsa, operatorli tenglamalarning spektral tahlilida ushbu funksiya asosiy yechim sifatida namoyon bo‘ladi.

Ushbu tadqiqotda Mittag-Leffler funksiyasining nazariy xossalarini o‘rganish hamda uning amaliy qo‘llanishlarini asoslash uchun analitik va nazariy metodlardan foydalanildi. Tadqiqot metodologiyasi quyidagi yo‘nalishlarni o‘z ichiga oladi:

Mittag-Leffler funksiyasi ta’rifini shakllantirishda qatorlar nazariyasi va maxsus funksiyalar analiziga tayanildi. Funksiya quyidagicha ta’riflanadi:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Bu ta’rif eksponentaning umumlashmasi sifatida qaraladi va qatorlarning yaqinlashuv xossalari asosida tahlil qilindi.

Keyinchalik bu funksiya **Fransiya, Italiya va Sovet maktablari** olimlari tomonidan rivojlantirilib, ikki parametrli umumiylashtirilgan ko‘rinishi taklif qilingan:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Agar $\alpha = 1, \beta = 1$ bo‘lsa, u holda kosinus va sinus funksiyalari bilan bog‘liq ifodalar hosil qilinadi:

$$E_{2,1}(-t^2) = \cos(t), \qquad E_{2,2}(-t^2) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Bu esa trigonometrik funksiyalarni ham Mittag–Leffler funksiyasi orqali umumlashtirish mumkinligini ko‘rsatadi. Mittag–Leffler funksiyasi **butun funksiya** (holomorf) bo‘lib, kompleks tekislikning hamma nuqtalarida aniqlangan.

Asimptotik xossalari: Katta $|z|$ uchun Mittag–Leffler funksiyasi quyidagicha asimptotik qatorga ega:

$$E_\alpha(-z) \sim \frac{1}{z\,\Gamma(1-\alpha)}, \qquad |z| \to \infty,\ 0 < \alpha < 1.$$

Bu natija uning differensial tenglamalar yechimlarining sekinroq so‘nishini (eksponentga qaraganda) ko‘rsatadi.

Mittag-Leffler funksiyasining fraksion differensial tenglamalar yechimlarida tutgan o‘rnini aniqlash uchun Caputo va Riemann–Liouville hosilalaridan foydalanildi. Masalan, quyidagi fraksion differensial tenglama:

$$D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = 1$$

uchun yechim

$$y(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$$

ko‘rinishida ifodalanishi metodologiyaning asosiy nazariy yo‘nalishlaridan biri bo‘ldi.

Quyida fraksion differensial tenglamani Mittag–Leffler funksiyasi yordamida yechishning soddalashtirilgan namunasi ko‘rib chiqiladi. Masala quyidagicha ifodalanadi:

$$D_t^\alpha y(t) + a\,y(t) = E_\alpha(-b\,t^\alpha), \qquad y(0) = y_0,$$

Bu yerda $0 < a \le 1, b \ge 0\ va\ a \ne b.$ Bu yerda D_t^α – Caputo tipidagi fraksion hosila, E_α esa Mittag-Leffler funksiyani bildiradi.

Avvalo, tenglamaning Laplas transformi olinadi. Caputo hosilasi uchun quyidagi formula ma’lum:

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha y(t)\} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0),$$

Bu yerda $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Shuningdek,

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-bt^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b}.$$

Shunday qilib, berilgan tenglama uchun Laplas transformi:

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y_0 + aY(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b}.$$

Oddiy algebraik o‘zgartirishlar natijasida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$Y(s) = \frac{s^{\alpha-1} y_0}{s^\alpha + a} + \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + a)(s^\alpha + b)}.$$

Ikkinchi hadni qavs ichida ajratib yozamiz:

$$\frac{1}{(s^\alpha + a)(s^\alpha + b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s^\alpha + a} - \frac{1}{s^\alpha + b}\right).$$

Ma’lum Laplas formulasi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + c}\right\} = E_\alpha(-ct^\alpha).$$

Shundan foydalanib, yechim quyidagicha topiladi:

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{b-a}\right) E_\alpha(-at^\alpha) - \frac{1}{b-a} E_\alpha(-bt^\alpha).$$

Endi natijani tekshirib ko‘ramiz:

1) Boshlang‘ich shart: *t=0 da* $E_a(0) = 1$. Shuning uchun $y(0) = y_0$ bu esa berilgan shartni to‘liq qanoatlantiradi.

2) Maxsus holatda, $a = 1$ bo‘lsa, $E_1(-ct) = e^{-ct}$. Demak yechim klassik differensial tenglama uchun odatiy ko‘rinishga keladi:

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{1}{b-a}\right) e^{-at} - \frac{1}{b-a} e^{-bt}.$$

Mittag–Leffler funksiyasi trigonometrik funksiyalar bilan ham uzviy bog‘liq. Masalan, uning ikki parametrli ko‘rinishi yordamida sinus va kosinus funksiyalarini hosil qilish mumkin. Bu holatni quyidagi misol orqali ko‘ramiz. Bir parametrli Mittag-Leffler funksiyasini $a = 2$ deb olsak, quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$E_2(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{\Gamma(2k+1)}.$$

Bu yerda $(-t^2)^k = (-1)^k t^{2k}$. Shuningdek, $\Gamma(2k+1) = (2k)!$ Ekanligi ma’lum. Shunda ifoda soddalashib:

$$E_2(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$$

ko‘rinishga keladi. Endi bu qatorni Makloren qatori sifatida tanib olishimiz mumkin. Ma’lumki kosinus funksiyasi quyidagicha qator orqali ifodalanadi:

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$$

Demak, ikkala qator bir xil bo‘lgani uchun quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz.

$$E_2(-t^2) = \cos t.$$

Xulosa. Shunday qilib, bu misolda yechim Mittag–Leffler funksiyalari kombinatsiyasi orqali ifodalanadi. Bu natija fraksion differensial tenglamalarni yechishda ushbu funksiyaning ahamiyatini yana bir bor tasdiqlaydi.

Ushbu maqolada Mittag–Leffler funksiyasi va uning hisoblash usullari nazariy jihatdan tahlil qilindi. Tadqiqot jarayonida ushbu funksiya eksponentsial funksiyaning umumlashmasi sifatida qaralishi, trigonometrik funksiyalar bilan aloqasi hamda fraksion differensial tenglamalarning tabiiy yechimi sifatida namoyon bo‘lishi ko‘rsatildi.

Shuningdek, Mittag–Leffler funksiyasining asimptotik xossalari, konvergensiya shartlari va maxsus holatlari tahlil qilinib, ularning ilmiy va amaliy ahamiyati yoritildi. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, ushbu funksiya faqat nazariy matematikada emas, balki fizika, mexanika va moliya kabi sohalarda ham keng qo‘llanilmoqda.

Olingan xulosalar shuni tasdiqlaydiki, Mittag–Leffler funksiyasi fraksion hisoblash va noan’anaviy matematik modellarni qurishda asosiy vositalardan biri hisoblanadi. Bu esa kelgusida yangi differensial tenglamalar sinfini tadqiq qilishda, zamonaviy hisoblash algoritmlarini ishlab chiqishda va amaliy jarayonlarni modellashtirishda muhim imkoniyatlar yaratadi.

ADABIYOTLAR:

1. Ayub, U., Mubeen, S., Abdeljawad, T., Rahman, G., & Nisar, K. S. (2020). The New Mittag-Leffler Function and Its Applications. // Journal of Mathematics, Wiley.

2. Ghanbari, B., Gómez-Aguilar, J. F., va boshqalar. (2022). Effective Fractional Technical for Some Fractional Initial Value Problems. // International Journal of Applied and Computational Mathematics, Springer.

3. Mohammed, P. O., Dahal, R., Goodrich, C. S., Hamed, Y. S., & Baleanu, D. (2022). Analytical and numerical negative boundedness of fractional differences with Mittag-Leffler kernel. // AIMS Mathematics.

4. Deif, S. A. (2023). The Generalized Mittag-Leffler Function of Matrix Argument and the Modeling of a Visco-Elastic System. // International Journal of Applied Mathematics.

5. Abdelhakim, A. A. (2025). Mittag-Leffler Functions as Eigenfunctions of the Hilbert Transform. // Mathematical Methods in the Applied Sciences, Wiley.

6. Bin-Saada, M. G., Hasanov, A., & Ruzhansky, M. (2021). Some properties relating to the Mittag–Leffler function of two variables. // Integral Transforms and Special Functions, Taylor & Francis

UO‘K 517.956.6

ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN CHEGARALANMAGAN PARALLELEPIPED KO‘RINISHIDAGI SOHADA NOLOKAL CHEGARAVIY SHARTLI TO‘G‘RI MASALA

Xudoykulov Shohruh Shuhratovich,
Toshkent davlat transport universiteti tadqiqotchisi
xudoykulov1194@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada chegaralanmagan paralelepiped ko‘rinishidagi sohada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun nolokal chegaraviy shartli to‘g‘ri masalani korrektligi o‘rganilgan. Masalaning umumlashgan yechimining yagonaligini isbotlash uchun energiya integrali usulidan foydalanilgan. Umumlashgan yechimning mavjudligini isbotlash uchun birinchi navbatda Furye almashtirishi qo‘llanilib, tekislikda yangi masala hosil qilinadi va bu masalani yechish uchun aprior baholash usullaridan foydalanilgan.*

Kalit so‘zlar: *parabolik tenglama, nolokal chegaraviy masala, Sobolev fazosi, umumlashgan yechimning yagonaligi, mavjudligi va silliqligi.*

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ ВИДА НЕОГРАНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Аннотация. *В данной статье исследуется корректность прямой задачи с нелокальным краевым условием для уравнения теплопроводности в области вида неограниченного параллелепипеда. Для доказательства единственности обобщённого решения задачи используется метод интеграла энергии. Для докозательства сушествования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье, получается новая задача в плоскости, а для разрешимости этой задачи используются методы априорных оценок.*

Ключевые слова: *параболические уравнения, нелокальная краевая задача, однозначная разрешимость, гладкость обобщённого решения, пространство Соболева.*

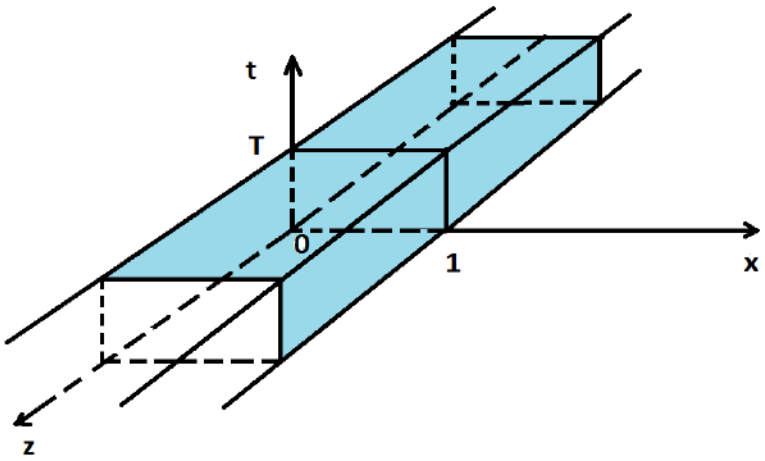
DIRECT PROBLEM WITH A NONLOCAL BOUNDARY CONDITION FOR THE HEAT EQUATION IN A DOMAIN OF THE FORM OF AN UNBOUNDED PARALLELEPIPED

Abstract. *In this paper, the well-posedness of the direct problem with a nonlocal boundary condition for the heat equation in a domain of the form of an unbounded parallelepiped is studied. To prove the uniqueness of the generalized solution, the energy integral method is employed. To establish the existence of a generalized solution, the Fourier transform is first applied, which leads to a new problem in the plane; the solvability of this problem is then investigated using a priori estimates.*

Keywords: *parabolic equations, nonlocal boundary value problem, unique solvability, regularity of the generalized solution, the Sobolev space.*

Kirish va masalaning qo‘yilishi. Matematik fizika tenglamalari uchun to‘g‘ri masalalarni o‘rganishga qiziqish ularning mexanika, seysmologiya, tibbiy tomografiya, geofizikaning turli sohalarida qo‘llanilishining ahamiyati bilan bog‘liq ekanligi bilan izohlanadi. Nokorrekt masalalarni hal qilishning umumiy yondashuvi A. N. Tixonov [1] tomonidan ishlab chiqilgan M. M. Lavrentiyev[2], S. I. Kabanixin[3], A. Kojanov [4], R.Ashurov, S.Djamalov [5-9] va boshqalar tomonidan rivojlantirilgan. Chegaralangan sohalarda turli masalalar o‘rganilgan. Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun to‘g‘ri masalalarning korrektligi zamonaviy usullar yordamida chegaralanmagan paralelepiped ko‘rinishidagi sohada o‘rganiladi.

Ushbu $G=(0,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);x\in(0,1),0<t<T<+\infty,z\in R.\}$



sohada ikki o‘lchamli issiqlik tarqlish tenglamasini qaraymiz:

$$Lu = u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t,z), \tag{1}$$

bu yerda $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ – Laplas operatori.

Aytaylik, (1) tenglamadagi $c(x,t)$ koeffitsient Q sohada yetarlicha silliq funksiya bo‘lsin.

Yarimnolokal chegaraviy masala. Quyidagi yarimnolokal chegaraviy shartlarni

$$\gamma u\big|_{t=0} = u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

bu yerda $\gamma -$ biror o‘zgarmas son bo‘lib, qiymati quyida aniqlanadi, hamda

$$\lim_{|z|\to\infty} u = 0 \ , \ \lim_{|z|\to\infty} u_z = 0 \tag{4}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi (1) tenglamaning $W^{2,1,3}_{2,x,t,z}(G)$ fazodagi umumlashgan yechimini toping.

Sobolev $W^{l}_{2}(Q)$ fazosida ($1 \le l$ -natural son, $l = 0, W^{0}_{2}(Q) = L_2(Q)$) skalyar ko‘paytmani va normani quyidagicha belgilaymiz

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|^2_{W^l_2(Q)} = \sum_{|\alpha|\le l} \int_Q \left|D^\alpha \vartheta\right|^2 dxdt,$$

bu yerda $\alpha -$ multiindeks, D^α x va t o‘zgaruvchilariga nisbatan umumlashgan hosilalar.

Turli aprior baholarni olishda biz ko‘pincha Koshi σ tengsizligidan foydalanamiz, ya’ni [10,11]

$$\forall u, \vartheta \ge 0; \forall \sigma > 0; \qquad 2u \cdot \vartheta \le \sigma u^2 + \frac{\vartheta^2}{\sigma} \quad .$$

Ta’rif. (1)-(4) masalaning umumlashgan yechimi deb, (1) tenglamani va (2)-(3) shartlarni G sohaning deyarli hamma nuqtalarida qanoatlantiruvchi va (4) shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t,z) \in W^{2,1,3}_2(G)$ funksiyaga aytiladi.

Bu yerda $W^{2,1,3}_2(G) = W^{2,1,3}_{2,x,t,z}(G)$ orqali

$$\|u\|_{W^{2,1,3}_2(G)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \|\hat{u}\|^2_{W^{2,1}_2(Q)} \, d\lambda$$

norma bilan berilgan Hilbert fazolari [18,21,29] belgilangan bo‘lib, bu fazo elementlari uchun $u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{zz} \in L_2(G)$ o‘rinli bo‘ladi, bundan tashqari $W^{2,1}_{2,x,t}(Q)$ orqali

$$\|u\|^2_{W^{2,1}_2(Q)} = \int_Q (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2) dQ$$

normaga ega Sobolev fazolari belgilangan. Bu yerda barcha hosilalar umumlashgan ma'noda olinmoqda va $\widehat{u}$ ifoda $u(x,t,z)$ funksiyaning z o'zgaruvchi bo'yicha Fury'e almashtirishini [4,31] bildiradi:

$$\widehat{u}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz\,.$$

Kelgusida c_i orqali musbat, umuman olganda bir-biridan faqrli turli noldan farqli o'zgarmas sonlarni belgilaymiz.

2. (1) -(4) masala yechimining yagonaligi.

1-teorema. Faraz qilamiz $c\left(x,t\right)$ koeffitsient uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin: $\mu c\left(x,t\right)-c_t\left(x,t\right)\geq\delta_1>0$ barcha $(x,t)\in\overline{Q}$, bu yerda $\mu=\dfrac{2}{T}\ln|\gamma|>0,\ |\gamma|>1$, barcha $x\in[0,1]$ lar uchun, $c\left(x,T\right)=c\left(x,0\right)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $f\in W_2^{1,1,3}(G)$ funksiya uchun (1)-(4) masalaning $W_2^{2,1,3}(G)$ fazoda yagona umumlashgan yechimi mavjud bo'ladi.

Isboti. (1)-(4) masala uchun Fury'e almashtirishini qo'llab, $Q=(0,1)\times(0,T)$ sohada quyidagi masalani olamiz:

$$L\widehat{u}=\widehat{u}_t-\widehat{u}_{xx}+\left(c(x,t)+\lambda^2\right)\widehat{u}=\widehat{f}\left(t,x,z\right), \tag{5}$$

$$\gamma\widehat{u}\big|_{t=0}=\widehat{u}\big|_{t=T}\,, \tag{6}$$

$$\widehat{u}\big|_{x=0}=\widehat{u}\big|_{x=1}=0\,. \tag{7}$$

Ta'rif. (5)-(7) masalaning umumlashgan yechimi deb (5) tenglamani Q sohaning deyarli barcha nuqtalarida va (6), (7) shartlarni qanoatlantiruvchi $\widehat{u}(x,t,\lambda)\in W_2^{2,1}(Q)$ funksiyaga aytiladi.

2-teorema. Ayatylik 1-teoremaning hamma shartlari bajarilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\widehat{f}\,(x,t,\lambda)\in L_2(Q)$ funksiya uchun (5)-(7) masalaning $W_2^{2,1}(Q)$ fazoda yagona yechimi mavjud bo'ladi.

Isboti. (5)-(7) masala yechimining yagonaligini integral energiya yordamida isbot qilamiz. Faraz qilamiz (5)-(7) masalaning yechimi $W_2^{2,1}(Q)$ da mavjud bo'lsin.

Ushbu

$$2\left(L\widehat{u},e^{-\mu t}\widehat{u}_t\right)_0=2\left(\widehat{f},e^{-\mu t}\widehat{u}_t\right)_0$$

ayniyatni qaraymiz, bu yerda $\mu=const>0.$ 2-teorema shartlariga ko'ra, (7) ayniyatni bo'laklab integrallab, quyidagi tengsizlikni oson keltirib chiqarish mumkin:

$$\left\|\widehat{u}\right\|^2_{W_2^1(Q)}\leq c_1\left\|\widehat{f}\right\|^2_Q.$$

Haqiqatdan ham, dastlab

$$2\left(L\widehat{u},e^{-\mu t}\widehat{u}_t\right)_0\geq 2\left\|\widehat{u}_t\right\|^2_0+\lambda\left\|\widehat{u}_x\right\|^2_0+\delta_1\left\|\widehat{u}\right\|^2_0$$

ekanligini isbotlaymiz. Ushbu

$$\left(\widehat{u}_t-\widehat{u}_{xx}+\left(c(x,t)+\lambda^2\right)\widehat{u},e^{-\mu t}\widehat{u}_t\right)=\left(\widehat{f},e^{-\mu t}\widehat{u}_t\right)$$

ayniyatni qaraymiz. U holda quyidagi bahoni hosil qilamiz

$$\left\|\widehat{u}\right\|^2_{W_2^1(Q)}\leq c_1\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}, \tag{8}$$

bu yerda $c_1 = \frac{1}{\sigma}$, $\sigma = \min\left\{e^{-\mu T}, \lambda e^{-\mu T}, \delta_1 e^{-\mu T}\right\}$, bundan (4)-(6) masalaning $W_2^1(Q_1)$ da yagonaligi kelib chiqadi. $\hat{u}_{xx} \in L(Q)$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun yana quyidagi aprior baholashdan foydalanamiz:

$$\left|-2\int_Q L\hat{u}e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}dxdt\right| = \left|-2\int_Q \hat{f}\,e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}dxdt\right|.$$

Quyidan va yuqoridan baholashlarni olamiz, quyidan boshlaymiz:

1) $-2\int_Q \hat{u}_t\, e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}dxdt = \mu\left\|\hat{u}_x\right\|^2$;

2) $2\int_Q \hat{u}_{xx}e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}dxdt \geq \frac{2}{e^{\mu T}}\int_Q \hat{u}_{xx}^2 dxdt = \frac{2}{e^{\mu T}}\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2$;

3)

$$-2\int_Q c\hat{u}e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}dxdt \geq \geq -2\varepsilon\int_Q e^{-\mu t}\hat{u}_{xx}^2 dxdt - \frac{2\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon}\int_Q \hat{u}^2 dxdt \geq -\frac{2\varepsilon}{e^{\mu T}}\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 - \frac{2\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon}\left\|\hat{u}\right\|_0^2;$$

4) $-2\lambda^2\int_Q \hat{u}\ \hat{u}_{xx}dxdt = 2\lambda^2\int_Q (\hat{u}_x)^2 dxdt = 2\lambda^2\left\|\hat{u}_x\right\|_0^2$;

Endi yuqoridan baholashlarni olamiz:

5) $\left|-2\int_Q \hat{f}\,\hat{u}_{xx}e^{-\mu t}dxdt\right| = 2\left|\int_Q \hat{f}\,\hat{u}_{xx}e^{-\mu t}dxdt\right| \leq$

$$\leq 2\int_Q \left|\hat{f}\,\hat{u}_{xx}e^{-\mu t}\right|dxdt \leq \frac{2}{\varepsilon}\int_Q \hat{f}^2 dxdt + 2\varepsilon\int_Q e^{-\mu t}u_{xx}dxdt \leq \frac{2}{\varepsilon}\left\|\hat{f}\right\|_0^2 + 2\varepsilon\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2;$$

tengsizlikni inobatga olib

$$\frac{2}{e^{\mu T}}\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 - \frac{2\varepsilon}{e^{\mu T}}\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 - 2\varepsilon\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\left\|\hat{f}\right\|_0^2 + \frac{2\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon}\left\|\hat{u}\right\|_0^2,$$

$$\left(\frac{2}{e^{\mu T}} - \frac{2\varepsilon}{e^{\mu T}} - 2\varepsilon\right)\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\left\|\hat{f}\right\|_0^2 + \frac{2\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon}\left\|\hat{u}\right\|_0^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\left\|\hat{f}\right\|_0^2 + \frac{2c_1\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon}\left\|\hat{u}\right\|_0^2.$$

Endi ε ni tanlash hisobiga $\left(\frac{2}{e^{\mu T}} - \frac{2\varepsilon}{e^{\mu T}} - 2\varepsilon\right) > \varepsilon_0 > 0$

$$\left\|\hat{u}_{xx}\right\|_0^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{2c_1\|c\|_{C(Q)}^2}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)\left\|\hat{f}\right\|_0^2 \tag{9}$$

(9) tengsizlikdan $\hat{u}_{xx} \in L(Q)$ kelib chiqadi. (8) tengsizlikni (9) tengsizlikka qo‘shsak, kerakli baholashni olamiz [5,16,17]

$$\left\|\hat{u}\right\|_{W_2^{2,1}(Q)}^2 \leq c_2\left\|\hat{f}\right\|_{L_2(Q)}^2. \tag{10}$$

Shunday qilib 2-teoremani isbot qildik.

Endi 1-teoremani isbotlaymiz.

Lemma. Aytaylik 1-teoremaning hamma sharti bajarilgan bo‘lsin. U holda uning uchun quyidagi baholashlar o‘rinli bo‘ladi*:*

I). $\|u\|^2_{W_2^{1,1,3}(G)} \le c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,0,3}(G)}$

II). $\|u\|^2_{W_2^{2,1,3}(G)} \le c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,1,3}(G)}$

Lemma isboti. 2-teoremadan ma'lumki, (5)-(7) masala uchun (8) baholash o'rinli ekanligi isbotlangan edi, ya'ni ushbu

$$\|\widehat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \le c_1 \left\|\widehat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}$$

tengsizlik o'rinli .

$u_z \in L_2(G)$ ekanligini isbot qilish uchun (8) tengsizlikni $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ ga ko'paytirib, λ bo'yicha $-\infty$ dan $+\infty$ gacha integrallaymiz, u holda

$$\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\widehat{u}\|^2_{W_2^1(Q)}\, d\lambda \le$$

$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\widehat{f}\right\|^2_{L_2(Q)} d\lambda = c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan $u_z \in L_2(G)$ va lemmaning birinchi aprior bahosi bajarilishi va (1)-(4) masalaning $W_2^{2,1,3}(G)$ da yagona umumlashgan yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Endi $u_{zz} \in L_2(G)$ ekanligini isbotlaymiz. 2-teoremadan (10) tengsizlikni olamiz,

$$\|\widehat{u}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \le c_2 \left\|\widehat{f}\right\|_{L_2(Q)}.$$

$u_{zz} \in L_2(G)$ ni isbot qilish uchun (10) tengsizlikni $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ ga ko'paytirib, λ bo'yicha $-\infty$ dan $+\infty$ gacha integrallaymiz va

$$\|u\|^2_{W_2^{1,2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\widehat{u}\|^2_{W_2^{1,2}(Q)}\, d\lambda \le$$

$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\widehat{f}\right\|^2_{L_2(Q)} d\lambda = c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)},$$

ni olamiz. Bundan $u_{zz} \in L_2(G)$ ekanligi, lemmaning ikkinchi bahosi o'rinli bo'lishi va (1)-(4) masala $W_2^{2,1,3}(G)$ da umumlashgan yechimga ega ekanligi kelib chiqadi [5]. 1-teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1978.-120с

2. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР, 1953, Т.122, №2, с.167-170.

3. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Новосибирск, 1987. Препринты №714, ВЦ. СО АН СССР. с.44.

4. Владимиров В. С. "Уравнения математической физики" М.: "Наука". 1971

5. Джамалов С.З. Нелокалные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.// Монография. Ташкент.2021г, с.176.

6. Джамалов.С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода //Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.физ.-мат.науки, 2017,Т.21, №4. С.1-14.

7. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка // Дифференциальные уравнения, 2019.Т.55, № 1 .С.34-44.

8. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. // Известия вузов. Математика.2019,№6.С.1-12.

9. Джамалов С.З., Пятков С.Г., Некоторые задачи обратных задач для уравнений смешанного типа второго порядка // Матем. заметки СВФУ, 2018, Т.25, № 4, с. 3-15.

10. Жўраев Т. Ж., Абдуназаров С. Математик физика тенгламалари. "Ўқитувчи". 2003.

11. Кабанихин С.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. // Журн. вычислит. математики и мат. физаки. 2004. Т. 44, № 4. с. 694-716.

12. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Журн. Вычислит. математики и мат. физики, 44: 4, (2004).С.694-716.

13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функсионал -ного анализа. - М.: Наука, 1976. - 543 с.

14. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: "Мир". 1964.

15. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.С.67.

16. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.1973.С.407.

UO‘K 51

XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH UCHUN ALGORITMLAR VA DASTURIY VOSITALARNI SHAKLLANTIRISH

Mingboyev Anvarjon Akramjon o‘g‘li
Andijon davlat universiteti
Kompyuter tizimlari va dasturiy ta’minoti yo‘nalishi magistranti
anvarjon020609@gmail.com

Annotatsiya. *Xususiy hosilali differensial tenglamalar (XHDT) ko‘plab ilmiy, texnik va muhandislik masalalarining matematik modellarida asosiy o‘rin tutadi. Masalan, issiqlik va massa almashinuvi, suyuqlik va gazlar oqimi, elastiklik nazariyasi, elektromagnit maydonlari va kvant mexanikasi kabi ko‘plab jarayonlar XHDT orqali ifodalanadi. Biroq bu tenglamalarning analitik yechimlari ko‘pincha murakkab yoki amalda imkonsiz bo‘ladi. Shu sababli ularni yechishda turli xil sonli usullardan – farqlar usuli, sonli integratsiya, elementlar va hajmlar usuli, shuningdek, iteratsion va matritsali yondashuvlardan keng foydalaniladi.*

Ushbu maqolada xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish uchun ishlab chiqilgan algoritmlar va dasturiy vositalar haqida batafsil ma’lumot keltiriladi. Xususan, algoritmlarning asosiy prinsiplari, hisoblash aniqligi, barqarorligi va hisoblash murakkabligi tahlil qilinadi. Shuningdek, zamonaviy dasturlash muhitlari va kutubxonalar asosida ishlab chiqilgan dasturiy vositalarning imkoniyatlari va amaliy qo‘llanilish sohalari (fizika, mexanika, muhandislik, biologiya va boshqalar) ko‘rib chiqiladi. Maqola yakunida mavjud yondashuvlarning samaradorligi taqqoslanadi va kelgusida rivojlantirish yo‘nalishlari yuzasidan xulosalar beriladi.

Kalit so‘zlar: *xususiy differensial tenglamalar, sonli usullar, algoritmlar, dasturiy vositalar, modellashtirish, funksiya, geometriya, yechim, analitik usullar, Python, MATLAB, kompyuter, kutubxonalar, NumPy, SciPy.*

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЧАСТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. *Уравнения в частных производных (УЧП) играют ключевую роль в математических моделях многих научных, технических и инженерных задач. Например, многие процессы, такие как тепло- и массоперенос, течение жидкости и газа, теория упругости, электромагнитные поля и квантовая механика, представлены УЧП. Однако аналитические решения этих уравнений часто затруднительны или практически невозможны. Поэтому для их решения широко используются различные численные методы - метод разностей, численное интегрирование, метод элементов и объёмов, а также итерационные и матричные подходы.*

В данной статье представлена подробная информация об алгоритмах и программных средствах, разработанных для численного решения уравнений в частных производных. В частности, анализируются основные принципы построения алгоритмов, вычислительная точность, устойчивость и вычислительная сложность. Также рассматриваются возможности и практические области применения программных средств, разработанных на основе современных сред программирования и библиотек (физика, механика, инженерия, биология и т. д.). В заключение статьи сравнивается эффективность существующих подходов, и делаются выводы о направлениях будущего развития.

Ключевые слова*: уравнения с частными производными, численные методы, алгоритмы, программные средства, моделирование, функция, геометрия, решение, аналитические методы, Python, MATLAB, компьютер, библиотеки, NumPy, SciPy.*

DEVELOPMENT OF ALGORITHMS AND SOFTWARE TOOLS FOR NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *Partial differential equations (PDEs) play a key role in mathematical models of many scientific, technical and engineering problems. For example, many processes such as heat and mass transfer, fluid and gas flow, elasticity theory, electromagnetic fields and quantum mechanics are represented by PDEs. However, analytical solutions to these equations are often difficult or practically impossible.*

Therefore, various numerical methods are widely used to solve them - the method of differences, numerical integration, the method of elements and volumes, as well as iterative and matrix approaches. This article provides detailed information on algorithms and software tools developed for the numerical solution of partial differential equations. In particular, the basic principles of algorithms, computational accuracy, stability and computational complexity are analyzed. Also, the capabilities and practical areas of application of software tools developed on the basis of modern programming environments and libraries (physics, mechanics, engineering, biology, etc.) are considered. The article concludes by comparing the effectiveness of existing approaches and drawing conclusions on areas for future development.

Keywords: *partial differential equations, numerical methods, algorithms, software tools, modeling, function, geometry, solution, analytical methods, Python, MATLAB, computer, libraries, NumPy, SciPy.*

Kirish. Xususiy hosilali differensial tenglamalar matematik analizning muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Ular ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan funksiyalarning hosilalari orasidagi munosabatlarni ifodalashga xizmat qiladi. Ushbu tenglamalar tabiatdagi va texnikadagi turli jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Masalan, issiqlik tarqalishi jarayoni, suyuqliklarning oqimi, elastik materiallarning deformatsiyalanishi, elektromagnit maydonlarning taqsimlanishi kabi hodisalar xususiy hosilali differentsial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Shuning uchun, bu tenglamalarni o‘rganish nafaqat nazariy matematika, balki amaliy fanlar uchun ham juda muhimdir. Xususiy hosilali differensial tenglamalarning asosiy vazifasi berilgan shartlar asosida noma’lum funksiyani topishdan iborat. Bu degani, tenglamaning yechimi ko‘p o‘zgaruvchilar bo‘yicha funksiyalar shaklida bo‘lib, ularning hosilalari tenglama shartlariga mos kelishi kerak. Xususiy hosilali differensial tenglamalar turli xil shakllarda bo‘lishi mumkin. Ularning orasida elliptik tenglamalar, parabolik tenglamalar va giperbolik tenglamalar ajralib turadi. Har bir tur o‘ziga xos xususiyatlarga ega bo‘lib, ularning yechimlarini topish usullari ham farq qiladi. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish jarayoni murakkab va ko‘p bosqichlardan iborat. Ba’zan analitik, ya’ni aniq ifodalar shaklida yechim topish mumkin bo‘lmaydi. Bunday hollarda sonli metodlar yordamga keladi. Sonli metodlar yordamida tenglamaning yechimi yaqinlashgan tarzda hisoblanadi. Bu usullar amaliy masalalarda keng qo‘llaniladi. Zamonaviy kompyuter texnologiyalari va dasturiy ta’minot vositalari xususiy hosilali differensial tenglamalarni samarali yechishda katta yordam beradi. Bu esa ilmiy tadqiqotlar va sanoat sohalarida keng qo‘llanilmoqda. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni o‘rganish nafaqat matematik nazariyani rivojlantirishga xizmat qiladi, balki muhandislik, fizika, biologiya va iqtisodiyot kabi sohalarda ham muhim ahamiyatga ega. Masalan, meteorologiyada ob-havo bashoratini qilishda, tibbiyotda qon oqimini modellashtirishda, iqtisodiyotda moliyaviy jarayonlarni tahlil qilishda xususiy hosilali differensial tenglamalardan foydalaniladi. Shu sababli, xususiy hosilali differensial tenglamalarni chuqur o‘rganish va ularning yechimlarini topish metodlarini mukammal egallash har bir mutaxassis uchun zarurdir.

Adabiyotlar tahlili va tadqiqot metodologiyasi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar, o‘zgaruvchilar va ularning hosilalari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Bu tenglamalar ko‘pincha fizik, kimyoviy, biologik va iqtisodiy jarayonlarni modellashda ishlatiladi. Masalan, issiqlik tarqalishi, suyuqlik harakati, elektromagnit maydonlar, populyatsiya dinamikasi kabi sohalarda keng qo‘llaniladi. Ularning yechimlarini topish uchun an’anaviy analitik usullar ko‘p hollarda cheklangan, shuning uchun sonli usullar yordamida yechimlarni topish zarurati tug‘iladi. Sonli usullar differensial tenglamalarni diskret shaklga keltirish orqali ularni yechishga imkon beradi. Bu usullar yordamida uzluksiz funksiya va uning hosilalari diskret nuqtalar to‘plamida ifodalanadi. Asosiy sonli usullarga farqlar usuli, elementlar usuli, farqlash usuli va boshqalar kiradi. Har bir usulning o‘ziga xos afzalliklari va kamchiliklari mavjud bo‘lib, tanlov masalaning tabiati va talablariga bog‘liq bo‘ladi. Farqlar usuli eng ko‘p qo‘llaniladigan sonli usullardan biridir. Bu usulda hosilalar yaqin atrofdagi nuqtalardagi funksiya qiymatlari yordamida ifodalanadi. Masalan, birinchi tartibli hosila yaqin nuqtalar orasidagi farq sifatida qabul qilinadi. Farqlar usuli oddiy va amaliy hisoblanadi, ammo u yuqori aniqlik talab qilinadigan masalalarda ba’zan yetarli bo‘lmasligi mumkin. Shu bois, yanada murakkab usullar ishlab chiqilgan.

Elementlar usuli esa masalani kichik elementlarga bo‘lib, har bir elementda yechimni yaqinlashma sifatida ifodalaydi. Bu usul murakkab shakllarga ega sohalarda, masalan, geometriyasi noaniq bo‘lgan hududlarda samarali ishlaydi. Elementlar usuli yordamida differensial tenglamalar integral shaklga keltiriladi va diskretlashtiriladi, bu esa hisoblash jarayonini soddalashtiradi. Ushbu usul ko‘plab dasturiy vositalarda asosiy algoritm sifatida qo‘llaniladi. Farqlash usuli esa differensial tenglamalarni farqlash operatorlari yordamida yechishni nazarda tutadi. Bu usulda hosilalar operator shaklida ifodalanadi va tenglama operator tenglamasiga aylantiriladi. Farqlash usuli ko‘proq nazariy tahlil va ba’zi maxsus masalalarda qo‘llaniladi. Sonli yechimlar algoritmlari samaradorligini oshirish uchun turli optimallashtirish usullari va parallel hisoblash texnologiyalari qo‘llaniladi. Masalan, iterativ yechim usullari yordamida katta o‘lchamli

masalalarni tez va samarali yechish mumkin. Shuningdek, adaptiv tarmoq usullari yordamida hisoblash nuqtalarining zichligi masalaning murakkab joylarida oshiriladi, bu esa yechim aniqligini yaxshilaydi.

Muhokama va natijalar. Dasturiy vositalar nuqtayi nazaridan qaraganda, xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun ko‘plab maxsus paketlar va kutubxonalar mavjud. MATLAB, COMSOL Multiphysics, ANSYS, FreeFEM kabi dasturlar keng qo‘llaniladi. Ular foydalanuvchiga grafik interfeys, tayyor algoritmlar, va murakkab masalalarni yechish imkoniyatini beradi. Shuningdek, Python dasturlash tilida NumPy, SciPy, FEniCS kabi kutubxonalar yordamida mos algoritmlar yaratish mumkin. MATLAB dasturi o‘zining qulay interfeysi va kuchli hisoblash imkoniyatlari bilan mashhur. Unda farqlar va elementlar usullari uchun tayyor funksiyalar mavjud bo‘lib, foydalanuvchi o‘z masalasiga moslashtirilgan kod yozishi mumkin. COMSOL Multiphysics esa ko‘p fizikaviy jarayonlarni birgalikda modellashtirish imkonini beradi, bu esa ko‘p komponentli tizimlarni o‘rganishda juda foydali [1].

ANSYS dasturi asosan mexanik va issiqlik muammolarini yechishda keng qo‘llaniladi. U yuqori aniqlikdagi elementlar usulini qo‘llab-quvvatlaydi va katta hajmdagi hisoblashlarni samarali bajaradi. FreeFEM esa ochiq manba kodli dastur bo‘lib, ilmiy tadqiqotlar uchun qulay va moslashuvchan hisoblanadi. Python tilidagi kutubxonalar esa dasturchilar va tadqiqotchilarga o‘z algoritmlarini yaratish va sinovdan o‘tkazish imkonini beradi. NumPy va SciPy sonli hisoblash uchun zarur funksiyalarni taqdim etsa, FEniCS esa elementlar usulini qo‘llash uchun mo‘ljallangan yuqori darajadagi interfeysni taklif etadi. Bu vositalar yordamida yangi algoritmlar ishlab chiqish va mavjudlarini takomillashtirish mumkin [2].

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda yuzaga keladigan asosiy muammolardan biri bu barqarorlik va aniqlik masalalaridir. Sonli usullar ba’zan yechimda xatoliklar keltirib chiqarishi mumkin, ayniqsa, masala murakkab va noaniq sharoitlarda bo‘lsa. Shuning uchun algoritmlarni ishlab chiqishda barqarorlikni ta’minlash va xatoliklarni kamaytirish uchun maxsus texnikalar qo‘llaniladi. Bundan tashqari, hisoblash resurslarining cheklanganligi ham muhim omil hisoblanadi. Katta o‘lchamli masalalarni yechishda kompyuterning tezligi va xotira hajmi katta rol o‘ynaydi. Shu sababli, samarali algoritmlar yaratish va hisoblashlarni optimallashtirish dolzarb vazifa bo‘lib qolmoqda. Sonli usullar yordamida xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishning yana bir muhim jihati bu natijalarni vizualizatsiya qilishdir. Grafik ko‘rinishdagi yechimlar masalaning xususiyatlarini yaxshiroq tushunishga yordam beradi. Ko‘pgina dasturiy vositalar natijalarni 2D va 3D grafikalar shaklida taqdim etadi, bu esa foydalanuvchiga tahlil va hisobot tayyorlashda qulaylik yaratadi. Kelajakda xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda sun’iy intellekt va mashina o‘rganish usullarining qo‘llanilishi kengayishi kutilmoqda. Bu texnologiyalar murakkab masalalarni tez va aniq yechishda yangi imkoniyatlar ochadi. Shuningdek, bulutli hisoblash texnologiyalari yordamida katta hajmdagi hisoblashlarni samarali bajarish mumkin bo‘ladi [3].

Xususiy hosilali differensial tenglamalar (XHDT) ko‘plab ilmiy va muhandislik sohalarida uchraydigan matematik modellashtirishda muhim o‘rin tutadi. Ularning yechimlari ko‘pincha real dunyo jarayonlarini tushunish, tahlil qilish va prognoz qilish uchun zarurdir. Bunday tenglamalarni yechish murakkab bo‘lishi mumkin, chunki ular ko‘plab o‘zgaruvchilar va hosilalarga ega bo‘ladi, shuningdek, ba’zan noaniq yoki murakkab chegaraviy shartlar bilan bog‘liq bo‘ladi. Shu sababli, ularni yechish uchun maxsus dasturiy vositalar va hisoblash metodlari zarur bo‘ladi. Birinchi navbatda, MATLAB dasturi haqida gapirish lozim. Bu dastur ilmiy hisoblash va muhandislik hisob-kitoblari uchun keng qo‘llaniladi. MATLABning asosiy afzalliklaridan biri uning qulay interfeysi va keng kutubxonalar to‘plamidir. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda MATLABning PDE Toolbox moduli juda foydalidir. Ushbu modul foydalanuvchilarga tenglamalarni grafik interfeys orqali yoki kod yozish orqali ifodalash imkonini beradi. PDE Toolbox yordamida foydalanuvchilar murakkab chegaraviy shartlar va geometriyalarni osonlik bilan modellashtira oladi. MATLAB shuningdek, farqlar usuli, elementlar usuli va boshqa sonli usullarni qo‘llab-quvvatlaydi, bu esa masalani yechishda yuqori aniqlik va moslashuvchanlikni ta’minlaydi. MATLABning kuchli vizualizatsiya imkoniyatlari natijalarni tahlil qilish va taqdim etishda muhim ahamiyatga ega [4].

COMSOL Multiphysics dasturi ham xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Bu dastur ko‘p fizikaviy jarayonlarni birgalikda modellashtirish imkonini beradi, shuningdek, foydalanuvchilarga murakkab tizimlarni tahlil qilish uchun kuchli vositalarni taqdim etadi. COMSOLning asosiy afzalligi uning ko‘p modulli arxitekturasi bo‘lib, foydalanuvchilar turli sohalardagi tenglamalarni birlashtirishlari mumkin. Masalan, issiqlik o‘tkazuvchanligi, suyuqlik dinamikasi va elektromagnit maydonlar kabi bir nechta fizik hodisalarni bir vaqtning o‘zida o‘rganish mumkin. COMSOL elementlar usuliga asoslangan bo‘lib, foydalanuvchilar murakkab geometriyalarni aniqlik bilan modellashtirishi va natijalarni yuqori darajada vizualizatsiya qilishi mumkin. ANSYS dasturi asosan muhandislik sohasida keng qo‘llaniladi, ayniqsa mexanik strukturalar, issiqlik almashinuvi va suyuqliklar dinamikasi muammolarini yechishda. ANSYSning kuchli hisoblash imkoniyatlari va yuqori aniqlikdagi elementlar usuli yordamida

foydalanuvchilar katta hajmdagi va murakkab masalalarni samarali hal qilishlari mumkin. Bu dastur ko‘plab sanoat tarmoqlarida, jumladan avtomobilsozlik, aerokosmik va energetika sohalarida keng qo‘llaniladi. ANSYS foydalanuvchilarga keng qamrovli modellashtirish imkoniyatlarini taqdim etadi va natijalarni tahlil qilish uchun kuchli vositalarga ega. FreeFEM dasturi ochiq manba kodli va ilmiy tadqiqotlarda keng qo‘llaniladigan vosita hisoblanadi. U elementlar usuliga asoslangan bo‘lib, foydalanuvchilarga o‘zlarining maxsus algoritmlarini yaratish va mavjudlarini moslashtirish imkonini beradi. FreeFEM ko‘plab matematik va fizik masalalarni yechishda ishlatiladi va uning asosiy afzalligi uning erkinligi va moslashuvchanligidadir. Bu dastur, ayniqsa, ilmiy tadqiqotlar va yangi metodlarni sinab ko‘rish uchun juda qulaydir, chunki foydalanuvchilar kodni to‘liq nazorat qila oladi.

Python dasturlash tili va uning kutubxonalari ham xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda keng qo‘llaniladi. Pythonning asosiy afzalligi uning soddaligi va keng kutubxonalar ekotizimidir. NumPy va SciPy kutubxonalari sonli hisoblash uchun zarur funksiyalarni taqdim etadi, shu jumladan differentsial tenglamalarni yechish uchun tayyor metodlar mavjud. Bundan tashqari, FEniCS kutubxonasi elementlar usulini qo‘llash uchun yuqori darajadagi interfeysni taqdim etadi. FEniCS yordamida foydalanuvchilar murakkab geometriyalar va chegaraviy shartlar bilan ishlashlari mumkin, shuningdek, yangi yechim algoritmlarini yaratish va mavjudlarini takomillashtirish imkoniyatiga ega bo‘ladilar. Pythonning ochiq manba bo‘lishi va keng jamoatchilik tomonidan qo‘llab-quvvatlanishi uni ilmiy tadqiqotlar va amaliy ishlarda juda mashhur qiladi [6].

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda ishlatiladigan boshqa dasturiy vositalar ham mavjud. Masalan, Maple va Mathematica kabi matematik dasturlar symbolic hisoblash imkoniyatlariga ega bo‘lib, ular analitik yechimlarni topishda foydali bo‘lishi mumkin. Ushbu dasturlar murakkab matematik ifodalarni soddalashtirish, differensial tenglamalarni tahlil qilish va grafik ko‘rinishda ifodalash uchun qulaydir. Shuningdek, ko‘plab maxsus dasturiy paketlar va kutubxonalar mavjud bo‘lib, ular ma’lum sohalarga yoki masalalarga yo‘naltirilgan. Masalan, suyuqlik dinamikasi uchun OpenFOAM, issiqlik o‘tkazuvchanligi uchun Heat Transfer Toolbox kabi vositalar mavjud. Bu paketlar o‘ziga xos fizik qonunlarni hisobga olgan holda maxsus yechim algoritmlarini taqdim etadi. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun dasturiy vositalarni tanlashda bir nechta omillarni hisobga olish zarur. Masalan, masalaning murakkabligi, kerakli aniqlik darajasi, hisoblash resurslari, foydalanuvchining dasturlash ko‘nikmalari va natijalarni vizualizatsiya qilish ehtiyojlari muhim rol o‘ynaydi. Ba’zi dasturlar foydalanuvchiga qulay grafik interfeysni taqdim etsa, boshqalari esa ko‘proq dasturlash va kod yozishni talab qiladi. Shu sababli, mos vositani tanlashda masalaning xususiyatlarini va foydalanuvchining maqsadlarini aniq belgilash muhimdir.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda zamonaviy dasturiy vositalar katta yordam beradi. MATLAB, COMSOL Multiphysics, ANSYS, FreeFEM va Python kutubxonalari kabi vositalar turli xil masalalarni samarali hal qilish imkonini beradi. Ularning har biri o‘zining afzalliklari va kamchiliklariga ega bo‘lib, turli sohalarda qo‘llaniladi. Shuningdek, matematik dasturlar va maxsus paketlar muayyan ehtiyojlarga moslashtirilgan yechimlar taqdim etadi. Ushbu vositalar yordamida ilmiy tadqiqotlar, muhandislik loyihalari va ta’lim jarayonlari yanada samarali va sifatli amalga oshiriladi. Dasturiy ta’minot tanlovida masalaning murakkabligi, foydalanuvchining tajribasi va hisoblash imkoniyatlari doimo e’tiborda bo‘lishi lozim. Bu esa xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasida yangi yutuqlar va innovatsiyalarni amalga oshirishga katta turtki beradi.

Xulosa. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish uchun turli algoritmlar va dasturiy vositalar mavjud bo‘lib, ularning tanlovi masalaning tabiati va talablariga bog‘liq. Farqlar usuli, elementlar usuli va farqlash usuli kabi asosiy sonli usullar keng qo‘llaniladi. Zamonaviy dasturiy vositalar esa hisoblash jarayonini soddalashtiradi va natijalarni tahlil qilish imkonini beradi. Barqarorlik, aniqlik va hisoblash resurslarini samarali boshqarish muhim ahamiyatga ega. Kelajakda sun’iy intellekt va yangi texnologiyalar yordamida bu sohada yanada ilg‘or yechimlar paydo bo‘lishi kutilmoqda.

ADABIYOTLAR:

1. Axmedov, B. M. "Xususiy hosilali differentsial tenglamalarning sonli yechish usullari" Toshkent: Fan va Texnologiya, 2021.

2. Orifov, S. T. "Differensial tenglamalarni sonli yechish algoritmlari va ularning dasturiy ta'minoti" Samarqand: Sharq, 2022.

3. Mirzaev, J. R. "Matematik modellashtirishda sonli metodlar va dasturiy vositalar" Toshkent: Ilm, 2017.

4. Rustamov, D. K. "Xususiy hosilali differentsial tenglamalarni yechish uchun yangi algoritmlar." Nukus: Qoraqalpoq Universiteti Nashriyoti, 2021.

5. Tursunov, A. S. "Sonli metodlar asosida differensial tenglamalarni yechish" Buxoro: Buxoro Davlat Universiteti Nashriyoti, 2021.

6. Karimov, N. I. "Dasturiy ta'minot vositalarida xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish" Toshkent: Axborot, 2020.

7. Islomov, M. Q. "Elementlar usuli va uning sonli dasturlari" Qarshi: Qarshi Muhandislik-Iqtisodiyot Instituti Nashriyoti, 2022.

8. Sobirov, F. J. "Xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish: nazariy va amaliy jihatlar" Andijon: Andijon Davlat Universiteti Nashriyoti, 2023.

9. Yusupov, R. B. "Sonli yechim algoritmlarining samaradorligini oshirish" Namangan: Namangan Davlat Universiteti Nashriyoti, 2021.

10. Jalilov, S. H. "Matematik dasturlar yordamida differensial tenglamalarni yechish" Toshkent: Ilm-fan, 2022.

UO‘K 51

ASIMPTOTIK USULLARNING SPEKTRAL MASALALARGA TADBIQLARI

Jo‘rayeva Dilnavoz Umidjon qizi,
Farg‘ona davlat texnika universiteti
Oliy matematika kafedrasi assistenti
diljora587@gmail.com

Annotatsiya. *Tenglama μ parametrning 3 ta holi uchun ko‘rib chiqilgan va yechimlari topilgan. Bunda tenglama almashtirish yordamida Bessel tenglamasiga keltirilgan va uning yechimidan foydalanib dastlabki tenglamaning umumiy yechimi topilgan. Topilgan umumiy yechim chegaraviy shartlarga bo‘ysundirib, masalaning formal yechimi topilgan. Yechimni Bessel funksiyasining asimptotik formulalaridan va Bessel operatoridan foydalanib baholangan. So‘ngra bu yechim, haqiqatdan ham masala yechimi ekanligi ko‘rsatilgan. Olingan natijalar qo‘yilgan masalalarning oldingi yechimlaridan ancha farq qilganligi sababli bu sohadagi izlanishlar dolzarb hisoblanadi.*

Kalit so‘zlar: *differensial tenglama, Bessel operatori, Bessel tenglamasi, formal yechim, spektral masala, xos son, xos funksiya, asimtotik usul.*

ПРИЛОЖЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

Аннотация. *Рассмотрено уравнение для трёх вариантов μ параметра и найдены решения. В данном случае уравнение с помощью подстановки сведено к уравнению Бесселя, и, используя его решение, найдено общее решение исходного уравнения. Найденное общее решение подвергнуто граничным условиям, и найдено формальное решение задачи. Решение оценено с помощью асимптотических формул функции Бесселя и оператора Бесселя. Затем показано, что это решение действительно является решением задачи. Исследования в данной области считаются актуальными, поскольку полученные результаты существенно отличаются от ранее найденных решений поставленных задач.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, уравнение Бесселя, оператор Бесселя, формальное решение, спектральная задача, собственное значение, собственная функция, асимптотический метод.*

APPLICATIONS OF ASYMPTOTIC METHODS TO SPECTRAL PROBLEMS

Abstract. *The equation was considered for 3 cases of the μ parameter and solutions were found. In this case, the equation was reduced to the Bessel equation using substitution and using its solution, a general solution of the original equation was found. The general solution found was subjected to boundary conditions, and a formal solution to the problem was found. The solution was evaluated using the asymptotic formulas of the Bessel function and the Bessel operator. Then it was shown that this solution is indeed a solution to the problem. Research in this area is considered relevant because the results obtained differ significantly from previous solutions to the problems posed.*

Key words: *differential equation, Bessel equation, Bessel operator, formal solution, spectral problem, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic method.*

Kirish. Buziladigan oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalalarni asimptotik usullar yordamida baholash uchun biz quyidagi oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan masalalardan birini ko‘rib chiqamiz. Ushbu tenglama uchun $y(0)=0,\ y(a)=A$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini boshqa ilmiy maqolalarimda ko‘rsatilgan va asimtotik usullarda baholangan [4]. Quyidagi ikkita masalada boshqa chegaraviy shartlar uchun yechimini ko‘rib chiqamiz.

Adabiyotlar tahlili va metodologiya. Bugungi kunda tenglama yechimini asimptotik usullar yordamida baholash differensial tenglamalar sohasidagi asosiy o‘rganilayotgan yo‘nalishlardan biridir. Bu sohadagi nazariyalarning rivojlanishini, G.N.Vatsonning ishidan boshlangan. So’ngra bu sohada I.A.Kipriyanov, O.V.Vidilina, A.Q.O‘rinov va ko‘plab izlanuvchilarning e’lon qilingan fundamental ishlarida ko‘rish mumkin.

Natijalar. Buziladigan oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalalarni asimptotik usullar yordamida baholash. Bunda tenglama almashtirish yordamida Bessel tenglamasiga keltirildi va uning yechimidan foydalanib dastlabki tenglamaning umumiy yechimi topildi. Topilgan umumiy yechim chegaraviy shartlarga bo‘ysundirilib, masalaning formal yechimi topildi. Yechimni Bessel funksiyasining asimptotik formulalaridan foydalanib baholandi. So‘ngra bu yechim, haqiqatdan ham masala yechimi ekanligi ko‘rsatildi.

1-masala.

Agar $p(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[0,1]$ intervalda uzluksiz bo‘lib, $p(0)=0$ bo‘lsa, ushbu

$$\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = f(x),\ x\in(0,1) \tag{A}$$

tenglama chegarada buziladigan ikkinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.

(A) tenglamada $p(x)=x^{2\alpha}$, $q(x)=\mu x^{2\alpha}$ va $f(x)=0$, $\alpha\in(-2,1/2)$ bo‘lganda, chegaraviy masalalardan birini ko‘rib o‘taylik. [4]

μ - parametrning shunday qiymatlari topilsinki,

$$\left[x^{2\alpha}y'(x)\right]' + \mu x^{2\alpha}y(x) = 0,\ x\in(0,a) \tag{1}$$

tenglamaning

$$y(0)=0, \qquad y(a)=0 \tag{2}$$

1. shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo‘lmagan $y(x)\in C[0,a]\cap C^2(0,a)$ yechimi mavjud bo‘lsin. Xos son va xos funksiyalarini topamiz [1], [4].

Biz bu masalani μ parametrning 3 ta holi uchun ko‘rib chiqamiz.

2. $\mu<0$ bo‘lganda. U holda, $\left(t/\sqrt{-\mu}\right)^{1/2-\alpha}p(t)$ ko‘rinishda o‘zgaruvchilarni almashtiramiz. Bu yerda $t=\sqrt{-\mu}x$. Natijada quyidagi Bessel tenglamasi deb nomlanuvchi [2], [4], [7]

$$t^2p''(t)+tp'(t)-\left[t^2+(1/2-\alpha)^2\right]p(t)=0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning umumiy yechimi ma’lum bo‘lib [2], qilingan almashtirishdan foydalanib, x o‘zgaruvchiga qaytadigan bo‘lsak, (1) tenglamaning $\mu<0$ bo ‘lgandagi umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y(x)=c_1x^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)+c_2x^{1/2-\alpha}K_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right) \tag{3}$$

Bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy konstantalar, $I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)$ mavhum argumentli Bessel funksiyasi va $K_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)$ Makdonald funksiyasi [2], [4], [7].

(3) ni (2) chegaraviy shartning birinchisiga bo‘ysundiramiz. Natijada $x^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)$ funksiyaning $\alpha<1/2$ shartni inobatga oladigan bo‘lsak, $x=0$ dagi qiymati 0 ga teng bo‘ladi,

$$x^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)=x^{1/2-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha+n\right)}=$$

$$=x^{1-2\alpha}\left(\sqrt{-\mu}/2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha+n\right)}$$

$x^{1/2-\alpha}K_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)$ funksiyaning esa $x=0$ dagi qiymati o‘zgarmas songa teng bo‘ladi va biz $c_2=0$ deyishga majbur bo‘lamiz.

$$x^{1/2-\alpha}K_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)=x^{1/2-\alpha}\frac{\pi}{2}\frac{I_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{-\mu}x\right)-I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\pi}=\frac{\pi}{2\cos\alpha\pi}x^{1/2-\alpha}\times$$

$$\times\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+n\right)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{\frac{1}{2}-\alpha+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha+n\right)}\right]=$$

$$\frac{\pi}{2\cos\alpha\pi}\left[\left(\sqrt{-\mu}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha+n\right)}-\left(\sqrt{-\mu}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}x^{1-2\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{-\mu}x/2\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha+n\right)}\right]$$

Natijada (3) tenglamaning (2) shartlardan birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y(x)=c_1x^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}x\right) \tag{4}$$

Qo‘yilgan masalaning yechimini hosil qilish uchun esa, (1.4) funksiyani (1.2) shartning ikkinchisiga olib borib qo‘yamiz:

$$c_1a^{1/2-\alpha}I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}a\right)=0$$

Oxirgi tenglamada mavhum argumentli Bessel funksiyasining grafigidan ko‘rinadiki, $I_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{-\mu}a\right)\neq 0$. U holda c_1 ni nol deyishga majbur bo‘lamiz. $c_1=c_2=0$ ligidan $y(x)=0$. Demak, $\mu<0$ bo‘lgan holda tenglama trivial yechimga ega.

3. $\mu=0$ bo‘lganda, tenglama

$$\left[x^{2\alpha}y'(x)\right]'=0$$

ushbu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=c_3x^{1-2\alpha}+c_4 \tag{5}$$

ko‘rinishda topiladi.

(5) ni (2) chegaraviy shartning birinchisiga bo‘ysundiramiz. Bundan $c_4 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada (5) tenglamaning (2) shartlardan birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y(x) = c_3 x^{1-2\alpha}$$

Qo‘yilgan masalaning yechimini hosil qilish uchun esa, (5) funksiyani (2) shartning ikkinchisiga olib borib qo‘yamiz:

$$y(a) = c_3 a^{1-2\alpha} = 0$$

bu yerda $a \neq 0$ ekanligidan $c_3 = 0$ ni nol deyishga majbur bo‘lamiz. $c_3 = c_4 = 0$ ligidan $y(x) = 0$. Demak, $\mu = 0$ bo‘lgan holda tenglama trivial yechimga ega.

4. $\mu > 0$ bo‘lganda. U holda, $\left(t/\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha} p(t)$ ko‘rinishda o‘zgaruvchilarni almashtiramiz. Bu yerda $t = \sqrt{\mu}x$. Natijada quyidagi Bessel tenglamasi deb nomlanuvchi [2], [4]

$$t^2 p''(t) + tp'(t) + \left[t^2 - (1/2-\alpha)^2\right] p(t) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning umumiy yechimi ma’lum bo‘lib [2], [4] qilingan almashtirishdan foydalanib, x o‘zgaruvchiga qaytadigan bo‘lsak, (1) tenglamaning $\mu > 0$ bo‘lgandagi umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y(x) = c_5 x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right) + c_6 x^{1/2-\alpha} Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right), \qquad (6)$$

bu yerda c_5 va c_6 - ixtiyoriy o‘zgarmaslar, $J_l(x)$ va $Y_l(x)$ – mos holda l tartibli birinchi va ikkinchi tur Bessel funksiyalari deb nomlanadi [2], [4].

(6) ni (2) chegaraviy shartning birinchisiga bo‘ysundiramiz. Natijada $x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ funksiyaning $\alpha < 1/2$ shartni inobatga oladigan bo‘lsak, $x = 0$ dagi qiymati 0 ga teng bo‘ladi, $x^{1/2-\alpha} Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)$ funksiyaning esa $x = 0$ dagi qiymati o‘zgarmas songa teng bo‘ladi va biz $c_6 = 0$ deyishga majbur bo‘lamiz.

$$Y_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right) = \frac{2}{\pi} J_{1/2-\alpha}(x)\left(\ln x + C\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{-\frac{1}{2}-\alpha} \frac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha-k\right)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}+\alpha} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\frac{1}{2}-\alpha}}{k!\left(k+\frac{1}{2}-\alpha\right)!} \left(\sum_{m=1}^{k+\frac{1}{2}-\alpha} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \right)$$

Natijada tenglamaning (2) shartlardan birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘lishini topamiz:

$$y(x) = c_5 x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right) \qquad (7)$$

Qo‘yilgan masalaning yechimini hosil qilish uchun esa, (6) funksiyani (2) shartning ikkinchisiga olib borib qo‘yamiz:

$$y(a) = c_5 a^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right) = 0$$

bu yerda biz trivial bo‘lmagan yechimni topishimiz uchun $c_5 \neq 0$ deb olamiz. Bundan $J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, birinchi tur Bessel funksiyasi ko‘plab ildizlarga ega. Uning noldan farqli musbat ildizlarini $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3.....\sigma_m$ lar bilan belgilaylik, u holda $\sqrt{\mu}a=\sigma_m, \quad \mu=\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^2$ ga teng bo‘ladi. Bu yerda $\mu=\mu_m=\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^2, \quad m\in N$ masalaning xos qiymatlari. Masalaning notrivial yechimi (xos funksiyasi) esa quyidagicha bo‘ladi

$$y_m(x)=c_5 x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_m x}{a}\right), \qquad m\in N \tag{8}$$

Endi (8) yechimdagi $\mu=\mu_m=\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^2, \quad m\in N$ sonli parametrning 0 va $+\infty$ ga intilganda, (8) funksiya qanday holatda bo‘lishini o‘rganib chiqamiz. Aniqroq aytadigan bo‘lsak, (1), (2) masalaning yechimini $\mu>0$ bo‘lganda asoslaymiz. Buning uchun $y(x)$ funksiyani $x\in[0,a]$ da va $B^x_{\alpha-1/2}y(x)$ ni esa $x\in(0,a)$ da mavjudligini va chegaralanganligini ko‘rsatishimizga to‘g‘ri keladi. Bu yerda $B_q^x\equiv\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2q+1}{2}\frac{d}{dx}$ bo‘lib, bu belgi Bessel operatiridir.

1-lemma. Agar $\alpha\in(-2,1/2)$ oraliqda bo‘lsa, (8) tenglik bilan aniqlanuvchi $y(x)$ funksiya yetarli katta $\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^2, \quad m\in N$ larda, quyidagi baholar o‘rinli:

$$|y(x)|\le\begin{cases}c_7\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{\alpha-1/2} \ agar \ \ \alpha\in[0,1/2),\\ c_8\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{-1/2} \ agar \ \ \alpha\in(-2,0),\end{cases} \tag{9}$$

$$\left|B^x_{\alpha-1/2}y(x)\right|\le\begin{cases}c_9\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{3/2+\alpha} \ agar \ \ \alpha\in[0,1/2),\\ c_{10}\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{3/2} \ agar \ \ \alpha\in(-2,0),\end{cases} \tag{10}$$

5. Bu yerda $c_j,\ j=\overline{7,10}-$ musbat o‘zgarmaslar. [3], [4]

Isbot. Aytaylik $\alpha\in[0,1/2)$. U holda $y(x)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$y(x)=\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{\alpha-1/2}\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi), \tag{11}$$

bu yerda $\xi=\frac{\sigma_m}{a}x$. $\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)$ funksiya $[0,+\infty)$ uzluksiz va $\xi=0$ da nolga teng. Bundan tashqari Bessel funksiyasining $\xi\to\infty$ bo‘lgandagi asimptotik formulasidan, ya’ni

$$J_\nu(\xi)\approx\left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2}\cos\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \tag{12}$$

6. formuladan $\lim\limits_{\xi\to\infty}\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)=0$ tenglikning o‘rinliligi kelib chiqadi. Demak, $\left|\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|$ funksiya $\xi\in[0,+\infty)$ bo‘lganda chegaralangan, ya’ni $\left|\xi^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|\le\tilde{c}_{11}$, bu yerda $\tilde{c}_{11}=const>0$. Agar buni e’tiborga oladigan bo‘lsak (11) dan (9) ning birinchi bahosi kelib chiqadi.

Agar $\alpha<0$ bo‘lsa, u holda $y(x)$ funksiyani $y(x)=x^{-\alpha}\left(\frac{\sigma_m}{a}\right)^{-1/2}\xi^{1/2}J_{1/2-\alpha}(\xi)$ ko‘rinishda yozib olamiz, bu yerda $\xi=\frac{\sigma_m}{a}x$. Yuqoridagi mulohazadan $\left|\xi^{1/2}J_{1/2-\alpha}(\xi)\right|\le\tilde{c}_{12}=const$, $\xi\in[0,+\infty)$ ekanligini topish mumkin. Buni e’tiborga olib va $\left|x^{-\alpha}\right|<a^{-\alpha}$ tengsizlikning $x\in[0,a]$ holda to‘g‘riligidan, oxirgi tenglikdan (9) ning ikkinchi bahosi to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

Ma’lumki, $y(x)$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi. Bu yerdan $B^x_{\alpha-1/2}y(x)=-\mu y(x)$ ekanligi kelib chiqadi. U holda, (9) bahoga asosan (1.10) baho kelib chiqadi. Lemma 1 isbotlandi.

Demak, (6) tenglik bilan aniqlanuvchi $y(x)$ funksiya $\alpha\in(-2,1/2)$ va $\mu>0$ bo‘lganda (1), (2) masalaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. [4]

Xulosa. Mazkur maqolada asimptotik usullarning spektral masalalarga tadbiqlari o‘rganilgan. Chegarada buziladigan ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun spektral masalalar ko‘rib chiqilgan. Bunda tenglama almashtirish yordamida Bessel tenglamasiga keltirilgan va uning yechimidan foydalanib dastlabki tenglamaning umumiy yechimi topilgan. Topilgan umumiy yechim chegaraviy shartlarga bo‘ysundirilib, masalalarning formal yechimlari topilgan. Yechimni xos sonlari, unga mos xos funksiyalari ham topilgan. So‘ngra bu yechim asimptotik formulalar yordamida baholangan.

ADABIYOTLAR:

1. *Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949.-798 с.*
2. *Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции – М. ОГИЗ, Гостехиздат, 1978. 376 с.*
3. *Эрдеи А. Асимптотические разложения - М.: Физматгиз, 1962. 127с.*
4. *Видилина О.В, Щетинина Е.В. Асимптотические методы в анализе. Самара – 2010.*
5. *Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. Москва: Наука, Физматлит, 1997. 204 с.*
6. *Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трёхмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. –2017, –Т.21, №4, –С. 665–683с.*
7. *O‘rinov A.Q. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. Farg‘ona –2012.*
8. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Ташкент; Фан, 1997. -168с.*
9. *Karimov K.T. Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped // Lobachevskii Journal of Mathematics. –2020. –V.41, No.1. –pp. 46-57.*
10. *Jo‘rayeva D.U. Katta “O” va kichik “o” belgilari va ularning tadbiqlari. “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. Andijon – 2022. 43,44,45,46 c.*
11. *Jo‘rayeva D.U. Singulyar koeffitsentga ega bo‘lgan oddiy differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala. “Algebra va analizning dolzarb masalalari” mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. Termiz-2022. 107-108 c.*

12. Karimov K.T, Jo‘rayeva D.U. Buziladigan oddiy differensial tenglama uchun birinchinchi chegaraviy masala. // O‘zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali. O‘zbekiston – 2022. 467-472 c.

UDC 517.938

BIFURCATION OF CYCLES IN TWO-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEMS WITH HOMOGENEOUS NONLINEARITIES

Kungirov Mamirboy Norbek ugli,
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
mamur.qongirov@mail.ru

Abstract. *This article is devoted to the study of the bifurcation of cycles in two-dimensional dynamical systems depending on a small parameter. Hamiltonian systems with homogeneous polynomial nonlinearities are considered. New necessary and sufficient conditions for the bifurcation of cycles are obtained. The relevance of the problem is due to the theoretical and practical importance of the qualitative analysis of dynamical systems. The work uses methods of averaging theory, based on the classical results of N.N. Bogolyubov and N.M. Krylov. It is shown that the bifurcation of cycles is generally impossible for even-degree nonlinearities and possible for odd-degree nonlinearities. A new approach for determining bifurcation conditions is proposed.*

Keywords: *dynamical system, bifurcation, cycles, Hamiltonian system, homogeneous polynomial, averaging, small parameter.*

IKKI O‘LCHOVLI BIR JINSLI NOCHIZIQLI GAMILTON SISTEMALARDA SIKLLAR BIFURKATSIYASI

Annotatsiya. *Ushbu maqola kichik parametrga bog‘liq bo‘lgan ikki o‘lchovli dinamik sistemalarda sikllar bifurkatsiyasini o‘rganishga bag‘ishlangan. Bir jinsli ko‘phadli chiziqli bo‘lmagan Gamilton sistemalari qaralgan. Sikllar bifurkatsiyasi uchun yangi zaruriy va yetarli shartlar olingan. Muammoning dolzarbligi dinamik sistemalarning sifatli tahlilining nazariy va amaliy ahamiyati bilan belgilanadi. Ishda N.N.Bogolyubov va N.M.Krilovning klassik natijalariga asoslangan o‘rtachalash usullaridan foydalanilgan. Maqolada, sikllar bifurkatsiyasi, odatda, nochiziqliikning juft darajasi uchun mumkin emas va nochiziqliikning toq darajasi uchun mumkin. Bifurkatsiya shartlarini aniqlash uchun yangi yondashuv taklif etilgan.*

Kalit so‘zlar: *dinamik sistema, bifurkatsiya, sikllar, Gamilton sistemasi, bir jinsli ko‘phad, o‘rtachalash, kichik parametr.*

БИФУРКАЦИЯ ЦИКЛОВ В ДВУМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Аннотация. *Данная статья посвящена исследованию бифуркации циклов в двумерных динамических системах, зависящих от малого параметра. Рассматриваются гамильтоновы системы с однородными полиномиальными нелинейностями. Получены новые необходимые и достаточные условия бифуркации циклов. Актуальность проблемы обусловлена теоретической и практической важностью качественного анализа динамических систем. В работе используются методы теории усреднения, основанные на классических результатах Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова. Показано, что бифуркация циклов, как правило, невозможна при чётной степени нелинейности и возможна при нечётной степени. Предложен новый подход для определения условий бифуркации.*

Ключевые слова: *динамическая система, бифуркация, циклы, гамильтонова система, однородный полином, усреднение, малый параметр.*

Introduction and problem statement. Consider a two-dimensional dynamical system depending on a small parameter α

$$x' = J\nabla H(x) + \alpha\left(B_1 x + b_q(x)\right), x \in R^2, \quad (1)$$

where $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \nabla H(x) = \begin{pmatrix} H'_x \\ H'_y \end{pmatrix}, H(x)$ – is a twice continuously differentiable function, B_1 – is a square real matrix, and the nonlinearity $b_q(x)$ is a homogeneous polynomial of degree $q (q \geqslant 2)$. For $\alpha = 0$ system (1.1) is a Hamiltonian system

$$x' = J\nabla H(x), x \in R^2, \tag{2}$$

and the function $H(x)$ – is its Hamiltonian.

It is assumed that system (2) has an equilibrium point $x = 0$, and the origin $x = 0$ for system (2) is of center type. Namely, the Hamiltonian system (2) has a family of non-stationary periodic solutions $x = \varphi(t, C)$, surrounding the point $x = 0$. Let $x = \varphi_0(t)$ be a certain periodic solution from this family. Denote by T_0 the period of this solution, and by Υ_0 the corresponding trajectory in the phase space $\mathbb{R}^2$ of system (2).

The value $\alpha = 0$ will be called a bifurcation point of cycles of system (1), branching off from the trajectory Υ_0 of system (2), if there exists a number $\varepsilon_0 > 0$ and functions $\alpha = \alpha(\varepsilon), T = T(\varepsilon)$ and $x = x(t, \varepsilon)$, defined for $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ and continuously differentiable, such that:

Y1) $\alpha(0) = 0, T(0) = T_0, \alpha(\varepsilon) \neq 0$ for $\varepsilon \neq 0$;

Y2) system (1) for $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ has a non-stationary $T(\varepsilon)$-periodic solution $x = x(t, \varepsilon)$;

Y3) the following relation holds:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|x(t, \varepsilon) - \varphi_0(t)\| \to 0 \text{ for } \varepsilon \to 0.$$

Here $\|x\|$ will denote the Euclidean norm of the vector $x \in \mathbb{R}^2$.

Many works are devoted to the problem of bifurcation of cycles. The classical Pontryagin theorem [1] should be highlighted here. An effective apparatus for investigating this problem is offered by the methods of averaging theory, based on the classical works of N. N. Bogolyubov and N. M. Krylov [2, 3]. Research continues in various works [4, 5, 6].

This work proposes new necessary and sufficient conditions for the bifurcation of cycles. In particular, it is established that the bifurcation of cycles in Hamiltonian dynamical systems with odd homogeneity arises under certain symmetry conditions and leads to a qualitative change in the phase structure of the system. The work continues research started in [7-9].

Auxiliary constructions. Denote by $U(t, x): R^2 \to R^2$ the shift operator along the trajectories of system (2) from time 0 to t, i.e., $U(t_1, x_0) = x(t_1)$, where $x(t)$ is the solution of the Cauchy problem

$$x' = J\nabla H(x), \qquad x(0) = x_0. \tag{3}$$

Lemma 1. For any solution $x(t)$ of system (2), the identity holds:

$$\frac{d}{dt}[U(-t, x(t))] \equiv 0.$$

Proof. This statement is a consequence of the group property of the shift operator and the definition of the solution. Indeed, let x(t) be the solution of the Cauchy problem (3). Then, by definition, $U(t, x_0) = x(t)$. Applying the shift operator backward in time, we get:

$$U(-t, x(t)) = U\big(-t, U(t, x_0)\big) = U(0, x_0) = x_0.$$

Since the right-hand side of the identity is constant, its derivative with respect to time is zero. □

Lemma 2. The substitution

$$y = U(-t, x), \tag{4}$$

reduces system (1) to the form

$$y' = \alpha g(t, y), y \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

where

$$g(t, y) = U'_x(-t, y)^* f\big(U(t, y)\big);$$

here $f(x) = B_1 x + b_q(x)$.

Proof. By Lemma 1, differentiating function (4) we obtain

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[U(-t, x(t))] = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot (-1) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^* \cdot \frac{dx}{dt}.$$

The first term is $-J\nabla H(U(-t, x(t))) = -J\nabla H(y)$, and the second term, taking into account equation (1), is $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^* [J\nabla H(x) + \alpha f(x)]$. Considering that for a Hamiltonian system the shift operator preserves the

Hamiltonian and the structure, we find that the terms with $J\nabla H$ cancel out. As a result, system (1) transforms to the form (5). The function $g(t,y)$ is periodic in t (with a period depending on y). □

Main results. Along with (5), we will also consider the averaged system

$$u' = \alpha F(u), u \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

where

$$F(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_x'(-t,u)^* f(U(t,u))dt \tag{7}$$

The limit in (7) exists due to the periodicity of the integrand.

The following statement holds.

Theorem 1. *Let the value $\alpha = 0$ be a bifurcation point of cycles of system (1), branching off from some trajectory Υ_0 of the linear system (2). Then any vector $u_0 \in \Upsilon_0$ is an equilibrium point of the averaged system (6), i.e., $F(u_0) = 0$.*

Proof. Let the value $\alpha = 0$ be a bifurcation point of cycles of system (1), i.e., there exist continuous functions $\alpha(\varepsilon)$ and $T(\varepsilon)$ such that conditions **Y1** and **Y2** are satisfied, as well as condition **Y3**, which can be represented as

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T_0} \|x(t,\varepsilon) - \varphi_0(t)\| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{8}$$

Then equation (5) for $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ has a solution

$$y = y(t,\varepsilon) = U\big(-t, x(t,\varepsilon)\big), \tag{9}$$

i.e.,

$$\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} \equiv \alpha(\varepsilon) U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f(U(t, y(t,\varepsilon))), y \in \mathbb{R}^2 \tag{10}$$

The function (9) is almost periodic in t. Therefore, there exists a sequence $T_k \to \infty$ such that $y(0,\varepsilon) = y(T_k,\varepsilon)$. Integrating identity (10) over the interval $[0, T_k]$, we obtain the equality

$$\int_0^{T_k} U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f(U(t, y(t,\varepsilon)))dt = 0$$

or (taking into account (9)) - the equality

$$\int_0^{T_k} U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f(U(t, x(t,\varepsilon)))dt = 0 \tag{11}$$

Since the integrand in this equality is almost periodic in t, the limit

$$\lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{T} \int_0^T U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f(U(t, x(t,\varepsilon)))dt.$$

exists. From this and (11), we get

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f(U(t, x(t,\varepsilon)))dt = 0 \tag{12}$$

By virtue of (8), the function $x(t,\varepsilon)$ can be represented as $x(t,\varepsilon) = \varphi_0(t) + \delta(t,\varepsilon)$, where the function $\delta(t,\varepsilon)$ is almost periodic in t, smooth in ε, and satisfies the relation: $\max_t \|\delta(t,\varepsilon)\| \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. Then equality (12) takes the form

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_x'(-t, x(t,\varepsilon))^* f\Big(U\big(t, \varphi_0(t) + \delta(t,\varepsilon)\big)\Big)dt = 0.$$

This equality holds for all small ε.

Passing to the limit as $\varepsilon \to 0$, we obtain:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_x'(-t, \varphi_0(t))^* f\big(U(t, \varphi_0(t))\big)dt = 0$$

The integrand is T_0-periodic, so the limit equals the average value over the period:

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U_x'(-t, \varphi_0(t))^* f\big(U(t, \varphi_0(t))\big)dt = 0$$

For any $u_0 \in \Upsilon_0$, there exists t_0 such that $u_0 = \varphi_0(t_0)$. Due to the autonomy of system (2) and the periodicity of the solutions, the integral does not depend on the choice of the initial point on the trajectory. Consequently, $F(u_0) = 0$. The theorem is proved.

In system (1), the nonlinearity $b_q(x)$ is a homogeneous polynomial. Let us show that if q is even, then the bifurcation of cycles is generally impossible, and if q is odd, then the bifurcation of cycles generally occurs.

Theorem 2. *Let q be even. Then the bifurcation of cycles in system (1) can only occur if the equality*

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} U_x'(-t,\mathrm{u})^{*}\mathrm{B}_1 U(t,u)dt = 0$$

holds.

Proof. Let q be even. By Theorem 1, for the bifurcation of cycles it is necessary that the equation $F(u) = 0$ has a nonzero solution; here $F(u)$ is the function (7), which in our case has the form

$$F(u) = \frac{1}{T}\int_0^{T} U_x'(-t,u)^{*}\left[B_1 U(t,u) + b_q(U(t,u))\right]dt \qquad (14)$$

Theorem 2 follows from Theorem 1 and the following lemma.

Lemma 3. *Let q be even. Then for any vector $u \in R^2$ the equality holds*

$$\int_0^{T_0} U_x'(-t,u)^{*} b_q(U(t,u))dt = 0. \qquad (15)$$

The validity of this lemma can be established by expanding the integrand in a Fourier series, taking into account the evenness of q.

REFERENCES:

1. Баутин Н.Н., Леонтович Э.А. Методы и приёмй качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с. (in Russian)

2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963. (in Russian)

3. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. // Applied Mathematical Sciences, Vol. 42, Springer-Verlag, 1983.

4. Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms. J// . Different. Equat. 2005. V. 210. P. 65-86. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.016

5. Mukhamadiev E., Nazimov A.B., Naimov A.N. On the solvability of a class of nonlinear equations with a small parameter in a Banach space. // Ufimskii Matematicheskii Zhurnal. 2020. 12:3. P. 62–70. DOI: https://doi.org/10.13108/2020-12-3-60 (in Russian)

6. Yumagulov, M.G., Ibragimova, L.S. and Imangulova, E.S. (2017), "Principal asymptotics in the problem on the Andronov–Hopf bifurcation and their applications", // Differential Equations, vol. 53, no. 12, pp. 1627-1643.

7. Yumagulov, M.G., Ibragimova, L.S. and Kungirov, M.N. (2023), "Bifurcations of periodic solutions in two-parameter autonomous systems", // Vestnik Bashkirskogo universiteta, vol. 28, no. 2, pp. 154 -157.

8. Kungirov, M.N. (2024), "Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities", // Lobachevskii Journal of Mathematics, vol. 45, no. 6, pp. 2739–2745.

9. Kungirov, M.N. (2025), On bifurcation of cycles at infinity in systems with homogeneous nonlinearities // Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 69, no. 2, pp. 6-14.

УДК 519. 54

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА $D_{1,\omega}^{h}[\beta]$ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОБЩЕГО ВИДА $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$

Жалолов Икромжон Исомиддинович,
доцент кафедры «Компьютерная графика и информационной технологии» Ташкентского государственного транспортного университета
ikromjalolovi@gmail.com

Аннотация. *Впервые построением и изучением свойств оператора* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$*, являющегося обращением оператора свёртки с функцией* $G_{hH}^{(m)}[\beta]=h^nG_m(hH\beta)$*, занимался С.Л. Соболев. Для описание некоторого аналитического алгоритма отыскания оптимальных коэффициентов С.Л. Соболев определил и исследовал дискретный аналог* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *полигармонического оператора* Δ^m*. Задача построения дискретного оператора* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *при произвольном* n *оказалось очень трудной.*

Настоящая работа посвящена построению дискретного аналога одного дифференциального оператора общего вида с исползованием модифицированного алгоритма Соболева. Этот алгоритм реализован в случае $m=1$*.*

Ключевые слова: *квадратурная формула, дискретная функция, функциональная погрешность, пространство Хёрмандера, обобщённая функция, норма.*

ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE DISCRETE ANALOGUE $D_{1,\omega}^{h}[\beta]$ OF THE GENERAL DIFFERENTIAL OPERATOR $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$

Abstract. *For the first time, the construction and study of the properties of the operator* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$*, which is the inverse of the convolution operator with the function* $G_{hH}^{(m)}[\beta]=h^nG_m(hH\beta)$*, were carried out by S. L. Sobolev. To describe a certain analytical algorithm for finding optimal coefficients, S. L. Sobolev defined and investigated a discrete analogue* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *of the polyharmonic operator* Δ^m*. The problem of constructing the discrete operator* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *for an arbitrary n turned out to be very difficult.*

The present work is devoted to constructing a discrete analogue of a general-type differential operator using a modified Sobolev algorithm. This algorithm is implemented for the case $m=1$*.*

Key words: *quadrature formula, discrete function, error functional, Hörmander space, generalized function, norm.*

UMUMIY KO’RINISHDAGI $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$ DIFFERENSIAL OPERATORINING DISKRET ANALOGINI $D_{1,\omega}^{h}[\beta]$ QURISH ALGORITMI

Annotatsiya. *Birinchi bo’lib* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *diskret operatorini qurish va uning xususiyatlarini o’rganish bilan S.L. Sobolev shug’ullangan. Ma’lum analitik algoritmda optimal koeffitsiyentlarni aniqlash uchun S.L.*

Sobolev poligarmonik operator Δ^m *ning diskret analogi* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *ni ta'riflagan va tadqiq qilgan. Ixtiyoriy n uchun diskret operator* $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ *ni qurish masalasi juda murakkab ekanligi ma'lum bo'lgan.*

Ushbu ish Sobolevning modifikatsiya qilingan algoritmidan foydalangan holda umumiy ko'rinishdagi bir differensial operatorning diskret analogini qurishga bag'ishlangan. Bu algoritm $m=1$ *holat uchun amalga oshirilgan (realizatsiya qilingan).*

Kalit so'zlar: *kvadratur formula, diskret funksiya, xatolik funksionali, Xyormander fazosi, umumlashgan funksiya, norma.*

Введение. С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решётчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа.

С.Л. Соболев, исследуя дискретную задачу типа Винера – Хопфа, доказал существование и единственность решения этой задачи и дал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул. В одномерном случае он свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $p(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ решению системы из $2m-2$ уравнений.

Для построении оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространствах $W_2^{(m)}\left(R^n\right)$, $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и $H_2^{\mu}\left(R\right)$ важную роль играет дискретный аналог $D_{m,n}[\beta]$ полигармонического оператора $\Delta^m=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^m$. Впервые в пространстве $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ построением и изучением свойств обращения оператора свёртки с функцией $G_{m,n}[\beta]$, где $G_{m,n}(x)$- фундаментальное решение полигармонического оператора, т.е. свойств такой функции дискретного аргумента $D_{m,n}[\beta]$,которая удовлетворит равенству $D_{m,n}[\beta]*G_{m,n}[\beta]=\delta[\beta]$, где $\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ 0, & \beta\neq 0\end{cases}$, занимался С.Л. Соболев [1]. В работе Шадиметова [5] найдены коэффициенты, тем самым дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ полностью построен. Построением дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^4}{dx^4}+\frac{2d^2}{dx^2}+1$ занимались Шадиметов Х.М.и Хаётов А.Р.[6,7] .

Особенно можно отметить, что задачи построения дискретного аналога $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида $\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$ и нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных и кубатурных формул в непериодическом пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ является актуальным. В настоящей работе приводится модификация алгоритма Соболева. Этот алгоритм реализован в случае $m=1$.

Исследования оптимальным квадратурным и кубатурным формулам в других пространствах проводились в работах [8-21].

Постановка задачи. Так как настоящая работа рассматривается в пространстве Хёрмандера, то целесообразно привести определение этого пространство в следующем виде:

Определение 1. Пространство $H_2^{\mu}(0,1)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функции заданных в (0,1) и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме (см.[1,2]).

$$\left\| f(x) \right| \ H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}}] \cdot F[f(\omega x)](y) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $\omega \neq 0$, F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье.

При выполнении условия $\nu_{\frac{m}{2}}(\omega x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-\frac{m}{2}}]$ $(\omega x) \in L_2(0,1)$ пространство $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(0,1)$.

Условие вложения пространство $H_{1,\omega}^{\mu}(0,1)$ в пространство непрерывных функции $C(0,1)$ является необходимым условием в функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Скалярное произведение в $H_{2,\omega}^{\mu}(0,1)$ определяется как:

$$<\phi(\omega x), \psi(\omega x)>= \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[f(\omega x)](y)] \cdot F^{-1}[(1+y^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F[\psi(\omega x)](y)].$$

В работах [16-18] дискретный аналог $D_m[\beta]$ построен в простом виде при $m = 2,3,4$.

В настоящей работе дан алгоритм построение дискретного аналога $D_{m,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида $\left[1 - \frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]^m$, которая удовлетворяет равенству

$$D_{m,\omega}[\beta] * V_{m,\omega}[\beta] = \delta[\beta], \tag{1}$$

где $V_{m,\omega}[\beta] = \nu_{m,\omega}(h\beta) = \nu_m(\omega h\beta)$, в случае $m = 1$,

здесь

$$V_{m,\omega}[\beta] = F^{-1}\left\{\left[1+y^2\right]^{-m}\right\}(x), x = \omega h\beta. \tag{2}$$

Из [22] нам известно, что

$$\nu_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp 2\pi i y x (1+y^2)^{-m} dy = \frac{\pi \exp(-2\pi|x|)}{2^{2m-2} \cdot (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)! \cdot (4\pi)^k}{k! \cdot (m-k-1)!} |x|^k, \tag{3}$$

тогда

$$V_{m,\omega}(x) = \nu_{m,\omega}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp 2\pi i y \omega x (1+y^2)^{-m} dy = \frac{\pi \exp(-2\pi\omega|x|)}{2^{2m-2} \cdot (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)! \cdot (4\pi\omega)^k}{k! \cdot (m-k-1)!} |x|^k. \tag{4}$$

Теперь с помощью модифицированного алгоритма С.Л.Соболева находим дискретный аналог $D_{m,\omega}[\beta]$ при $m = 1$.

Модификация алгоритма С.Л.Соболева для нахождении дискретного аналога одного дифференциального оператора. В дальнейшем будем искать решение уравнения:

$$D_{m,\omega}[\beta] * V_{m,\omega}[\beta] = \delta[\beta], \tag{5}$$

где $\delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0 \end{cases}$.

Согласно теории периодических обобщённых функций и преобразования Фурье, вместо дискретной функции $D_{m,\omega}(h\beta)$ удобнее искать боронообразную функцию:

$$\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(\omega h\beta)\delta(x - h\beta). \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) в классе боронообразных функций переходит в уравнение:

$$\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x) * \overleftarrow{V}_{m,\omega}(x) = \delta(x), \tag{7}$$

где

$$\overbrace{V}_{m}(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \nu_m(\omega h\beta)\delta(x-h\beta)\ , \tag{8}$$

здесь $\overbrace{V}_{m,\omega}(x)$ является боронообразной функцию $V_{m,\omega}(x)$.

Известно (см[1]), что между классом боронообразных функций и классом функций дискретного аргумента существует изоморфизм. Поэтому вместо $D_m(\omega h\beta)$ достаточно исследовать функцию $\overbrace{D}_{m,\omega}(x)$. Применяя к обеим частям равенства (7) преобразование Фурье и имея в виду, что [1,2] $F[\varphi(\omega x)*\psi(\omega x)] = F[\varphi]\cdot F[\psi]$ и $F[\delta(x)] = 1,$ получим:

$$F[\overbrace{D}_{m,\omega}(x)]\cdot F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)] = 1.$$

Отсюда имеем:

$$F[\overbrace{D}_{m,\omega}(x)] = \left\{F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)]\right\}^{-1}. \tag{9}$$

Теперь вычислим преобразование Фурье $F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)]$ боронообразной функции $\overbrace{V}_{m,\omega}(x)$. Известно (см[1,2]), что

$$\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta),\ \delta(hx) = h^{-1}\delta(x) \text{ и } F[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi i\beta x)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta).$$

Имея в виду эти равенства, получим:

$$\overbrace{V}_{m,\omega}(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_m(\omega h\beta)\delta(x-h\beta) = V_m(x)\cdot\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-h\beta) =$$

$$= h^{-1}V_{m,\omega}(x)\cdot\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(xh^{-1}-\beta) = h^{-1}V_{m,\omega}(x)\cdot\phi_0(h^{-1}x). \tag{10}$$

Известно также (см[1,2]), что

$$F[\phi_0(h^{-1}x)] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty}F[\delta(h^{-1}x-\beta)] = h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}F[\delta(x-h\beta)] =$$

$$= h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\exp(2\pi iph\beta) = h\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(hp-\beta) = h\phi_0(hp),$$

т.е.

$$F[\phi_0(h^{-1}x)] = h\phi_0(hp). \tag{11}$$

Поэтому с учётом (10) и (11) имеем

$$F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)] = F[h^{-1}V_{m,\omega}(x)\cdot\phi_0(h^{-1}x)] =$$

$$= h^{-1}F[V_{m,\omega}(x)]*F[\phi_0(h^{-1}x)] = h^{-1}F[V_{m,\omega}(x)]*\phi_0(hp)h. \tag{12}$$

Поскольку $F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)](p) = (1+p^2)^{-m}$, то из (25) имеем

$$F[\overbrace{V}_{m,\omega}(x)](p) = (1+p^2)^{-m}*\phi_0(hp) =$$

$$= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty}(1+p^2)^{-m}*\delta(hp-\beta) = h^{-1}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}[1+(p-\beta h)^2]^{-m}. \tag{13}$$

Функция $F[\overleftarrow{V}_{m,\omega}(x)](p)$, $N = h^{-1}$ - периодическая функция. Используя равенство (13), мы должны сначала определить $\left\{F[\overleftarrow{V}_{m}(x)](p)\right\}^{-1}$, которая также будет N -периодической функцией, а потом разложить её в ряд Фурье. Тогда на основании (9) будем иметь:

$$F[\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x)](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_{\beta} \exp(2\pi i\beta hp), \tag{14}$$

где D_{β} -коэффициенты Фурье функции $F[\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x)](p)$:

$$D_{\beta} = \int_{0}^{N} F[\overleftarrow{D}^{*}_{m,\omega}(x)](p) \exp(2\pi iph\beta)dp. \tag{15}$$

Применяя к равенству (14) формулу обращения Фурье, придем к боронообразной функции

$$\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_{\beta}\delta(x-h\beta).$$

Таким образом, по определению боронообразной функции, совокупность коэффициентов Фурье и есть искомая функция дискретного аргумента $D_{m,\omega}(h\beta)$. Для определения коэффициентов Фурье $F[\overleftarrow{D}_{m,\omega}(x)]$ сначала определим коэффициенты Фурье функции $F[\widehat{V}_{m,\omega}(x)](p)$.

Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} h^{-1}[1+(p-\omega\beta h^{-1})^2]^{-m} = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_{m,\omega}(h\beta)\exp(2\pi i\beta hp). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ - основная функция.

Тогда

$$\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} h^{-1}[1+(p-h^{-1}\omega\beta)^2]^{-m}, \varphi(p)\right) = \left(F^{-1}[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} h^{-1}[1+(p-h^{-1}\omega\beta)^2]^{-m}], F^{-1}[\varphi(p)]\right) =$$

$$= \left(F^{-1}[(1+p^2)^{-m} * \phi_0(hp)](\omega x), F^{-1}[\varphi(p)](\omega x)\right) =$$

$$= \left(F^{-1}[(1+p^2)^{-m}](\omega x)\cdot F^{-1}[\phi_0(hp)](\omega x), F^{-1}[\varphi(p)](\omega x)\right) =$$

$$= \left(\nu_m(\omega x)\cdot h^{-1}\phi_0(h^{-1}\omega), F^{-1}[\varphi(p)](\omega x)\right) = \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \nu_m(\omega h\beta)\exp(2\pi ih\beta x), \varphi(x)\right).$$

Из определения равенства двух обобщённых функций следует (16), что и доказывает лемму.

Из (13), (16) следует, что

$$F[\overleftarrow{V}_{m,\omega}(x)](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_{m,\omega}(h\beta)e^{2\pi ihp\beta}. \tag{17}$$

Из (13) видно, что $F[\overleftarrow{V}_{m,\omega}(x)](p) > 0$, как сумма положительных функций. Поэтому $\left\{F[\overleftarrow{V}_{m,\omega}(x)](p)\right\}^{-1} > 0$, из высшего представлении заметно, что модифицированный элемент является (17), которие для нахождении дискретных аналогов получим с помощью (17).

Метод решения задач. Для нахождении оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве Хёрмандера $H^{\mu}_{1,\omega}(0,1)$ при $m=1$, важную роль играет нахождение дискретного аналога $D^{h}_{1,\omega}[\beta]$, ниже представляющего дифференциальный оператор общего вида, т. е. основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Дискретный аналог $D_{1,\omega}[\beta]$ дифференциального оператора общего вида

$$\left[1-\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right], \tag{18}$$

удовлетворяющий равенству (1), определяется формулой:

$$D_{1,\omega}[\beta]=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\exp(4\omega\pi h)+1}{\exp(4\omega\pi h)-1}, \beta=0\\ \dfrac{\exp(2\omega\pi h)}{1-\exp(4\omega\pi h)}, |\beta|=1\end{cases}. \tag{19}$$

Доказательство. Из работы [13,14] известно, что

$$F[\overleftarrow{V}_{m,\omega}(x)](p)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_{m,\omega}(h\beta)e^{2\pi ihp\beta}, \tag{20}$$

где $V_{m,\omega}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp 2\pi iy\omega x(1+y^2)^m dy=\dfrac{\pi\exp(-2\pi\omega|x|)}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi\omega)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k$.

Имея в виду выражение функции $V_{m,\omega}(x)$, при $m=1$ имеем:

$$V_{1,\omega}(x)=\pi e^{-2\pi\omega|x|}. \tag{21}$$

Подтставляя (21) в (20) получим:

$$F[\overleftarrow{V}_{1,\omega}(x)](p)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}V_{1,\omega}(h\beta)e^{2\pi ihp\beta}=\pi\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}e^{2\pi ihp\beta}=$$

$$=\pi\left[1+\sum_{\beta=-\infty}^{-1}e^{-2\pi\omega h|\beta|}e^{2\pi ihp\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h|\beta|}e^{2\pi ihp\beta}\right]=\pi\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}e^{-2\pi ihp\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}e^{2\pi ihp\beta}\right]=$$

$$=\pi\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\left(e^{-2\pi ihp}\right)^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\left(e^{2\pi ihp}\right)^{\beta}\right]=\pi\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\lambda^{-\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}e^{-2\pi\omega h\beta}\lambda^{\beta}\right]=$$

$$=\pi\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}\right]=\pi\left[1+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}+\sum_{\beta=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}}\right)^{\beta}\right]=$$

$$=\pi\left[1+\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}-1}+\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}-\lambda}\right]. \tag{22}$$

В (22) ввели обозначение $e^{2\pi ihp}=\lambda$, тогда $\left(e^{2\pi ihp}\right)^{\beta}=\lambda^{\beta}$, далее имеем:

$$F[\overleftarrow{V}_{1,\omega}(\beta)](p)=\pi\left[1+\frac{\lambda}{\exp(2\pi\omega h)-\lambda}+\frac{1}{\lambda\exp(2\pi\omega h)-1}\right]=$$

$$\pi\left[\frac{(\exp(2\pi\omega h)-\lambda)(\lambda\exp(2\pi\omega h)-1)+\lambda(\lambda\exp(2\pi\omega h)-1)+(\exp(2\pi\omega h)-\lambda)}{\lambda\exp(4\pi\omega h)-\exp(2\pi\omega h)-\lambda^2\exp(2\pi\omega h)+\lambda}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{-\lambda^2\exp(2\pi\omega h)+\lambda(\exp(4\pi\omega h)+1)-\exp(2\pi\omega h)+\lambda^2\exp(2\pi\omega h)-\lambda+\exp(2\pi\omega h)-\lambda}{-\lambda^2\exp(2\pi\omega h)+\lambda(\exp(4\pi\omega h)+1)-\exp(2\pi\omega h)}\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{\lambda(\exp(4\pi\omega h)-1)}{-\lambda^2\exp(2\pi\omega h)+\lambda(\exp(4\pi\omega h)+1)-\exp(2\pi\omega h)}\right] \tag{23}$$

Отсюда получим

$$F[\overline{V}_{1,\omega}(\beta)](p)=\pi\left[\frac{\lambda\left(\exp\left(4\pi\omega h\right)-1\right)}{-\lambda^2\exp\left(2\pi\omega h\right)+\lambda\left(\exp\left(4\pi\omega h\right)+1\right)-\exp\left(2\pi\omega h\right)}\right]. \tag{24}$$

Далее находим $\left\{F[\overline{\nu}_1(x)](p)\right\}^{-1}$, значит подставляя (24) в (9), получим:

$$\left\{F[\overline{\nu}_{1,\omega}(x)](p)\right\}^{-1}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\lambda^2\exp\left(2\pi\omega h\right)-\lambda\left(\exp\left(4\pi\omega h\right)+1\right)+\exp\left(2\pi\omega h\right)}{\lambda\left(1-\exp\left(4\pi h\right)\right)}\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\lambda\frac{\exp\left(2\pi\omega h\right)}{1-\exp\left(4\pi\omega h\right)}-\frac{\exp\left(4\pi\omega h\right)+1}{1-\exp\left(4\pi\omega h\right)}+\frac{1}{\lambda}\frac{\exp\left(2\pi\omega h\right)}{1-\exp\left(4\pi\omega h\right)}\right]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}D_{1,\omega}\left[\beta\right]\exp\left(2\pi iph\beta\right). \tag{25}$$

Что требовалось доказать.

Чтобы убедиться справедливость равенство (5) при $m=1$, пользуясь теоремы можно доказать это равенство.

Подставляя $D_{1,\omega}\left[\beta\right]$ и $V_{1,\omega}\left[\beta\right]$ в (5) имеем:

$$D_{1,\omega}\left[\beta\right]*V_{1,\omega}\left[\beta\right]=\sum_{\gamma=-1}^{1}D_{1,\omega}\left(h\gamma\right)V_{1,\omega}\left(h\beta-h\gamma\right)=D_{1,\omega}\left(1\right)V_{1,\omega}\left(h\beta-1\right)+$$
$$+D_{1,\omega}\left(0\right)V_{1,\omega}\left(h\beta\right)+D_{1,\omega}\left(1\right)V_{1,\omega}\left(h\beta+1\right). \tag{26}$$

После применения теоремы 1 в правую часть (26) имеем:

$$D_{1,\omega}\left[\beta\right]*V_{1,\omega}\left[\beta\right]=\frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi\omega h}}{1-e^{4\pi\omega h}}\pi e^{-2\pi\omega h|\beta-1|}-\frac{1}{\pi}\frac{e^{4\pi\omega h}+1}{1-e^{4\pi\omega h}}\pi e^{-2\pi\omega h|\beta|}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\frac{e^{2\pi\omega h}}{1-e^{4\pi\omega h}}\pi e^{-2\pi\omega h|\beta+1|}. \tag{27}$$

Пусть $\beta=0$, тогда из (27) получим:

$$D_{1,\omega}\left[\beta\right]*V_{1,\omega}\left[\beta\right]=\frac{e^{2\pi\omega h}}{1-e^{4\pi\omega h}}e^{-2\pi\omega h}-\frac{e^{4\pi\omega h}+1}{1-e^{4\pi\omega h}}+\frac{e^{2\pi\omega h}}{1-e^{4\pi\omega h}}e^{-2\pi\omega h}=\frac{1-e^{4\pi\omega h}-1+1}{1-e^{4\pi\omega h}}=\frac{1-e^{4\pi\omega h}}{1-e^{4\pi\omega h}}=1. \tag{28}$$

Так как только при $\beta=0$, $\delta\left[\beta\right]=1$, тогда из (28) следует равенство (5).

Из (28) следует, что (21), т.е. $V_{1,\omega}\left(x\right)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора (18).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.

2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.

3. A. Sard, Best approximate integration formulas; best approximation formulas, //American Journal of Mathematics, 71, 1949, pp. 80–91.

4. Flavia Lanzara. On Optimal Quadrature Formulae. // J. of Inequality & Appl.,2000, Vol.5, pp.201-225.

5. Шадиметов Х.М. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ *и его построение. // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1985, -С. 22-25.*

6. Шадиметов Х.М., Хаетов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ *, // Уз.Мат. Журнал, 2004, №2, -с. 85-95.*

7. Хаетов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$ *и его свойства ,// Уз.Мат. Журнал, 2009, №3, -с. 81-88.*

8. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$*, // Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.*

9. Shadimetov KhX. M., Mirzakabilov R.N. The extremal function of the difference formula in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$*. Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-Al Khorezmi, 2018, P.142-143.*

1. 10. Kh. Shadimetov, F. A. Nuraliev. Optimization of quadrature formulas with derivatives. // Problems of computational and applied mathematics, 2017, No.4, pp 61-70.

11. Nuraliev F.A., Boltaev A.K. On a discrete analogue of the differential operator. // Problems of computational and applied mathematics, 2019, No.2, pp 71-79.

2. 12. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature formulas for computing Fourier integrals in a Hilbert space. // Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.

13. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Об одном алгоритме построения оператора для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул пространстве. // Уз. Матем. Журнал, 2010, №3. –Ташкент. -с.178-187.

14. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Об одном алгоритме построения дискретного аналога одного оператора. // Уз. Матем. Журнал, 2015, №1. Ташкент. – с.158-163.

[15]. Shadimetov Kh. M., Zhalolov Ik. I. Algorithm for constructing a discrete analogue $D_3[\beta]$ *of a single operator. // Problems of computational and applied mathematics, 2015, No.2, -pp. 48-53.*

16. Ikrom I. Jalolov. The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution.// AIP Conference Proceedings 2365, 020015 (2021) https://doi.org/10.1063/5.0057025.

17. Kholmat Shadimetov and Ikrom Jalolov. A Representotion of the Optimal Quadrature Formula in the Hormander Space $H_2^{\mu}(R)$*. // AIP Conference Proceedings. 2781, 020041 (2022) https://doi.org/10.1063/5.0144834.*

18. Shadimetov Kh., Jalolov I. Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration. // Mathematics 2024,12, 738. https://doi.org/10.3390/math12050738.

19. Ikrom I. Jalolov. Algorithm for constructing a discrete analogue $D_4[\beta]$ *of a differential operator. // AIP Conference Proceedings 2781, 020041 (2023) https://doi.org/10.1063/5.0144834.*

20. Jalolov O.I. Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space.// AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021). https://doi.org/10.1063/5.0057015.

21. Jalolov O.I. Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space $\overline{L_p^{(m)}}(K_n)$*. AIP Conference Proceedings 2781, 020066 (2023).*

22. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Наука, физ-мат, М.1963. 1100 с.

UDC 52

THE DISCRETE SPECTRUM OF TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATORS ON LATTICES

Khamidov Shakhobiddin Ilkhom ugli,
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
Samarkand State University named after Sharof Rashidov
shoh.hamidov1990@mail.ru
Ibrogimov Utkir Bakhron ugli,
Samarkand State University named after Sharof Rashidov
utkir_ibrogimov1996@mail.ru

Abstract. *We study the Schrödinger operators $H_{\lambda\mu}(K)$, with $K \in \mathbb{T}$ the fixed quasimomentum of the particles pair, asociated with a system of two arbitrary particles on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$ with on one site and nearest-neighboring-site interactions of magnitudes $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$, respectively. We establish a partition of the (λ, μ) − plane of parametrs $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so that in each its connected component, the Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(0)$ has a definite (fixed) number of eigenvalues, which are lying below the bottom of the essential spectrum.*

Keywords: *Discret Schrödinger operator, essintial spectrum, eigenvalues, two arbitrary particles system, the Lippmann-Schwinger operator, one-deminsional lattice.*

PANJARADAGI IKKI ZARRACHALI SHRYODINGER OPERATORLARINING DISKRET SPEKTRI

Annotatsiya. *Biz bir o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}$ ustidagi ikki ixtiyoriy zarrachalar sistemasiga mos bo‘lgan Schrödinger operatorlari $H_{\lambda\mu}(K)$ ni o‘rganamiz, bu yerda $K \in \mathbb{T}$ zarrachalar juftining kvazi-impulsi hisoblanadi. Zarrachalar bir tugunda va eng yaqin qo‘shni tugunlarda mos ravishda $\lambda \in \mathbb{R}$ va $\mu \in \mathbb{R}$ kattalikdagi o‘zaro ta’sirlarga ega. Biz (λ, μ) − parametrlar tekisligida shunday bo‘laklash o‘rnatamizki, uning har bir bog‘langan qismida $H_{\lambda\mu}(0)$ Schrödinger operatori muhim spektrdan pastda joylashgan aniq miqdordagi xos qiymatlarga ega bo’ladi.*

Kalit so‘lar: *Disret Shredinger operatori, muhim spektr, xos qiymat, ikki ixtiyoriy zarrachali sistema, Lippmann-Schvinger operatori, bir o‘lchamli panjara.*

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ДВУХЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЁТКАХ

Аннотация. *Мы изучаем операторы Шрёдингера $H_{\lambda\mu}(K)$, связанные с системой двух произвольных частиц на одномерной решётке $\mathbb{Z}$. Здесь $K \in \mathbb{T}$ является фиксированным квазиимпульсом пары частиц. Частицы имеют взаимодействия на одном узле и на ближайших соседних узлах с величинами $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{R}$, соответственно. Мы устанавливаем разбиение плоскости параметров (λ, μ), такое, что в каждой её связной компоненте оператор Шрёдингера $H_{\lambda\mu}(0)$ имеет определённое (фиксированное) число собственных значений, которые лежат ниже существенного спектра.*

Ключевые слова: *дискретный оператор Шрёдингера, существенный спектр, собственное значение, система двух произвольных частиц, оператор Липпмана-Швингера, одномерная решётка.*

Introduction. Lattice models play an important role in various branches of physics. These models include few-body lattice Hamiltonians, which can be viewed as a simplified version of the Bose- or Fermi-Huabbard models, involving a fixed number of particles of a specific type. These lattice Hamiltonians have great theoretical interest on their own [1, 2, 3, 4, 5, 6]. They can be viewed as natural approximations to their continuous counterparts [7], allowing us to study few-body phenomena within the theory of bounded

operators. A still intriguing phenomenon is the celebrated Efimov effect, which has been proven to occur not only in the continuous case, but also in lattice three-body problems. The Efimov effect has been studied extensively, and there are several papers that discuss it, including those by [1, 3].

Furthermore, the lattice Schrödinger operator represents the simplest and most natural model for describing few-body systems composed of particles travelling through periodic structures. For example, this is true for ultracold atoms that are injected into optical crystals created through the interference of two counterpropagating laser beams. The study of ultracold few-atom systems in optical lattices has become very popular in recent years, as these systems possess highly controllable parameters such as lattice geometry, dimensionality, particle mass, two-body potential, temperature, etc.(see e.g., [8, 9, 10, 11] and references therein).

In contrast to traditional condensed matter systems, in which stable composite objects are usually formed due to attractive forces, the controllability of ultracold atomic systems in an optical lattice provides an opportunity for experimental observation of a stable repulsive bound state of ultracold atoms see, e.g., [12], [13]. One-dimensional lattice Hamiltonians have already been of interest in applications. For example, in [14], a one-dimensional one-particle lattice Hamiltonian was used explicitly to demonstrate how the arrangement of molecules of a specific class in lattice structures can enhance the probability of nuclear fusion.

Unlike continuous systems, the few-body lattice system does not allow for the separation of center-of-mass motion. However, lattice translation invariance allows the use of the Floquet-Bloch decomposition (see, e.g., [15, Sec. 4]).In particular, the N-particle lattice Hamiltonian, H, in the (quasi)momentum representation can be expressed as a von Neumann direct integral:

$$\mathrm{H} \simeq \int_{K\in\mathbb{T}^d}^{\oplus} H(K)\mathrm{d}K, \qquad (1)$$

where $\mathbb{T}^d$ is the d-dimensional torus, and $H(K)$ is the fiber Hamiltonian acting on the corresponding functional Hilbert space over $\mathbb{T}^{(n-1)d}$.

Recall that the fiber Hamiltonian $H(K)$ non-trivially depend on quasimomentum $K \in \mathbb{T}^d$ (see e.g., [15, 16]).

In this paper, we examine the occurrence of new eigenvalues below the lower bounds of the essential spectrum of the fiber Hamiltonian $H(K)$. In order to obtain more detailed information, we consider the interaction between particles, which contains two terms. The first term is only non-trivial if the particles are located on one site of the lattice, and the second term is only non-trival if the particles occupy nearest neighboring sites (see Sec. 2.1, definition (2.1)).

Thus, as the entries $H(K)$ in (1), in this work, we study the family of the fiber Hamiltonians

$H_{\lambda\mu}(K) := H_0(K) + V_{\lambda\mu}, \qquad K \in \mathbb{T},$

where $H_0(K)$ is the fiber kinetic-energy operator,

$(H_0(K)f)(p) = \mathcal{E}_K(p)f(p), \quad p \in \mathbb{T}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}),$

with

$\mathcal{E}_K(p) := \varepsilon(p) + \gamma\varepsilon(K-p), \qquad \gamma > 0$

and $V_{\lambda\mu}$ is the combined interaction potential. The parameters λ and μ describe the strength of the interaction between two particles.

Within this new model, we determine both the exact number of eigenvalues and their locations of the operator $H_{\lambda\mu}(0)$. These eigenvalues lie below the essential spectrum.

In [4] it was studied the discrete spectrum of the two-particle Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, for a system of two identical bosons interacting on site and nearest-neighbour sites in the $d = 1$-dimensional lattice with interaction magnitudes $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$, respectively.

In [17, 18, 19] the discrete spectrum of the two-particle Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, for a system of two identical bosons interacting on site and nearest-neighbour sites in the $d \geq 2$-dimensional lattice with interaction magnitudes $\mu \in \mathbb{R}$ and $\lambda \in \mathbb{R}$, respectively.

2. The two-particle hamiltonian on lattices.

1 The two-particle Hamiltonian: the position-space representation. Let $\mathbb{Z}$ be the one-dimensional lattice. Let $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ be Hilbert space of square-summable functions defined on the Cartesian power of $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$.

The free Hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_0$ of a system of two arbitrary particles (a boson and a fermion) on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$ acts on $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ and is of the form

$$\widehat{\mathbb{H}}_0 = \frac{1}{2m_1}\Delta\otimes I + \frac{1}{2m_2} I\otimes\Delta,$$

where $m_\alpha > 0,\ \alpha = 1,2,$ is the mass of the particles.

The lattice Laplacian Δ is difference operator which describes the transport of a particle from one site to a nearest-neighbor site:

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z},|s|=1}[\hat{\psi}(x)-\hat{\psi}(x+s)], \qquad \hat{\psi}\in\ell^2(\mathbb{Z}).$$

We note that $\widehat{\mathbb{H}}_0$ acts in $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ as

$$\left(\widehat{\mathbb{H}}_0\hat{\psi}\right)(x,y) = \sum_{s_1\in\mathbb{Z}}\hat{\varepsilon}(s_1)\hat{\psi}(x+s_1,y) + \gamma\sum_{s_2\in\mathbb{Z}}\hat{\varepsilon}(s_2)\hat{\psi}(x,y+s_2), \qquad \hat{\psi}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$$

where $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ and

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 2, & |x| = 0,\\ -1, & |x| = 1,\\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

In the position-space representation the total two particle Hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_{\lambda\mu}$, associated to a system of two arbitrary particles interacting via zero-range and nearest-neighbor potential $\hat{v}_{\lambda\mu}$ is a bounded self-adjoint operator acting in $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ as

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\lambda\mu} = \widehat{\mathbb{H}}_0 + \widehat{\mathbb{V}}_{\lambda\mu}, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

The interaction $\widehat{\mathbb{V}}_{\lambda\mu}$ is the multiplication operator by a function $\hat{v}_{\lambda\mu}(\cdot)$:

$$(\widehat{\mathbb{V}}_{\lambda\mu}\hat{\psi})(x,y) = \hat{v}_{\lambda\mu}(x-y)\hat{\psi}(x,y), \quad \hat{\psi}\in\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),$$

where

$$\hat{v}_{\lambda\mu}(x) = \begin{cases} \lambda, & |x| = 0,\\ \mu, & |x| = 1,\\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

2 The two-particle Hamiltonian: the quasimomentum-space representation. Let $\mathbb{T} = (-\pi,\pi]$ be the one dimensional torus, the Pontryagin dual group of $\mathbb{Z}$, equipped with the Haar measure $\mathbf{d}p$, and let $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$. Let $\mathcal{F}:\ell^2(\mathbb{Z})\to L^2(\mathbb{T})$ be the standard Fourier transform

$$\left(\mathcal{F}\hat{f}\right)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\hat{f}(x)e^{i(p,x)},$$

where $(p,x) := p\cdot x$ for $p\in\mathbb{T}$ and $x\in\mathbb{Z}$.

In the momentum-space via $\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$ the two-particle Hamiltonian is represented in $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ as

$$\mathbb{H}_{\lambda\mu} := (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\widehat{\mathbb{H}}_{\lambda\mu}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})^* := \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}_{\lambda\mu}.$$

Here the free Hamiltonian $\mathbb{H}_0 = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\widehat{\mathbb{H}}_0(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})^*$ is the multiplication operator:

$$(\mathbb{H}_0 f)(p,q) = [\varepsilon(p)+\gamma\varepsilon(q)]f(p,q), \qquad \gamma > 0,$$

where

$$\varepsilon(p) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}(s)e^{ip\cdot s} = 2(1-\cos p), \quad p \in \mathbb{T},$$

being real valued-function on $\mathbb{T}$.

The interaction $\mathbb{V}_{\lambda\mu} = (\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\hat{\mathbb{V}}_{\lambda\mu}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})^*$ is the (partial) integral operator

$$(\mathbb{V}_{\lambda\mu}f)(p,q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v_{\lambda\mu}(p-u)f(u,p+q-u)\mathrm{d}u,$$

where

$$v_{\lambda\mu}(p) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \hat{v}_{\lambda\mu}(s)e^{ip\cdot s} = \lambda + 2\mu\cos p, \quad p \in \mathbb{T}.$$

3 The Floquet-Bloch decomposition of $\mathbb{H}_{\lambda\mu}$ and discrete Schrödinger operators. Since $\widehat{H}_{\lambda\mu}$ commutes with the discrete group $\mathbb{Z}$, which is represented by shift operators on the lattice, we can decompose the space $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T})$ and $\mathbb{H}_{\lambda\mu}$ into the von Neumann direct integral:

$$L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{T}) \simeq \int_{K\in\mathbb{T}} \oplus L^2(\mathbb{T})\,\mathrm{d}K,$$

$$\mathbb{H}_{\lambda\mu} \simeq \int_{K\in\mathbb{T}} \oplus H_{\lambda\mu}(K)\,\mathrm{d}K.$$

The fiber operator $H_{\lambda\mu}(K), K \in \mathbb{T}$, is a self-adjoint operator in $L^2(\mathbb{T})$ and defined as

$$H_{\lambda\mu}(K) := H_0(K) + V_{\lambda\mu},$$

where $H_0(K)$ is the unperturbed operator and $V_{\lambda\mu}$ is the perturbation operator. The unperturbed operator H_0 is the multiplication operator by a function $\mathcal{E}_K$:

$$\mathcal{E}_K(p) := \varepsilon(p) + \gamma\varepsilon(K-p) = 2 + 2\gamma - 2\cos p - 2\gamma\cos(K-p),$$

where $\gamma > 0$. The perturbation operator $V_{\lambda\mu}$ is defined by the integral:

$$\big(V_{\lambda\mu}f\big)(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} v_{\lambda\mu}(p-q)f(q)\mathrm{d}q =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)\mathrm{d}q + \frac{\mu}{\pi}\cos p\int_{\mathbb{T}} \cos q f(q)\mathrm{d}q + \frac{\mu}{\pi}\sin p\int_{\mathbb{T}} \sin q f(q)\mathrm{d}q. \qquad (2)$$

The parameter $K \in \mathbb{T}$ is typically referred to as the *two-particle quasi-momentum*, and the fiber $H_{\lambda\mu}(K)$ is known as the *discrete Schrödinger operator* associated with the two-particle Hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_{\lambda\mu}$.

4 The essential spectrum of discrete Schrödinger operators. Since the operator $V_{\lambda\mu}$ is compact, according to Weyl's theorem, for any $K \in \mathbb{T}$ the essential spectrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}(K))$ of the operator $H_{\lambda\mu}(K)$ coincides with the spectrum of the operator $H_0(K)$, i.e.,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(H_{\lambda\mu}(K)\big) = \sigma\big(H_0(K)\big).$$

In particular, the essential spectrum is given by

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

Where

$$\mathcal{E}_{\min}(K) := \min_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_K(p) = 2 + 2\gamma - 2\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos K} \geq 0 = \mathcal{E}_{\min}(0)$$

$$\mathcal{E}_{\max}(K) := \max_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_K(p) = 2 + 2\gamma + 2\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos K} \leq 4 + 4\gamma = \mathcal{E}_{\max}(0).$$

Main results. Let $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$ be subspaces of $L^2(\mathbb{T})$. These subspaces consist of even and odd functions, respectively. More formally, we can write:

$L^{2,e}(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}): f(p) = f(-p), for\ a.e\ \ p \in \mathbb{T}\}$

and

$L^{2,o}(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}): f(p) = -f(p), for\ a.e\ \ p \in \mathbb{T}\}.$

Lemma 1. *The following statement is correct:*

$L^2(\mathbb{T}) = L^{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,o}(\mathbb{T}).$

The proof of this lemma is straightforward and can be found in various sources, such as [20].

Let $K = 0$. The operator $H_0(0)$ is the multiplication operator by the even function $\mathcal{E}_0(p) = (1+\gamma)\varepsilon(p)$ in $L^2(\mathbb{T})$. Therefore, for each $\theta \in \{e, o\}$, the supspaces $L^{2,\theta}(\mathbb{T})$ is invariant under $H_0(0)$. Taking into account that the interaction operator $V_{\lambda\mu}$ has the from given in equation (2), denoting by $V_{\lambda\mu}^e$ and $V_{\lambda\mu}^o$ the part of $V_{\lambda\mu}$ acting on $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$, respectively, we obtain the following expressions

$$\left(V_{\lambda\mu}^e f\right)(p) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)\mathrm{d}q + \frac{\mu}{\pi}\cos p \int_{\mathbb{T}} \cos q f(q)\mathrm{d}q \qquad (3)$$

and

$$\left(V_{\mu}^o f\right)(p) = \frac{\mu}{\pi}\sin p \int_{\mathbb{T}} \sin q f(q)\mathrm{d}q. \qquad (4)$$

From the above expressions, we can conclude that

$H_{\lambda\mu}(0)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})} = H_{\lambda\mu}^e(0) := H_0(0) + V_{\lambda\mu}^e$

and

$H_{\lambda\mu}(0)|_{L^{2,o}(\mathbb{T})} = H_{\lambda\mu}^o(0) := H_0(0) + V_{\lambda\mu}^o.$

Therefore, the spectrum of $H_{\lambda\mu}(0)$, denoted by $\sigma(H_{\lambda\mu}(0))$, can be expressed as the union of the spectra of the restrictions of $H_{\lambda\mu}(0)$ to the subspaces $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$:

$$\sigma\left(H_{\lambda\mu}(0)\right) = \sigma\left(H_{\lambda\mu}(0)|_{L^{2,e}(\mathbb{T})}\right) \cup \sigma\left(H_{\lambda\mu}(0)|_{L^{2,o}(\mathbb{T})}\right).$$

Here, $A|_{\mathcal{H}}$ denotes the restriction of the self-adjoint operator A to the subspaces $\mathcal{H}$. Thus, the study of the discrete spectrum of $H_{\lambda\mu}(0)$ reduces to the study of the spectra of the operators $H_{\lambda\mu}^e(0)$ and $H_{\lambda\mu}^e(0)$.

1 The Lippmann-Schwinger operator. Let, $\{\alpha_i^e,\ i = 1,2\}$ and $\{\beta_1^o\}$ be systems of vectors in the spaces $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$, respectively and these vectors are given by:

$$\alpha_1^e(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \alpha_2^e(p) = \frac{\cos p}{\sqrt{\pi}} \qquad (5)$$

and

$$\beta_1^o(p) = \frac{\sin p}{\sqrt{\pi}} \qquad (6)$$

It is easy to verify by inspection that the vectors (5) and (6) are orthonormal in $L^{2,e}(\mathbb{T})$ and $L^{2,o}(\mathbb{T})$, respectively. For (3) and (4) using the orthogonal systems (5) and (6), respectively, we obtain

$$V_{\lambda\mu}^e f = \lambda(f, \alpha_1^e)\alpha_1^e + \mu(f, \alpha_2^e)\alpha_2^e \qquad (7)$$

and

$$V_{\mu}^o f = \mu(f, \beta_1^o)\beta_1^o, \qquad (8)$$

where $(\cdot,\cdot)$ denotes the inner product in $L^{2,\theta}(\mathbb{T})$, $\theta \in \{e, o\}$.

For any $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0), \mathcal{E}_{\max}(0)]$, we define the Lippmann-Schwinger operator, as described in [21], as follow:

$B_{\lambda\mu}^e(0,z) = -V_{\lambda\mu}^e R_0(0,z)$

and

$B_\mu^o(0,z) = -V_\mu^o R_0(0,z)$.

Here, $R_0(0,z) := [H_0(0) - zI]^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0), \mathcal{E}_{\max}(0)]$ is the resolvent of the operator $H_0(0)$.

Lemma 2. *For each $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, the number $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{min}(0), \mathcal{E}_{max}(0)]$ is an eigenvalue of the operators $H_{\lambda\mu}^e(0)$ or $H_\mu^o(0)$ if and only if the number 1 is an eigenvalue for $B_{\lambda\mu}^e(0,z)$ or $B_\mu^o(0,z)$, respectively.*

The proof of this lemma is straightforward and can be found in various sources, such as [22]. Therefore, we do not provide a proof in this paper.

Using the expressions (7) and (8), we can obtain the following systems of linear algebraic equations: $x_1 = (\varphi, \alpha_1^e)$, $x_2 = (\varphi, \alpha_2^e)$, and $y_1 = (\varphi, \beta_1^o)$, where $i = 1,2$.

$$\begin{cases} (1 + \lambda a(z))x_1 + 2\mu b(z)x_2 = 0, \\ \lambda b(z)x_1 + (1 + 2\mu c(z))x_2 = 0 \end{cases}$$

and

$$(1 + 2\mu d(z))y_1 = 0,$$

which are equivalent to the following Lippmann-Schwinger equations

$B_{\lambda\mu}^e(0,z)\varphi = \varphi$, $\varphi \in L^{2,e}(\mathbb{T})$,

and

$B_\mu^o(0,z)\varphi = \varphi$, $\varphi \in L^{2,o}(\mathbb{T})$,

respectively. Here

$$a(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{dp}{\mathcal{E}_0(p) - z}, \qquad (9)$$

$$b(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos p\, dp}{\mathcal{E}_0(p) - z}, \qquad (10)$$

$$c(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 p\, dp}{\mathcal{E}_0(p) - z}, \qquad (11)$$

$$d(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 p\, dp}{\mathcal{E}_0(p) - z}. \qquad (12)$$

Using the notation (9)–(12), we can obtain the expressions for the determinants of the operators $I - B_{\lambda\mu}^e(0,z)$ and $I - B_\mu^o(0,z)$:

$\Delta_{\lambda\mu}^e(z) := \det[I - B_{\lambda\mu}^e(0,z)] = [1 + \lambda a(z)][1 + 2\mu c(z)] - 2\lambda\mu b^2(z)$,

and

$\Delta_\mu^o(z) := \det[I - B_\mu^o(0,z)] = 1 + 2\mu d(z)$.

Lemma 3. *The functions $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ and $d(z)$ have the following asymptotic behavior:*

$$a(z) = \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma}}(\mathcal{E}_{\min}(0) - z)^{-\frac{1}{2}} + o(1), \quad \text{as} \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(0),$$

$$b(z) = \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma}}(\mathcal{E}_{\min}(0) - z)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+2\gamma} + o(1), \quad \text{as} \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(0),$$

$$c(z) = \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma}}(\mathcal{E}_{\min}(0) - z)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+2\gamma} + o(1), \quad \text{as} \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(0),$$

$$d(z) = \frac{1}{4+4\gamma}, \quad \text{as} \quad z \nearrow \mathcal{E}_{\min}(0)$$

where $\gamma > 0$.

Lemma 3 can be proved using a similar approach to that of Proposition 4.2 in [19].

Lemma 4. *For any function $a(\cdot)$, $c(\cdot)$ and $d(\cdot)$ the following assertions are true:*

(i) analytic in $\mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0),\mathcal{E}_{\max}(0)]$ and strictly increasing in $\mathbb{R}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0),\mathcal{E}_{\max}(0)]$.

(ii) positive in the interval $(-\infty,\mathcal{E}_{\min}(0))$.

Also, the function $b(\cdot)$ is analyitic and positive in $\mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(0),\mathcal{E}_{\max}(0)]$, strictly increasing in the interval $(-\infty,\mathcal{E}_{\min}(0))$.

Proof of the lemma can be found in [22].

Lemma 5. *The function $\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)$ is real-valued for all $z\in\mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{min}(0),\mathcal{E}_{max}(0)]$ and it has the following asymptotic behavior:*

$$\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)=S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)(\mathcal{E}_{\min}(0)-z)^{-\frac{1}{2}}+B_0(\lambda,\mu;\gamma)+o(1),\ \text{ as } z\nearrow\mathcal{E}_{\min}(0),$$

where

$$S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)=\frac{\mu}{\sqrt{1+\gamma}}+\frac{\lambda}{2\sqrt{1+\gamma}}+\frac{\lambda\mu}{(2+2\gamma)\sqrt{1+\gamma}},$$

$$B_0(\lambda,\mu;\gamma)=1-\frac{\mu}{1+\gamma}-\left(\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}+\frac{1}{2(1+\gamma)^2}\right)\lambda\mu.$$

By using Lemma 3, we can prove Lemma 5.

Corollary 1. *For the determinant $\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)$ the following results are true:*

(i) Assume, $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)>0$. Then

$$\lim_{z\nearrow\mathcal{E}_{\min}(0)}\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)=+\infty.$$

(ii) Assume, $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)<0$. Then

$$\lim_{z\nearrow\mathcal{E}_{\min}(0)}\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)=-\infty.$$

Also,

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta^{e}_{\lambda\mu}(z)=1.$$

To formulate the main theorem we introduce the regions G_0, G_1, and G_2 associated to the function $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)$ as follows:

$$G_0=\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2: S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)>0,\ \ \mu>-(1+\gamma)\}.$$

$$G_1=\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2: S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)<0\},$$

$$G_2=\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2: S_{-\frac{1}{2}}(\lambda,\mu;\gamma)>0,\ \ \mu<-(1+\gamma)\},$$

In the following theorem we have collected results on a unique eigenvalue of the operator $H^{e}_{\lambda 0}(0)$ resp. $H^{e}_{0\mu}(0)$ depending on the sign of $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Theorem 1.

(i) For any $\lambda\neq 0$ the operator $H^{e}_{\lambda 0}(0)$ has a unique eigenvalue $\zeta(\lambda)$ lying outside of the essential spectrum:

If $\lambda<0$, then the eigenvalue $\zeta(\lambda)$ is lying in the interval $(-\infty,\mathcal{E}_{\min}(0))$.

(ii) For any $\mu\neq 0$ the operator $H^{e}_{0\mu}(0)$ has a unique eigenvalue $\zeta(\mu)$ lying outside of the essential spectrum:

If $\mu<0$, then the eigenvalue $\zeta(\mu)$ is lying in the interval $(-\infty,\mathcal{E}_{\min}(0))$.

Theorem 1 can be proved in a similar way as it is done in [4].

We use the following notations:

$\zeta_{min}(\lambda,\mu)=\min\{\zeta(\lambda),\zeta(\mu)\}$,

$\zeta_{max}(\lambda,\mu)=\max\{\zeta(\lambda),\zeta(\mu)\}$.

The next theorem establishes the exact number of eigenvalues of $H^{e}_{\lambda\mu}(0)$ and $H^{o}_{\mu}(0)$ lying below the essential spectrum. (see FIGURE 1)

Theorem 2.

i) Assume $(\lambda,\mu) \in G_0$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has no eigenvalues below the essential spectrum.

(ii) Assume, $(\lambda,\mu) \in G_1$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has one eigenvalue $\zeta(\lambda,\mu)$ satisfying the following relation:

$\zeta(\lambda,\mu) < \mathcal{E}_{\min}(0)$.

(iv) Assume, $(\lambda,\mu) \in G_2$. Then the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ has two eigenvalues $\zeta_1(\lambda,\mu)$ and $\zeta_2(\lambda,\mu)$ satisfying the following relations:

$\zeta_1(\lambda,\mu) < \zeta_{min}(\lambda,\mu) \le \zeta_{max} < \zeta_2(\lambda,\mu) < \mathcal{E}_{\min}(0)$.

Theorem 3. *Assume, $\mu \in \mathbb{R}$. Then for the $H^o_\mu(0)$ operator following relations are true:*

(i) If $\mu > -2-2\gamma$, then $H^o_\mu(0)$ operator has no eigenvalue in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

(ii) If $\mu < -2-2\gamma$, then $H^o_\mu(0)$ operator has a unique eigenvalue in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

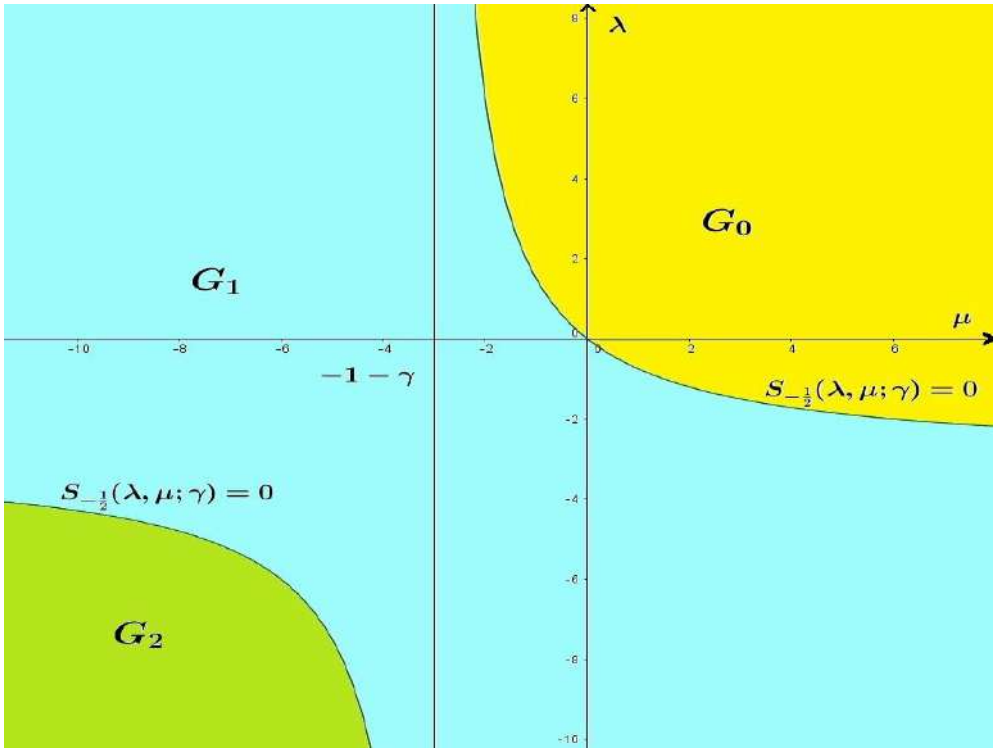


Figure 1. A schematic dynamics of the change in the number of eigenvalues depending on μ and λ.

Proofs of the main results.

Lemma 6. *A number $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{min}(0), \mathcal{E}_{max}(0)]$ is an eigenvalue of the operator $H^e_{\lambda\mu}(0)$ and $H^o_\mu(0)$ if and only if*

$\Delta^e_{\lambda\mu}(z) = 0$ and $\Delta^o_\mu(z) = 0$

respectively.

The proof of this lemma follows a standart approach, which is similar to that presented in the references [17] and [19].

Lemma 7. *The function $\Delta^o_\mu(z)$ is real-valued for all $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{min}(0), \mathcal{E}_{max}(0)]$, and it has the following asymptotic behavior:*

$\lim\limits_{z\to\pm\infty} \Delta^o_\mu(z) = 1,$

$\lim\limits_{z\nearrow \mathcal{E}_{\min}(0)} \Delta^o_\mu(z) = 1 + \dfrac{\mu}{2+2\gamma},$

The first item follows directly from the Lebesgue dominated convergence theorem. The proof for the second item can be obtained using Lemma 3.

Now, we will study the number and location of the roots of the function $\Delta^o_\mu(z) = 1 + 2\mu d(z)$.

Lemma 8. *Let* $\mu \in \mathbb{R}$.

(i) If $\mu > -2 - 2\gamma$ then the function $\Delta_\mu^o(\cdot)$ has no zeros in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

(ii) If $\mu < -2 - 2\gamma$, then the function $\Delta_\mu^o(\cdot)$ has a unique zero, which is located in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

The Lemma 8 can be proven in a similar way as Lemma 4.5 in [19].

The following lemma provides the dependence to the number of zeros of $\Delta_{\lambda\mu}^e$ in $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$ on the parametrs μ and λ.

Lemma 9. *Let* $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

(i) If $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda, \mu; \gamma) > 0$ and $\mu < -1 - \gamma$, then the function $\Delta_{\lambda\mu}^e(\cdot)$ has two zeros in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

(ii) If $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda, \mu; \gamma) < 0$ then the function $\Delta_{\lambda\mu}^e(\cdot)$ has a unique zero in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

(iii) If $S_{-\frac{1}{2}}(\lambda, \mu; \gamma) > 0$ and $\mu > -1 - \gamma$, then the function $\Delta_{\lambda\mu}^e(\cdot)$ has no zeros in the interval $(-\infty, \mathcal{E}_{\min}(0))$.

The lemma 9 can be proved in a similar manner to Lemma 4.6 in [19].

Proof of Theorem 2. The proof of the assertions of theorem are based on the Lemmas 6 and 9.

Proof of Theorem 3. The proof of the assertions of theorem are based on the Lemmas 6 and 8.

REFERENCES:

1. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics, Ann. Henri Poincaré. 5 (2004), 743-772.

2. Kholmatov Sh.Yu., Lakaev S.N., Almuratov F.: Bound states of discrete Schrödinger operators on one and two dimensional lattices, J. Math. Anal. Appl. 503:1 (2021), 125280. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125280

3. Lakaev S.N.: The Efimov's effect of the three identical quantum particle on a lattice. Funct. Anal. Appl. 27 (1993), 15–28

4. Lakaev S.N., Özdemir E.: The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices. Hacettepe J. Math. Stat. 45 (2016), 1693–1703.

5. Lakaev S. N., Bozorov I.N., Khamidov Sh.I.: The Threshold Effects for the Two Particle Discrete Schrödinger Operators on Lattices, Lobachevskii J.Math. 45, 4987–4999 (2024).

6. Khalkhuzhaev A.M., Khamidov Sh.I., Mahmudov H.Sh.: On the Existence of Eigenvalues of the One Particle Discrete Schrödinger Operators, AIP Conf. Proc. 3004, 020007, (2024).

7. Faddeev L.D., Merkuriev S.P.: Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems (Doderecht: Kluwer Academic Publishers, 1993).

8. Bloch I.: Ultracold quantum gases in optical lattices, Nat. Phys. 1 (2005), 23-30.

9. Jaksch D., Bruder C., Cirac J., Gardiner C.W., Zoller P.: Cold bosonic atoms in optical lattices. Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 3108–3111. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.3108

10.Jaksch D., Zoller P.: The cold atom Hubbard toolbox. Ann. Phys. 315 (2005), 52–79. https://doi.org/10.1016/j.aop.2004.09.010

11.Lewenstein M., Sanpera A., Ahufinger V.: Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating Quantum Many-body Systems. Oxford University Press, Oxford, 2012. https://doi.org/10.1080/00107514.2013.800135

12.C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, K. Bongs: Ultracold heteronuclear molecules in a 3d optical lattice. Phys.Rev. Lett. 97, 2006. https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.97.120402

13.K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Hecker Denschlag, A.J. Daley, A. Kantian, H.P. Büchler, P. Zoller: Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. Nature 441, 853–856, 2006. https://doi.org/10.1038/nature04918

14.A. K. Motovilov, W. Sandhas, and V. B. Belyaev: Perturbation of a lattice spectral band by a nearby resonance, J. Math. Phys. 42 (2001), 2490–2506. http://dx.doi.org/10.1063/1.1371264

15.S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov: The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm. Math. Phys. 262 (2006), 91–115. http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1454-y

16.D. Mattis: The few-body problem on a lattice. Rev. Mod. Phys. ***58*** *(1986), 361–379. https://doi.org/1103/RevModPhys.58.361*

17.S.N. Lakaev, I.N. Bozorov: The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. Theoret. and Math. Phys. 158 (2009), 360–376. https://doi.org/10.1007/s11232-009-0030-6

18.I.N.Bozorov, Sh.I.Khamidov, S. N. Lakaev: The tumber and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators, Lobachevskii J.Math. 43, 47–58 (2022).

19.S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov, Sh.I.Khamidov: Bose-Hubbard model with on-site and nearest-neighbor interactions; exactly solvable case. J. Phys. A: Math. Theor. 54 (2021), 245201 [22 pages]. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/abfcf4

20.S.S.Ulashov, Sh.I.Khamidov, Sh.S.Lakaev: The Number and Location of Two Particle Schrödinger Operators on a Lattice, Lobachevskii J. Math. 45 (11) 5804-5817, (2024)

21.B. A. Lippmann, J. Schwinger: Variational principles for scattering processes. I. Phys. Rev. 79, 469 (1950), 361–379.

22.S.N.Lakaev, Sh.I.Khamidov: On the number and location of eigenvalues of the two particle Schrödinger operator on a lattice, Lobachevskii J.Math. 43, 135–145 (2022).

УДК 538.1: 548

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МИКРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Шарипов Мирзо Зокирович,
профессор Бухарского государственного университета
m.z.sharipov@buxdu.uz
Низомова Шахноза Кахрамоновна,
докторант Бухарского государственного университета
shahnozanizomova39@gmail.com
Бадриддинов Исломбек Мустахкам угли,
докторант Бухарского государственного университета
Чориева Мухайё Жалил кизи,
магистрант Бухарского государственного университета

Аннотация. *В работе рассматриваются современные подходы к теоретическому описанию динамических микромагнитных процессов в ферро- и слабых ферромагнитных кристаллах. Особое внимание уделяется уравнениям движения магнитного момента и эффективного поля, включая нелинейные эффекты, релаксационные механизмы и неравновесные состояния. Анализируются модели, основанные на уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта, а также обобщённые методы, учитывающие влияние внешних возмущений, анизотропии и модулированных магнитных структур. Показано, что динамика микромагнитных систем определяется как внутренними взаимодействиями, так и внешними факторами, что открывает возможности для управления магнитными состояниями при помощи света, электрического поля и механических воздействий. Представленные результаты могут служить базой для дальнейшего развития прикладных исследований в области спинтроники, магноники и новых функциональных материалов.*

Ключевые слова: *динамические микромагнитные явления, уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта, неравновесные состояния, модулированные магнитные структуры, спинтроника.*

DINAMIK MIKROMAGNETIK HODISALARNING NAZARIY TA’RIFI

Annotatsiya. *Ushbu ishda ferro- va kuchsiz ferromagnit kristallardagi dinamik mikromagnit jarayonlarning nazariy tavsifiga zamonaviy yondashuvlar ko‘rib chiqiladi. Magnit momenti va samarali maydonning harakat tenglamalariga, shu jumladan, nochiziqli effektlar, relaksatsion mexanizmlar va muvozanatsiz holatlarga alohida e’tibor qaratilgan. Landau-Lifshits-Gilbert tenglamasiga asoslangan modellar, shuningdek, tashqi ta’sirlar, anizotropiya va modulyatsiyalangan magnit tuzilmalarning ta’sirini hisobga oluvchi umumlashtirilgan usullar tahlil qilinadi. Mikromagnit tizimlarning dinamikasi ham ichki o‘zaro ta’sirlar, ham tashqi omillar bilan belgilanishi ko‘rsatilgan, bu esa yorug‘lik, elektr maydoni va mexanik ta’sirlar yordamida magnit holatlarni boshqarish imkoniyatlarini ochib beradi. Taqdim etilgan natijalar spintronika, magnonika va yangi funksional materiallar sohasidagi amaliy tadqiqotlarni yanada rivojlantirish uchun asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *dinamik mikromagnit hodisalar, Landau-Lifshis-Gilbert tenglamasi, muvozanatsiz holatlar, modulyatsiyalangan magnit tuzilmalar, spintronika.*

THEORETICAL DESCRIPTIONS OF DYNAMIC MICROMAGNETIC PHENOMENA

Abstract. *This paper reviews modern approaches to the theoretical description of dynamic micromagnetic phenomena in ferro- and weakly ferromagnetic crystals. Special attention is given to the equations of motion for the magnetization vector and the effective field, including nonlinear effects, relaxation mechanisms, and nonequilibrium states. The analysis involves the Landau–Lifshitz–Gilbert equation as well as generalized models that take into account the influence of external perturbations, anisotropy, and modulated magnetic structures. It is shown that the dynamics of micromagnetic systems are governed both by internal interactions and external factors, which opens up possibilities for controlling magnetic states using light, electric fields, and mechanical effects. The results presented may serve as a basis for further applied research in spintronics, magnonics, and novel functional materials.*

Key words: *dynamic micromagnetic phenomena, Landau–Lifshitz–Gilbert equation, nonequilibrium states, modulated magnetic structures, spintronics.*

Введение. Хорошо известно, что существующие в природе вещества обладают теми или иными магнитными свойствами. К ним относятся ферромагнетики, ферримагнетики, антиферромагнетики, слабые ферромагнетики. В настоящее время исследованию магнитных свойств веществ со спонтанной намагниченностью посвящено очень много научных работ. Эти вещества обладают уникальными магнитными свойствами, обусловившими их широкое применение в различных отраслях науки и техники: в электронике, радиотехнике, микроэлектронике, радиоэлектронике, коммуникационных сетях и др. Кроме того, они оказались весьма перспективными для целей хранения и обработки информации, а также для нового, быстро развивающегося направления – спинтроники.

Это требует глубокого понимания не только причин появления микроскопического спонтанного магнитного момента, но и формирования макроскопического магнитного момента вещества, называя его намагниченностью **M**. При этом важное значение имеет изучение возможных причин ориентации в выделенных направлениях кристалла. Необходимо также выяснить природу большого числа явлений, связанных с поведением **M** во внешних магнитных полях и в присутствии упругих напряжений. Окончательного понимания явлений в магнетиках можно добавить, проводя исследования на микроскопическом (атомном) уровне. Именно на этом уровне были получены данные о существовании отличных от нуля элементарных атомных магнитных моментов, а также установлен новый тип взаимодействия (обменное взаимодействие), с которым связано упорядочение этих моментов. Таким образом, была решена основная проблема: объяснена причина появления спонтанной намагниченности [1,2].

Уравнение Ландау и Лифшица для микромагнитных явлений.

В динамическом или неравновесном состоянии магнитной системы равенство (1) нарушается.

$$[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\text{eff}}] = 0 \qquad (1)$$

$$[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\text{S}}] = 0 \qquad (2)$$

Если бы с намагниченностью не был бы связан механический момент **J,** то под действием вращающего момента вектор **M** стал бы поворачиваться к направлению эффективного поля $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ и $\mathbf{H}^{\text{S}}$ на поверхности магнетика, пока не возникло бы состояние равновесия, характеризующееся (1), (2), возникло бы, если бы с намагниченностью не был связан механический момент. В конечном итоге, это связано с существованием механического момента, складывающегося из спиновых и орбитальных механических моментов электронов, т.е. $\mathbf{J} \neq 0$. В этой связи, в соответствии с известным законом динамики для вращающихся тел, имеем:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \left[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{\text{eff}}\right]. \qquad (3)$$

В простейшем случае связь **M** с **J** может быть записана в виде:

$$\mathbf{M} = \gamma\mathbf{J}, \qquad (4)$$

где коэффициент γ обычно называют магнитомеханическим отношением. Для величин, связанных со спином электрона, $\gamma = -e / mc \approx -1.76\cdot10^{7}$ (рад/с·Э). Комбинируя уравнения (3) и (4), получаем следующее уравнение для движения намагниченности:

$$\frac{-1}{|\gamma|}\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \left[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{\text{eff}}\right]. \qquad (5)$$

Поскольку длина вектора **M** со временем меняться не может, то уравнение (5) описывает прецессию намагниченности вокруг локального направления эффективного магнитного поля (рисунок 1). При однородно намагниченном ферромагнетике, например, при учёте только внешнего поля *H*, данная прецессия будет происходить с частотой $\nu = |\gamma|H/2\pi \approx 2{,}8\cdot H$ МГц/Э, что позволяет наблюдать на этих частотах резонансное поглощение энергии высокочастотного поля с поляризацией, перпендикулярной внешнему постоянному полю *H* (ферромагнитный резонанс). Однако возможна также ситуация, когда частота прецессии в разных точках пространства может оказаться различной.

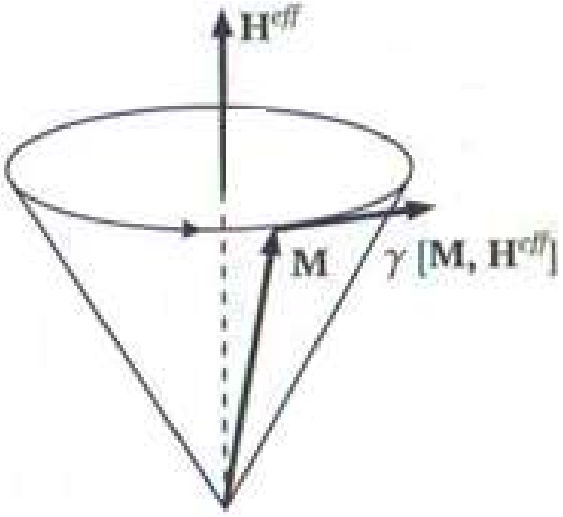


Рисунок 1. Схематическое изображение прецессионного движения намагниченности M вокруг эффективного магнитного поля $\mathbf{H}^{eff}$.

Вектор γ [**M**, $\mathbf{H}^{eff}$] направлен по касательной к изображённому сечению конуса во всех точках, определяющих положение конца вектора **M**. В связи с тем, что γ < 0, вектор γ [**M**, $\mathbf{H}^{eff}$] по направлению противоположен вектору[**M**, $\mathbf{H}^{eff}$], образующему совместно с **M** и $\mathbf{H}^{eff}$ правый базис.

Из сказанного ясно, что уравнение (5) не учитывает возможность перехода намагниченности в равновесное состояние, в чём и заключается его недостаток. Для ликвидации этого недостатка необходимо учесть затухание. Затухание играет весьма важную роль при описании многих динамических явлений, наблюдающихся в ферромагнетиках. Интерес к исследованиям затухания в магнитоупорядоченных веществах многократно возрос с началом разработок магнитных материалов с высокой скоростью перемагничивания, в частности с разработкой устройств магнитной памяти с параллельной выборкой информации. Для увеличения быстродействия таких устройств требовалось увеличение скорости перемагничивания магнитных материалов, которая напрямую оказывалась связанной с затуханием. В настоящее время эта проблема не только не утратила своего значения, но и приобрела ещё больший интерес в связи с развитием совершенно новых устройств записи информации [3].

Затухание в физических системах ассоциируют с передачей энергии от неравновесной макроскопической системы к микроскопическому тепловому движению атомов кристаллической решётки (фононам). При этом возможна как прямая передача энергии тепловым фононам, так и передача через посредство промежуточных, например спин-волновых или вихретоковых полей, а также термического возбуждения электронов проводимости. Детали механизмов процесса передачи энергии являются достаточно сложными и, несмотря на большое внимание, уделяемое исследованию механизмов затухания, доминирующий процесс [4–6]. Скорее всего, он оказывается различным в разных условиях, что делает трудным его учёт в макроскопических уравнениях движения намагниченности. Однако можно ввести в эти уравнения по-своему различный номенклатурический член затухания, содержащий среднюю по всему образцу параметр затухания, характеризующий теряемую магнитной системой энергию. Далее такой параметр может быть определён экспериментально при отсутствии знания деталей механизмов передачи энергии. Такая задача впервые была решена в работе Ландау и Лифшица [1]. Авторы учили затухание, считая, что главный эффект, связанный с неизменностью |**M**| = M = M_s обусловленный обменным взаимодействием, должен оставаться и в уравнении, описывающем затухание. Что же касается поворота намагниченности к направлению эффективного магнитного поля, то оно может происходить исключительно за счёт релаксационных взаимодействий. Поскольку эти взаимодействия существенно меньше обменного, то при добавлении слагаемого, описывающего затухание, изменения в коэффициенте при **[M**,$\mathbf{H}^{eff}$**]** можно не учитывать. Сделанные предположения накладывают существенные ограничения на форму суммарного вращающего момента **R**, описывающего релаксацию намагниченности **M** к направлению эффективного поля в следующей форме:

$$\mathbf{R} = \lambda\left(\mathbf{H}^{eff} - \frac{\mathbf{M}(\boldsymbol{H}^{eff}\mathbf{M})}{M_S^2}\right), \qquad (6)$$

или, что то же самое, в форме:

$$\mathbf{R} = -\frac{\lambda}{M_S^2}[\mathbf{M},[\mathbf{M},\mathbf{H^{eff}}]]$$

Вводимая в **R** величина λ называется коэффициентом затухания.

В результате уравнение движения для намагниченности в соответствии с (5) приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = [\mathbf{H^{eff}},\mathbf{M}] + \mathbf{R}$$

что с учётом (6) совпадает с уравнением, приведённым в [3]. Это уравнение может быть представлено также в следующем, часто употребляемом виде:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -[\mathbf{M},\mathbf{H^{eff}}] - \frac{\lambda}{M_S^2}[\mathbf{M},[\mathbf{M},\mathbf{H^{eff}}]] \quad (7)$$

Именно это уравнение в настоящее время называют уравнением Ландау и Лифшица. При его обосновании, как следует из сказанного выше, не учитывалось изменение абсолютной величины намагниченности **M**, и в связи с малостью релятивистских взаимодействий, обусловливающих релаксационного слагаемого, фактически предполагалось, что $(\frac{\lambda}{M_S}) << 1$ Ниже будет показано, что при несколько ином способе введения релаксационного вращающего момента можно отказаться от приведённого выше ограничения.

Запись вращающего момента R, связанного с затуханием, предполагает, что прецессия намагниченности происходит по спирали так, что постепенно направление M приближается к направлению эффективного магнитного поля (рисунок 2).

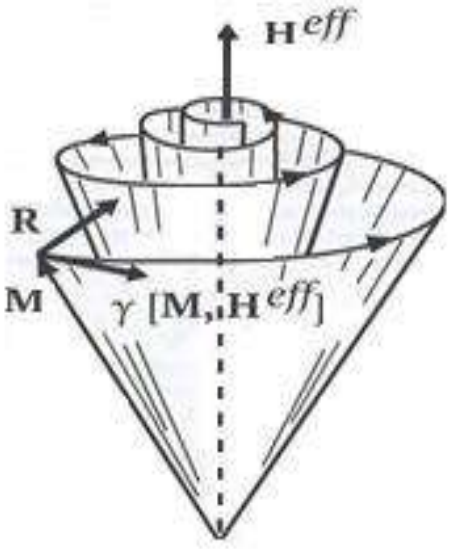


Рисунок 2. Схематическое изображение процесса релаксации магнитного момента

В настоящее время можно считать, что уравнение Ландау и Лифшица хорошо апробировано и описывает многие динамические явления, например ферромагнитный резонанс, распространение и затухание спиновых волн, а также движение доменных границ. Если **M** не зависит от времени и затухание отсутствует, из (7) следует уравнение (1), описывающее большой класс микромагнитных распределений намагниченности.

Естественно, что для описания целого ряда явлений, например движения доменных стенок или образований локальных нелинейных намагниченностей, уравнений (7) недостаточно, и для решения соответствующих проблем к ним необходимо присоединить уравнения магнитостатики или в более общем случае уравнения электродинамики, а в ряде случаев и уравнения теории упругости.

Учёт затухания по Гильберту.

Другой способ введения затухания в макроскопическое уравнение для намагниченности, основанный на использовании формализма Лагранжа, был рассмотрен Гильбертом [7]. Из классической механики известно, что в рамках указанного формализма затухание может быть введено в уравнение движения, если диссипируемая энергия может быть представлена в виде квадратичной функции скорости физической системы, т.е. в виде так называемой релеевской диссипативной функции. Для ферромагнетика, в котором в качестве динамической переменной

выступает вектор намагниченности **M**(**r**,*t*), диссипативный функционал может быть представлен в виде:

$$\mathcal{R}\left[\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{r},t)\right]=\frac{\eta}{2}\int_{v}\dot{\mathbf{M}}^{2}(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}, \tag{8}$$

где η - усреднённый по всему образцу коэффициент затухания. Точка над **M** здесь и ниже обозначает частную производную по времени.

Введение функции $\mathcal{R}\left[\dot{\mathbf{M}}(\boldsymbol{r},t)\right]$ и использование формализма Лагранжа позволяет записать уравнение движения для намагниченности в следующем общем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta\mathcal{L}[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}]}{\delta\mathbf{M}}-\frac{\delta\mathcal{L}[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}]}{\delta\mathbf{M}}+\frac{\delta\mathcal{R}[\dot{\mathbf{M}}]}{\delta\mathbf{M}}=0, \tag{9}$$

где $\mathcal{L}[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)]$ - лагранжиан магнитной системы, причём, как обычно,

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)\right]=\mathcal{J}\left[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)\right]-\mathcal{V}\left[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)\right], \tag{10}$$

а $\mathcal{J}\left[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)\right]$ и $\mathcal{V}\left[\mathbf{M}(\mathbf{r},t),\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r},t)\right]$ соответственно «кинетическая» и «потенциальная» энергии магнитной системы. Аргументы в квадратных скобках означают, что каждая из этих энергий, а также лагранжиан являются функционалами. При этом функциональные производные от $\mathcal{R}$ и $\mathcal{V}$ дают соответственно:

$$\frac{\delta\mathcal{R}[\dot{\mathbf{M}}]}{\delta\mathbf{M}}=\alpha\dot{\mathbf{M}} \tag{11}$$

$$\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\mathbf{M}}=-\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}. \tag{12}$$

Казалось бы, уравнение (9) должно немедленно, как в случае классической механики, привести к явному динамическому уравнению для намагниченности с учётом затухания. Но при попытке получения указанного уравнения возникают серьёзные трудности, связанные с записью «кинетической» энергии $\mathcal{J}$ магнитной системы, выраженной через скорость изменения динамической переменной **M**(**r**,t). Несмотря на имеющиеся в частных случаях выражения для $\mathcal{J}$ [8], записать общее выражение для кинетической энергии Гильберту не удалось. Тем не менее на данном пути было замечено одно весьма важное обстоятельство, заключающееся в том, что введение диссипативной функции релеевского типа приводит к аддитивной добавке к эффективному магнитному полю $\mathbf{H}^{eff}$. Действительно, как хорошо видно из (9), (11) и (12), вместо $\mathbf{H}^{eff}$ возникает поле:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}-\eta\dot{\mathbf{M}}. \tag{13}$$

Таким образом, если вставить это поле в уравнение (5), то можно записать следующее динамическое уравнение для намагниченности M, в котором учтено затухание:

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\gamma[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}-\eta\dot{\mathbf{M}}] \tag{14}$$

Хотя в этом уравнении ради краткости не выписаны аргументы у поля намагниченности и эффективного поля, в общем случае обе эти величины зависят от **r** и t.

Из уравнения (14) отчётливо видно, что «поле затухания» $\eta\dot{\mathbf{M}}$ изменяет эффективное магнитное поле, а следовательно, и вращающий момент, оказывающей действие на поле намагниченности. Это уравнение может быть переписано также в виде:

$$\frac{\partial M}{\partial t}=-|\gamma|\left[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}\right]-\frac{\alpha}{M_{s}}\left[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}\right], \tag{15}$$

где вместо η введён безразмерный параметр затухания α=|γ| η M_s. Уравнения (14) и (15) называют уравнением Гильберта. Напомним, что магнитомеханическое отношение γ < 0.

Обоснование урвнений (7) и (15), вообще говоря, разное. Более того, как и в случае уравнения Ландау и Лифшица, уравнение (15) учитывает сохранение величины магнитного момента **M**. В этом легко убедиться, если скалярно умножить обе части этого уравнения на вектор **M**. Это означает, что опять обменное взаимодействие, формирующее **M**, играет во всех процессах определяющую роль, и, по-видимому, как и в случае (7), за затухание вновь должны быть ответственны релятивистские взаимодействия. Произведём более детальное сравнение этих уравнений. С этой целью умножим уравнение Ландау и Лифшица, записанное в форме (7), на вектор слева на **M**. В результате этого находим:

$$|\gamma|\,[\mathbf{M},[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}]]=-[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}]+\lambda|\gamma|\left[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}\right]. \tag{16}$$

Подставляя полученное для |γ| $[\mathbf{M},[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}]]$ снова в (7) после элементарных преобразований находим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\gamma^{*}[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}] + \frac{a}{M_s}[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}] \tag{17}$$

где

$$-\gamma^{*} = |\gamma|(1+a^2),\ a = \frac{\lambda}{M_s}. \tag{18}$$

Отсюда видно, что уравнение Ландау и Лифшица и уравнение Гильберта являются следствием одно другого. Кроме того, видно, что члены, описывающие затухание в обоих этих уравнениях, идентичны. Разница между уравнениями (7) и (17) состоит лишь в том, что в уравнении Гильберта магнитомеханическое отношение на величину $(1+a^2)$ больше магнитомеханического отношения, входящего в уравнении Ландау и Лифшица. Таким образом, прецессия намагниченности вокруг эффективного поля, описываемая уравнением Гильберта, оказывается более быстрой, чем это следует из уравнения Ландау и Лифшица. Такая разница связана с тем, что в уравнении (7) часть вращающего момента, обусловленная затуханием, направлена прямо к эффективному полю, в то время как вращающий момент, связанный с затуханием в (17), имеет компоненту, параллельную вращающему моменту.

Следует заметить, что при малых значениях параметра a << 1 описанные отличия в двух уравнениях несущественны, а вот значения a, наблюдаемые экспериментально, могут быть даже больше 0.1, и тогда указанные различия могут проявиться. Чтобы учесть эту ситуацию, при желании или необходимости работы с уравнением Ландау и Лифшица, его переписывают в форме:

$$(1 + a^2)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\gamma^{*}[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}] - \frac{a\gamma^{*}}{M_s}\left[\mathbf{M},[\mathbf{M},\mathbf{H}^{\mathrm{eff}}]\right], \tag{19}$$

Именно такое уравнение чаще всего используют при численных исследованиях динамических явлений в магнетиках.

Наконец, заметим, что в силу условия $\mathbf{M}=M_s^2$ из трёх уравнений (7) независимыми являются только два. Это же относится и к уравнениям (17) и (19). В связи с этим часто бывает удобным использовать уравнения не в переменных M_x, M_y, M_z, а в переменных θ и φ, представляющих полярный и азимутальный углы вектора намагниченности $\mathbf{M}$ и описывающих положение конца этого вектора на сфере радиуса M_s. При этом полярной осью является ось z, которую будем связывать с одним из выделенных направлений. Азимутальный угол будем отсчитывать от оси x.

Представим в координатах θ и φ, например уравнение (17). С этой целью учтём, что

$$M_x = M_s sin\,\theta\cos\varphi,\ M_y = M_s sin\,\theta\sin\varphi\ ,\ \ M_z = M_s cos\,\theta \tag{20}$$

Прежде всего, с учётом $H_j^{\mathrm{eff}} = -\frac{\partial W_G}{\partial M_j}$ запишем уравнение (17) в виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \gamma^{*}\left[\mathbf{M},\frac{\delta W_G}{\delta \boldsymbol{M}}\right] + \frac{a}{M_s}[\mathbf{M},\dot{\mathbf{M}}] \tag{21}$$

Далее достаточно выписать лишь два уравнения, поскольку третье в силу $\mathbf{M}^2 = M_s^2$ есть следствие первых двух. Имеем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \gamma^{*}\left(M_y\frac{\delta W_G}{\delta M_z} - M_z\frac{\delta W_G}{\delta M_y}\right) + \frac{a}{M_s}\left(M_y\frac{\partial M_z}{\partial t} - M_z\frac{\partial M_y}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = \gamma^*(M_z\frac{\delta W_G}{\delta M_x} - M_x\frac{\delta W_G}{\delta M_z}) + \frac{a}{M_s}(M_z\frac{\partial M_x}{\partial t} - M_x\frac{\partial M_z}{\partial t}) \qquad (22)$$

Используя (20), можно найти:

$$\frac{\delta W_G}{\delta M_x} = \frac{\delta W_G}{\delta \theta}\frac{1}{M_s}\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} - \frac{\delta W_G}{\delta \varphi}\frac{1}{M_s}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$

$$\frac{\delta W_G}{\delta M_y} = \frac{\delta W_G}{\delta \theta}\frac{1}{M_s}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta} - \frac{\delta W_G}{\delta \varphi}\frac{1}{M_s}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

$$\frac{\delta W_G}{\delta M_z} = \frac{\delta W_G}{\delta \theta}\frac{1}{M_s}\frac{1}{\sin\theta}$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M_s\left(cos\theta cos\varphi\frac{\partial \theta}{\partial t} - sin\theta sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial M_y}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial M_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = M_s\left(cos\theta sin\varphi\frac{\partial \theta}{\partial t} - sin\theta cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Подставляя эти соотношения в (22) и комбинируя получившиеся уравнения, легко найти

$$sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\gamma^*}{M_s}\frac{\delta W_G}{\delta \theta} + a\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\gamma^*}{M_s}\frac{\delta W_G}{\delta \varphi} - asin^2\theta\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (23)$$

Это и есть уравнения Гильберта, записанные в угловых переменных.
Представим эти уравнения также в следующем виде:

$$\frac{\delta W_G}{\delta \theta} = \frac{M_s}{\gamma^*}sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\frac{M_s}{\gamma^*}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\delta W_G}{\delta \varphi} = \frac{M_s}{\gamma^*}sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\frac{M_s}{\gamma^*}sin^2\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \qquad (24)$$

В статическом случае они превращаются в следующие уравнения:

$$\frac{\delta W_G}{\delta \theta} = 0 \quad \frac{\delta W_G}{\delta \varphi} = 0 \qquad (25)$$

которые описывают равновесное распределение намагниченности. При этом, поскольку $\partial W_G/\partial\theta$ и $\partial W_G/\partial\varphi$ по смыслу представляют собой статические вращающие моменты, ясно, что условия равновесия магнитной системы заключаются в равенстве нулю этих моментов. В динамическом случае эти вращающие моменты, отличные от нуля, уравновешиваются моментами, связанными с прецессией намагниченности и с затуханием (соответственно первые и вторые слагаемые в правой части).

Выводы. Проведённый анализ показал, что теоретические описания динамических микромагнитных явлений являются важным инструментом для понимания фундаментальных свойств ферро- и слабых ферромагнетиков. Использование уравнения Ландау–Лифшица-Гильберта и его модификаций позволяет учитывать широкий спектр факторов - от релаксационных процессов до воздействия внешних полей и света. Это открывает новые перспективы в управлении магнитными состояниями и формировании модулированных структур. Полученные результаты создают основу для разработки инновационных решений в области спинтроники, магноники и функциональных наноматериалов, обеспечивая связь между фундаментальной теорией и практическими приложениями.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М: Наука, – 1964. – 567 с.

2. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М: Наука, – 1971. – 1027 с.

3. Richter H.J., Dobin A.Y., Heinonen O., et al. Recording on Bit-Patterned Media at Densities of 1Tb/in2 and Beyond // IEEE Trans. Mag. 2006. V.42.Iss.10. pp 2255-2260.

4. Туров Е.А. Кинетические, оптические и акустические свойства антиферромагнетиков. – Свердловск, 1990. – 134 с.

5. Киттель Ч. Физика ферромагнитных областей / Под. ред. Вонсовского С.В. – М.: Иностр., литература, 1951. – С. 19 – 116.

6. Барьяхтар В.Т., Богданов А.Н., Яблонский Д.А. Физика магнитных доменов // УФН. – Москва, 1988. – Т.156. – В.1. – С. 47 – 92.

7. Gilbert T.L. Phenomenological Theory of Damping in Ferromagnetic Materials // IEEE Trans. Mag. 2004. V.40. N.6. pp. 3443-3449.

8. Hubert A. Theorie der Domanenwande in Geordneten Wander. – Springer: Berlin, Heidelberg; New York, 1974. 377 s.

УДК 539.12

КОГЕРЕНТНАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ ДИССОЦИАЦИЯ ПРОТОНОВ НА ЯДРАХ

Саидханов Насир Шакирович,
профессор Физико-технического института им. С.А. Азимова
Академии наук Республики Узбекистан,
доктор физико-математических наук,
Ташкент, ул. Ч. Айтматова, 2Б.
said@uzsci.net

Аннотация. *Сделан обзор работ, посвящённых когерентной дифракционной диссоциации протонов на ядрах, выполненных после теоретического предсказания И. Я. Померанчуком и Е. Л. Фейнбергом о существовании нового типа процессов — неупругого дифракционного рассеяния или дифракционной диссоциации. Подробно описаны экспериментальные исследования этих процессов с помощью фотоэмульсионной методики при энергии первичных протонов 800 ГэВ. Полученные результаты сравнены с аналогичными результатами, полученными той же методикой при более низких энергиях.*

Показано, что топологические сечения одно- и трёхлучевых когерентных реакций достигают своих максимальных значений при энергиях ~200 и 400 ГэВ соответственно, а затем начинают уменьшаться. Для пятилучевых реакций рост сечения, очень быстрый при энергиях (20 ÷ 200 ГэВ) при $E_0 \geq 200$ ГэВ существенно замедляется и при рассматриваемых нами энергиях, по-видимому, достигает максимальных значений. Полное сечение когерентной реакции при энергиях $E_0 > 200$ ГэВ в пределах экспериментальных ошибок очень слабо зависит от энергии.

Ключевые слова: *когерентность, дифракционная диссоциация, фотоэмульсия, ядро, протон, π-критерий, поперечное сечение, поперечный импульс, события, столкновение, когерентность, наименьшие квадраты, угловое распределение, квантовые числа.*

COHERENT DIFFRACTIVE DISSOCIATION OF PROTONS ON NUCLEI

Abstract. *This paper reviews studies devoted to the coherent diffractive dissociation of protons on nuclei, conducted after the theoretical prediction by I. Ya. Pomeranchuk and E. L. Feinberg of the existence of a new type of process—inelastic diffractive scattering, or diffractive dissociation. Experimental studies of these processes using a photoemulsion technique at a primary proton energy of 800 GeV are described in detail. The results obtained are compared with similar results obtained using the same technique at lower energies.*

It is shown that the topological cross sections of one- and three-prong coherent reactions reach their maximum values at energies of ~200 and 400 GeV, respectively, and then begin to decrease. For five-prong reactions, the cross section increase, which is very rapid at energies (20 ÷ 200 GeV), slows significantly at $E_0 \geq 200$ GeV and apparently reaches its maximum values at the energies considered here. The total cross section of the coherent reaction at energies $E_0 > 200$ GeV, within experimental error, depends very weakly on energy.

Key words: *coherence, diffraction dissociation, photoemulsion, nucleus, proton, π-meson, cross section, transverse momentum, events, collision, coherence, least squares, angular distribution, quantum numbers.*

PROTONLARNING YADROLARDA KOGERENT DIFRAKSION DISSOSIASIYASI

Annotasiya. *Mazkur ish protonlarning yadrolarda kogerent difraksion dissosiasiyasiga bag‘ishlangan, I. Ya. Pomeranchuk va E. L. Feynberg tomonidan yangi turdagi jarayonlar — noelastik difraksion sochilish yoki difraksion dissosiasiya mavjudligi haqidagi nazariy taxminidan so‘ng bajarilgan ishlar ko‘rib chiqildi. 800 GeV dastlabki protonlar energiyasida fotoemulsiya usuli yordamida bu jarayonlarni eksperimental o‘rganish jarayonlari batafsil tasvirlangan. Olingan natijalar xuddi shu usul bilan pastroq energiyalarda olingan analog natijalar bilan solishtirildi. Bir va uch nurli kogerent reaksiyalarning topologik kesimlari mos ravishda ~200 va 400 GeV energiyalarda o‘zlarining maksimal qiymatlariga yetib, keyin kamayishni boshlashi ko‘rsatildi. Besh nurli reaksiyalar uchun kesimning o‘sishi (20 ÷ 200 GeV) energiyalarda juda tez bo‘lib, $E_0 \geq 200$ GeV energiyalarda sezilarli darajada sekinlashadi*

va biz ko‘rib chiqayotgan energiyalarda, ko‘rinadiki, maksimal qiymatlarga etadi. Kogerent reaksiyaning to‘liq kesimi $E_0 > 200$ GeV energiyalarda eksperimental xatoliklar doirasida energiyaga juda kam bog‘liq.

Kalit so‘zlar: *kogerentlik, difraksion dissosiasiya, fotoemulsiya, yadro, proton, π-mezon, ko‘ndalang kesim, ko‘ndalang impuls, hodisalar, to‘qnashuv, kogerentlik, eng kichik kvadratlar, burchak taqsimoti, kvant sonlari.*

Введение. Когерентная дифракционная диссоциация – это явление в физике высоких энергий, при котором частицы на тяжёлых ядрах мишени индуцируются в электромагнитных и ядерных дифракционных взаимодействиях без образования фрагментов ядер мишени и мезонов.

Причина когерентной дифракционной диссоциации – неупругие процессы. При столкновении адронов высоких энергий становится возможным рождение многих новых частиц. Наличие этих неупругих каналов приводит к частичному поглощению и связанному с этим изменению волновой функции начального адрона в области, где происходит взаимодействие.

Еще в 1953 году в журнале «Доклады Академии наук СССР» появилась работа И.Я. Померанчука и Е. Л. Фейнберга [1] под названием «О внешней (дифракционной) генерации частиц при ядерных столкновениях» В этой работе предсказывалось существование нового типа процессов – неупругого дифракционного рассеяния или дифракционной диссоциации (ДД), и обсуждались основные закономерности, свойственные этим процессам. В частности, было отмечено, что неупругое дифракционное рассеяние может происходить во всех случаях, когда выполнено «условие когерентности» при котором мишень участвует в процессе как целое, а поглощение, ответственное за этот процесс, должно происходить на периферии. С тех пор, вот уже многие годы, изучение этого интереснейшего явления занимает важное место в экспериментальной программе на всех крупнейших ускорителях мира и составляет предмет многочисленных теоретических исследований. Дифракционные явления хорошо известны в классической физике, где они определяются интерференцией волн, рассеянных на различных объектах. Аналогом этих явлений в физике элементарных частиц является упругое дифракционное рассеяние квантовомеханических волн, описывающих адроны высоких энергий. Физической причиной, вызывающей такое рассеяние, являются неупругие процессы. При столкновении адронов высоких энергий становится возможным рождение многих новых частиц. Наличие этих неупругих каналов приводит к частичному поглощению и связанному с этим изменению волновой функции начального адрона в области, где происходит взаимодействие, имеющей размеры R порядка размеров области сильных взаимодействий, т. е. порядка размеров адронов ~ 1 фм. Даже для наибольших энергий дифракционное рассеяние адронов на нуклонах и ядрах соответствует в классике дифракции Фраунгофера. К тому времени, когда была опубликована статья Померанчука и Фейнберга, эта аналогия между упругим рассеянием адронов и классической дифракцией уже была достаточно хорошо понята и использовалась для описания рассеяния нуклонов и пионов на нуклонах и ядрах. Принципиально новый шаг, сделанный Померанчуком и Фейнбергом в переходе от классических полей к полям, описывающим релятивистские частицы, состоял в учёте квантовополевого характера взаимодействующих объектов. Именно наличие внутренних степеней свободы взаимодействующих адронов, которые могут возбуждаться в процессе рассеяния, и является причиной своеобразных дифракционных явлений, возникающих при рассеянии микрочастиц и не имеющих аналогов в дифракции классических волн. Подчёркивая эту принципиальную новизну идеи дифракционной диссоциации адронов, мы, вместе с тем, хотели бы отметить и ту эвристическую роль, которую, как это видно из работы Померанчука и Фейнберга, сыграла для них теория электромагнитного излучения.

Аргументируя неизбежность дифракционного рождения адронов, авторы писали: «Обычно считают, что этот эффект (возникновения дифрагированной волны вследствие поглощения) проявляется только как упругое рассеяние. Однако связанное с таким рассеянием изменение движения заряда вызывает излучение (например, при поглощении ядром). Очевидно, что подобное дифракционное рассеяние ядерноактивных частиц нуклонов, должно сопровождаться испусканием нуклонных пар». Более того, явление дифракционной генерации адронов можно пояснить с помощью модели, заимствованной из области классического волнового рассеяния, если в классическую волну ввести «внутренние степени свободы». Роль таких степеней свободы может сыграть поляризация. Рассмотрим, например, рассеяние света па объекте («экране»), имеющем различные показатели преломления для право- и лево-циркулярно поляризованных лучей. Пусть падающий свет линейно поляризован. Тогда в результате дифракционного рассеяния, в силу недиагональности матрицы рассеяния в базисе линейно поляризованных состояний, возникнут две различные волны: одна,

имеющая такую же поляризацию, как начальная волна, и другая, ортогональная к ней. Эта вторая компонента не содержалась в падающей волне и может рассматриваться, таким образом, как результат «дифракционного рождения». В самом деле, при энергиях налетающего адрона, нескольких гигаэлектронвольт, его длина волны оказывается значительно меньше характерных (поперечных) размеров R мишени, так что выполняется известное условие дифракционной теории – «малости длины волны». Заведомо выполняется и другое условие («больших расстояний»). В последующие годы экспериментальные исследования блестяще подтвердили предсказание Померанчука и Фейнберга.

В середине 60-х годов, после запуска ускорителей высоких энергий, дифракционная диссоциация была обнаружена в опытах с протонными и пионными пучками. Дальнейшие исследования показали, что дифракционный механизм генерации частиц является одним из основных процессов, формирующих полные сечения взаимодействия адронов при высоких энергиях. Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования обнаружили много интересных особенностей дифракционной диссоциации, проливающих свет на внутреннюю структуру и взаимодействие адронов.

Дальнейшее развитие теории дифракционных явлений связано с разработкой кварк-партонной картины строения адронов и квантовой хромодинамики, которые внесли новое содержание в понятие внутренних степеней свободы адронов и дали новый язык для интерпретации дифракционных явлений. На этом пути возникла естественная возможность рассмотрения двух компонент дифракционной диссоциации в области малых масс на единой основе – в модели составляющих кварков. Кварк-партонная концепция оказалась плодотворной и для понимания дифракционного возбуждения в области больших масс. Здесь объединение достижений модели Редже с элементами квантовой хромодинамики привело к феноменологическим схемам, успешно описывающим многие черты дифракционных адронных процессов. За многолетнюю историю изучения дифракционной диссоциации этой проблеме были посвящены многие сотни оригинальных теоретических и экспериментальных статей и ряд обзоров. Эти работы содержат детальное обсуждение различных аспектов дифракционных явлений как отмечено в работе [2].

Методика исследования. В начале 60-х годов итальянскими учёными было экспериментально обнаружено когерентное образование пионов пионами. Затем, в 1966 году Ташкентской группой учёных [3] была опубликована работа, в которой впервые в мире экспериментально было получено указание на существование когерентной дифракционной диссоциации пионов протонами. Авторам это удалось применением метода дисперсионного анализа (F- критерий), свойства которого подробно описаны в работе [4] .

С тех пор, когерентное рождение частиц изучалось различными методами при всех энергиях, достигнутых современными ускорителями. Остановимся на работах, выполненных с помощью фотоэмульсионной методики, при энергиях 20, 50, 70, 200. 400 и 800 ГэВ. Отбор событий и измерения проводились единым методом. Отбор событий производился по следующим критериям, основанных на наиболее характерные черты неупругих дифракционных процессов [5-7]:

1. Угловое распределение суммарного вектора импульсов, всех вторичных частиц (кроме ядра отдачи) совпадает с угловым распределением при упругом дифракционном рассеянии.

2. Внутренние квантовые числа (электрический и барионный заряды, изотопический спин, странность и др.) системы вторичных частиц должны совпадать с таковыми для первичной частицы.

3. Импульс q, передаваемый ядру-мишени, должен быть достаточно малым (это следует из условия когерентности $l/q \geq R$, где R – радиус ядра; здесь и далее $h = c = 1$).

Реакции неупругого когерентного рождения частиц протонами на ядрах, где n – число образованных пионов, обычно отбираются среди звёзд,

$$p + A \rightarrow A + N + n\pi, \qquad (1)$$

удовлетворяющих необходимым критериям отбора квазинуклонных pN-взаимодействий в фотоэмульсии.

Малость передаваемых ядру-мишени в дифракционном процессе продольной (q_l) и поперечной ($q_\perp$) компонент импульса приводит к тому, что частицы, генерируемые в таком процессе, вылетают под относительно небольшим углом Θ. Угловая коллимация вторичных частиц в когерентных реакциях значительно сильнее, чем в обычных квазинуклонных взаимодействиях. Такая особенность событий реакции (1) является определяющей при их выделении среди квазинуклонных событий.

Экспериментальные результаты. Отбор и анализ событий когерентной дифракционной

диссоциации при различных энергиях, проведенный нами, изложим на примере работы, выполненной при энергии 800 ГэВ.

На рисунке 1 показано распределение по множественности заряженных частиц в квазинуклонных соударениях в эмульсии при 800 ГэВ. Наблюдаются пики при нечетных значениях множественности вплоть до n = 9, указывающие на присутствие значительного числа когерентных событий при малых значениях множественности.

Для отбора событий реакции (1), мы, как обычно [8], сравнивали распределения угловых оценок продольных и поперечных импульсов, передаваемых ядру-мишени в двух группах событий. Первая группа содержит так называемые «чистые» нечётнолучевые события, типа $0 + 0 + n_s$ без каких-либо признаков возбуждения или развала ядра-мишени. Вторая, фоновая группа содержит следующие события: 1) нечётнолучевые протон-нейтронные (pn) взаимодействия типа $0 + 0 + n_s$ с β-электроном у вершины звезды, 2) чётнолучевые pp-взаимодействия с визуально идентифицируемым протоном отдачи, 3) чётнолучевые pp-соударения с $(n_s + 1)$ релятивистскими частицами в конечном состоянии. В последних двух типах событий мы пренебрегали треком, связанным с протоном отдачи, либо, соответственно, имеющим максимальный угол вылета Θ.

Как было отмечено выше, сравнивая распределения «чистых» и фоновых событий по величине $\Sigma\sin\Theta_i$, можно определить число когерентных событий с фиксированными n_s независимо от массы

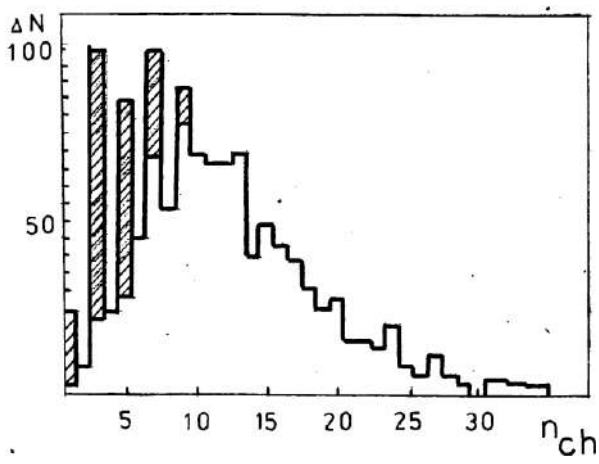


Рисунок 1. Распределение по множественности заряженных частиц в квазинуклонных взаимодействиях при 800 ГэВ. Заштрихованная область показывает вклад когерентных событий

дифракционно возбужденной системы. Нормируя рассматриваемые распределения по $\Sigma\sin\Theta_i$, при $\Sigma\sin\Theta_i > \Sigma(\sin\Theta_i)^{max}$, где $\Sigma(\sin\Theta_i)^{max}$ является параметром, изменяющимся от нуля до максимальных значений, $N^{(n)}_{coh}$ представляющую собой разность между числом «чистых» и фоновых событий, можно определить по высоте «плато», достигаемого функцией $N^{(n)}_{coh}((\Sigma(\sin\Theta_i)^{max})$.

Эта процедура, использовавшаяся нами при всех нечётных n_s иллюстрируется на рис. 2 для n_s = 5. Следует отметить, что при выделении однолучевых когерентных реакций (1) описанная выше процедура даёт только нижний предел числа когерентных событий.

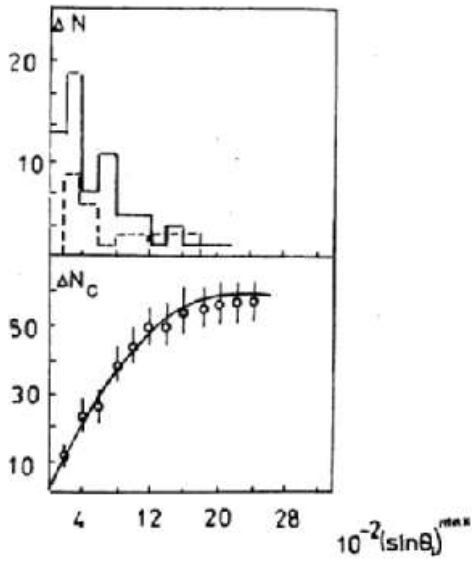


Рисунок 2. а) распределение по $\Sigma\sin\Theta_i$ пятилучевых событий; б) $N^{(n)}_{coh}$ как функция $\Sigma(\sin\Theta_i)^{max}$ для пятилучевых событий

Поэтому, в дальнейшем мы ввели поправки, связанные с потерей однолучевых событий при просмотре; при этом предполагалось [9], что азимутальное угловое распределение в ансамбле событий изотропно, а угловые распределения в когерентных реакциях с $n_s = 1$ и $n_s = 3$ одинаковы.

Характеристики когерентных взаимодействий. В таблице представлены [10] полученные экспериментальные данные о числе когерентных реакций протона p в n_s-лучей, средние свободные пробеги в эмульсии и топологические сечения, вычисленные для некоторого условного «среднего» ядра фотоэмульсии, имеющего массовое число A = 47. Вклады когерентных реакций (1) в распределение по множественности в pN-соударениях на рисунке 1 заштрихованы и на рисунке 2.

Таблица 1.

Характеристики когерентного рождения на ядрах эмульсии при 800 ГэВ

Канал	N	λ, м	б(mb/A)
p→1 луч	21	109	1,9 ± 0,5
p→3 луча	77	30	6,9 ± 0,8
p→5 лучей	57	41	5,1 ± 0,8
p→7 лучей	31	74	2,8 ± 0,5
p→9 лучей	7	326	0,6 ± 0,4
n – лучей	193	11,8	17,3 ± 1,2

Показана энергетическая зависимость топологических сечений когерентных реакций в интервале 20–800 ГэВ. Данные о когерентных реакциях при энергии 50–400 ГэВ взяты из работ [8, 11]. Из полученных экспериментальных данных видно (рисунок 3), что топологические сечения одно- и трёхлучевых когерентных реакций достигают своих максимальных значений при энергиях ~200 и 400 ГэВ соответственно, а затем начинают уменьшаться. Для пятилучевых реакций рост сечения, очень быстрый при энергиях (20 ÷ 200 ГэВ) при $E_0 \geq 200$ ГэВ существенно замедляется и при рассматриваемых нами энергиях, по-видимому, достигает максимальных значений.

Другими словами, чем больше n, тем при большей первичной энергии достигается максимум топологического сечения. В общем, поведение топологических сечений (1) с энергией вполне аналогично энергетической зависимости топологических сечений в обычных неупругих адрон-адронных взаимодействиях и определяется, по-видимому, доступным для реакций фазовым объемом. Следует отметить, что рост топологических сечений когерентных реакций с ростом E_0 в значительной мере обусловлен тем, что с увеличением первичной энергии открываются новые каналы диссоциации с большим числом нейтральных пионов, дающие вклад в когерентные реакции с фиксированными n_s. Что касается полного сечения реакций (1), то оно при энергиях $E_0 > 200$ ГэВ в пределах экспериментальных ошибок очень слабо зависит от энергии.

На рисунке 3б представлена энергетическая зависимость средней множественности заряженных частиц в когерентных реакциях протонов на ядрах эмульсии. Видно, что она может быть хорошо описана зависимостью

$$\langle n_{coh} \rangle = 5{,}46 - 1{,}78\ln E_0 + 0{,}24(\ln E_0)^2, \qquad (2)$$

т.е. той же общей параметризацией, которая справедлива для неупругих адрон-адронных и адрон-ядерных взаимодействий.

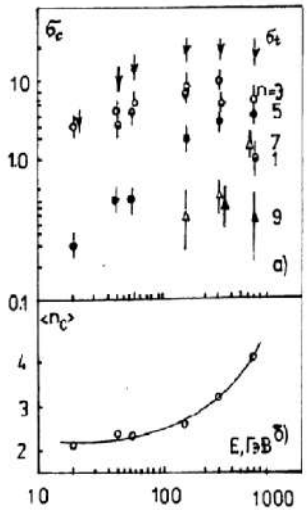


Рисунок 3. Энергетические зависимости полных и топологических сечений (а) и средней множественности заряженных частиц (б) в когерентных реакциях. Кривая – аппроксимация экспериментальных данных по (2)

Обсуждение. Интересен вопрос об энергетической зависимости распределений по множественности заряженных частиц в когерентных взаимодействиях на ядрах. На рисунке 4 показаны $P(n_{coh})$-распределения для реакций (1) в KNO-переменных. Кривая на этом рисунке представляет собой функцию Слэттери

$$\Phi(z) = (3{,}79z + 33{,}7z^3 - 6{,}64z^5 + 0{,}332z^7)\exp(-3{,}04z), \qquad (3)$$

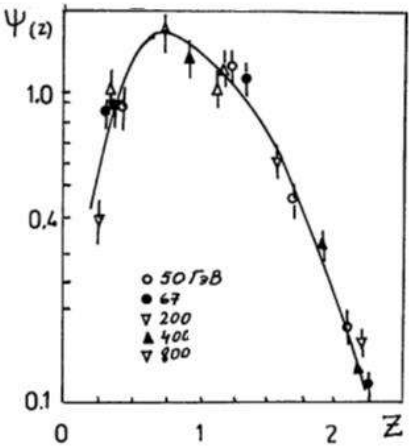


Рисунок 4. Множественное распределение заряженных частиц в когерентных реакциях в KNO-переменных. Кривая, соответствующая функции Слэттери (3)

параметры которой были определены в работе [12] из условия наилучшего описания экспериментальных данных о $P(n_{ch})$-распределениях в hp-взаимодействиях в широкой о\бласти первичных энергий.

Заключение. Видно, что эта функция хорошо описывает данные о распределениях по множественности в когерентных реакциях в области энергий 20–800 ГэВ.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Померанчук И.Я., Фейнберг Е.Л. «О внешней (дифракционной) генерации частиц при ядерных столкновениях». ДАН СССР, т.93, 439, 1953.

*2. Зотов Н.П., Царев В.А., "Дифракционная диссоциация: тридцать пять лет спустя", УФН, 154:2 (1988), 207–242; Phys. Usp., **31**:2 (1988), 119–139.*

3. Абдужамилов Ш., Азимов С.А., Чернова Л.П., Чернов Г.М., Чудаков В.М. Когерентные взаимодействия протонов большой энергии со сложными ядрами. // Ядерная физика. -1966. -т. 3. -С. 657-662.

4. Саидханов Н.Ш. Неупругие взаимодействия протонов и ядер с нуклонами и ядрами при высоких и сверхвысоких энергиях. Издательство «Фан» АН РУз, 2021. г.Ташкент.

5. Feinberg ЕЛ., Pomeranchuk I.I. High energy inelastic diffraction phenomena.//Suppl. Nuovo Cim.-1956.-v.3. -P.652-671.

6. Good M.L., Walker W.D. Coulomb dissociation of beam particles. // Physical Review. -I960, -v.120. -P.1855-1856.

7. Good M.L., Walker W.D.Diffraction dissociation of beam particles. // Physical Review. -1960. -v.120. -P.1857-1860.

8. Boos E.G.e.a. Diffractive coherent production in interactions of 400GeV/c protons on emulsion nuclei. // Nuclear Physics. -1978. – v.B137. -P.37-45.

9. Анзон З.В., Антонова И.Г. и др. Взаимодействия 200 ГэВ протонов с ядрами эмульсии. Множественность заряженных частиц. // Ядерная физика. -1975. -т. 22. -С. 736-743.

10. Abdushamilov A., Saidkhanov N.Sh. e.a.Coherent production of particles in emulsion nuclei. // Modern Physics Letters. -1988. -V.A3 -P.489-495.

11. Азимов С.А.и др. Когерентная генерация частиц во взаимодействиях протонов с атомными ядрами. // Упругие и неупругие соударения частиц большой энергии с нуклонами и ядрами. - Ташкент: ФАН. -1975. -С. 82-118.

12. Bromberg C.e.a. Cross section and charged-particle multiplicities at 102 and 400 GeV/c. // Physical Review Letters.-1973. -V.31. - С.1563-1566.

UO‘K 2456-2165

Sb_2Se_3 YUPQA QATLAMLI QUYOSH ELEMENTLARINING FIZIK XOSSALARI VA OLINISH USULLARI

Razikov Tohir Mutalovich,
O‘zR FA S.A. Azimov nomidagi fizika-texnika instituti
Fotoelektrnika laboratoriyasi mudiri, professor
Kuchkarov Qudrat Mamarasulovich,
O‘zR FA S.A. Azimov nomidagi fizika-texnika instituti
Fotoelektrnika laboratoriyasi bosh ilmiy hodimi, f.-m. f.d.
Ergashev Bobur Avaz o‘g‘li,
O‘zR FA S.A. Azimov nomidagi Fizika-Texnika Instituti
Ilmiy ishlar bo‘yicha direktor o‘rinbosari, f.-m. f. b. (PhD)
Xurramov Ramozan Ravshanovich,
O‘zR FA S.A. Azimov nomidagi fizika-texnika instituti
Fotoelektrnika laboratoriyasi katta ilmiy hodimi, f.-m. f. b. (PhD)
Bobomuradov Sherzod Mamarahim o‘g‘li,
O‘zR FA S.A. Azimov nomidagi fizika-texnika instituti tayanch doktoranti
sherzodbobomuradov2@gmail.com

Annotatsiya. *Sb_2Se_3 yupqa qatlamlari yuqori yutilish koeffitsiyenti, mos taqiqlangan soha kengligi (~1,1–1,3 eV) va polikristall ortorombik tuzilishi tufayli istiqbolli fotovoltaik material sifatida ajralib turadi. Materialning mo‘l-ko‘lligi, zaharli bo‘lmaganligi va ekologik barqaror ishlab chiqarish usullari bilan mosligi uning amaliy ahamiyatini yanada oshiradi. Ushbu sharhda Sb_2Se_3 ning strukturaviy, optik va elektr xususiyatlari tahlil qilinadi hamda kimyoviy va fizikaviy o‘stirish asosidagi sintez yondashuvlaridagi so‘nggi yutuqlar ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, quyosh elementilaridagi qo‘llanilishi, innovatsion qurilma arxitekturasi va material optimallashtirish orqali samaradorlikning o‘sishi yoritiladi. Rekombinatsiya va barqarorlik bilan bog‘liq muammolar tahlil qilinib, kelgusidagi tadqiqot yo‘nalishlari belgilab beriladi. Mazkur ish Sb_2Se_3 asosidagi yupqa qatlam texnologiyalarini rivojlantirish uchun ilmiy poydevor vazifasini bajaradi.*

Kalit so‘zlar: *Sb_2Se_3, yupqa qatlam, fotovoltaika, texnologiya.*

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ПРОИЗВОДСТВА ТОНКОПЛЁНОЧНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ Sb_2Se_3

Аннотация. *Тонкие плёнки Sb_2Se_3 выделяются как перспективный фотогальванический материал благодаря высокому коэффициенту поглощения, оптимальной ширине запрещённой зоны (~1,1–1,3 эВ) и поликристаллической орторомбической структуре. Доступность материала, его нетоксичность и совместимость с экологически устойчивыми методами производства дополнительно повышают его практическую значимость. В данном обзоре анализируются структурные, оптические и электрические свойства Sb_2Se_3, а также рассматриваются последние достижения в методах синтеза на основе химического и физического осаждения. Кроме того, освещаются применения в солнечных элементах, инновационные архитектуры устройств и рост эффективности за счёт оптимизации материала. Рассматриваются проблемы, связанные с рекомбинацией и стабильностью, и определяются направления дальнейших исследований. Настоящая работа служит научной основой для развития технологий тонких плёнок на основе Sb_2Se_3.*

Ключевые слова: *Sb_2Se_3, тонкая плёнка, фотовольтаика, технология.*

PHYSICAL PROPERTIES AND PRODUCTION METHODS OF Sb_2Se_3 THIN-FILM SOLAR CELLS

Abstract. *Sb_2Se_3 thin films stand out as a promising photovoltaic material due to their high absorption coefficient, suitable bandgap (~1,1–1,3 eV), and polycrystalline orthorhombic structure. The material’s abundance, non-toxicity, and compatibility with environmentally sustainable fabrication approaches further enhance its practical relevance. This review analyzes the structural, optical, and electrical properties of*

Sb_2Se_3 and highlights recent advances in synthesis strategies based on chemical and physical deposition. Moreover, applications in solar cells, innovative device architectures, and efficiency improvements through material optimization are discussed. Issues related to recombination and stability are examined, and future research directions are outlined. This work provides a scientific foundation for the advancement of Sb_2Se_3-based thin-film technologies.

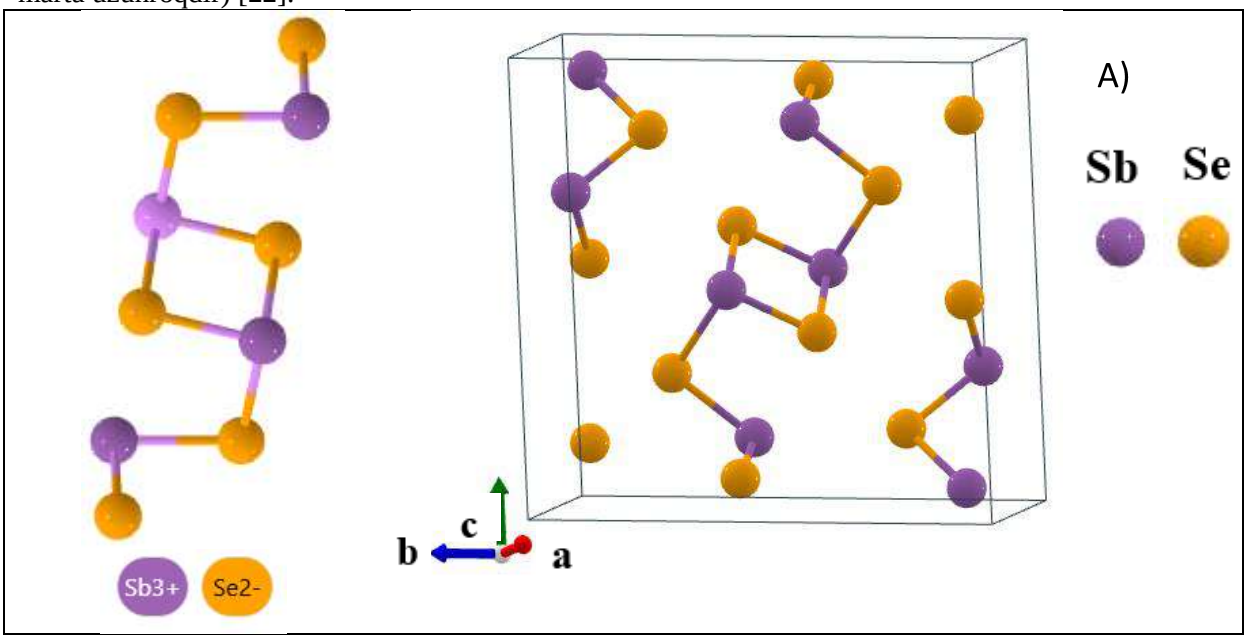
Keywords: *Sb_2Se_3, thin film, photovoltaics, technology.*

Kirish. Dunyo miqyosida energiya talabining ortishi, qayta tiklanadigan energiya manbalaridan foydalanish bo‘yicha keng qamrovli tadqiqotlar va texnologiyalarni rivojlantirishga olib keldi. Ayniqsa, ekologik jihatdan zararli bo‘lmagan va yuqori samaradorlikka ega yangi avlod fotovoltaik (PV) texnologiyalarining paydo bo‘lishi, quyosh energiyasidan foydalanishni sezilarli darajada oshirishga olib keldi. Shu bilan birga, eng so‘nggi fotovoltaik texnologik yutuqlar, ishlab chiqarish xarajatlarini kamaytirish va sezilarli darajada yuqori foydalanish samaradorligini ta’minlash orqali ushbu sohada innovatsion yondashuvlarni joriy etmoqda [1]. Kam material iste’moli va moslashuvchanlikning afzalliklari sababli, yupqa qatlamli quyosh elementlari (YQQE) texnologiyalari va yuqori energiya ishlab chiqarish samaradorligi, quyosh energiyasini yig‘ish sohasida katta qiziqish va ilmiy tadqiqotlar diqqatini jalb etdi [2]. So‘nggi yillarda bir qancha YQQE turlari, xususan, kadmiy tellurid (CdTe) , mis galliy indiy selenid (CIGS) va perovskitlar quyosh elementilarida (QElarida) sezilarli yutuqlarni qo‘lga kiritdi [3]. Biroq, bu materiallarning uzoq muddatli ishlatilishining oldini oladigan muammolar mavjud bo‘lib, ulardan ba’zilari kadmiy (Cd) va indiy (In) ning zaharli tabiati bilan bog‘liqdir. Shu bilan birga, ekologik toza va zararli bo‘lmagan fotoyutuvchi materiallar, masalan, Cu_2ZnSnS_4 (CZTS), $SnSCu_2O$, $CuSbSe_2$ va Sb_2Se_3 fotovoltaik (PV) ilovalari uchun keng qamrovli tekshiruvlardan o‘tkazilgan [4]. Shockley-Queisser (ShQ) modeliga ko‘ra [5], bitta-o‘tishli QEning maksimal fodali ish koeffitsiyenti (FIK) 32,23% ni tashkil etadi, bunda absorber qatlamining taqiqlangan soha kengligi taxminan 1,14 eV bo‘ladi. Ushbu ma’lumotlarni hisobga olgan holda Surma selenidi (Sb_2Se_3) - bu kelajakda quyosh energiyasini yig‘ish materiallari sifatida faoliyat ko‘rsatayotgan xalkogenidlardan biri bo‘lib, uning o‘ziga xos fotoelektron xususiyatlari, jumladan, yuqori tashuvchining harakatchanligi (elektron va kovak uchun mos ravishda 15 va 42 sm^2/Vs) [6], qulay taqiqlangan soha oralig‘i (1,1–1,3 eV) [7], past elektr o‘tkazuvchanlik [8], past erish nuqtasi (550°C) [9], yuqori yutish koeffitsiyenti (10^5 sm^{-1} dan yuqori) [10], minimal toksiklik va uning komponentlarining yer yuzida keng tarqalganligi [11], uni YQQElarida absorber sifatida ishlatish uchun potensial materialga aylantirdi. Surma (Sb) va selen (Se) ning bug‘lanishi uchun talab qilinadigan harorat 950–1000°C, substratning harorati esa taxminan 500°C bo‘lgan [12]. 500°C substrat haroratida foydalanish orqali, tadqiqotlar Sb_2Se_3 birikmasi va Se elementining Sb_2Se_3 asosidagi yuqori samarali QElarini ishlab chiqarish uchun zaruriy komponentlar sifatida xizmat qilishini ko‘rsatgan [13]. Sb_2Se_3 QElari uchun barqaror muqobil absorber materiali sifatida mavjud texnologiyalar bilan yaxshi moslashuvchanlikni ta’minlaydi [14]. Wen va boshqalar [15] Sb_2Se_3 qatlamini orientatsiyalashgan holda bug‘ tashish usulida o‘stirish (VTD), zaryad tashuvchilar transportini yaxshilashga erishgan va 7,6% samaradorlikka erishgan. Li va boshqalar [16] esa, Sb_2Se_3 nanorodlar to‘plamlarini Mo elektrodida orientatsiyalashgan holda ishlab chiqarish uchun yopiq hajmda sublimatsiyasini (CSS) qo‘llagan va 9,2% samaradorlikka, Huan va boshqalar [17] Sb_2Se_3 asosidagi YQQEini ishlab chiqib 6,53% samaradorlikka erishgan. Lin va boshqalar [18] changlantirish texnikasidan foydalangan holda shisha/Mo/Sb_2Se_3/CdS/ITO/Ag QElarini yaratib 7,43% FIKga erishgan, So‘nggi tadqiqotlar ushbu material asosida ishlab chiqilgan QElarining samaradorligi innovatsion qurilma arxitekturasi va material parametrlarini optimallashtirish orqali bosqichma-bosqich oshib borayotganini ko‘rsatmoqda. Biroq, Sb_2Se_3 asosidagi qurilmalarda tashuvchilar rekombinatsiyasi, interfeys xatoliklari va barqarorlik bilan bog‘liq qiyinchiliklar hanuzgacha asosiy muammolardan biri bo‘lib qolmoqda. Shu sababli, sintez jarayonlarini takomillashtirish, struktura–xususiyat o‘zaro bog‘liqligini chuqurroq tushunish va yangi arxitekturalarni ishlab chiqish orqali mazkur kamchiliklarni bartaraf etish muhim ilmiy va amaliy vazifa hisoblanadi. Ushbu maqolada Sb_2Se_3 ning strukturaviy, optik va elektr xususiyatlari tahlil qilinadi, turli kimyoviy hamda fizikaviy o‘stirish usullari bo‘yicha sintezdagi yutuqlar muhokama qilinadi va kelgusidagi tadqiqotlar uchun istiqbolli yo‘nalishlar taklif etiladi. Mazkur yondashuv Sb_2Se_3 asosidagi yupqa qatlam texnologiyalarini yanada rivojlantirish uchun ilmiy asos yaratishga xizmat qiladi.

Sb_2Se_3 yupqa qatlam xususiyatlari. Sb_2Se_3 ning ajoyib xususiyatlariga qaramay, samaradorlik hali ham maksimal nazariy qiymatidan ancha pastdir (ShQ modeliga ko‘ra) [5]. Bu natijalarni hisobga olgan holda, hozirgi vaqtda Sb_2Se_3 yupqa qatlamini olishda 3 ta asosiy masala mavjud bo‘lib, bular o‘sish jaroyinini boshqarish, taqiqlangan soha kengligi moslashuvchanligi va interfeysdagi nuqsonlarni kamaytirish eng muhim vazifalardan bo‘lib qolmoqda. **Surma** selenid (Sb_2Se_3) A_2B_3 tipidagi izostruktural birikmalar oilasiga mansub bo‘lib, bu guruh tarkibida A elementi sifatida vismut (Bi) va surma (Sb), B elementi sifatida

esa oltingugurt (S) va selen (Se) ishtirok etadi. Ushbu materiallar yanada kengroq AV^m–BVI^n guruhiga kiradi [19]. Sb_2Se_3 kristall panjarasi ortorombik fazada barqaror bo‘lib, uning faza guruhi Pbnm yoki Pnma sifatida tasniflanadi. Ushbu fazalar kristall tuzilish jihatidan bir-biriga ekvivalent bo‘lib, farq faqat koordinata tizimidagi o‘qlarni almashtirishda namoyon bo‘ladi. Kristall panjara parametrlari Pbnm guruhida quyidagi qiymatlar bilan ifodalanadi: a = 11,62 Å, b = 11,77 Å, c = 3,962 Å yoki muqobil tarzda Pnma guruhida: a = 11,7938 Å, b = 3,9858 Å, c = 11,6478 Å [20]. Ushbu tuzilma Sb_2Se_3 ning anizotropik elektron tashuvchi va optoelektron xususiyatlariga ta’sir qiladi, shuningdek, uning fizikaviy va kimyoviy barqarorligini belgilaydi. Shu bois, Sb_2Se_3 ning fazaviy tuzilishini chuqur tahlil qilish va nazorat qilish materialning funksional imkoniyatlarini oshirish uchun muhim ahamiyatga ega.

1. Material tuzilishi. Sb_2Se_3 ning koordinatsion tuzilishi takrorlanuvchi $(Sb_4Se_6)_n$ zanjirlaridan tashkil topgan bo‘lib, shuningdek ular (010) va (100) tekisliklar bo‘ylab Van der Waals o‘zaro ta’sirlari bilan bog‘lanib, ushbu tekislikka perpendikulyar bo‘lgan (001) kovolent bog‘lanishlar orqali birlashtirilgan lentalardan iborat bo‘lib, ushbu lentalar orasidagi atomlararo masofa (2.98 Å)ga teng [20]. Boshqa tomondan, ushbu qurilmalar uchun optimal Sb_2Se_3 absorber qalinligi, (221) yo‘nalishda elektron diffuziya uzunligi atigi 0,3 mkm bo‘lgan tufayli, 0,3-0,6 mkm oralig‘ida cheklangan [21]. (001) yo‘nalishi bo‘yicha elektron diffuziya uzunligi katta bo‘lib, 1,7 mkm ga yaqinlashadi (bu [221] yo‘nalishga qaraganda besh marta uzunroqdir) [22].



1-rasm. A) Pbnm fazo guruhini hisobga olgan holda Sb (binafsha nuqta) va Se (sariq nuqta) atomlarining ekvivalent bo‘lmagan joylashuvlari. B) Sb_2Se_3 ning lenta shaklidagi tuzilishi. Nuqtali qora chiziq ikki xil lentaga tegishli Se atomlari orasidagi Van der Vaals bog‘lanishlarini ifodalaydi [23]

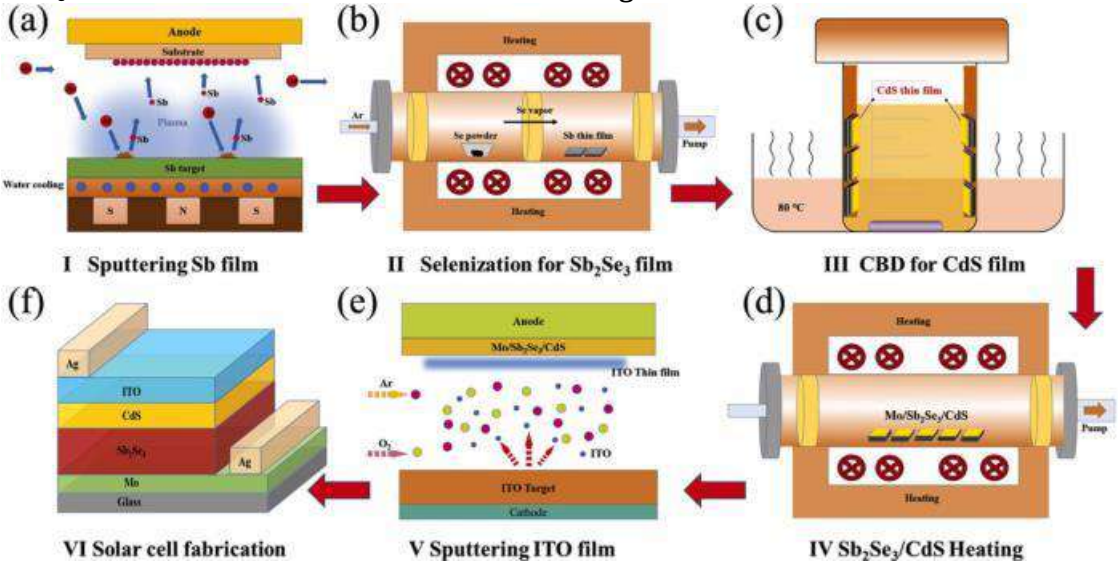
Ushbu o‘ziga xos kvazi-1D tuzilma Sb_2Se_3 ni yuqori anizotropik materialga aylantiradi, bunda zaryad tashuvchilarning harakati c-o‘qiga (lenta o‘qi) perpendikulyar yo‘nalishlarda qiyinlashadi. Natijada, ushbu materialdagi zaryad tashuvchilarning harakatchanligi nisbatan past bo‘ladi [24]. O‘tkazgich metallari yoki galogenlar kabi kirishma moddalarni kiritish Sb_2Se_3 ning elektron xususiyatlarini o‘zgartirishi mumkin, bunda kirishma moddalar taqiqlangan soha kengligi ichida qo‘shimcha energiya darajalarini hosil qilishi va ularning turi va kontsentratsiyasiga qarab taqiqlangan soha oralig‘ini toraytirishi yoki kengaytirishi mumkin. Shuningdek, Sb_2Se_3 ning yupqa qatlamlari panjara parametrlari va bog‘lanish masofalarini o‘zgartirib, taqiqlangan soha kengligi tuzilmasiga ta’sir ko‘rsatadi. Hamda tashqi sharoitlar, masalan, harorat va bosim ham taqiqlangan soha oralig‘iga ta’sir ko‘rsatishi mumkin, chunki bosimni oshirish taqiqlangan soha oralig‘ini qisqartirishi, harorat o‘zgarishi esa termal kengayish yoki qisqarishga olib kelib, elektron tuzilmasiga ta’sir qiladi.

2. Surma selenididagi nuqsonlar. Polikristall yupqa qatlamlarda odatda donalararo chegaralarda hosil bo‘ladigan nusonlar rekombinatsiya markazlari sifatida xizmat qiladi [25], [26]. Ushbu taxminning asosi GaAs va CdTe kabi ilgari o‘rganilgan yarimo‘tkazgichlarga borib taqaladi. Oddiy ikkilik fazaviy kimyoga ega bo‘lgan Sb_2Se_3 dastlab oddiy ichki nuqsonlarga ega bo‘lishi va nuson nazoratining CZTS/Se

kabi to‘rt komponentli birikmalarga nisbatan ancha oson bo‘lishi kutilgan edi. Shunday qilib, ushbu birikmada oltita mumkin bo‘lgan nuqson mavjudligi taxmin qilingan: ikkita bo‘shliq katyon bo‘shlig‘i (V_{Sb}) va anion bo‘shlig‘i (V_{Se}). Ikkita oraliq joylashuvdagi atom katyon oraliq joylashuvi (Sb_i) va anion oraliq joylashuvi (Se_i). Ikkita o‘rin almashish katyon anionni almashtiruvchi antisayt (Sb_{Se}) va anion katyonni almashtiruvchi antisayt (Se_{Sb}). Biroq, eksperimental va nazariy tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, Sb_2Se_3 tarkibidagi ichki nuqsonlar kutilganidan ancha murakkab va noodatiy bo‘lib, ushbu kvazi-bir o‘lchamli (Q1D) Van der Vaals tizimidagi nuson fizikasi GaAs va CdTe kabi uch o‘lchovli kovalent bog‘langan ikkilik PV yutuvchilardagi nusonlarni oddiygina o‘zlashtirish mumkin emas. Bunga ikkita asosiy sabab bor, nusonga chidamlilik (ya’ni, taqiqlangan soha ichida chuqur darajadagi nusonlar hosil bo‘lmaganda) PV yutuvchi material uchun juda istalgan xususiyat hisoblanadi. Q1D tuzilmaning past simmetriyaga ega bo‘lishi tufayli, bir xil nuqsonlar turli xil atomik joylarda joylashganda har xil xususiyatlarga ega bo‘lishi mumkin. Ya’ni, bitta Sb_2Se_3 lentalari uchta noekvivalent Se atom joylarini (Se_1, Se_2 va Se_3) va ikkita Sb atom joylarini (Sb_1 va Sb_2) o‘z ichiga oladi. Shu sababli, turli atom joylariga tegishli nuqsonlar juda farq qilishi mumkin. $(Sb_4Se_6)_n$ lentalari orasidagi zaif Van der Vaals o‘zaro ta’sirlari tufayli, turli $(Sb_4Se_6)_n$ atom zanjirlari orasida katta bo‘shliqlar mavjud bo‘lib, ular odatiy yutuvchi materiallarda uchramaydigan noodatiy nuqsonlarni keltirib chiqaradi. Masalan, katyon anionni almashtiruvchi antisayt (Sb_{Se}), anion katyonni almashtiruvchi antisayt (Se_{Sb}), hatto ikki anion bitta katyonni almashtiruvchi antisayt ($2Se_{Sb}$) hosil bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, nuqson turlarining soni kam bo‘lsa ham, ushbu nuqsonlarning xususiyatlari Sb_2Se_3 ning o‘ziga xos tuzilishi tufayli murakkablashadi. Se_{Sb} va Sb_{Se} antisaitlari Sb ning ikki tomonlama kationik va anionik tabiatidan kelib chiqadi, bu Se atomlari bilan almashtirishga imkon beradi. Umuman olganda, SbSe nusonlarining tabiati akseptor yoki donor sifatida tasniflanishi bahsli hisoblanadi [27].

O‘stirish usullari. Kam nuqson zichligiga ega **Sb_2Se_3 yupqa qatlamlarni** ishlab chiqish yorug‘lik ta’sirida hosil bo‘ladigan elektron–kovak juftliklarining rekombinatsiyasini kamaytirish va fotovoltaik qurilmalarning samaradorligini oshirish uchun muhim ahamiyat kasb etadi. Bu omil ayniqsa Sb_2Se_3 yutuvchi qatlamini CdS, ZnCdS, ZnO, TiO_2, ZnS, Zn(S,O), MgZnO va ZnSe kabi turli elektron tashuvchi qatlam (ETQ) materiallari ustiga o‘stirish jarayonida dolzarbdir. Sb_2Se_3 qatlamlarining kvazi bir o‘lchamli (1D) tabiati tasma (ribbon) tuzilmalar bo‘ylab samarali zaryad tashishni rag‘batlantiradi va shu orqali rekombinatsiya yo‘qotishlarini minimallashtiradi. Shu sababli, o‘stirish texnikalari Sb_2Se_3 ning anizotrop o‘sish xususiyatlariga moslashib, kristallanish va tasma yo‘nalishlarini zaryad transporti yo‘nalishiga moslashtirishi zarur. So‘nggi yillarda **Sb_2Se_3 yupqa qatlamlarni** ishlab chiqishda ham fizikaviy, ham kimyoviy o‘stirish usullari keng tadqiq qilinmoqda. Ushbu yutuqlar natijasida 10% dan yuqori samaradorlikka ega qurilmalar ishlab chiqildi va Sb_2Se_3 fotovoltaika sohasida raqobatbardosh nomzod sifatida ko‘rilmoqda [28]. Fizikaviy o‘stirish usullari ichida elektron nurli qurol (ENQ) yordamida o‘stirish katta ahamiyat kasb etmoqda, chunki u yuqori vakuum sharoitida amalga oshirilib, qatlam o‘sish parametrlarini aniq nazorat qilish imkonini beradi. Amaliy jihatdan keng qo‘llaniladigan ishlab chiqarish yo‘nalishlaridan biri ikki bosqichli jarayondir. Avval metall surma prekursor qatlami radiochastotali (RF) magnitron changlantirish usuli yordamida cho‘ktiriladi. Bu bosqichda yuqori tozalikdagi surma nishonlari ishlatiladi va Mo bilan qoplangan soda-ohakli shisha substratlar qo‘llaniladi. Changlantirish jarayonidan oldin substratlar 10 daqiqadan mos ravishda yuvish vositasi, atseton, izopropanol va etanol yordamida ultratovushli tozalashdan o‘tkazilib, sirtning tozaligi va keyingi qatlam yopishishini ta’minlaydi [29]. Substrat tayyorlangach, o‘stirish kamerasi $7{,}0 \times 10^{-4}$ Pa dan pastroq bosimga qadar evakuatsiya qilinadi. Keyin 99,999% tozalikdagi argon gazi 40 sccm (standart kub santimetr minut) tezlikda yuboriladi. Depozitsiya jarayonida bosim 0,5 Pa darajasida ushlab turiladi va 30 Vt quvvat qo‘llanadi. Natijada taxminan 10 nm/min barqaror o‘stirish tezligi hosil bo‘ladi [30]. Surma qatlamining yakuniy qalinligi changlantirish davomiyligini nazorat qilish orqali boshqariladi; odatda 30–90 daqiqa oralig‘ida, 15 daqiqalik qadamlar bilan o‘zgarib, turli qurilma talablari uchun moslashtirilgan qatlamlarni yaratish imkonini beradi. Keyingi muhim bosqich **selenizatsiya issiqlik ishlovi**. Bu jarayonda oldindan cho‘ktirilgan surma qatlami yuqori tozalikdagi (99.999%) selen kukuni bilan birga ikki kamerali vakuumli naycha pechiga joylanadi. Pech kameralari avval evakuatsiya qilinadi, so‘ngra argon gazi bilan to‘ldirilib, taxminan 5×10^4 Pa bosim hosil qilinadi. Ushbu nazoratlangan atmosfera kerakli selen bug‘i bosimini ta’minlab, stexiometrik Sb_2Se_3 sintezini amalga oshirish va selen bo‘shliqlarini minimallashtirish imkonini beradi. Tizim 20°C/min tezlikda 400°C gacha qizdiriladi, 15 daqiqa shu haroratda ushlab turiladi va tabiiy ravishda xona haroratiga sovutiladi. Bu issiqlik jarayoni amorf surma qatlamini kristall Sb_2Se_3 ga aylantiradi. Sb_2Se_3 yutuvchi qatlami hosil bo‘lgach, odatda **CdS bufer qatlami kimyoviy o‘stirish (KV)** usuli bilan tayyorlanadi. KV eritmasi kadmiy sulfat ($CdSO_4$), tiomochevina va ammoniy gidroksid (NH_4OH) kabi prekursorlardan iborat bo‘ladi. Aniqrog‘i, 0,015 M (mol/litr) $CdSO_4$ va 0,75 M tiomochevina eritmasi tayyorlanib, unga NH_4OH qo‘shiladi va barchasi deionizatsiyalangan suvda eritiladi. Sb_2Se_3 qatlami joylangan substratlar ushbu eritmaga solinadi,

eritma 80°C da 9 daqiqa davomida aralashtirib turiladi. Depozitsiyadan so‘ng substratlar deionizatsiyalangan suv bilan chayiladi va keyingi jarayonga tayyorlash uchun quritiladi [30]. Sb_2Se_3**/CdS geterotuzilmasida** energiya sohalari mosligini yaxshilash va elementlarning diffuziyasini rag‘batlantirish maqsadida qisqa muddatli tavlanish (annealing) amalga oshiriladi. Buning uchun namunalar argon atmosferasida 300°C da 5 daqiqa qizdiriladi. Ushbu issiqlik ishlovi yutuvchi va bufer qatlamlari orasidagi interfeys sifatini yaxshilaydi. Yakuniy qatlam sifatida **indiy–qalay oksidi (ITO) shaffof qatlami** to‘g‘ridan-to‘g‘ri tokli (DC) magnitron changlantirish orqali cho‘ktiriladi. Jarayon 60 Vt quvvatda, 0,4 Pa bosimda, argon va kislorod gazlari 30 sccm tezlikda yuborilgan holda olib boriladi [31]. ITO cho‘ktirilgach, qurilma yuzasi odatda 0,15 sm^2 o‘lchamdagi alohida elementlarga bo‘linadi. So‘ngra, termal bug‘lantirish orqali ITO yuzasiga kumush (Ag) elektrodlar qo‘yiladi. Bu yuqori qatlam metall kontaktlarini hosil qilib, yakuniy Sb_2Se_3 YQQE ishlab chiqiladi. Qurilma tuzilishi odatda **Mo/**Sb_2Se_3**/CdS/ITO/Ag** shaklida bo‘ladi.



2-rasm. Sb_2Se_3 yupqa qatlamli QEining substrat tuzilishida ishlab chiqarish jarayoni sxematik tarzda quyidagicha ko‘rsatiladi: (a) RF magnitron changlantirish yordamida Sb prekursor qatlamini cho‘ktirish, (b) selenizatsiya issiqlik ishlovi orqali Sb_2Se_3 qatlamini hosil qilish, (c) CBD usuli bilan CdS bufer qatlamini qo‘llash, (d) Sb_2Se_3/CdS geteroo‘tishli tablash, (e) magnetron changlantirish orqali ITO qatlamini cho‘ktirish, (f) Sb_2Se_3 yupqa qatlamli QEining yakuniy sxematik tuzilishi [31].

Elektron-nurli o‘stirish usuli. Sb_2Se_3 yupqa qatlamlarini tayyorlashda **elektron-nurli o‘stirish usuli** (EN) muhim texnologiya sifatida e’tirof etilmoqda. Ushbu metod yuqori sifatli, yaxshi nazorat qilingan **stexiometriya** va **morfologik xususiyatlarga** ega qatlamlarni olish imkonini beradi. ENda yuqori energiyali elektronlar manba materialini bug‘latib yuboradi va u substrat yuzasiga cho‘kib, yupqa qatlam hosil qiladi. EN usulining asosiy afzalligi shundaki, u Sb_2Se_3 **qatlamlarida kerakli kristall yo‘nalish** (xususan, c-o‘q bo‘ylab) hosil qilish imkonini beradi. Bu esa **zaryad tashuvchilar transportini yaxshilab**, natijada QE samaradorligini oshirishda hal qiluvchi omil hisoblanadi [32]. Shuningdek, ushbu texnologiya **o‘stirish tezligi va energiyasini aniq boshqarish** imkoniyatini taqdim etib, qatlamning mikrostrukturaviy xususiyatlarini optimallashtirishga xizmat qiladi. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, EN orqali tayyorlangan Sb_2Se_3 qatlamlari boshqa usullar bilan solishtirilganda **kamroq nuqson zichligiga** ega bo‘lib, yaxshiroq elektr xossalar namoyon etadi [33]. Sb_2Se_3 ning o‘ziga xos **bir o‘lchamli kristall tuzilishi** fotogeneratsiya qilingan tashuvchilarni samarali tashishga mos bo‘lgani uchun, o‘sish yo‘nalishini nazorat qilish juda muhim [34]. Bundan tashqari, EN usulidan keyingi **selenizatsiya kabi ishlov berish** jarayonlari qatlamdagi nuqsonlarni kamaytirish va stexiometriyani moslashtirish orqali uning sifatini yanada yaxshilashi mumkin [35]. Shuning uchun, EN o‘stirish jarayonlar bilan uyg‘unlashtirish Sb_2Se_3 asosidagi QElarining **fotoelektrik samaradorligini oshirish** uchun istiqbolli yondashuv hisoblanadi.

Termal bug‘latish. Termal bug‘latish (TB) usuli Sb_2Se_3 yupqa qatlamlarini tayyorlashda keng qo‘llanilayotgan usullardan biridir. Bu jarayonda **Sb va Se manbalari vakuum sharoitida qizdirilib bug‘lantiriladi**, hosil bo‘lgan bug‘ substrat yuzasiga cho‘kib, qatlam hosil qiladi. TBning afzalliklaridan biri – **o‘stirish tezligi va qatlam qalinligini aniq boshqarish** imkoniyatidir, bu esa yuqori samarali QElari tayyorlashda zaruriy hisoblanadi [36]. Biroq, usulning asosiy muammosi Sb va Se manbalarining **termal beqarorligi** bilan bog‘liq bo‘lib, noto‘g‘ri sharoitda Sb_2O_3 **fazasining hosil bo‘lishi** mumkin. Liu va hammualliflar tadqiqotlariga ko‘ra, ortiqcha kislorodning kiritilishi qatlamda sirt rekombinatsiyasini

kuchaytiradi va sifatini yomonlashtiradi [37]. Qatlam sifatini yaxshilash uchun turli **post-o‘stirish ishlov berish** usullari qo‘llaniladi. Masalan, Yao va hammualliflar tadqiqotida **sovutish haroratini boshqarish va H_2S bilan ishlov berish** qatlamning kristallik darajasi va elektr xossalarini sezilarli yaxshilagan [38]. Shuningdek, substrat tanlovi ham qatlamning kristall yo‘nalishiga ta’sir ko‘rsatadi: mos substratlar tanlanganda **ustunli o‘sish tuzilmalari** shakllanib, yorug‘lik yutilishi va samaradorlik oshadi [36]. TB texnologiyasi **soddaligi va kengaytirish imkoniyati** bilan ajralib turadi. Shu sababli, dastlabki Sb_2Se_3 asosidagi QElari TE usulida tayyorlanib, **6,7% dan yuqori samaradorlik** ko‘rsatgan [39]. Hozirgi tadqiqotlarda esa parametrlarni yanada optimallashtirish orqali samaradorlikni oshirish yo‘nalishida sezilarli yutuqlar kuzatilmoqda [40].

1. **Bug‘lanish transporti yordamida o‘stirish.** *Bug‘lanish transporti yordamida o‘stirish (BTO‘) usuli Sb_2Se_3 qatlamlarini yuqori sifatda olish imkonini beradi va ularning stexiometriyasini aniq nazorat qilishga yordam beradi. Jarayon davomida qattiq Sb_2Se_3 materiali qizdirilib bug‘lanadi, so‘ngra pastroq haroratdagi substrat yuzasida kondensatsiyalanadi [15]. BTO‘ orqali olingan qatlamlar yuqori optik yutilish ko‘rsatkichiga ($\geq 10^5$ sm^{-1}) va 1,1–1,3 eV oralig’idagi taqiqlangan soha oralig‘iga ega bo‘lib, ular samarali yutiluvchi qatlam sifatida qo‘llanishi mumkin. Tadqiqotlarda BTO‘ asosida tayyorlangan qurilmalarda V_{syu} va FF ning boshqa usullarga nisbatan yuqoriligi qayd etilgan. Hozirgacha 7,6% gacha bo‘lgan samaradorlik ko‘rsatkichlari erishilgan bo‘lsa-da [15], parametrlarni optimallashtirish orqali yanada yuqori ko‘rsatkichlarga erishish imkoniyati mavjud. Shuningdek, jarayon davomida oltingugurt kiritish qatlamning elektron xossalarini o‘zgartirib,* ***gradientli taqiqlangan soha oralig‘i tuzilmalarini*** *hosil qilish imkonini beradi, bu esa interfeysdagi energiya nomutanosibliklarini kamaytiradi [41]. Natijada, zaryad tashuvchilarning ichki harakatlanishi yaxshilanadi va samaradorlik oshadi.*

2. **Changlantirish usuli.** *Changlantirish usuli Sb_2Se_3 qatlamlarini keng ko‘lamda ishlab chiqarish uchun istiqbolli usul bo‘lib, yuqori sifatli va qalinligi bir xil qatlamlarni olish imkonini beradi [42]. Jarayon davomida Sb_2Se_3 nishoni yuqori energiyali ionlar bilan bombardimon qilinadi va ajralgan atomlar substrat yuzasida qatlam hosil qiladi. Ushbu usulning asosiy afzalliklaridan biri —* ***doimiy qalinlikka ega katta maydonli qatlamlar tayyorlash*** *imkoniyati. Shuningdek, mis (Cu) kabi qo‘shimchalar yordamida p-turdagi o‘tkazuvchanlikni oshirish va elektr xossalarni yaxshilash mumkin [42]. Parametrlarni (bosim, kuchlanish, masofa) o‘zgartirish orqali qatlam morfologiyasi va kristallik sifati boshqariladi [43]. Changlantirish orqali tayyorlangan qatlamlar* ***yo‘nalgan donachalar*** *hosil qilishi mumkin, bu esa zaryad tashuvchilarni yaxshilaydi va rekombinatsiya yo‘qotishlarini kamaytiradi [44]. Keyingi* ***issiqlik ishlovlari*** *esa kristallanishni kuchaytirib, samaradorlikni sezilarli oshiradi. Tadqiqotlarda changlantirish asosida 9% dan yuqori samaradorlik qayd etilgan [14].*

Kimyoviy o‘stirish usuli. Kimyoviy vanna yordamida o‘stirish (KVO‘) usuli Sb_2Se_3 qatlamlarini iqtisodiy samarali va ekologik xavfsiz tarzda olish imkonini beruvchi keng qo‘llaniladigan texnologiyalardan biridir. Bu jarayon eritmadagi Sb va Se namunalarining kimyoviy reaksiyasi natijasida substrat yuzasida qatlam hosil bo‘lishiga asoslangan [45]. KVO‘ orqali olingan qatlamlar ko‘pincha yuqori kristallik darajaga, yaxshi morfologiyaga va samarali zaryad tashuvchiga ega bo‘ladi [46]. Shu sababli KO‘ asosida tayyorlangan QElari samaradorligi 10% dan yuqori natijalarga erishmoqda [42]. Bundan tashqari, KO‘ jarayoni Sb_2O_3 kabi keraksiz fazalarning hosil bo‘lishiga yo‘l qo‘ymaydi va interfeys sifatini yaxshilaydi [47]. Shuningdek, Cu kabi qo‘shimchalar yordamida elektr xossalarni yanada optimallashtirish mumkin [42]. Asosiy muammo qatlam qalinligi va bir xillikni nazorat qilish bo‘lib, bu elektr xossalarning barqarorligiga ta’sir qiladi. Ammo so‘nggi yillarda **real vaqt monitoring** texnologiyalari yordamida KVO‘ jarayonida ham yuqori darajadagi bir xillikka erishilmoqda [48].

Sb_2Se_3 QElarining istiqbollari. Sb_2Se_3 QElarining kelajak istiqbollari juda ijobiy bo‘lib, ushbu sohadagi ilmiy-tadqiqot va ishlab chiqish ishlari tez sur’atlarda rivojlanmoqda. Bunday yaxshilanishga bir nechta omillar sabab bo‘lmoqda, jumladan, materialning o‘ziga xos xususiyatlari, ishlab chiqarish texnologiyalaridagi izchil yutuqlar va innovatsion qurilma arxitekturalarini yaratish imkoniyati [49]. Biroq, Sb_2Se QElarining tijorat miqyosida to‘liq salohiyatini amalga oshirishi uchun hal etilishi zarur bo‘lgan muhim muammolar mavjud. Sb_2Se_3 ning afzalliklariga qaramay, ushbu material asosidagi QElarining samaradorligi va keng ko‘lamli qo‘llanilishiga salbiy ta’sir etuvchi bir qancha muammolar mavjud.

Rekombinatsiya yo‘qotishlari va kirishma konsentratsiyasi. Eng dolzarb muammolardan biri nurlanishsiz rekombinatsiya bo‘lib, bu energiya aylanish samaradorligini pasaytiradi. Ushbu yo‘qotish asosan absorber qatlamidagi chuqur darajadagi nuqsonlar va don chegaralari bilan bog‘liq. Kirishma usullarini takomillashtirish yoki sirtni ishlov berish orqali bu muammoni kamaytirish kelajakdagi rivojlanish uchun muhimdir. Sb_2Se_3 da samarali p-tur kirishmaga erishish qiyin bo‘lib qolmoqda. Bu esa samarali ishlash uchun zarur bo‘lgan zaryad tashuvchilar konsentratsiyasini chegaralaydi. Hozirgi tadqiqotlar yangi materiallar qo‘llash orqali p-tur o‘tkazuvchanligini oshirish va nuqson hosil bo‘lishini minimallashtirishga

qaratilmoqda. An'anaviy superstrat konfiguratsiyasidan substrat konfiguratsiyasiga o'tish interfeys muhandisligini yaxshilash orqali unumdorlikni oshirishi mumkin. Biroq, optimal bufer qatlamlari, yetarli zaryad tashish va rekombinatsiya tezligini kamaytirish zaruriyati qurilma dizayni va ishlab chiqarishini murakkablashtiradi.

Rivojlanish strategiyalari. Turli yupqa qatlam qoplamalari va kirishma usullaridan foydalanish tashuvchilar umrini uzaytirishi va umumiy samaradorlikni oshirishi mumkin. Sb_2Se_3 qatlamlarining o'sish yo'nalishini boshqarish zaryad tashuvchilar harakatchanligini oshiradi. Namuna asosidagi o'stirish va keyingi ishlov berish usullari nuqsonlarni kamaytirib, samaradorlikni yaxshilashga xizmat qilmoqda. ZnSe va In_2S_3 kabi alternativ materiallardan bufer sifatida foydalanish yaxshiroq moslashuvni ta'minlab, elektron harakatchanligini oshiradi va natijada qurilma samaradorligini yaxshilaydi. Bu, ayniqsa, samaradorlikdan voz kechmagan holda kadmiydan xoli qurilmalar yaratishda muhimdir. Turli o'stirish usullarini birlashtirish kabi gibrid ishlab chiqarish texnologiyalarini qo'llash yuqori sifatli qatlamlar va yaxshilangan fotovoltaik natijalarni ta'minlaydi. Har bir yutuq ishlab chiqarish jarayonlarini takomillashtiradi va yuqori samaradorlik hamda keng ko'lamli qo'llanilishga hissa qo'shadi.

Xulosa. Sb_2Se_3 quyosh elementlarining kelajagi materialning qulay xususiyatlari va texnologik yutuqlar tufayli istiqbolli bo'lsa-da, samaradorlik, material xossalari va qurilma arxitekturasi bilan bog'liq muammolar tizimli ravishda hal qilinishi kerak. Kirishma kiritish usullarini takomillashtirish, qurilma dizaynini optimallashtirish va innovatsion ishlab chiqarish usullarini joriy etishga qaratilgan tadqiqotlar ushbu istiqbolli fotovoltaik texnologiyaning to'liq salohiyatini ochishda muhim ahamiyat kasb etadi. Sb_2Se_3 o'zining yuqori yutilish koeffitsiyenti, mos taqiqlangan soha kengligi, zaharli bo'lmagan va mo'l-ko'l tarkibiy elementlari tufayli barqaror va istiqbolli yupqa qatlam fotovoltaik materiali sifatida ajralib turadi. So'nggi yillarda turli o'stirish texnologiyalari orqali 10% dan yuqori samaradorlikka erishilgan bo'lsa-da, rekombinatsiya yo'qotishlari, kirishma konsentratsiyasini boshqarish va interfeys muammolari hali ham asosiy to'siqligicha qolmoqda. Kelgusidagi tadqiqotlar kristall yo'nalishini nazorat qilish, nuqsonlarni passivatsiya qilish, yangi bufer qatlamlarni sinovdan o'tkazish hamda qurilmalar barqarorligini oshirishga qaratilishi zarur. Umuman olganda, Sb_2Se_3 asosidagi QElari kelajakda raqobatbardosh va ekologik toza energiya manbai sifatida katta salohiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1. A. H. Eldin, M. Refaey, and A. Farghly, "A Review on Photovoltaic Solar Energy Technology and its Efficiency," A Review on Photovaltaic Solar Energy Technology and its Efficiency, no. December, 2015.

2. A. A. F. Husain, W. Z. W. Hasan, S. Shafie, M. N. Hamidon, and S. S. Pandey, "A review of transparent solar photovoltaic technologies," 2018. doi: 10.1016/j.rser.2018.06.031.

3. M. F. Mohamad Noh, N. A. Arzaee, C. C. Fat, T. Sieh Kiong, M. A. Mat Teridi, and A. W. Mahmood Zuhdi, "Perovskite/CIGS tandem solar cells: progressive advances from technical perspectives," 2024. doi: 10.1016/j.mtener.2023.101473.

4. Sadanand, P. K. Singh, S. Rai, P. Lohia, and D. K. Dwivedi, "Comparative study of the CZTS, CuSbS2 and CuSbSe2 solar photovoltaic cell with an earth-abundant non-toxic buffer layer," Solar Energy, vol. 222, 2021, doi: 10.1016/j.solener.2021.05.013.

5. S. Rühle, "Tabulated values of the Shockley-Queisser limit for single junction solar cells," Solar Energy, vol. 130, 2016, doi: 10.1016/j.solener.2016.02.015.

6. A. Mavlonov et al., "A review of Sb2Se3 photovoltaic absorber materials and thin-film solar cells," 2020. doi: 10.1016/j.solener.2020.03.009.

7. Xinsheng Liu†‡Jie Chen†‡Miao Luo†‡Meiying Leng†‡Zhe Xia†‡Ying Zhou†‡Sikai Qin†‡Ding-Jiang Xue†‡Lu Lv⊥Han Huang⊥Dongmei Niu⊥Jiang Tang†‡, "Thermal evaporation and characteriza tion of Sb2Se3 thin film for substrate Sb2Se3/CdS solar cells," ACS Appl. Mater. Interfaces, vol. 6, no. 13, pp. 10687–10695, Jun. 2014.*

8. C. Chen et al., "Characterization of basic physical properties of Sb2Se3 and its relevance for photovoltaics," Frontiers of Optoelectronics, vol. 10, no. 1, 2017, doi: 10.1007/s12200-017-0702-z.

9. J. Li et al., "Preparation and characterization of Bi-doped surmay selenide thin films by electrodeposition," Electrochim Acta, vol. 56, no. 24, 2011, doi: 10.1016/j.electacta.2011.07.042.

10.M. B. Costa, F. W. de Souza Lucas, and L. H. Mascaro, "Thermal Treatment Effects on Electrodeposited Sb2Se3 Photovoltaic Thin Films," ChemElectroChem, vol. 4, no. 10, 2017, doi: 10.1002/celc.201700511.

11.M. I. H. a, N. A. Puvaneswaran Chelvanathan a, "Performance analysis of copper–indium–gallium–diselenide (CIGS) solar cells with various buffer layers by SCAPS," Current Applied Physics, vol. 10, no. 3, May 2010.

12.T. M. Razykov et al., "Structural Properties of SbxSey Thin Films Obtained by CMBD for Solar Cells," Applied Solar Energy (English translation of Geliotekhnika), vol. 58, no. 4, 2022, doi: 10.3103/S0003701X22040132.

13.T. M. Razykov et al., "Microstructural, Optical, and Electrical Properties of Sb2Se3 Films Fabricated by the CMBD Method for Solar Cells," Applied Solar Energy (English translation of Geliotekhnika), vol. 58, no. 1, 2022, doi: 10.3103/S0003701X22010157.

14.Z. Chen et al., "Fabrication of a semi-transparent thin-film Sb2Se3 solar cell," Mater Lett, vol. 236, 2019, doi: 10.1016/j.matlet.2018.10.173.

15.X. Wen et al., "Vapor transport deposition of surmay selenide thin film solar cells with 7.6% efficiency," Nat Commun, vol. 9, no. 1, 2018, doi: 10.1038/s41467-018-04634-6.

16.Y. M. Zhiqiang Li, "9.2%-efficient core-shell structured anti mony selenide nanorod array solar cells," Nat Commun, vol. 10, no. 1, Jan. 2019.

17.H. Ning et al., "Enhancing the efficiency of Sb2S3 solar cells using dual-functional potassium doping," Solar Energy Materials and Solar Cells, vol. 221, 2021, doi: 10.1016/j.solmat.2020.110816.

18.J. Lin et al., "Crystallographic orientation control and defect passivation for high-efficient surmay selenide thin-film solar cells," Materials Today Physics, vol. 27, 2022, doi: 10.1016/j.mtphys.2022.100772.

19.M. B. Panish, "Binary Semiconductors: Semiconducting II-VI, IV-VI, and V-VI Compounds. N. Kh. Abrikosov, L. V. Poretskaya, L. E. Shelimova, and E. V. Skudnova. Translated from the Russian edition (Moscow, 1967) by Albin Tybulewicz. Plenum, New York, 1969. viii + 25 pp., illus. $19.50. Monographs in Semi-conductor Physics, vol. 3.," Science (1979), vol. 166, no. 3910, 1969, doi: 10.1126/science.166.3910.1261.a.

20.N. W. Tideswell, F. H. Kruse, and J. D. McCullough, "The crystal structure of surmay selenide, Sb2Se3," Acta Crystallogr, vol. 10, no. 2, 1957, doi: 10.1107/s0365110x57000298.

21.C. Chen et al., "Characterization of basic physical properties of Sb2Se3 and its relevance for photovoltaics," Frontiers of Optoelectronics, vol. 10, Mar. 2017, doi: 10.1007/s12200-017-0702-z.

22.K. Li et al., "One-Dimensional Sb2Se3 Enabling Ultra-Flexible Solar Cells and Mini-Modules for IoT Applications," Nano Energy, vol. 86, p. 106101, May 2021, doi: 10.1016/j.nanoen.2021.106101.

23.K. Momma and F. Izumi, "VESTA 3 for three-dimensional visualization of crystal, volumetric and morphology data," J Appl Crystallogr, vol. 44, no. 6, 2011, doi: 10.1107/S0021889811038970.

24.A. Patra and C. S. Rout, "Anisotropic quasi-one-dimensional layered transition-metal trichalcogenides: Synthesis, properties and applications," 2020. doi: 10.1039/d0ra07160a.

25.Y. Yan et al., "Physics of grain boundaries in polycrystalline photovoltaic semiconductors," in Journal of Applied Physics, 2015. doi: 10.1063/1.4913833.

26.D. P. Joshi and D. P. Bhatt, "Theory of Grain Boundary Recombination and Carrier Transport in Polycrystalline Silicon Under Optical Illumination," IEEE Trans Electron Devices, vol. 37, no. 1, 1990, doi: 10.1109/16.43821.

27.B. Zhang and X. Qian, "Competing Superior Electronic Structure and Complex Defect Chemistry in Quasi-One-Dimensional Surmay Chalcogenide Photovoltaic Absorbers," ACS Appl Energy Mater, vol. 5, no. 1, 2022, doi: 10.1021/acsaem.1c03023.

28.X. Wen et al., "Vapor transport deposition of surmay selenide thin film solar cells with 7.6% efficiency," Nat Commun, vol. 9, no. 1, 2018, doi: 10.1038/s41467-018-04634-6.

29.G. Liang et al., "Crystal Growth Promotion and Defects Healing Enable Minimum Open-Circuit Voltage Deficit in Surmay Selenide Solar Cells," Advanced Science, vol. 9, no. 9, 2022, doi: 10.1002/advs.202105142.

30.T. T. Ngo, S. Chavhan, I. Kosta, O. Miguel, H. J. Grande, and R. Tena-Zaera, "Electrodeposition of surmay selenide thin films and application in semiconductor sensitized solar cells," ACS Appl Mater Interfaces, vol. 6, no. 4, 2014, doi: 10.1021/am405416a.

31.G. X. Liang et al., "Sputtered and selenized Sb2Se3 thin-film solar cells with open-circuit voltage exceeding 500 mV," Nano Energy, vol. 73, 2020, doi: 10.1016/j.nanoen.2020.104806.

32.Y. Zhou et al., "Thin-film Sb2Se3 photovoltaics with oriented one-dimensional ribbons and benign grain boundaries," Nat Photonics, vol. 9, no. 6, 2015, doi: 10.1038/nphoton.2015.78.

33.V. Kumar et al., "Analysis of Se Co-evaporation and Post-selenization for Sb2Se3-Based Solar Cells," ACS Appl Energy Mater, vol. 4, no. 11, 2021, doi: 10.1021/acsaem.1c02301.

34.Z. Li et al., "9.2%-efficient core-shell structured surmay selenide nanorod array solar cells," Nat Commun, vol. 10, no. 1, 2019, doi: 10.1038/s41467-018-07903-6.

35.S. Rijal et al., "Templated Growth and Passivation of Vertically Oriented Surmay Selenide Thin Films for High-Efficiency Solar Cells in Substrate Configuration," Adv Funct Mater, vol. 32, no. 10, 2022, doi: 10.1002/adfm.202110032.

36.Y. Xu, Z. Jia, R. Li, and Q. Lin, "Enhanced Charge Carrier Mobility of Evaporated Sb2Se3 via Post-Treatment for High-Speed Photodetection," Laser Photon Rev, vol. 17, no. 11, 2023, doi: 10.1002/lpor.202300399.

37.X. Liu et al., "Thermal evaporation and characterization of Sb2Se3 thin film for substrate Sb2Se3/CdS solar cells," ACS Appl Mater Interfaces, vol. 6, no. 13, 2014, doi: 10.1021/am502427s.

38.K. Jia et al., "Improved Performance for Thermally Evaporated Perovskite Light-Emitting Devices via Defect Passivation and Carrier Regulation," ACS Appl Mater Interfaces, vol. 12, no. 13, 2020, doi: 10.1021/acsami.0c01173.

39.H. Guo et al., "Enhancement in the Efficiency of Sb2Se3 Thin-Film Solar Cells by Increasing Carrier Concertation and Inducing Columnar Growth of the Grains," Solar RRL, vol. 3, no. 3, 2019, doi: 10.1002/solr.201800224.

40.X. Liu et al., "Improving the performance of Sb2Se3 thin film solar cells over 4% by controlled addition of oxygen during film deposition," Progress in Photovoltaics: Research and Applications, vol. 23, no. 12, 2015, doi: 10.1002/pip.2627.

41.S. Chen et al., "Improved Open-Circuit Voltage of Sb2Se3 Thin-Film Solar Cells Via Interfacial Sulfur Diffusion-Induced Gradient Bandgap Engineering," Solar RRL, vol. 5, no. 10, 2021, doi: 10.1002/solr.202100419.

42.G. Spaggiari, S. Rampino, and D. Bersani, " Sb 2 Se 3 : a possible future for thin-film photovoltaics? ," EPJ Web Conf, vol. 268, 2022, doi: 10.1051/epjconf/202226800006.

43.H. Zhao, J. Xie, and A. Mao, "Effects of bottom layer sputtering pressures and annealing temperatures on the microstructures, electrical and optical properties of Mo bilayer films deposited by RF/DC magnetron sputtering," Applied Sciences (Switzerland), vol. 9, no. 7, 2019, doi: 10.3390/app9071395.

44.H. Cai et al., "Interfacial Engineering towards Enhanced Photovoltaic Performance of Sb2Se3 Solar Cell," Adv Funct Mater, vol. 32, no. 46, 2022, doi: 10.1002/adfm.202208243.

45.BP, "Statistical Review of World Energy globally consistent data on world energy markets and authoritative publications in the field of energy," BP Energy Outlook, vol. 70, 2021.

46.S. Pasini et al., "Sb2Se3 Polycrystalline Thin Films Grown on Different Window Layers," Coatings, vol. 13, no. 2, 2023, doi: 10.3390/coatings13020338.

47.Z. Cao et al., "Oxygen Content Modulation Toward Highly Efficient Sb2Se3Solar Cells," ACS Appl Mater Interfaces, vol. 14, no. 50, 2022, doi: 10.1021/acsami.2c18735.

48.H. Guo et al., "Highly efficient and thermally stable Sb2Se3solar cells based on a hexagonal CdS buffer layer by environmentally friendly interface optimization," J Mater Chem C Mater, vol. 8, no. 48, 2020, doi: 10.1039/d0tc04017g.

49.3, Navnath M. Yajgar1, Bharat G. Thakare1, Niranjan S. Samudre1, Rajendra R. Ahire1, Sachin V. Desarada2, Nanasaheb P. Huse3, Sudam D. Chavhan1 Bhushan B. Chaudhari1, "A Review on Recent Trends of Sb2Se3 Thin Film Technology," Int J Sci Res Sci Technol, vol. 12, no. 2, pp. 1054–1073, Apr. 2025.

UDC 621.362+004.942

MODELING THE IMPACT OF ENHANCED CURRENT DENSITY IN THERMOELECTRIC GENERATOR BRANCHES ON HEAT TRANSFER PROCESSES

Kasimakhunova Anarkhan Mamasodikovna,
Professor at Fergana State Technical University, PhD
Norbutaev Masudjon Abdurasulovich,
Senior Lecturer, Fergana State Technical University
nmasudjon@gmail.com

Abstract. *This article presents the modeling of the influence of electric current density variation in the branches of a thermoelectric generator on heat transfer processes within its volume. The simulations were carried out using COMSOL Multiphysics software. The study analyzed the distribution of heat and temperature inside thermocouples under different current densities, which is a critical factor in optimizing thermoelectric generator efficiency. Furthermore, the article discusses the establishment of electric currents in thermocouple elements, heat conduction in solids, thermoelectric effects, electromagnetic heat sources, and temperature coupling mechanisms.*

Keywords: *thermoelectric generator, COMSOL Multiphysics, thermocouple, temperature distribution, efficiency optimization.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЫШЕННОЙ ПЛОТНОСТИ ТОКА В ВЕТВЯХ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА НА ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА

Аннотация. *В данной статье рассмотрено моделирование влияния изменения плотности электрического тока в ветвях термоэлектрического генератора на процессы теплопередачи в его объёме. Для этого использовался программный пакет COMSOL Multiphysics**.** В ходе моделирования проанализированы изменения распределения тепла и температуры внутри термопар при различных плотностях тока. Данный параметр является важным для оптимизации эффективности термоэлектрических генераторов. Кроме того, в статье описаны процессы установления электрических токов в элементах термопилы, теплопроводность в твёрдых телах, термоэлектрический эффект, электромагнитные источники тепла и температурные связи.*

Ключевые слова: *термоэлектрический генератор, COMSOL Multiphysics, термопара, распределение температуры, оптимизация эффективности.*

TERMOELEKTR GENERATOR TARMOQLARIDAGI KUCHAYGAN TOK ZICHLIGINI ISSIQLIK O‘TKAZISH JARAYONLARIGA TA’SIRINI MODELLASH

Annotatsiya. *Ushbu maqolada termoelektrik generator shoxchalarida elektr tok zichligi o‘zgarishining issiqlik almashinuvi jarayonlariga ta’siri modellashtirilgan. Buning uchun COMSOL Multiphysics dasturiy paketi qo‘llanildi. Modellash natijasida turli tok zichliklari ostida termojuft ichida issiqlik va harorat taqsimotining o‘zgarishi tahlil qilindi. Bu parametr termoelektrik generatorlarning samaradorligini optimallashtirishda muhim hisoblanadi. Shuningdek, maqolada termojuft elementlarida elektr toklarining shakllanishi, qattiq jismlarda issiqlik o‘tkazilishi, termoelektrik effekt, elektromagnit issiqlik manbalari va harorat bog‘lanishlari jarayonlari yoritilgan.*

Kalit so‘zlar: *termoelektrik generator, COMSOL Multiphysics, termojuft, harorat taqsimoti, samaradorlik optimallashtirish.*

Introduction. Recently, one of the main directions of energy development is the issue of uninterrupted supply of electricity to all sectors of the national economy. In this regard, one of the main pressing problems of uninterrupted power supply is the use of power generating devices and their improvement. Of course, it is necessary that the device is safe from a technical point of view, does not have a harmful impact on the environment and can provide the opportunity to make maximum use of alternative energy sources. One solution to today's problems is the role of thermoelectric generators, based on the physical process discovered by Seebeck in 1821 [1; 131-138-b, 2; 442-451-b,].

As mentioned in our previous works [3; 302-308-b, 4; 269-273-b], thermoelectric generators (TEGs) are the main source of electrical energy to ensure proper conversion of thermal energy into electrical energy.

Thermoelectric generators can be used in almost any environment where a temperature difference can be created [5; 89-94-b]. TEGs also serve as an additional source of electricity that can be used for domestic needs [6; 128-136-b]. They are also promising devices for autonomous power supply of facility monitoring systems, medical equipment and other devices. In households using individual boilers for heating, TEGs can also be used for cooling, heating and stabilizing the temperature of food [7; 26-30-b].

Despite the wide range of applications, the efficiency of TEG is not yet satisfactory. Although the efficiency of the first thermoelectric generators did not exceed 2%, modern multistage heat generators reach about 13%. This figure is expected to increase to 20% or more due to the development of new semiconductor materials and improvements in their structure [8; 81-105]. To achieve this goal, most research is aimed at determining the optimal stoichiometric composition of semiconductor materials for thermoelectric converters, improving their production technologies and expanding their areas of application. New materials with a nanoscale structure that have improved thermal conductivity properties are being developed.

But the process of research, preparation and production of thermopile requires significant effort, investment and laboratory equipment. The calculation of the parameters of thermoelectric generators is complicated by many factors, such as the material of the TEG, its electrical parameters, geometric dimensions and the ratio of electrical and thermal characteristics. To solve these problems, simulation is used to optimize the parameters of thermopile elements before production, which helps avoid numerous iterations and is a cost-effective solution [9; 45-54-b].

Literature review. In the presented research, it is important to select an appropriate modeling approach to ensure high accuracy and computational efficiency. A number of studies have addressed this problem using different mathematical and computer-aided modeling techniques.

For example, Kaljadin and Korolev [10; 38–45-b] developed a mathematical model of a thermoelectric generator with a ring geometry, which allows the analysis of structural features of TEG modules. Similarly, Vinogradov, Halykov and Doan [11; 84–91-b] proposed a methodology and mathematical model for calculating and evaluating the parameters of experimental thermoelectric generators, with an emphasis on design optimization.

Modern approaches are increasingly based on computer simulation. Habirov and Vohmin [12; 151–159-b] and Korotkov et al. [13; 142–150-b] demonstrated the potential of using the ANSYS Workbench software platform for modeling micro-thermoelectric generators based on semiconductor materials such as bismuth and antimony tellurides. Their works highlight practical methodologies, applications, and prospects of FEM-based multiphysics simulations.

In addition, Kostarev et al. [14; 241–248-b] presented research on a radioisotope thermoelectric generator (RTG), where a thermal-hydraulic RTG model was developed using SolidWorks software. The results included numerical simulation of cooling processes based on natural circulation, providing insights into thermal management strategies.

Further, Buslaev and Loboda [15; 7–20-b] modeled a thermoelectric generator with a Uni-Leg structure based on magnesium silicide. Their study addressed the problem of parameter optimization under specific operating conditions, although the proposed model does not fully capture the temperature distribution at the hot and cold ends during the TEG design stage.

From the comparative analysis of these works, it follows that different modeling methods have their strengths but also certain limitations. In particular, while SolidWorks and ANSYS-based models provide valuable engineering insights, they are often limited by boundary condition assumptions or lack precise temperature evaluation at critical junctions [16; 458-463-b, 17;913-935-b]. Considering these factors, the use of the COMSOL Multiphysics environment is determined to be the most acceptable and effective modeling tool for solving the tasks posed in this research, since it combines multiphysics coupling, high computational accuracy, and flexibility in defining geometric and material parameters.

Research method. In this study, the COMSOL Multiphysics software package was applied to model thermoelectric generator (TEG) elements and to analyze the impact of increasing current density on their thermal behavior. The choice of COMSOL Multiphysics is justified by its integrated multiphysics approach, which allows simultaneous consideration of electrical, thermal, and thermoelectric phenomena, thereby ensuring high accuracy and physical consistency of the results.

Modeling Approach and Algorithm

- The numerical modeling was based on the finite element method (FEM), which is the core computational technique of COMSOL Multiphysics. The following algorithm was adopted:
- Geometry creation – 3D models of p- and n-type thermoelectric legs with relevant dimensions were generated.

- Material definition – properties of bismuth telluride (Bi_2Te_3) and antimony telluride (Sb_2Te_3) were introduced, including temperature-dependent thermal conductivity, Seebeck coefficient, and electrical conductivity.
- Physics selection – the coupled modules were activated (described in section 2).
- Boundary conditions – hot and cold side temperatures, electrical current input, and thermal insulation conditions were defined.
- Meshing – adaptive meshing techniques were applied to ensure accuracy in regions with steep temperature or current gradients.
- Solution and post-processing – iterative solvers were used to calculate temperature distribution, heat flux, electrical potential, and efficiency indicators.

Physics Modules and Their Coupling

To accurately simulate the interdependence of heat and charge transport in TEG elements, several COMSOL modules were combined:

- Heat Transfer in Solids: to solve conductive heat transfer equations, accounting for temperature gradients within the thermoelectric legs.
- Electric Currents: to model the flow of electrical current density in p- and n-type branches.
- Thermoelectric Effect (multiphysics coupling node): to couple heat and charge transport processes, incorporating the Seebeck, Peltier, and Thomson effects.
- Boundary Heat Source: to include localized heating effects arising from Joule heating due to current flow.
- This multiphysics coupling enables a self-consistent calculation of temperature and potential fields, reflecting the real operational conditions of thermoelectric devices.

Key Physical Processes Considered

- Seebeck effect – generation of an electromotive force due to a temperature gradient.
- Peltier effect – heating or cooling at the junctions of dissimilar materials under current flow.
- Thomson effect – additional heating or cooling along a conductor with a temperature gradient.
- Joule heating – resistive heating caused by current density.

By considering these effects simultaneously, the model ensures an accurate representation of thermoelectric conversion efficiency.

Advantages of the Method

Compared to traditional analytical approaches and simplified numerical models [10÷15], the COMSOL-based method provides:

High accuracy in capturing nonlinear temperature-dependent material properties.

Flexibility in simulating different geometric configurations of TEG modules.

Capability to analyze heat transfer under various regimes (conduction, convection, radiation).

Efficient visualization of temperature fields, current distribution, and thermal gradients for further optimization.

Research results. Having sufficient information about the capabilities of the Comsol Multiphysical program, to simulate the effect of increasing current density on the heat distribution in the elements of thermoelectric generators, first run the program and enter its geometric dimensions. When entering geometric dimensions, these parameters can be entered as constants or variables (Fig. 1). This makes it possible to correct and optimize the processes occurring there, changing its geometric dimensions to increase the efficiency of the thermogenerator.

Figure 2 shows how input parameters are indicated by symbols and described by the program. For the sample, the shape of the thermogenerator was taken in the form of a parallelepiped, its geometric dimensions were determined by the variables A (base width), B (base length), H (element height), and their values were initially 4 mm, 4 mm and 6 mm, respectively. The current density is designated by the symbol J_0, the base temperature T_0 (cold end) is assumed to be 20^0C.

Then, using the capabilities of the program, the constituent materials of the thermogenerator and the materials of the contact plates are selected[6]. Here it is worth mentioning another important feature of the program, which is that the program includes all the chemical and physical parameters of the chemical substances (Bi, Te, Sb...) used to create elements of a thermoelectric generator. This allows you to obtain the results of theoretical studies with high accuracy, and also save time spent on entering redundant data into the modeling process.

Parameters: Iron layers with a contact coating thickness of 0.2 mm. Current density 10-200 A/cm^2. Base temperature 20°C. The Seebeck coefficient of iron is 6.5 mV/K. The thermoelement material is bismuth telluride.

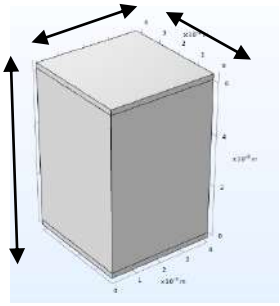


Figure 1. Entering the geometric dimensions of a thermogenerator element using the Comsol Multiphysical software tool

The parameters “Current conservation”, “Electrical insulation”, “Initial values”, “Earth”, “Normal current density” of the electric current parameters in the elements of the thermogenerator are configured from the “Electric currents” section of the program and the initial values of the electric current are entered. Figure 2 shows the process of adjusting the electric current parameters. In thermocouples, the flow of electric current causes a temperature difference due to the Pelte effect, and the program $\nabla \cdot J = Q_{j,V}$ performs processes based on the laws of formulas such as, $J = \sigma E + J_e$ and $\mathrm{E} = -\nabla V$

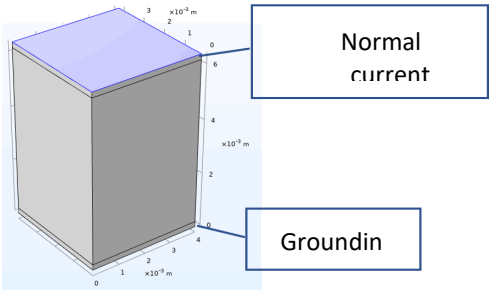


Figure 2. Parameterization of the electric current of the thermogenerator element using Comsol Multiphysics software

The next process in building our model is setting the parameters of the “Heat Transfer in Solids” program. Understanding that the temperature gradient in thermocouples leads to the appearance of thermo-EUC due to the Seebeck effect, the program implements the process through the laws of the following formulas.

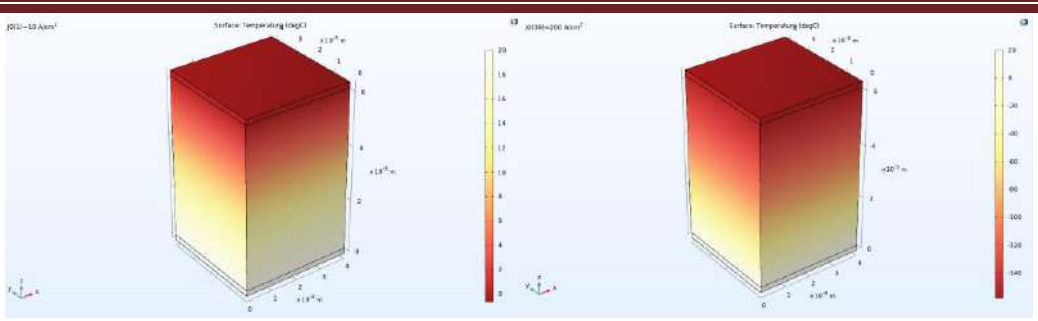
$$\rho \mathrm{C}_\rho u \cdot \nabla T + \nabla \cdot q = Q + Q_{ted} \quad (1)$$

$$q = -k\nabla T \quad (2)$$

In the next process of building a model from the “Multiphysics” section of the program, the “Thermoelectric effect” and “Electromagnetic heating” settings are made. The processes of thermoelectric influence $\rho = ST$ are carried out according to formulas $\mathrm{C}_\rho \frac{dT}{dt} + \nabla(-k\nabla T + PJ) = Q$, $q = PJ$ and electromagnetic heating through formulas $J_e = -\sigma S \nabla T$ and $Q_E = J \cdot E$.

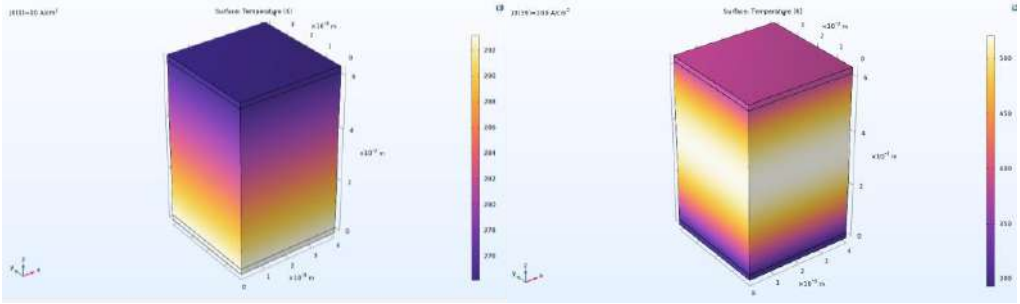
Above we examined phenomena that allow us to see all cases associated with physical processes occurring along the dimensions of the thermocouple. It's time to implement a process that allows you to observe and draw conclusions from these events. To do this, go to the “Training” section of the program. In our research, we did this work by looking at two different situations. In the first case, electromagnetic heating, that is, resistive losses, is not taken into account, and in the second case, resistive losses are taken into account. In this section, we have also added the “Optimize” feature to our resume. In the optimization process of our study, the SNOPT method was used.

Analysis of research results. The ability to analyze the changes occurring inside the thermocouple by changing the current density, which is considered an important parameter for the TB obtained from the simulation, and the heat distribution is shown in Figures 3a, 3b, 4a, 4b.



a **b**

Figure 3. Effect of changing current density on temperature (resistive losses are not taken into account)
a) Current density 10 A/cm^2; b) Current density 200 A/cm^2



a **b**

Figure 4. Effect of changing current density on temperature (resistive losses are taken into account):
a) Current density 10 A/cm ^{2}; b) Current density 200 A/cm ^{2}

If pay attention to Figures 3a and 3b, without taking into account resistive losses, you can determine that the temperature difference does not increase with increasing current density in thermoelements. But, of course, in real processes it is necessary to take into account resistive losses. If you pay attention to Figures 4a and 4b, you will notice that the temperature difference increases up to a certain current density value and then decreases. To make this situation more clear, it can be clearly seen in the graph presented in Figure 5, obtained using the program.

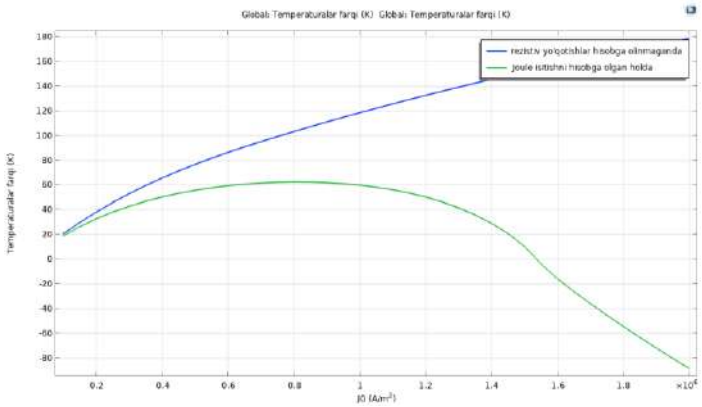


Figure 5. Effect of increasing current density in thermocouples on temperature

The blue line in the graph of Figure 5 depicts the case when resistive losses are not taken into account. If you pay attention to the direction of the line, you can see that the temperature difference increases almost linearly with increasing current density. If the resistive losses represented by the green line are taken into account, the confirmation of the above points can be clearly seen.

Conclusion. In conclusion, it can be noted that modeling processes today play an important role in the development of science. Today there are many software tools for modeling in different directions. In our study, we used the Comsol Multiphysics software tool to analyze various thermocouple parameters and were able to analyze the desired results:

- it was noticed that a change in current density affects the temperature difference of thermocouples;
- the greatest temperature difference was achieved at a current density of 81.218 A/cm^2 in a thermocouple with geometric dimensions of 4 mm, 4 mm and 6 mm.

REFERENCES:

1. Шостаковский П. Термоэлектрические источники альтернативного электропитания // Компоненты и технологии. – 2010. – №113. – С. 131–138.

2. Шелехов И. Ю., Дорофеева Н. Л., Смирнов Е. И., & Дорофеева А. А. Возобновляемые источники энергии: новые возможности использования термоэлектрических генераторов // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. – 2020. – Т. 10. – №3 (34). – С. 442–451.

3. Kasimaxunova A. M., Norbutaev M., & Baratova M. Thermoelectric generator for rural conditions // Scientific Progress. – 2021. – Vol. 2. – No. 6. – P. 302–308.

4. Abdurasulovich N. M. O‘zbekistonda termoelektrik generatorlardan foydalanish istiqbollari // So‘ngi ilmiy tadqiqotlar nazariyasi. – 2022. – Vol. 5. – No. 1. – P. 269–273.

5. Виноградов С. В., Горбачёв М. М., & Халыков К. Р. Проектирование термоэлектрического генератора, работающего от теплоты выхлопных газов судовых дизелей // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология. – 2010. – №1. – С. 89–94.

6. Mamur H., & Ahıska R. A review: Thermoelectric generators in renewable energy // International Journal of Renewable Energy Research. – 2014. – Vol. 4. – No. 1. – P. 128–136.

7. Тимофеев В. Н., & Тихонов Н. Ф. Использование термоэлектрических генераторов в условиях удалённых от постоянного электроснабжения // European Science. – 2016. – №3 (13). – С. 26–30.

8. Хвесюк В. И., Останко Д. А., Скрябин А. С., Цыганков П. А., Челмодеев Р. И., & Чирков А. Ю. Предельная эффективность термоэлектрического преобразования теплоты в высокотемпературных энергоустановках // Машиностроение и компьютерные технологии. – 2016. – №3. – С. 81–105.

9. Bitschi A. Modelling of thermoelectric devices for electric power generation. Doctoral dissertation, ETH Zurich, 2009.

10.Калядин О. В., & Королев К. Г. Математическая модель термоэлектрического генераторного модуля кольцевой геометрии // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2018. – Т. 14. – №6. – С. 38–45.

11.Виноградов С. В., Халыков К. Р., & Доан Н. К. Методика расчёта и оценки параметров экспериментального термоэлектрического генератора // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология. – 2011. – №1. – С. 84–91.

12.Хабиров Ф. Ф., & Вохмин В. С. Моделирование работы термоэлектрического генератора в программном комплексе Ansys Workbench // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. – 2024. – №1 (75). – С. 151–159.

13.Коротков А. С., Лобода В. В., Макаров С. Б., & Фельдхофф А. Моделирование термоэлектрических генераторов с использованием программной платформы ANSYS: методики, практические приложения, перспективы // Микроэлектроника. – 2017. – Т. 46. – №2. – С. 142–150.

14.Костарев В. С., Климова В. А., & Ташлыков О. Л. Моделирование процесса естественного охлаждения радиоизотопного термоэлектрического генератора // Атомная энергия. – 2017. – Т. 123. – №4. – С. 241–248.

15.Буслаев Р. Д., & Лобода В. В. Моделирование термоэлектрического генератора на основе силицида магния по структуре Uni-Leg // Информатика, телекоммуникации и управление. – 2019. – Т. 12. – №1. – С. 7–20.

16.Hashim H., Bomphrey J. J., & Min G. Model for geometry optimisation of thermoelectric devices in a hybrid PV/TE system // Renewable Energy. – 2016. – Vol. 87. – P. 458–463.

17.Riffat S. B., & Ma X. Thermoelectrics: a review of present and potential applications // Applied Thermal Engineering. – 2003. – Vol. 23. – No. 8. – P. 913–935.

18.Марченко О. В., Кашин А. П., Лозбин В. И., & Максимов М. З. Методы расчёта термоэлектрических генераторов. Москва: Энергоатомиздат, 1995. – 240 с.

UO‘K 51

DISPROZIY FERRIT GRANATINING MAGNIT KOMPENSATSIYA HARORATI YAQINIDA TEXNIK MAGNITLANISH JARAYONINING XUSUSIYATLARI

Hayitov Dilshod Ergashovich,
Buxoro davlat texnika universiteti “Aniq fanlar” kafedrasi dotsenti
d_e_hayitov@rambler.ru

Annotatsiya. *Ushbu maqolada disproziy ferrit granat ($Dy_3Fe_5O_{12}$) monokristall plastinkasining magnit kompensatsiya nuqtasi yaqinida texnik magnitlanish jarayoni o‘rganilgan. Faradey effekti asosidagi magnitooptik usuldan foydalanilib, domen chegaralari harakati va magnit gisterezis xususiyatlari tahlil qilindi. Olingan natijalar domen devorlari dinamikasining magnitlanish jarayoniga sezilarli ta’sirini ko‘rsatdi. Natijalar mavjud nazariy modellar bilan solishtirilib, kompensatsiya nuqtasi yaqinida yangi magnit faza hosil bo‘lish ehtimoli muhokama qilindi.*

Kalit so‘zlar: *disproziy ferrit granat, magnit kompensatsiya nuqtasi, texnik magnitlanish jarayoni, domen chegaralari harakati, Faradey effekti, magnit gisterezis, koertsitiv kuch, spintronika.*

ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА ТЕХНИЧЕСКОГО НАМАГНИЧИВАНИЯ ДИСПРОЗИЕВОГО ФЕРРИТ-ГРАНАТА ВБЛИЗИ ТЕМПЕРАТУРЫ МАГНИТНОЙ КОМПЕНСАЦИИ

Аннотация. *В данной работе исследован процесс технического намагничивания монокристаллической пластинки диспрозиевого феррит-граната ($Dy_3Fe_5O_{12}$) вблизи температуры магнитной компенсации. С использованием магнитооптического метода на основе эффекта Фарадея проведён анализ движения доменных границ и гистерезисных характеристик. Полученные результаты показывают существенное влияние динамики доменных стенок на процесс намагничивания. Обсуждается возможность образования новой магнитной фазы вблизи точки компенсации и проводится сопоставление с существующими теоретическими моделями.*

Ключевые слова: *диспрозиевый феррит-гранат, точка магнитной компенсации, процесс технического намагничивания, движение доменных границ, эффект Фарадея, магнитный гистерезис, коэрцитивная сила, спинтроника.*

CHARACTERISTICS OF THE TECHNICAL MAGNETIZATION PROCESS IN DYSPROSIUM FERRITE-GARNET NEAR THE MAGNETIC COMPENSATION TEMPERATURE

Abstract. *This paper investigates the technical magnetization process of a $Dy_3Fe_5O_{12}$ single-crystal ferrite-garnet plate near the magnetic compensation temperature. Using the magneto-optical method based on the Faraday effect, the dynamics of domain wall motion and magnetic hysteresis behavior were studied. The results demonstrate the significant influence of domain wall dynamics on the magnetization process. A comparison with existing theoretical models suggests the possible emergence of a new magnetic phase near the compensation point.*

Key words: *dysprosium ferrite-garnet ($Dy_3Fe_5O_{12}$), magnetic compensation point, technical magnetization process, domain wall motion, Faraday effect, magnetic hysteresis, coercive force, spintronics.*

Kirish. Ma’lumki, magnit kompensatsiya nuqtasi yaqinida ferrimagnetiklarning ko‘plab fizik xususiyatlari (issiqlik sig‘imi, Yung moduli, ferromagnetik rezonans chastotasi, Faradey aylanishi va boshqalar) keskin o‘zgaradi [4]. Ushbu masalaga bag‘ishlangan tajribaviy va nazariy tadqiqotlarning aksariyatida kristalning bir jinsli magnitlanishi sharoitida kompensatsiya nuqtasi yaqinida $Dy_3Fe_5O_{12}$ ferrit granatining (NYeFG) o‘zini tutishi tekshirilgan.

Biroq, tashqi magnit maydon yo‘qligida, domen tuzilishi mavjud bo‘lganda fizik xususiyatlarning o‘zgarishi sezilarli murakkablashadi. Ayniqsa, kuchsiz magnit maydon sohalari NYeFG’lardan amaliy foydalanish nuqtayi nazaridan dolzarbdir. Shu bilan birga, harorat kompensatsiya nuqtasidan o‘tganda domen tuzilishining ta’siri yetarlicha o‘rganilmagan.

So‘nggi yillarda ushbu turdagi tadqiqotlarga qiziqish yangi avlod spin-elektronika qurilmalarida NYeFG asosida materiallar ishlab chiqish istiqbollari sababli ortib bormoqda [1].

Olingan natijalar va ularning tahlili. Namunani texnik magnitlash jarayoni Faradey effektiga asoslangan magnitooptik usul yordamida o‘rganildi: Faradey aylanishining DT, harorat va maydonga bog‘liqligi o‘rganildi. Namunani magnitlash uchun uning tekisligiga y‘naltirilgan $H \le 60$ E magnit maydoni ishlatilgan. Amalga oshirilgan tadqiqotlarda asosiy e’tibor $200-295$ K harorat oralig‘iga qaratildi, kristallning T_c harorati mazkur oraliqda yotadi.

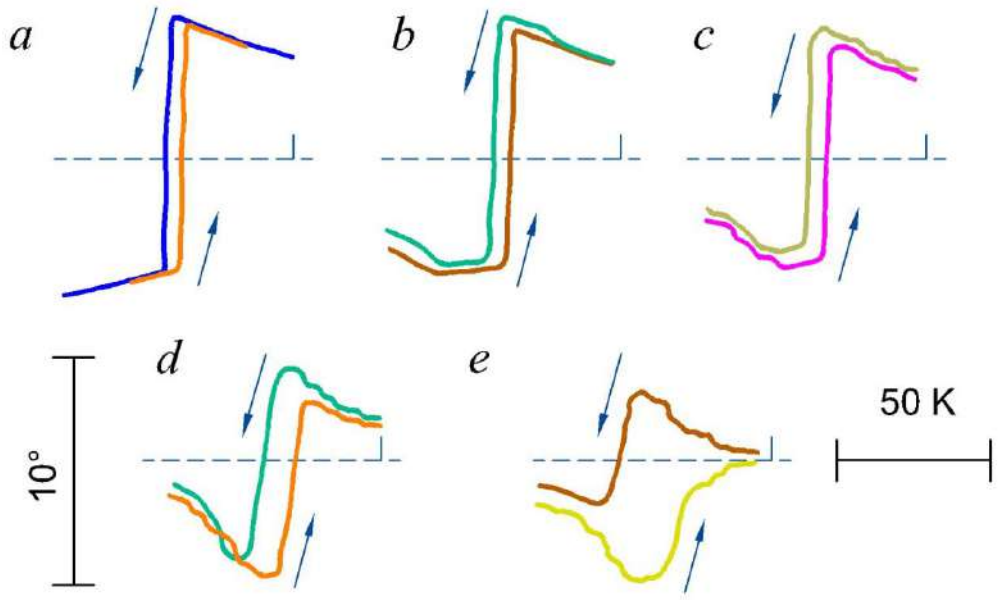
$$\theta_F = \left(a\vec{M}_{Fe}\cos\theta_1 + bM_R\cos\theta_2\right)l \qquad (1)$$

$$\Phi_F = \theta\frac{\left(S_+ - S_-\right)}{S} \qquad (2)$$

(1), (2) dan ko‘rinib turibdiki, T_c yaqnida ($M_{Fe} \approx M_R$ bo‘lgan holda) Faradey effekti yo‘qolmaydi va faqat kompensatsiya nuqtasining o‘zida ($\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ vektorlarining teskari aylanishi hisobiga Faradey aylanishi ishorasining 180^0 ga o‘zgarishi tufayli), $\theta_F = 0$ bo‘ladi. Ushbu natija $T \approx T_c$ bo‘lgan holda texnik magnitlanish jarayonini o‘rganish uchun magnitlanish yoki magnit qabul qiluvchanlik to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘lchanadigan magnit usullar bilan solishtirganda magnitooptik usul afzalroq ekanligini ko‘rsatadi.

1-rasmdan ko’rinib turibdiki, $\Phi_F(T)$ olingan egri chiziqlar domen chegarasining o‘rtacha yo‘nalishi bo‘ylab yo‘naltirilgan magnit maydonning turli qiymatlarida Faradey effektining haroratga bog‘liqligi grafiklari ko‘rsatilgan. $\Phi_F(T)$ bog‘liqlik sezilarli harorat gisterezisi bilan tavsiflanadi, bunda $(T_1 - T_2)$ oraliq H ortishi bilan kamayib boradi (bu yerda T_1 va T_2 mos ravishda, namunani isitish va sovutish mobaynida Φ_F burchak nolga aylanadigan haroratlar); bizni qiziqtiradigan harorat sohasida $200 \le T \le 295$ K namunaning yagona domenli holati $H > 30$ E da yuzaga keladi (ushbu magnitlanish sharoitida $\Phi_F(T)$ egri chiziqlari deyarli bir-biridan farq qilmaydi va (1), (2) dan kelib chiqadigan, T_c yaqinida Faradey effektining ishorasi o‘zgaradigan odatiy shaklga ega bo‘ladi.

$H < 30$ E maydonlar sohasida $\Phi_F(T)$ bog‘liqlik T_c ga nisbatan nosimmetrik; Faradey effekti kattaligining o‘zgarishi Barkgauzen sakrashlari bilan kuzatiladi; $\Phi_F(T)$ egri chizig‘ining kengligi H ortishi bilan ortib boradi, bunda Φ_F burchagining maksimal qiymati magnit to‘yinganlik holatiga mos keluvchi qiymatga yaqinlashadi; $\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ vektorlarining qayta aylanishi namunaning butun hajmi bo‘ylab bir vaqtning o‘zida sakrab yuz beradigan $H > 30$ E da olingan $\Phi_F(T)$ egri chiziqlardan farqli o‘laroq, $\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ vektorlari yo‘nalishining qayta o‘zgarishi kuchsiz magnit maydonlarda ma’lum bir harorat oralig‘ida sodir bo‘ladi.



1-rasm. H maydonning turli qiymatlarida olingan o‘rganilayotgan namunadagi Faradey effektining haroratga bog‘liqligi: 35 (a), 15 (b), 10 (c), 3 (d) va 2 Oe (e).

Yo‘nalishli chiziqlar harorat o‘zgarishi yo‘nalishini ko‘rsatadi. Gorizontal o‘q Faradey aylanish burchagining nol to‘g‘ri keladi; gorizontal o‘qdagi belgi - $T = 295K$ ekanligini anglatadi [9].

Shubhasiz, bunday yondashuv doirasida $H < 4 \div 5$ E sohasida magnitlanish maydonining pasayishi holida $\Phi_F(T)$ egri chizig‘i kengligining kamayishi va T_c nuqtasidan o‘ng va chapda chiziqli kvazigorizontal sohalarning paydo bo‘lishi (ushbu effektlar [10] ishda muhokama qilinmagan) ni tushuntirish qiyin.

$H = 60$ E amplitudali o‘zgaruvchan magnit maydon bizni qiziqtirgan butun harorat oralig‘ida namunani to‘liq qayta magnitlash uchun sharoit hosil qiladi. Bu esa, olingan gisterezis halqalariga asoslanib, 2-rasmda ko‘rsatilgan T_c yaqinida namunaning koertsitiv kuchining haroratga bog‘liqligini aniqlashga imkon berdi. $\Phi_F(T)$ egri chiziqlarda ($H < 30$ E da olingan) T_c ning o‘ng va chap tomonida (rasm. 1) lokal maksimumlarning mavjudligi shuni anglatadiki, $T \to T_c$ bo‘lgan holda, H ta’sirida domen chegaralarining siljish kattaligi ortib boradi va Faradey effekti to‘yinganlikka erishadigan (namuna bir domenli holatga o‘tadi) maydon kuchlanganligi esa kamayadi. Bu holatning kuzatilishi kutilmagan, chunki $M_c \to 0$ bo‘lgan holda magnit maydon tomonidan domen chegaralariga ta’sir qiluvchi bosim $P = M_c H$ kamayadi.

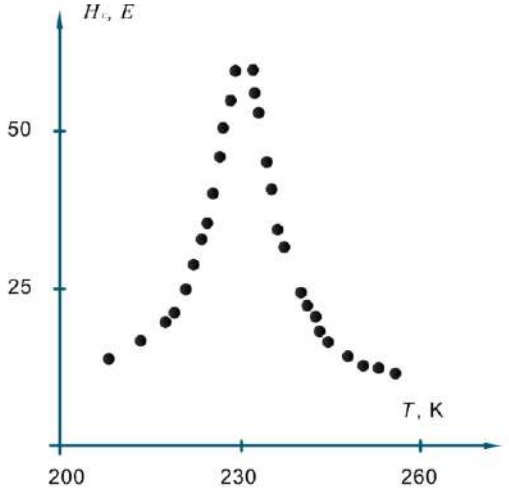
Olingan tajriba natijalarni talqin qilish uchun, “kotton” tipidagi (domenlardagi $\mathbf{M_c}$ vektori namuna tekisligida yotadi) 180^0 li DT ning mavjud nazariyasiga murojaat qilamiz [5], unga ko‘ra, magnitlanishning tanlab olingan yengil o‘q bo‘ylab yo‘naltirilgan magnit maydon ta’sirida domenlarning kengligidagi nisbiy o‘zgarish quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{w}{D} \approx \frac{\gamma H}{M_s}, \qquad (3)$$

Bunda w – $\mathbf{M_c}$ vektor yo‘nalishiga ega bo‘lgan domenning **H** bo‘ylab kengligi, D – DT ning $H = 0$ bo‘lgan holdagi davri, γ – namunaning geometrik o‘lchamlari bilan aniqlanuvchi doimiy; bu holda, magnit to‘yinganlik holati (namunaning bir domenli holati) $\frac{w}{D} = 1$ ga erishiladigan maydon quyidagicha:

$$H^* = \frac{4L_y M_s}{L_z} \ln \frac{2M_s^2 L_y}{\varepsilon} \qquad (4)$$

bu yerda L_y – namunaning qalinligi, L_z – namunaning domen chegaralari yo‘nalishi bo‘ylab kengligi, $\varepsilon \sim \sum_{i=1}^{2} M_i^2 (\alpha_i \beta_i)^{1/2}$ – domen chegarasining energiya zichligi (α_i va β_i – mos ravishda, T ga bog‘liq bo‘lmagan, bir jinsli bo‘lmagan almashinuv va anizotropiya ko‘rsatkichlari; pastki indekslar NYeFG ning ikkita magnit panjaralaridan biriga tegishli ekanligini ko‘rsatadi).



2-rasm. O‘rganilayotgan namuna koersitiv kuchining haroratga bog‘liqligi

(3) va (4) dan ko‘rish mumkinki, $M_c \to 0$ bo‘lgan holda $\frac{w}{D}$ nisbatning qiymati ortadi, H^* maydon esa kamayadi (ε kattalik qiymatining qaralayotgan harorat oralig‘ida nisbatan kuchsiz o‘zgarishini hisobga olgan holda), bu esa, yuqorida ta’kidlab o‘tilgan kuzatish natijalaridan kamida bittasi bilan sifatli darajada mos keladi. Shu bilan birga, (3) va (4) munosabatlardan, $T = T_c$ da ($M_{Fe} = M_R$ da), $w \to \infty$, va $H^* \to 0$, ya’ni $H = 0$ da harorat magnit kompensatsiya nuqtasidan o‘tganda namunaning DT yo‘qolishi kerak.

Kuchsiz magnit maydonda magnitning magnitlanishi ikkita asosiy mexanizm – domen chegaralarining siljishi va $\mathbf{M_c}$ vektorning aylanishi bilan belgilanadi. Odatda, $T \approx T_c$ da DT NYeFG ning texnik magnitlanish jarayonida muhim o‘rin tutmaydi deb hisoblanadi: kristallning magnitlanishi yoki qayta magnitlanishi $\mathbf{M_c}$ ning bir jinsli aylanishi hisobiga amalga oshiriladi (masalan, [11, 12] ga qarang). Bunday holda, koertsitiv kuch **H** ga qarama-qarshi yo‘naltirilgan $\mathbf{M_c}$ vektorli holat noturg‘un bo‘lgan maydonga to‘g‘ri keladi va $\mathbf{H} \parallel \langle 111 \rangle$ da quyidagicha aniqlanadi [11]:

$$H_c = \frac{4K}{3M_s} \qquad (5)$$

bu yerda K – magnit anizotropiya doimiysi.

Bizni qiziqtirgan harorat sohasida $Dy_3Fe_5O_{12}$ uchun K va M_c ning qiymatlari yaxshi ma’lum, bu esa (5) dan kelib chiqadigan $H_c(T)$ bog‘liqlikni 2-rasmda ko‘rsatilgan natijalar bilan solishtirish imkonini beradi. Masalan, $T = 240K$ va $M_c \approx 47Gs$ da [6, 8], $K \approx 53000$ erg$/sm^3$ ga teng [7]. Ushbu qiymatlarni (5) ga qo‘yib, $H_c \approx 150\,E$ ga ega bo‘lamiz, bu tajribada $T = 240K$ da kuzatilgan namunaning koertsitiv kuchi kattaligidan taxminan to‘rt baravar ortiq (2- rasmga qarang), holbuki, $T \to T_c$ da, tajriba natijalari va (5) ga muvofiq hisoblashlar natijalari o‘rtasidagi ushbu farq yanada oshadi. Shubhasiz, H_c ning hisobiy qiymatlarining o‘lchangan qiymatlarga nisbatan sezilarli oshishi $\mathbf{M_s}$ ning bir jinsli aylanish modeli tajribaga mos kelmasligini anglatadi. Binobarin, bizning holimizda yangi magnit faza domenlarining yangi domen hosil bo‘lish maydoni anizotropiya maydonidan sezilarli darajada kichikroq bo‘ladi va o‘rganilayotgan namunani past chastotali magnit maydonda magnit kompensatsiya nuqtasi yaqinida texnik magnitlanish jarayoni asosan domen chegaralarining siljishi bilan belgilanadi. Bu esa, Faradey effekti gisterezis halqasi shaklining “klassik” dan to‘rtburchakka bosqichma-bosqich o‘zgarib borishi $T \to T_c$ da H ta’sirida domen chegaralarining siljish tezligining ortib borishi bilan asoslanadi.

Yengil magnitlanishi o‘qi bo‘ylab **H** yo‘nalishidagi domen chegarasining statsionar harakat tezligi $H > H_c$ da $V = \mu(H - H_c)$ va $H < H_c$, da $B = 0$, bu yerda μ – domen chegarasining harakatchanligi, bu esa T_c yaqinida kuzatiladigan Faradey effekti gisterezis halqasining “uzilishi” mavjud bo‘lishini koertsitiv kuchning magnitlash maydoni amplitudasidan ortiqcha bo‘lishi bilan tushuntirish imkonini beradi. $T \to T_c$ da B tezlikning ortishiga kelsak, shuni ta’kidlash kerakki, hozirda NYeFG dagi domen devorlarining tashqi magnit maydonda harakati bo‘yicha to‘liq yakunlangan nazariya mavjud emas va faqatgina bir qator ma’lum modellar uchun domen chegaralarining harakatchanligining taxminiy hisob-kitoblari mavjud bo‘lib, odatda tajriba yo‘li bilan aniqlanadigan μ qiymatdan sezilarli darajada farq qiladi. Shu sababli, tadqiqotimiz doirasida olingan natijalar, xususan, ushbu muammoni hal qilish nuqtai nazaridan qiziqish uyg‘otishi mumkin.

O‘tkazilgan tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, T_c yaqinida $Dy_3Fe_5O_{12}$ kristalining texnik magnitlanish jarayoniga DT sezilarli ta’sir ko‘rsatadi, bizga ma’lum bo‘lgan nazariyalar esa olingan tajriba natijalarining umumiyligini yetarli darajada tasvirlashga imkon bermaydi. Bizning fikrimizcha, tajriba va nazariya o‘rtasidagi bu nomuvofiqlik mavjud nazariy modellar NYeFG larni kompensatsiya nuqtasi yaqinida kollinear ferrimagnitlar deb hisoblashi bilan bog‘liq. Bu holda (hosil bo‘ladigan DT domen devori energiyasi ε va namunaning magnitostatik energiyasi $E_M \sim M_s^2$ orasidagi muvozanat va yutuq bilan belgilanadi, deb hisoblansa) kompensatsiya nuqtasi yaqinida ($M_s \to 0$ da), magnitostatik energiya $E_M \approx 0$ ga teng, va ε yakka holda qoladi, bu esa DT ni energiya nuqtai nazaridan foydasizga aylantiradi. aynan shu tarzdagi

termodinamik model [2, 3] da rivojlantirilgan DT nazariyasi asosida yotadi. Shu bilan bir vaqtda, NYeFG magnit holatini tavsiflovchi fazaviy $H-T$ – diagrammaga ko‘ra, T_c yaqinida, kristallning $\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ vektorlarining qat’iy antiparallel yo‘nalishiga ega bo‘lgan holati noturg‘un bo‘ladi va kristall $\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ orasidagi burchak 180^0 dan farq qiladigan magnit fazaga o‘tadi. Egrilangan $\mathbf{M}_{Fe}$ va $\mathbf{M}_R$ vektorlariga ega bo‘lgan magnit tuzilmaning mavjudligi magnit kompensatsiya nuqtasida $M_s \neq 0$ bo‘lishi va yakuniy o‘lchamli namunaning magnitostatik energiyasi noldan farqli bo‘lishiga olib keladi, bu esa o‘z navbatida, DT energetik jihatdan foydali bo‘ladi va natijada disproziy ferrit-granatining texnik magnitlanish jarayoniga sezilarli ta’sir qiladi.

Xulosa. $Dy_3Fe_5O_{12}$ ferrit granatining magnit kompensatsiya harorati yaqinida texnik magnitlanish jarayoniga domen tuzilmalari sezilarli ta’sir ko‘rsatishi tajribaviy tarzda ko‘rsatildi. Faradey effekti yordamida olingan natijalar mavjud nazariy modellar bilan to‘liq mos kelmadi, bu esa yangi magnit faza hosil bo‘lish ehtimolini ko‘rsatadi. Olingan natijalar spintronika va magnit materiallar texnologiyasida amaliy qo‘llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Звездин А.К., Пятаков А.П. Неоднородное магнитоэлектрическое взаимодействие в мультиферроиках и вызванные им новые физические эффекты. // УФН. – 2009. – Т. 179. –С. 897 – 904.

2. Богданов А.Н., Яблонский Д.А. К теории доменной структуры ферримагнетиков. // ФТТ. – 1980. – Т.22. – №3. – С. 680 – 687.

3. Барьяхтар В.Г., Богданов А.Н., Яблонский Д.А. Доменная структура ферритов вокрестности температуры компенсации. // ФТТ. – 1986. – Т.28. – №1. – С.87 – 94.

4. Белов К.П., Звездин А.К., Кадомцева А.М., Левитин Р.З. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. – М: Наука, – 1979. – 317 с.

5. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Эллиот Р.Дж., Эпштейн Э.М. Магнитостатическая энергия и полосовая доменная структура в ферромагнитной пластине конечной ширины с параллельной анизотропией. // ФТТ. – 2003. – Т.44. – В.6. – С.1064 – 1069.

6. Физические величины: Справочник. Под.ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. – М: Энергоатомиздат, – 1991. – С. 223.

7. Landolt – Bornstein. Numerical data and functional relationship in science and technology. – New series, Hellwege K.H., Hellwege A.M. –Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, – 1998. – P. 639 – 641.

8. Guillot M., Le Gall H. Magnetic study of the terbium iron garnet, TbIG, along the easy (111) direction: molecular field parameters. // Journal de phys. – 1977. – T.38. – № 7. – P. 871 – 875.

9. Соколов Б.Ю., Шарипов М.З. Особенности процесса технического намагничивания феррита-граната $Tb_3Fe_5O_{12}$ вблизи температуры магнитной компенсации. // ЖТФ. – 2013. – Т.83. – В.9. – С. 31 – 37.

10. Лисовский Ф.В., Шаповалов В.И. Влияние доменной структуры на поведение редкоземельных ферритов-гранатов в окрестности точки компенсации. // ФТТ. – 1975. – Т.17. – В.10. – С. 3042 – 3045.

11. Горанский Б.П., Звездин А.К. Температурная зависимость коэрцитивной силы ферримагнетиков вблизи температуры компенсации. // ЖЭТФ. – 1969. – Т.57. – В.2(8). – С. 547 – 550.

12. Белов К.П., Никитин С.А. К теории аномалий физических свойств ферримагнетиков в районе точки магнитной компенсации. // ЖЭТФ. – 1970. – Т.58. – В.3. – С. 937 – 943.

UO‘K 621.383.51

IKKI TOMONLAMA SEZGIR QUYOSH ELEMENTINING SIRT QATLAMIDA OPTIMAL TEKSTURA HOSIL QILISH ORQALI NUR YUTISH XUSUSIYATINI OSHIRISH

Komilov Murodjon Muxtarjon o‘g‘li,
Andijon davlat universiteti tayanch doktoranti
komilovmdotcom94@gmail.com
Aliev Suxrob Rayimjonovch,
Andijon davlat texnika instituti dotsenti
Ziyoitdinov Johongir Norboyevich,
Andijon davlat universiteti doktoranti

Annotatsiya. *Hozirgi kunda quyosh elementlaridan ko‘plab foydalanish orqali turli shakldagi quyosh elementlari qo‘llanilmoqda. So‘nggi yillarda ikki tomonlama sezgir quyosh elementlaridan foydalanish samarali o‘sib kelmoqda. Ikki tomonlama sezgir quyosh elementidan samarali foydalanishda ularning sirt qatlamlariga ishlov berish hamda sirt qatlamlariga turli nur qaytarishga qarshi qatlam qoplash orqali nur yutish qobiliyati oshirish yuqori natija beradi. Ushbu tadqiqot ishida raqamli texnologiyalar asosida ikki tomonlam sezgir quyosh elementining old, orqa va har ikki tomonlama yoritilish sharoitida ko‘plab natijalar olingan. Bunga ko‘ra SiO_2 optik qatlamga ega bo‘lgan ikki tomonla sezgir quyosh elementi uchun sirtda hosil qilingan teksturaning optimal o‘lchami burchagi va fotoelektrik kattaliklari aniqlandi. Teksturaning 0.8 mkm va asos burchagi 58^0 bo‘lganda eng yuqori qiymatdagi tok zichligiga erishildi. Ushbu qiymat o‘lchashlar natijasida old, orqa va teng yoritilish sharoitida 32.54 mA/sm^2, 29.64 mA/sm^2 va 62.18 mA/sm^2 ga teng tok zichligiga erishildi.*

Kalit so‘zlar: *kremniy, ikki tomonlama sezgir quyosh elementi**,** Sentaurus TCAD, tekstura, baza va emitter qatlam qalinligi, nur qaytaruvchi qatlam.*

ПОВЫШЕНИЕ СВЕТОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ ДВУСТОРОННЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО СОЛНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПУТЁМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕКСТУРЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ

Аннотация. *В настоящее время благодаря широкому применению солнечных элементов используются различные их конструкции. В последние годы наблюдается рост эффективности использования двусторонне чувствительных солнечных элементов. Для повышения эффективности их работы важным является обработка поверхностных слоёв, а также нанесение различных антиотражающих покрытий, что способствует увеличению способности к поглощению света. В данной работе с использованием цифровых технологий проведено моделирование двусторонне чувствительного солнечного элемента при переднем, заднем и двустороннем освещении, в результате чего получены многочисленные результаты. Для двустороннего солнечного элемента с оптическим слоем SiO_2 были определены оптимальные размеры и угол текстуры поверхности, а также фотоэлектрические параметры. Установлено, что при размере текстуры 0,8 мкм и угле основания 58° достигается наибольшая плотность тока. Согласно результатам измерений, при переднем, заднем и равномерном освещении были получены значения плотности тока 32,54 мА/см², 29,64 мА/см² и 62,18 мА/см² соответственно.*

Ключевые слова: *кремний, двусторонне чувствительный солнечный элемент, Sentaurus TCAD, текстура, толщина базового и эмиттерного слоя, антиотражающий слой*

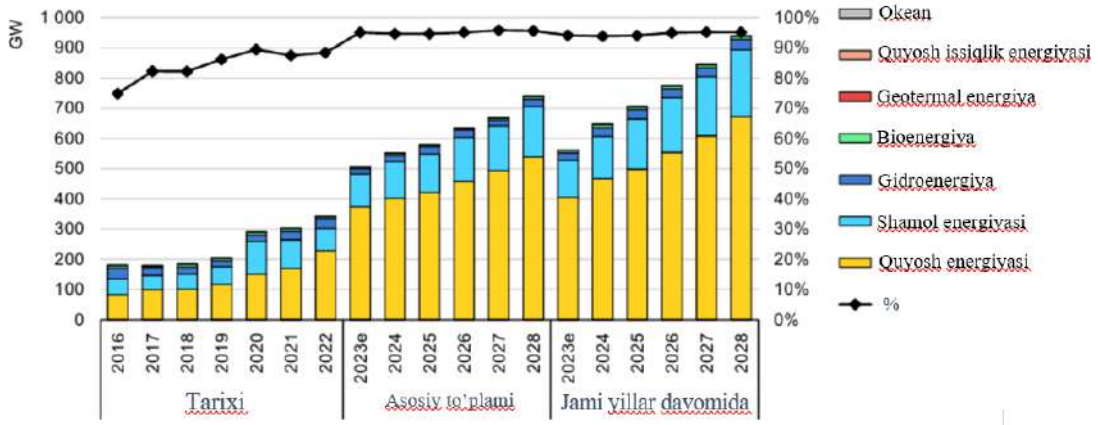
ENHANCING LIGHT ABSORPTION BY CREATING AN OPTIMAL TEXTURE ON THE SURFACE LAYER OF A BIFACIAL PHOTOSENSITIVE SOLAR ELEMENT

Abstract. *Currently, a wide variety of solar cell designs are being implemented due to their extensive application. In recent years, the efficiency of bifacial solar cells has shown significant growth. Enhancing the performance of bifacial solar cells requires surface treatment and the application of various anti-reflective coatings, which improve light absorption capability. In this study, numerical simulations were performed to investigate the performance of a bifacial solar cell under front, rear, and simultaneous illumination, yielding multiple results. For a bifacial solar cell with a SiO_2 optical layer, the optimal surface texture dimensions, base angle, and photoelectric parameters were determined. It was found that a texture*

size of 0.8 μm and a base angle of 58° provide the highest current density. According to the obtained results, the current density values under front, rear, and simultaneous illumination were 32.54 mA/cm², 29.64 mA/cm², and 62.18 mA/cm², respectively.

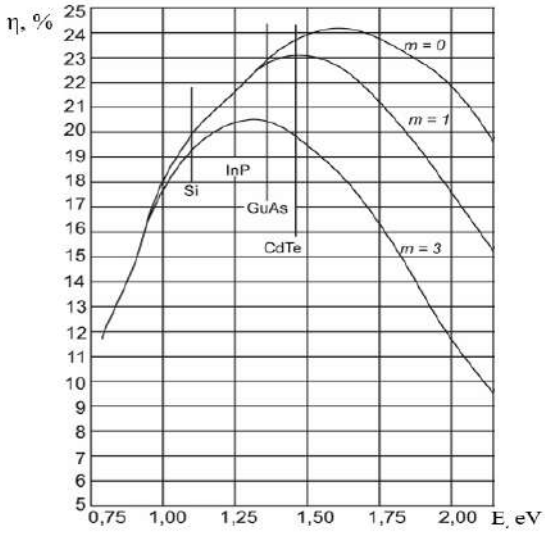
Keywords: *silicon, bifacial solar cell, Sentaurus TCAD, texture, base and emitter layer thickness, anti-reflective layer.*

Kirish. Insoniyat doimiy ravishda energiyaga bo‘lgan ehtiyoji mavjud bo‘lgan. Xususan tabiiy energiya manbalari insonlar uchun zaruriy vasita hisoblanadi. Dunyo aholisi tez suratlarda ortishi va ilm fanni taraqqiy etishi energiyaga bo‘lgan talabni yanada kuchaytirmoqda. Dastlab energiya resurslari ko‘p turli va miqdori sezilarli ko‘p bo‘lgan, biroq so‘ngi yillarda tabiiy energiya miqdori cheklangan ekanligini hamda undan oqilona foydalanish muhim ahamiyatli ekanligi keltirilgan [1]. Tabiiy energiyaga qo‘shimcha ravishda boshqa turdagi energiya manbalaridan foydalanish dunyo olimlari tomonidan oldinga qo‘yilgan vazifa bo‘lgan. Bunga ko‘ra qayta tiklanuvchi energiya turlaridan foydalanish istiqbolli ekanligi aniqlandi [2]. Qayta tiklanuvchi energiya manbalari foydalanishni asosiy bosqichi turli davlatlarda turlicha yilda boshlangan. Masalan Germaniya davlatida qayta tiklanuvchi energiya manbalari rivojlanishi 1950-yilda boshlanib ushbu energiya turidan foydalanish siyosati 1980-yilda amalga oshirilgan [3]. Qayta tiklanuvchi energiya manbari asosan ko‘p qismlarga bo‘linadi, quyosh, shamol, suv, geotermal bioenergiya va boshqa energiya manbalari.



1-rasm. Qayta tiklanuvchi energiya manbalari turlari

Bu turdagi energiyadan foydalanishda quyosh energetik qurilmalari asosiy hisoblanib, bular quyosh issiqlik qurilmalari va quyosh elektr qurilmalariga bo‘linadi [4]. Quyosh radiatsiyasi va yorug‘lik tufayli quyosh energiyasini elektr energiyaga aylantirish samaraliroq hisoblanadi [5]. Dastlabki quyosh energetik qurilmalarining tarixi, 1954-yilga borib taqaladi. Bell laboratoriyasi tomonidan tashkil etilgan kremniy asosli QE qurilmasida birinchi aniqlangan samaradorlik 4 % so‘ngra 11 % ni tashkil etgan [6]. QElarning asosiy tarkibi kremniy elementidan iborat [7]. Kremniy tabiatda keng tarqalgan element bo‘lib ishlab chiqarish jihatdan keng tarqalgan [8].

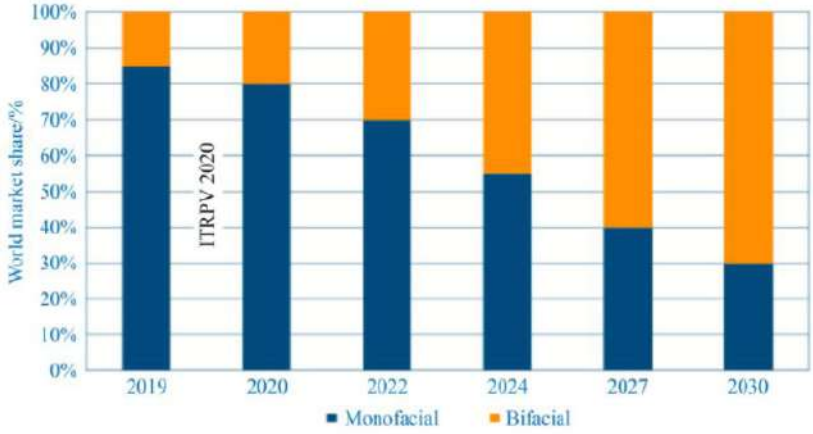


2-rasm. QE FIKning yarimo‘tkazgich taqiqlangan soha energiyasiga bog‘lanishi

Turli asosga ko‘ra QE larning bir necha turlari mavjud. Bulardan monokristal, polikristal, amorf kremniy, CdTe, CIGS, holdagi QE turlari keng tarqalgan [9]. Ko‘rsatilgan materiallar ichidan eng asosiy material sifatida kremniydan ko‘p faoyadalaniladi. Kremniy noto‘g‘ri o‘tishga ega yarimo‘tkazgichli element hisoblanib taqiqlangan soha kengligi 300 K da 1.12 eV ga teng [10]. Taqiqlangan soha energiyasiga mos qiymatli yorug‘lik energiyasini yutish orqali samarali foydalanish mumkin.

Yarimo‘tkazgichli materiallar orasidan CdTe eng yuqori FIK ga ega bo‘lsada kremniy elementi tarkibiy jihatdan sifatli va olinish texnologiyasi soddaligi bilan maqbul elementdir [11]. Kremniy taqiqlangan soha energiyasi tufayli aniq maksimum samaradorlikga ega bo‘lgan QE mavjud. Nazariy jihatda kristal kremniy asosli QEning samaradorligi limiti 29.43 % dan ortmasligi aniqlangan [12]. Ushbu limit quyosh nurining spektri bilan bog‘liq, biroq oddiy planar QE ning nur qabul qilish yuzasi faqat old tomondan ekanligi uchun keltirilgan nazariy ifodadir.

Bugungi kunda oddiy palanar QE dan farqli ravishda quyosh nurining old va orqa tomonlama nur qabul qilishga mo‘ljallangan ITSQE (ikki tomonlama sezgir quyosh elementi) ishlab chiqish rivojlanmoqda. ITSQE dastlab ikkita *p-n* o‘tishga ega bo‘lgan 3 ta elektroddan iborat QE ishlab chiqilgan [13]. Bunda ikkita katod va bitta anoddan iborat kichik QE ishlab chiqilgan. Bu turdagi quyosh elementi yorug‘lik ikki sirtga tushish hisobiga va old va orqa kontakatlardan elektr energiya olishda murakkabliklarga uchralgan. Bir tomonlama sezgir quyosh elementidan ko‘ra ITSQE yillar davomida takomillashtirish rejalari mavjud [14] sababi yorug‘lik energiyadan to‘g‘ri va sochilgan nurdan unumli foydalanishga asoslanadi. Yaqin kelajakda ITSQE ulushi bir tomonla sezgir QEdan sezilarli ortishi kutilmoqda.



3-rasm. Bir va ITSQE yillar davomida foydalanish grafigi

Kremniy asosli bir va ikki tomonlama yorug‘likga sezguvchan QE yaratish bir qancha afzalliklarga olib keladi. Xususan har ikki turdagi QE ning nur yutish va qaytarish koeffitsiyentlari taqqoslanib o‘rganilgan [15]. Quyosh spektorining to‘la holatida ITSQEning old, orqa va teng yorug‘lik nuri tasiri ekperimental o‘rganilgan [16]. ITSQE uchun turli nur qaytaruvchi tagliklar orqali ulardan qaytgan nurlarning foizi qanday rangli sirtda eng ko‘p ekanligini aniqlangan [17]. Yuqoridagilardan kelib chiqib quyosh energiyasidan ko‘plab foydalanishda ularning sirt qatlamlariga noteksliklar hosil qilish orqali sirtga tushayotga yorug‘lik nuridan bir necha bor foydalanishga ega bo‘lish mumkin. Ushbu tadqiqot ishida ikki tomonlama sezgir quyosh elementi sirt qatlamlariga tekstura hosil qilish orqali optimal tekstura balandligi hamda optimal tekstura balandligidagi fotoelektrik qiymatlar aniqlangan.

Metodika. Yarimo‘tkazgichli elektron qurilmalarda kechadigan fizik jarayonlarni o‘rganishda turli uslublar mavjud. Bular experimental, nazariya hamda simulyatsiyalash. Bu uslublarning har biri ma’lum bir afzalliklarga hamda yetarli darajada murakkabliklarga ega. Nazariy va simulyatsiya uslubi bizning tadqiqotimizninig asosi hisoblanadi. Simulyatsiya uslubi birqancha qiyinchiliklar hosil qiladi, ayniqsa yarimo‘tkazgichli qurilmalarda xususiy differensial tenglamalar asosida ko‘plab ularning optik va elektrik parametrlari aniqlanadi. Xususiy differnsial tenglamalarni nazariy yo‘l bilan hisoblash qiyin shuning ularni sonli metdodlar bilan hisoblash yaxshi natija beradi. Sonli metodning afzalligi har qanday differensial tenglamalarni chegaraviy shartlar asosida baxolay olish qulaydir. Yarimo‘tkazgichli material asosidagi qurilmalarni modellashtirish yo‘li orqali hisoblash uchun Sentaurus TCAD dasturiy paketidan foydalanish eng qulay hisoblanadi. TCAD dasturiy paketi yordamida barcha elektron qurilmalarda kechadigan fizik jarayonlarni hisoblash hamda ularni vizual tasvirlarini ko‘rish imkoni bor. Ushbu dastur dunyodagi eng nufuzli oliygohlardan biri Amerikaning OXFORD universitetida ham keng qo‘llanilib kelinmoqda. Ushbu ilmiy tadqiqot ishimizda Synopsys kompaniyasining Sentaurus TCAD dasturiy paketidan foydalanildi.

Sentaurus TCAD dasturiy paketi imkoniyatlari keng bo‘lib birqancha hisoblash usullarini o‘z ichiga oladi. Modellashtirish yo‘li orqali 4ta instrumentdan foydalaniladi bularga quyidagilar kiradi Sentaurus Structura Editor, Sentaurus Device, Sentaurus Visual va Sentaurus Workbench. Sentaurus Structura Editorda elektron qurilmalarning eng sodda geometrik shakllarini 1D, 2D va 3D holdagi ko‘rinishi yasaladi. Sentaurus Device da yasalgan modelga fizik xossalarini kiritib ularda hisoblashlarni amalga oshiriladi. Sentaurus Visual qismida esa qurilmani fizik hossalari qanday o‘zgarib borayotganini vizuallashtirilgan tasvirlarinini ko‘rish mumkin. Sentaurus WorkBench yuqoridagi uchta uslublarni umumlashgan holda virtual tajriba muhitini yaratadi.

Ushbu dasturda eng sodda quyosh elementini gemetrik modelini yasash, haqiqiy sharoitdagi tayyorlangan quyosh elementi bilan taqqoslanarli holda barcha parametrlari kiritiladi va ishlab chiqiladi. Bunda hisoblash jarayonini tezlashtirish hamda aniqlikni oshirish uchun geometrik shakl kichik chiziladi. Shunga ko‘ra kremniy asosli ikki tomonlama yorug‘likga sezgir bo‘lgan quyosh elementi ishlab chiqilgan. Quyosh nuri har ikki sirtga bir vaqta bir xil intensivlikda yo‘naltirilgan bo‘lib orqa qismidagi kumush oyna qo‘yilgan. Ushbu kumush oynalar bir biri bilan 90^0 ni hosil qilib quyosh elementining orqa qismiga nur to‘la yo‘nalishini taminlab beradi. Bu yerda kumush nur qaytarish vazifasini o‘tab u to‘liq nur qaytaradi deb hisoblangan. Bunda quyosh elementi baza qatlam qalinligi 175mkm deb hisoblanib 10^{15} sm^{-3} miqdorda *Bor* aktiv atomlari kiritilgan, n^+ va p^+ qatlam qalinliklari 1mkm bo‘lib 10^{17} va 10^{16} sm^{-3} Fosfor hamda *Bor* aktiv atomlari kiritilgan. Tushayotgan yorug‘lik manbai sifatida AM1.5g spektoridagi 1000W/m^2 intensivlik tanlangan.

Yuqoridagilardan kelib chiqib quyosh elementining modellashtirib tashqi tasir berilganda qanday qonuniyatlar asosida yorug‘lik nurini jamlash va ushbu yorug‘lik nurining qaytish, sinish va yutilish hodisasini aniqlash datlabki o‘rindadir. Bu turlar quyidagicha izohlanadi:

1. Transfer matrix method (TMM)
2. Finite-difference time method (FDTD)
3. Raytracing (RT)
4. Beam propagation method (BPM)
5. Loading solution of optical problem from file
6. Optical beam absorption method
7. Composite method

Quyosh elmentlari uchun eng ko‘p qo‘llaniladigan metod bu TMM va RT metodlaridir[10]. Ushbu metodlardan TMM metodi yorug‘lik nurining boshqa bir muhit bilan tasirlashishda yorug‘likning o‘tishi, sinishini ifodalab keladi. RT metodida esa Monte Carlo uslubidan foydalanmgan holda har bir foton uchun energiyani hisoblash imkoniga egadir. Har qanday yorug‘lik nuri muhit bilan tasirlashganda sinish, qaytish va o‘tish xossalariga bo‘y sunadi shuningdek ushbu xossalarni to‘la hisoblash uchun tadqiqot ishimizda TMM hamda RT metodini birlashtirgan holda quyidagi tenglamni hosil qildik.

$$\begin{bmatrix} E_t \\ E_q \end{bmatrix} = M_p \begin{bmatrix} E_{o'} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M_p = \begin{Bmatrix} M_{p,11} & M_{p,12} \\ M_{p,21} & M_{p,22} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$r_t = \frac{M_{p,21}}{M_{p,11}} \qquad t_t = \frac{1}{M_{p,11}} \tag{2}$$

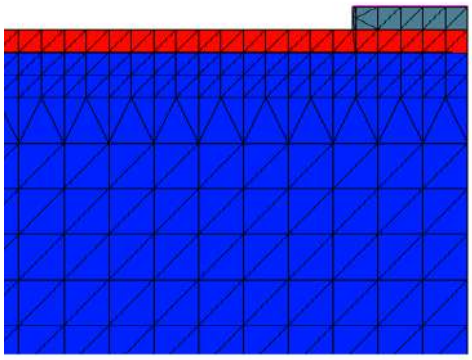
Bu yerda E_t tushayotgan yorug‘likni elektr maydoni, E_q qaytayotgan yorug‘likni elektr maydoni, $E_{o'}$ moddadan o‘tayotgan yorug‘likni elektr maydoni. $M_{p,}$ esa TMM metodi uchun matritsa elementlari, r_t Frenelning qaytarish koeffitsiyenti bo‘lib o‘tgan yorug‘lik nuri uchun tegishli. t_t Frenelning qaytarish koeffitsiyenti kelayotgan yorug‘lik nuri uchun tegishli bo‘lib har ikki koeffitsiyent parallel yorug‘lik nuri uchun olingandir [12]. Frenel koeffitsiyenti yorug‘likni ikkinchi muhitda harakati eng qisqa vaqt davomida bo‘lganligini inobatga olib yorug‘likning sinish qonunidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosiladan kelib chiqgan. RT metodi uchun Sinelli qonunidan yorug‘likni ikki muhit chegarasidan sinishini inobatga olib quyidagi formula orqali aniqlaymiz.

$$\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \tag{3}$$

Bu yerda $sin\alpha$ tushayotgan yorug‘lik nurining sirt bilan perpendikulyar orqasidagi burchakdir, $sin\beta$ esa ikki muhit chegarasidagi singan burchakdir. Ushbu xolatlardan kelib chiqib, qaytagan yorug‘lik nuri uchun ham Snelli qonuni va o‘zgarmas qaytarish koeffitisenti R=1 dan foydalanildi. Bundan maqsad kumush nur qaytargichga tushayotgan nurni hammasini energiyasi o‘zgarmagan holda quyosh elementining ikki yuzasiga perpendikulyar yo‘naltirishdir.

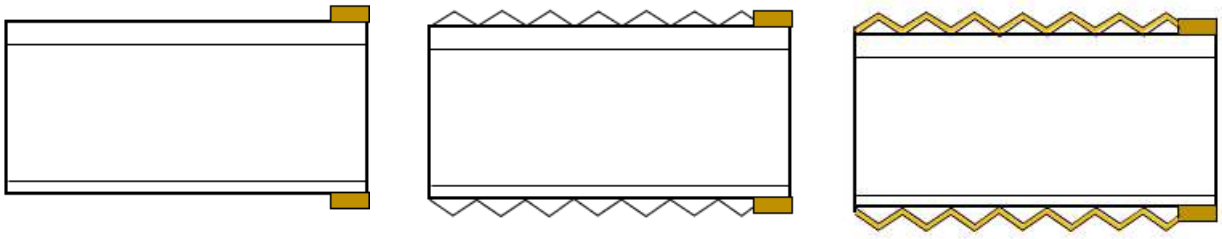
$$\begin{cases} r_t = \dfrac{n_1\cos\beta - n_2\cos\gamma}{n_1\cos\beta + n_2\cos\gamma} \\ t_t = \dfrac{2n_1\cos\beta}{n_1\cos\beta + n_2\cos\gamma} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_p = \dfrac{n_1\cos\gamma - n_2\cos\beta}{n_1\cos\gamma + n_2\cos\beta} \\ t_p = \dfrac{2n_1\cos\beta}{n_2\cos\beta + n_1\cos\gamma} \end{cases} \tag{4}$$

Ushbu formula ikki muhit chegarasiga tushgan, qaytgan va singan nurlarga tegishli bo‘lib 2-fomulaning burchaklarga bog‘liq bo‘lgan murakkab ko‘rinishidir. Yuqorida keltirilgan barcha qonun va formulalardan kelib chiqib hisoblash uchun to‘rlash quyidagicha bo‘ldi. Sonli metoddan foydalanib hisoblash uchun quyosh elementi to‘rlanishi shart, yani har bir kichik qismni alohida belgilab so‘ng natijalarni umumlashtirishdir. Ushbu tadqiqotda quyosh elementi *x* o‘q bo‘yicha eng kichik *L*/40 mkm dan eng katta *L*/20 mkm gacha *y* o‘q bo‘yicha *L*/40 mkm dan eng katta *L*/20 mkm o‘lchamda to‘rlandi. Chunki quyosh elementining model shakli eni bo‘yicha *L* mkm ni tashkil etadi. Quyosh elementida optik va elektrik xususiyatlarini hisoblash uchun ikki xil to‘r xosil qilindi. Lekin bu to‘rlarning o‘lchami kontakt va *p-n* yaqinida zichroq holda hosil qilindi, sababi ushbu sohalarda kechadigan fizik jarayonlarni yuqori aniqlikda natijalarni olishga imkon beradi.



4-rasm. Ikki tomonlama yorug‘likka sezgir quyosh elementining, old mesh qismini ko‘rinishi

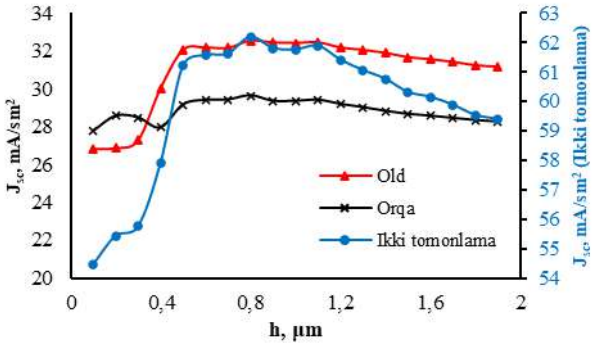
Quyosh elementining old nur yutuvchi qatlami va *p-n* o‘tish qismida tor zich holda olindi. Ushbu QE uchun orqa kontakt hamda old kontakt sohasi uchun ham zich to‘rlandi, uning baza qismiga ega *p-n* o‘tish dagi to‘rga nisbatan siyrak holda to‘rlandi. Quyida ikki tomonalama yorug‘likga sezgir quyosh elementining modellari keltirilgan. 5-Rasmda keltirilgan ikki tomonlama sezgir quyosh elementi uchun yorug‘likni old frontal qismidan, orqa qismidan hamda har ikki tomondan bir vaqtda nur ta’sir ettirilib natijalar olingan.



a) **b)** **c)**

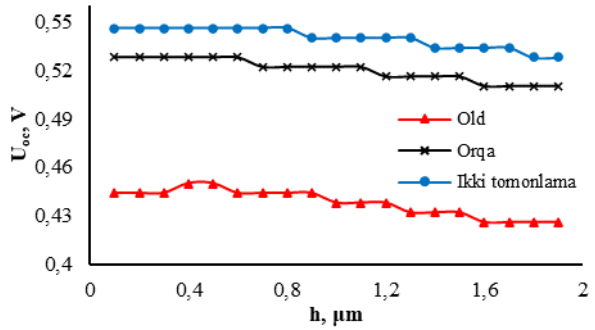
5-rasm. Ikki tomonlama sezgir a)planar, b)tekstura va c)tekstura va nur qaytarishga qarshi qatlam qoplangan quyosh elementining geometrik shakllari

Natijalar. Quyosh elementining qaytarish koeffitsiyentini kamaytirishning eng maqbul 2 ta uslubi mavjud: nur qaytarishga qarshi qatlamlar bilan qoplash va yuzasida teksturalar hosil qilish. Ushbu tadqiqot ishida kremniy asosli quyosh elementining oldi va orqa yuzasiga adabiyotlar tahliliga tayanib qalinligi 100 nm bo‘lgan SiO_2 bilan qoplandi. Oldi va orqa yuzadagi teksturaning kengligi o‘zgarishsiz 1 μm olindi va faqat balandligi 0.1 μm dan 1.9 μm gacha o‘zgartirildi. 6-Rasmda ikki tomonlama sezgir quyosh elementining qisqa tutashuv tokini piramida balandligiga bog‘liqligi tasvirlangan. Quyosh elementining ikkala tarafi teng yoritilgan holatda, piramida balandligi 0.1 μm dan 0.5 μm ga o‘zgarganda qisqa tutashuv toki keskin 6.75 mA/sm^2 ga ortgan. 0.5-0.8 μm balandlik orasida ozgina 0.97 mA/sm^2 ga ortgan va 0.8-1.9 μm balandlik orqalig‘ida esa 2.78 mA/sm^2 ga kamaygan. Faqat oldi yoritilganda, qisqa tutashuv toki 0.1-0.3 μm balandlik oralig‘ida 0.43 mA/sm^2, 0.3-0.5 μm oraliqda 4.76 mA/sm^2 va 0.5-0.8 μm oraliqda 0.49 mA/sm^2 ga ortgan. 0.8-1.9 μm oraliqda esa deyarli chiziqli 1.37 mA/sm^2 ga kamaygan. Tekstura balandligining turli oraliqlarida qisqa tutashuv tokini turli jadallik bilan o‘zgarishiga sabab piramida oraliqlarida nurning sinishlar sonini ortishidir. Faqat orqa yuza yoritilganda, oldi va ikkala taraf yoritilgandan farqli ravishda qisqa tutashuv tokini piramida balandligiga bog‘liqlik funskiyasida 2 ta ekstremum nuqtasi mavjudligi aniqlandi. Ya’ni piramida balandligi 0.1-0.2 μm oralig‘ida qisqa tutashuv toki 0.8 mA/sm^2 ga ortdi va 0.2-0.4 μm oraliqda 0.61 mA/sm^2. Shuningdek, oldi va ikkala taraf yoritilgan holat kabi, balandlikning 0.4-0.8 μm oralig‘ida 1.69 mA/sm^2 ga ortgan va 0.8-1.9 μm oralig‘da 0.31 mA/sm^2 ga kamaygan.



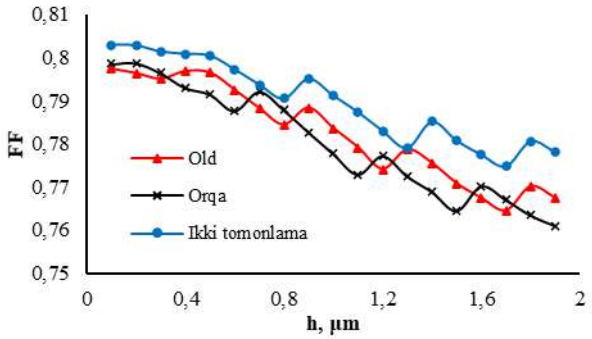
6-rasm. Oldi va orqa sohalari teksturalangan quyosh elementining oldi, orqa va ikki tomonlama teng yoritilgan holatdagi qisqa tutashuv tokini piramida balandligiga bog‘liqligi

6-rasmda tasvirlangan qisqa tutashuv tokini piramida balandligiga bog‘liqligiga ko‘ra, oldi, orqa va ikkala taraf yoritilgan holatlarning barchasida tekstura balandligining 0.8 μm qiymatida qisqa tutashuv toki maksimal qiymatga erishgan hamda ular mos ravishda 32.54 mA/sm^2, 29.64 mA/sm^2 va 62.18 mA/sm^2 ga teng. Guanning tadqiqotida, faqat oldi tarafi yoritilgan ikki tarafi teksturalangan kremniy asosli quyosh elementining qisqa tutashuv toki 37.71 mA/sm^2 ga teng bo‘lgan. Tekstura balandligi ortganda fotonlarning yutulish chuqurligi kamayadi bu quyosh elementining qaytarish koeffitsiyentini kamayishiga va hajmda ko‘proq fotonlar yutulishiga sabab bo‘ladi. Shuning uchun, teksturaning balandligi ortganda qisqa tutashuv toki ortdi. Teksturaning 0.8 μm balandligini yutulish koeffitsiyenti va yuza rekombinatsiyasini tekstura balandligiga bog‘liq ravishda o‘zgarishini tenglashish kritik qiymati sifatida qarash mumkin. 7-Rasmda oldi, orqa va ikki tomonlama yoritilgan holatlardagi quyosh elementining salt ishlash kuchlanishini tekstura balandligiga bog‘liqligi tasvirlangan. Orqa va ikki taraf yoritilganda salt ishlash kuchlanishi deyarli bir xil o‘zgargan ya’ni sakrab kamayib borgan. Lekin faqat oldi yoritilgan holatda salt ishlash kuchlanishi balandlikning 0.4 μm qiymatida maksimal qiymatga erishgan.



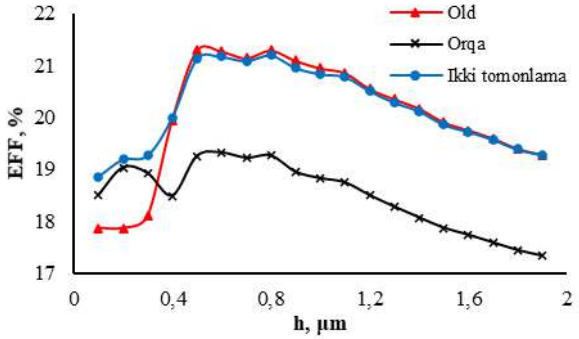
7-rasm. Oldi va orqa sohalari teksturalangan quyosh elementining oldi, orqa va ikki tomondan teng yoritilgan holatdagi salt ishlash kuchlanishini piramida balandligiga bog‘liqligi

Salt ishlash kuchlanishi asosan *p-n* va material xususiyatiga bog‘liq, shuning shuning uchun tekstura balandligi ortganda salt ishlash kuchlanishi deyarli oz miqdorga o‘zgargan. Zaryad tashuvchilar konsetratsiyasini ortganda kremniyning ta’qiqlangan zona kengligi torayadi, shuning uchun salt ishlash kuchlanishi ham kamaygan. 7-Rasmda kremniy asosli quyosh elementining oldi, orqa va ikki tomonlama teng yoritilgan xolatlardagi to‘ldirish koeffitsiyentini tekstura balandligiga bog‘liqligi tasvirlangan. To‘ldirish koeffitsiyenti ham uchala holat uchun tekstura balandligiga bog‘liq ravishda kamaygan. Tekstura balandligi ortganda quyosh elementining aktiv yuzasi ortadi. Bu esa yuza rekombinatsiyasi miqdorini ortishiga sabab bo‘ladi. To‘ldirish koeffitsiyenti yuza sifatini ko‘rsatgani uchun tekstura balandligi ortganda kamaygan.



8-rasm. Oldi va orqa sohalari teksturalangan quyosh elementining oldi, orqa va ikkalovi teng yoritilgan holatdagi to‘ldirish koeffitsiyentini piramida balandligiga bog‘liqligi

Quyosh elementining umumiy sifat jihatdan baholash uchun asosan foyali ish koeffitsiyentidan foydalaniladi. 6-rasmda quyosh elementining foydali ish koeffitsiyentini tekstura balandligiga bog‘liqligi tasvirlangan. Yorug‘lik intensivligini o‘zgarmas kattalik deb qabul qilsak, foydali ish koeffitsiyenti faqat tok zichligi va kuchlanishga bog‘liq bo‘ladi. Salt ishlash kuchlanishini (8-Rasm) tekstura balandligiga bog‘liq ravishda o‘zgarish jadalligi qisa tutashuv tok zichligiga (8-Rasm) qaraganda past bo‘lgani uchun foydali ish koeffitsiyenti tekstura balandligiga bog‘liqlik funksiyasi sifat jihatdan qisqa tutashuv tok zichligiga juda o‘xshaydi. Foydali ish koeffitsiyenti nuqtai nazaridan ham teksturaning optimal balandiligi 0.8 μm ligi aniqlandi. Teksturani 2D kesimini teng tomonlama uchuburchak va asosining o‘zgarmas 1 μm deb qabul qilganimizni hisobga olsak, optimal teksturaning asosidagi burchak 58^0 ga teng bo‘ladi. Oldingi tadqiqotlarimizda standart kremniy asosli quyosh elementining yuzasida hosil qilingan teksturaning asosidagi burchagini optimal qiymati 70.4^0 ga tengligi aniqlangan. Oldingi tadqiqotda oddiy bir tomonlama sezgir quyosh elementi o‘rganilgan bo‘lsa, ushbu tadqiqotda oldi va orqa yuzasiga SiO_2 qoplangan ikki tomonlama sezgir quyosh elementi tadqiq qilindi. Demak, SiO_2 teksturaning optimal qiymatiga ta’sir qilgan. Baker-Finchning tajribasida, (111) kremniy asosidagi quyosh elementining yuzasi kislota bilan ishlov berilganda asosidagi burchagi $50\text{-}52^0$ bo‘lgan teksturalar hosil bo‘lishi aniqlangan. Demak, ushbu biz taklif qilgan strukturaning tajribada ham hosil qilish mumkin.



9-rasm. Oldi va orqa sohalari teksturalangan quyosh elementining oldi, orqa va ikki tomonlama teng yoritilgan holatdagi foydali ish koeffitsiyentini piramida balandligiga bog‘liqligi

Ushbu 9-rasmdan ham malum bo‘ladiki ikki tomonlama sezgir kremniy asosli quyosh elementida hosil qilingan piramida balandligi 0.8 μm qiymati eng maqbul qiymat ekanligi aniqlangan. Bunda uning foydali ish koeffitsiyenti qiymati 21.19 % ni tashkil etganligi aniqlangan.

Xulosalar yuqoridagi aniqlangan ma’lumotlardan kelib chiqib shuni ma’lum qilamizki, ikki tomonlama sezgir quyosh elementi uchun turli yorilish sharoitlari hosil qilindi. Hosil qilingan yoritilish sharoitiga ko‘ra sirt qatlamlarida teksturaning optimal balandligi aniqlandi. Optimal balandlik sifatida optik qatlamga ega bo‘lgan ikki tomonlama sezgir quyosh elementi uchun 0.8 mkm ni tashkil etib asos burchagi 58^0 ekanligi aniqlangan. ushbu optimal o‘lchamdagi teksturaning balandligini saqlagan holda uning fotoelektrik kattaliklari aniqlandi. Yoritilish old, orqa va har ikki tomondan teng bir vaqtda yoritilish natijasida 32.54 mA/sm^2, 29.64 mA/sm^2 va 62.18 mA/sm^2 ga teng tok zichligiga erishildi.

ADABIYOTLAR:

1. N. Franco, M. Jorizzo. Efficiency, Energy Saving, and Rational Use of Energy: Different Terms for Different Policies.

2. J. Paraszczak, K. Fytas. Renewable energy sources – a promising opportunity for remote mine sites. International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ'12) Santiago de Compostela (Spain), 28th to 30th March, 2012.

3. J. Hake, W. Fischer, S. Venghaus, Ch. Weckenbrock. The German Energiewende e History and status quo. Energy 92 (2015), 532-546.

4. D. Ferrar. Solar thermal and electricity generation. Proceedings of the Royal Society of Victoria January 2014. DOI: 10.1071/RS14030.

5. F. Magdy, B. Mohamed, R. Hamdy, S. Nasser. Solar thermal panels for generating electricity. September 2020.

6. The History of Solar Cell. Energy Efficiency and Renewable Energy. http://www.californiasolarcenter.org/history_pv.html.

7. P, Würfel, W, Uli. Physics of Solar Cells. From Basic Principles to Advanced Concepts Third Edition. ISBN: 978-3-527-41312-6, ISBN: 978-3-527-41311-9.

8. A Jehad, I Hamammu. Calculating the Efficiency of Silicon Solar Cell. 2nd International Students Science Congress 4-5 May 2018, Izmir – Turkey.

9. A Darwish, S Rana, S Abdelmohsen, Mohamed Ahmed, M. Megeed. Solar cells: Types, Modules, and Applications. Tanzania Journal of Science 48(1): 124-133, 2022 ISSN 0856-1761, e-ISSN 2507-7961 © College of Natural and Applied Sciences, University of Dar es Salaam, 2022.

10. M.K. Baxodirxonov, N. F. Zikrillayev, X. M. Iliyev. "Yarimo'tkazgichlar fizikasi" Tafakkur nashriyoti Toshkent-2020.

11.X M Madaminov, M Xudoyberdiyeva, S Z Zaynobiddinov, V Abduazimov. "Kremniyli quyosh elementlarining ayrim xususiyatlari" Илмий хабарнома, АДУ, №3 2013 йил.

12.A Richter, M Hermle, W Stefan. "Reassessment of the Limiting Efficiency for Crystalline Silicon Solar Cells" IEEE Journal of Photovoltaics, Vol. 3, No. 4, October 2013.

13.A. LUQUE, A. CUEVAS and J. M. RUIZ. Double-Sided n^+-p-n^+ solar cell for Bifacial concentration. Solar Cells, 2 (1980) 151 – 166

14. G Aydan, G Aritra. A review of bifacial solar photovoltaic applications. Energy 2023, 17(6): 704–726 https://doi.org/10.1007/s11708-023-0903-7

15. J. Frank, M. Rüdiger, S. Fischer, J.C. Goldschmidt, M. Hermle. Optical Simulation of Bifacial Solar Cells. Energy Procedia December 2012. DOI: 10.1016/j.egypro.2012.07.067.

16. Bo Sun a, Lin Lu a, Jianheng Chen a, Tao Ma, Yanping Yuan. Full-spectrum radiative cooling for enhanced thermal and electrical performance of bifacial solar photovoltaic modules: A nationwide quantitative analysis. Applied Energy 362 (2024) 123037.

17. R Aliyev, O Bozarov, D Kodirov, J Kaxxorov, D Xonbutayeva. Study on photovoltaic characteristics of bifacial solar panels. E3S Web of Conferences 497 ICECAE 2024, 01016 (2024).

UO‘K 539.3

QOVUSHQOQ-ELASTIK QATLAMLI MUHITLARDA ERKIN TO‘LQINLARNING TARQALISHI

Saipnazarov Jonibek Muxammadiyevich,
Qarshi davlat texnika universiteti dotsenti,
fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)
https://orcid.org/0009-0005-6796-233X
jonibeksaipnazarov@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada dissipativ (so‘nuvchi) bir jinsli bo‘lmagan jismlarda to‘lqinlarning tarqalish masalasi integro-differensial tenglamalar yordamida ifodalangan. Bunday muhitlarda to‘lqinlarning tarqalish masalasi Lame va Navye tenglamalari asosida, ularni qovushqoq-elastik (ichki ishqalanish)ni hisobga olgan holda kompleks koeffitsiyentli tenglamalarga keltirish orqali yechiladi.*

Masalani yechish jarayonida dispersiya tenglamalari hosil qilindi. Rjanitsin–Koltunov yadrosining parametrlari ushbu tizim uchun ham qo‘llanilishi mumkinligi aniqlangan. Dissipativ no‘xomogen jismlarda to‘lqinlar tarqalishi jarayonida chastotaning haqiqiy va mavhum qismlari topilgan. Shuningdek, dissipativ no‘xomogen muhitlarda to‘lqinlarning tarqalishi nomonoton (bir maromda bo‘lmagan) bog‘liqliklarga ega ekani aniqlandi. Faza tezligi va to‘lqinlarning so‘nish tezligi ham dissipativ no‘xomogen muhitlarda nomonoton xususiyatga ega ekanligi belgilandi.

Kalit so‘zlar: *qovushqoq-elastik yarim fazo, qatlam, harakat tenglamasi, faza tezligi, dissipativ, nomonoton, Rjanitsin-Koltunov, Puasson koeffitsiyenti, qattiq kontakt, tenzor, dispersiya, chastota, amplitude, Myuller, Gauss, faza,ishqalanish.*

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВОБОДНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Аннотация. *В статье рассматривается задача распространения волн в диссипативных (затухающих) неоднородных телах, описываемая с помощью интегро-дифференциальных уравнений. Задача распространения волн в таких средах решается на основе уравнений Ламе и Навье путём их приведения к уравнениям с комплексными коэффициентами с учётом вязкоупругости (внутреннего трения).*

В процессе решения задачи были получены уравнения дисперсии. Установлено, что параметры ядра Ржаницына-Колтунова могут быть применены и для этой системы. Найдены действительная и мнимая части частоты в процессе распространения волн в диссипативных неоднородных телах. Также установлено, что распространение волн в диссипативных неоднородных средах имеет немонотонные (неравномерные) зависимости. Определено, что фазовая скорость и скорость затухания волн также обладают немонотонными характеристиками в диссипативных неоднородных средах.

Ключевые слова: *вязкоупругое полупространство, слой, уравнение движения, фазовая скорость, диссипативный, немонотонный, Ржаницын-Колтунов, коэффициент Пуассона, жёсткий контакт, тензор, дисперсия, частота, амплитуда, Мюллер, Гаусс, фаза, трение.*

PROPAGATION OF FREE WAVES IN VISCOELASTIC LAYERED MEDIA

Abstract. *The article describes the problem of wave propagation in dissipative inhomogeneous bodies using integro-differential equations. The wave propagation problem in such media is solved based on the Lamé and Navier equations, reducing them to equations with complex coefficients while accounting for viscoelasticity (internal friction).*

In the process of solving the problem, dispersion equations were derived. It has been established that the parameters of the Rzhanitsyn-Koltunov kernel can also be applied to this system. The real and imaginary parts of the frequency during wave propagation in dissipative inhomogeneous bodies have been determined. It was also found that the propagation of waves in dissipative inhomogeneous media exhibits non-monotonic (non-uniform) dependencies. It was established that the phase velocity and wave attenuation rate also have non-monotonic characteristics in dissipative inhomogeneous media.

Keywords: *viscoelastic half-space, layer, equation of motion, phase velocity, dissipative, non-*

monotonic, Rzhanitsyn-Koltunov, Poisson's ratio, solid contact, tensor, dispersion, frequency, amplitude, Müller, Gauss, phase, friction.

Kirish. Dinamik yuklama ostida ishlovchi ko‘plab qurilish va muhandislik inshootlari turli qovushqoq-elastik xossalarga ega bo‘lgan deformatsiyalanuvchi jismlardan tashkil topgan[1,2]. Bunday muhitlarda to‘lqin jarayonlarini o‘rganish, ayniqsa, signalni qayta ishlash, mexanik rezonatorlar va filtrlarni yaratishda muhim ahamiyat kasb etadi[3].

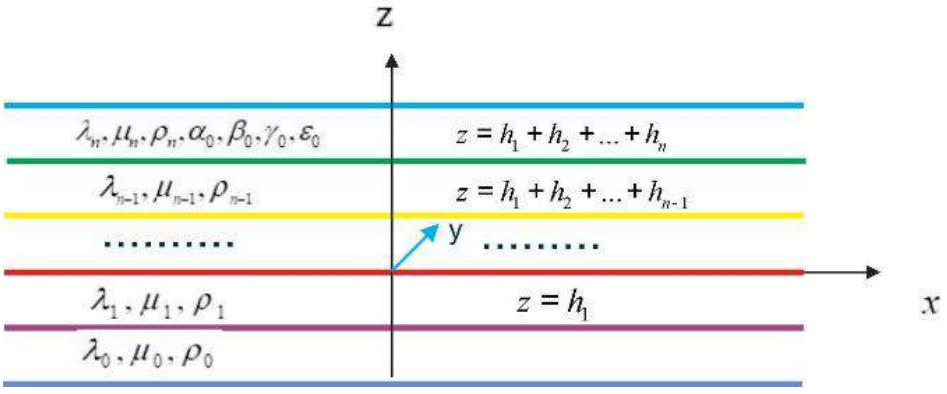
Elastik to‘lqin energiyasining issiqlikka aylanish mexanizmlari hozirgacha to‘liq aniqlanmagan. Energiyaning yo‘qotilish mexanizmlarini izohlovchi turli nazariyalar mavjud bo‘lsa-da[4,5], ularning birortasi ham barcha tajriba natijalarini to‘liq qamrab olmaydi. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, energiya yo‘qotilishining eng asosiy sabablari - sirpanish shaklidagi ichki ishqalanish hamda g‘ovak suyuqliklarda kechadigan viskoz yo‘qotishlardir. Ayniqsa, ikkinchi mexanizm yuqori o‘tkazuvchan jinslarda sezilarli darajada namoyon bo‘ladi.

Shuningdek, issiqlik o‘tkazuvchanligi, pyezovay va termoelektrik effektlar, shuningdek, yangi sirtlarning hosil bo‘lishi bilan bog‘liq energiya sarfi kabi ikkilamchi jarayonlar ham mavjud. Biroq bu omillar faqat manba yaqinida sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Shu boisdan, deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarda dissipativ notekis (bir jinsli bo‘lmagan) qatlamli muhitlarda to‘lqin maydonlarini hisoblash uchun yagona nazariy-metodik yondashuv va hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish bugungi kunda mexanikaning dolzarb ilmiy masalalaridan biri hisoblanadi[6,7].

Masalaning qo‘yilishi. Keling, koordinata boshida joylashgan to‘g‘ri burchakli (x, y, z) sistemada, OZ o‘qi bo‘ylab bir qator parallel tekisliklar berilgan deb faraz qilamiz (1-rasm):

$Z=0,\ Z=h_1,\ Z=h_1+h_2+.....\quad Z=h_1+h_2+...+h_n$

Tekislik $Z=h_1+h_2+...+h_n$ ($n=2$ bo‘lganda) $n-m$ gorizont deb ataladi. Ushbu tekisliklar orasidagi sohalar izotrop elastik muhit bilan to‘ldirilgan bo‘lib, ular parallel qatlamlarni hosil qiladi. Masalan, $0<Z<h$ intervalidagi qatlam nolchi qatlam deb yuritiladi, u quyidagi doimiylar bilan tavsiflanadi: λ_0, μ_0, ρ_0. Shuningdek, $h_1+h_2+...+h_n<z<h_1+h_2+...+h_n+h_{n+1}$ intervalidagi muhit n–chi va $n+1$-qatlamlar deb ataladi va u doimiylar bilan tavsiflanadi: Har doim qo‘shni qatlamlar bir-biridan kamida bitta doimiy qiymat — λ, μ yoki ρ bilan farq qiladi, deb hisoblanadi. Tavsiflangan jarayonlarni nazariy o‘rganishda, har bir qatlam ichida to‘lqinlarning tarqalishi odatdagi elastiklik nazariyasi tenglamalari bilan ifodalanadi, deb qabul qilamiz. Qo‘shni qatlamlar chegaralarida esa shunday shartlar qo‘yiladiki, bu joylarda elastik siljishlar vektori komponentalari va kuchlanish tenzori elementlari uzluksiz bo‘lib qoladi. Bunday kontakt turi “qattiq kontakt” deb ataladi [8]. Ushbu maqolada dissipativ, notekis, ikki qatlamli yassi konstruksiyalarning dinamikasi tadqiq qilingan.



1-rasm. Konstruktsiya sxemasi: yarim fazodagi jism

Ichki ishqalanishni, ya’ni struktura materiallarida energiyaning so‘nishi tufayli yuzaga keladigan dissipatsiyani hisobga olish ancha murakkab masaladir. Ko‘p qatlamli strukturalarning yumshoq qatlamlari, qoida tariqasida, rivojlangan reologik xossalarga ega bo‘lgan materiallardan iborat bo‘ladi. Shu sababli, energiyaning sochilishini hisobga olishda avvalo yumshoq qatlamlar e’tiborga olinadi, chunki dissipatsiya aynan ularni deformatsiya qilish jarayonida yaqqolroq namoyon bo‘ladi. Mexanik tizimlarda, agar ularning elementlari bir xil qovushqoq-elastik xossalarga ega bo‘lsa, ular dissipativ bir jinsli muhitlar (dissipative

homogeneous) deb ataladi. Agar esa qatlamlar turlicha reologik parametrlar bilan tavsiflansa, bunday tizimlar dissipativ notekis muhitlar (dissipative heterogeneous) deb ataladi.

Massaviy kuchlar hisobga olinmagan holda deformatsiyalangan qatlamning harakat tenglamalari quyidagi ko‘rinishga ega [9]:

$$\tilde{\mu}_j \nabla^2 \vec{u} + (\tilde{\lambda}_j + \tilde{\mu}_j) graddiv\vec{u} = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \text{ , (j =1, 2, 3..)} \qquad (1)$$

bu yerda: $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ - muhit nuqtalarining siljishlar vektori, ρ_j - siljish komponentalari, u_i - jismning zichligi, v_j - Puasson koeffitsiyenti.

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{v_j \tilde{E}_j}{(1+v_j)(1-2v_j)}; \quad \tilde{\mu}_j = \frac{v_j \tilde{E}_j}{2(1+v_j)}$$

$\tilde{E}$ - modullarining aniq ko‘rinishlari [8] manbalarda keltirilgan.

$$\tilde{E}_j \phi(t) = E_{0j} \left[\phi(t) - \int_0^t R_{Ej}(t-\tau)\phi(t)\, d\tau \right] \qquad (2)$$

$\phi(t)$ - ixtiyoriy vaqt funksiyasi; $R_{Ej}(t-\tau)$ - relaksatsiya yadrosi; E_{01} - elastiklikning oniy moduli.

(2) -tenglamadagi integral hadlar kichik deb faraz qilinadi, shunda funksiyalar $\phi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$, bu yerda $\psi(t)$ - sekin o‘zgaruvchi vaqt funksiyasi, ω_R - haqiqiy doimiy kattalik bo‘ladi. Keyingi bosqichda, “muzlatish” (freezing) protsedurasini [9] dagi kabi qo‘llab, quyidagi taxminiy ifodalarni keltirib chiqaramiz:

$$\bar{E}_j \phi = E_{0j} \left[1 - \Gamma_j^C(\omega_R) - i\Gamma_j^S(\omega_R) \right] \phi$$

bu yerda $\Gamma_j{}^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_j(\tau) \cos\omega_R \tau\, d\tau$, $\Gamma_j{}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_j(\tau) \sin\omega_R \tau\, d\tau$, - mos ravishda, materialning relaksatsiya yadrosining kosinus va sinus Furye tasvirlari hisoblanadi. Qovushqoq-elastik material misolida biz uchta parametrli relaksatsiya yadrosini olamiz: $R_j(t) = A_j e^{-\beta_j t} / t^{1-\alpha_j}$ .Ta’sir funksiyasi $R_j(t-\tau)$ uchun inertlik, uzluksizlik va boshqa odatdagi talablar ($t = \tau$) bilan bir qatorda quyidagi belgilar, aniqlik va monotonlik shartlari qo‘yiladi:

$$R > 0, \ \frac{dR(t)}{dt} \le 0, \ 0 < \int_0^\infty R(t)\, dt < 1$$

$\vec{u}$ - j-muhit (qatlam)ning siljish (deformatsiya) vektori.

Ikki jism chegarasida quyidagi ikki turdagi chegaraviy shartlarni aniqlash mumkin:

1. Agar sirt qattiq kontakt holatida bo‘lsa, unda stress tenzori komponentlari va siljish vektorining uzluksizlik sharti bajariladi, ya’ni:

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}; \ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)};$$
$$u_x^{(1)} = u_x^{(2)}; \ u_y^{(1)} = u_y^{(2)}. \qquad (2,a)$$

Agar sirtlar orasida ishqalanish bo‘lmasa,

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}; \ \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0; \quad u_y^{(1)} = u_y^{(2)}; \qquad (2,b)$$

2. Erkin sirtida kuchlanishdan holi bo‘lish sharti qo‘yiladi, ya’ni - sirtga hech qanday tashqi kuch yoki bosim ta’sir etmaydi.

$$\sigma_{yy}^{(1)} = 0; \ \sigma_{yx}^{(1)} = 0, \qquad (2,c)$$

bu yerda

$$\sigma_{xx}^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_j}{\partial x}; \ \sigma_{xy}^{(j)} = \mu_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x} \right).$$

$$\sigma_{yy}^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y}; \ \theta_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y}$$

Materiallar va usullar. Endi (1)–(2) differensial tenglamaning bir qatlam uchun yechimini ko‘rib chiqamiz. Siljishlar (displacements) uchun harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{\mu}_n\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2{}_n}{\partial y^2}\right)+(\bar{\lambda}_n+\bar{\mu}_n)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\, u_n}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta_n}{\partial y}\right)-\rho_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}=0;$$
$$\bar{\mu}_n\left(\frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial x^2}+\frac{\partial \vartheta^2{}_n}{\partial y^2}\right)+(\bar{\lambda}_n+\bar{\mu}_n)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\, u_n}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta_n}{\partial y}\right)-\rho_n\frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial t^2}=0; \quad (3)$$

bu yerda ρ_n - materialning zichligi. Masala yechimi quyidagi shaklda qabul qilinadi:

$$u_n=U_n(y)e^{k(x-ct)};\quad \vartheta_n=V_n(y)e^{k(x-ct)};\qquad n=1,2,.....N \quad (4)$$

bu yerda $U_n(y)$ va $V_n(y)$ - amplituda kompleks vektor-funksiyalar; γ - haqiqiy son; $C=C_R+iC_i$ - kompleks faza tezligi; ω — kompleks chastota. Ularning fizik ma'nosini aniqlashtirish uchun ikki holni ko'rib chiqamiz:

1) Agar $\gamma=\gamma_R;\ C=C_R+iC_I$, bo'lsa, unda (4)-tenglama sinusoidal shaklga ega bo'ladi, ya'ni x bo'yicha tebranishlar sinusoidal xarakterda, amplituda esa vaqt o'tishi bilan kamayadi.

2) Agar $\gamma=\gamma_R+i\gamma_I;\ C=C_R$ bo'lsa, unda har bir nuqtadagi tebranishlar vaqt bo'yicha barqaror, lekin fazoda kamayuvchi bo'ladi.

Har ikkala holatda ham, mavhum qismlar γ_I yoki C_I dissipativ jarayonlarning intensivligini tavsiflaydi. (4)-tenglamani (3)-tenglamaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz [28,29]:

$$\bar{\mu}_n\left(U_n''-k^2U_n\right)+\left(\bar{\lambda}_n+\bar{\mu}_n\right)ik\left(ikU_n+V_n'\right)+\rho_nk^2C^2U_n=0; \quad (5)$$

Shunday qilib, bizda (5)-tenglamalar — ikki soha uchun ikkinchi tartibli tenglamalar mavjud. Masalani bevosita yechish uchun bu tenglamalar to'rtinchi tartibli tenglamaga keltiriladi. Barcha dalillar qatlam uchun berilgan.

Biz (5)-tizimning xususiy yechimini quyidagi shaklda topamiz:

$$\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_n\\B_n\end{pmatrix}e^{r_ny},$$

bu yerda r_n - kontakt nuqtasi. A_n va B_n ga nisbatan tuzilgan gomogen algebraik tizimning nooddiy yechimlari mavjud bo'lishi uchun, uning determinantining nolga teng bo'lishi zarur:

$$\begin{vmatrix}\bar{C}_{\mathrm{Tn}}^2(r^2{}_n-k^2)-(\bar{C}_{\mathrm{Ln}}^2-\bar{C}_{\mathrm{Tn}}^2)k^2+\bar{C}^2k^2 & i\left(\bar{C}_{\mathrm{Ln}}^2-\bar{C}_{\mathrm{Tn}}^2\right)kr_n\\ \mathrm{i}(\bar{C}_{\mathrm{Ln}}^2-\bar{C}_{\mathrm{TLn}}^2)kr_n & \bar{C}_{\mathrm{TLn}}^2(r^2{}_n-k^2)+\left(\bar{C}_{\mathrm{Ln}}^2-\bar{C}_{\mathrm{Tn}}^2\right)r^2{}_n+C^2k^2\end{vmatrix}=0 \quad (6)$$

bu yerda $\bar{C}_{Ln}^2=(\bar{\lambda}_n+2\bar{\mu}_n)/\rho_n$. $\bar{C}_{Tn}^2=\bar{\mu}_n/\rho_n$, $\eta=0$ holatda bu qiymatlar mos ravishda siqilish va kesilish to'lqinlarining tezliklarini ifodalaydi (elastik muhit uchun) [4]. (6)-tenglama to'rt ildizga ega bo'lishi mumkin:

$$(r_n)_{1,3}=\pm k\sqrt{1-C^2/\bar{C}_{Ln}^2};\ (r_n)_{3,4}=\pm k\sqrt{1-C^2/\bar{C}_{Tn}^2};\ n=0,1;\quad i=1.....,4.$$

Natijada, biz quyidagi shakldagi to'rt xususiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4}C_{ni}\begin{pmatrix}A_{ni}\\B_{ni}\end{pmatrix}e^{(r_n)i^y},\ n=0,1. \quad (7)$$

(7)-tenglamadagi $(r_n)_i$ qiymatlarini qo'yib, A_{ni} , B_{ni} larni $r_n=(r_n)_i$ nuqtalarda topamiz. Siljishlar uchun ifodalar quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix}U_1\\V_1\end{pmatrix}=C_{11}\begin{pmatrix}ik\\-k\bar{q}_1\end{pmatrix}e^{-k\bar{q}_1y}+C_{12}\begin{pmatrix}ik\\k\bar{q}_1\end{pmatrix}e^{k\bar{q}_1y}+C_{13}\begin{pmatrix}-k\bar{S}_1\\-ik\end{pmatrix}e^{-ks_{11}y}+C_{14}\begin{pmatrix}-k\bar{S}_1\\-ik\end{pmatrix}e^{+ks_{11}y};$$

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=C_{22}\begin{pmatrix}ik\\-k\bar{q}_1\end{pmatrix}e^{k\bar{q}_1y}+C_{24}\begin{pmatrix}k\bar{s}\\-ik\end{pmatrix}e^{k\bar{s}y}.$$

Shunday qilib, ham qattiq, ham sirpanadigan kontaktlar uchun biz olti chegara shartlari to'plamini olamiz, bu esa olti noma'lum $C_{11},C_{12},C_{13},C_{14},C_{22},C_{24}$ bilan olti bir jinsli tenglamalar sistemasiga olib keladi. Bunday tenglamalar sistemasining no-trivial (nolga teng bo'lmagan) yechimi mavjud bo'lishi uchun,

koeffitsiyentlar determinantining qiymati nolga teng bo‘lishi kerak. So‘nggi tenglama esa dissipativ tizimlar uchun dispersiya tenglamasini beradi.

bu yerda

$\bar{S}_n = (1 - C^2 / \bar{C}_n^2)^{1/2}; \quad \bar{q}_n = (1 - C^2 / \bar{C}_{Ln}^2), \quad n = 0,1$

Misol sifatida, yarim fazoda joylashgan qovushqoq-elastik qatlamda tabiiy to‘lqinlarning tarqalish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Natijalar va muhokama.

1.Qattiq kontakt.

Dispersiya tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} \left(1+\bar{S}_1^2\right) e^{-\bar{\xi}q_1} & \left(1+\bar{S}_1^2\right) e^{\bar{\xi}q_1} & -2e^{\bar{\xi}q_1} & \ldots & \ldots & 0 & \ldots 0 \\ -2\bar{q}_1^{\xi\dot{q}_1} & \ldots & 2\bar{q}_1^{\xi\dot{q}_1} & \ldots & \left(\bar{s}_1+\frac{1}{\bar{s}_1}\right)e^{-\bar{\xi}q_1} & \left(\bar{s}_1+\frac{1}{\bar{s}_1}\right)e^{\bar{\xi}q_1} & \ldots 0 \\ \left(1+S_1^2\right) e^{\bar{\xi}q_1} & \left(1+\bar{S}_1^2\right) e^{-\bar{\xi}q_1} & -2e^{\xi\bar{S}_1} & \ldots & \ldots & (1+s^2)\gamma_1 & -2/\gamma_1 \\ -2\bar{q}_1^{\xi\dot{q}_1} & \ldots & 2\bar{q}_1^{\xi\dot{q}_1} & \ldots & \left(\bar{s}_1+\frac{1}{\bar{s}_1}\right)e^{\bar{\xi}q_1} & \left(\bar{s}_1+\frac{1}{\bar{s}_1}\right)e^{-\bar{\xi}q_1} & \frac{2\bar{q}_1}{\gamma_1} \left(\bar{s}+\frac{1}{\bar{s}}\right)/\gamma \\ e^{\xi\bar{q}_1} & \ldots & e^{\xi\bar{q}_1} & \ldots & e^{\xi\bar{q}_1} & \ldots & -1 \quad -1 \\ \bar{q}e^{\xi\bar{q}_1} & \ldots & \bar{q}_1 e^{-\xi\bar{q}_1} & \ldots & -\frac{1}{\bar{s}}e^{\xi\bar{s}} & -\frac{1}{\bar{s}}e^{\xi\bar{s}} & -\bar{q} \quad \frac{1}{s} \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Bu yerda ζ — o'lchamsiz to‘lqin soni $\zeta = kh$, $\gamma_1 = \bar{\mu}_l / \bar{\mu}$ or $\lambda + 2\mu = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}$. Relaksatsiya yadrosi qovushqoq-elastik materialning, uch parametrli yadrosini olamiz $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$ Rjanitsin-Koltunova [9] ko'rsatgan, bunda A, α, β - materiallarning parametrlaridir [9]. Quyidagi parametrlarni olamiz: $A = 0,048; \quad \beta = 0,05; \quad \alpha = 0,1$. Oldin ta’riflangan elastik modulus uchun murakkab ifodani ishlatamiz.

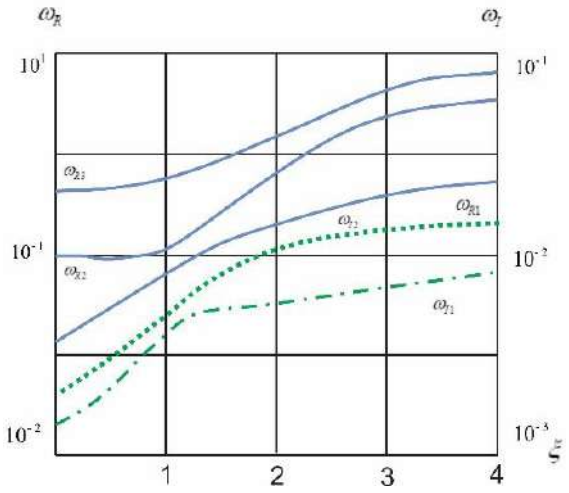
Chastota tenglamasining ildizlari Myuller usuli yordamida topiladi. Har bir iteratsiyada Myuller usulining har bir bosqichida asosiy elementni ajratish orqali Gauss usuli qo‘llaniladi. Shunday qilib, (8)-tenglamani yechishda determinantni ochish zarurati tug‘ilmaydi. Dastlabki yaqinlashuv sifatida biz elastik tizimdagi to‘lqinlarning faza tezliklarini tanlaymiz. Erkin to‘lqinlar uchun $R_j = 0$ da faza tezliklari va to‘lqin soni haqiqiy kattaliklar bo‘ladi. Hisob-kitoblarda quyidagi parametrlar qiymatlari qabul qilinadi:

$\theta = r_1 / r_2 = 0,75; b = 10^{-4}; \; n = 1$

Keling, dissipativ tizimning ikki variantini ko‘rib chiqamiz. Birinchi variantda, dissipativ tizim tuzilma jihatidan bir jinsli (ya’ni, butun tizim bo‘ylab bir xil xossalarga ega) hisoblanadi. To‘lqin soni ξ 0 dan 3 gacha o‘zgaradi. Hisoblash natijalari 2a-rasmda keltirilgan. Chastotalar va so‘nish koeffitsiyentlarining o‘lchovsiz to‘lqin soni ξ ga bog‘liqligi monoton xarakterga ega bo‘lib, bu bog‘liqlikning shakli chastota va so‘nish koeffitsiyentlari uchun bir xil chiqdi. Ikkinchi variantda, dissipativ tizim tuzilma jihatidan notekis bo‘lib, ko‘rib chiqilayotgan yarim fazo (8)-tenglama hamda elastiklik parametrlari avvalgi holatda qabul qilingan qiymatlar bilan mos keladi. Hisoblash natijalari [4,6]da keltirilgan. Chastotalarning ξ ga bog‘liqligi bir jinsli tizim uchun bo‘lgani kabi – mos keluvchi egri chiziqlar 5% aniqlikkacha bir-biriga to‘g‘ri keladi. Ammo so‘nish koeffitsiyentlarining ξ ga bog‘liqligi monoton emas. Alohida e’tiborga molik jihat - berilgan so‘nish koeffitsiyenti uchun ξ ning minimal qiymatini aniqlashdir.

$$\delta = min\left(-\omega_{I\,k}\right), \; k = 1,2,\ldots..K \qquad (9)$$

Bu yerda δ - tizimning so‘nish xossalarini aniqlovchi koeffitsiyent bo‘lib, uni global so‘nish koeffitsiyenti deb ataymiz.



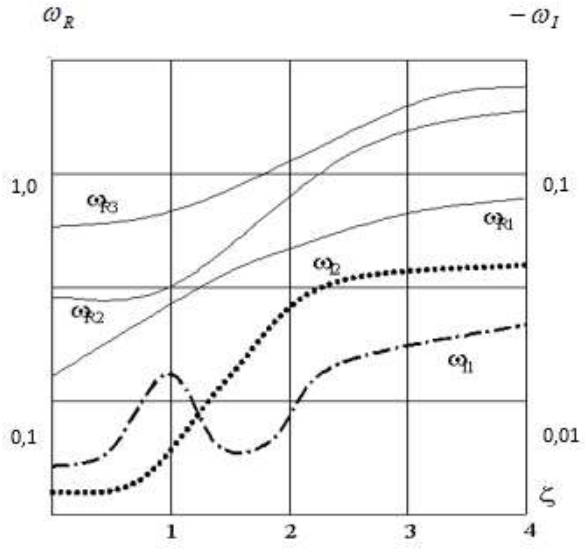
2a-rasm. To‘lqin soniga nisbatan kompleks xos chastotalarning o‘zgarishi.

a) Dissipativ jihatdan bir jinsli mexanik tizim.

Bir jinsli tizim uchun δ koeffitsiyenti to‘liq ravishda birinchi kompleks chastota modulining mavhum (imaginariya) qismi bilan aniqlanadi. Notekis tizim uchun esa δ koeffitsiyenti sifatida birinchi va ikkinchi chastotalarning imaginariya qismlari ularning qiymatlariga bog‘liq holda funktsional rol o‘ynashi mumkin. “Rollar almashinuvi” esa xarakterli ξ qiymatida yuz beradi - bu qiymatda birinchi va ikkinchi chastotalarning haqiqiy qismlari bir-biriga eng yaqin bo‘ladi. Ko‘rsatilgan xarakterli qiymatda δ koeffitsiyenti aniq ifodalangan maksimumga ega bo‘ladi.

2. Sirpanadigan kontakt.

Dispersiya tenglamasi shaklan (8)-tenglamaga o‘xshash. Barcha parametr qiymatlari avvalgi bo‘limda qo‘llanilganlari bilan bir xil. 2a va 2b-rasmlar mos ravishda tuzilma jihatidan bir jinsli va notekis tizimlar uchun chastotalar va so‘nish koeffitsiyentlarining to‘lqin soni ξ ga bog‘liqligini ko‘rsatadi. Olingan natijalar oldingi xulosalarni tasdiqlaydi. Parametrning o‘zgarishi natijasida



2b-rasm. To‘lqin soniga nisbatan kompleks xos chastotalarning o‘zgarishi.

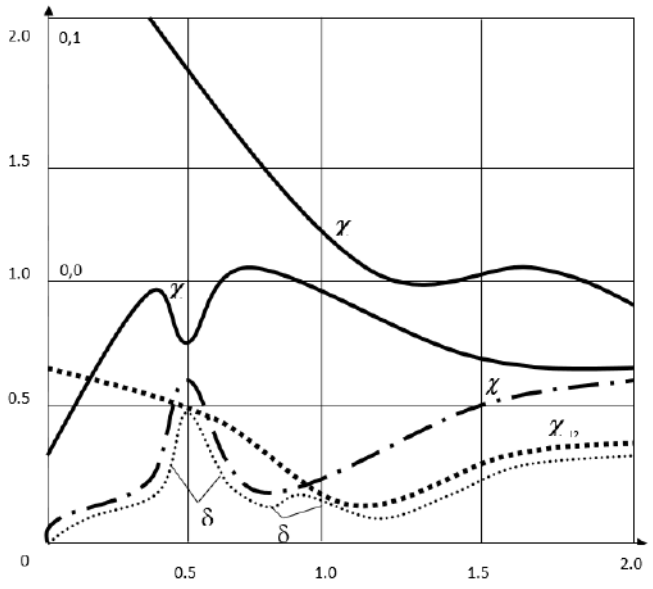
b) Dissipativ jihatdan notekis mexanik tizim.

Bu tizimning xususiyatlari δ koeffitsiyentiga juda sezilarli darajada bog‘liq bo‘lib, mexanik xossalarni o‘zgartirmasdan, faqat elementlarning geometrik o‘lchamlarini o‘zgartirish orqali boshqarilishi mumkin.

Shunday qilib, tuzilma jihatidan notekis qovushqoq-elastik tizimlarning so‘nish xossalarini samarali boshqarish uchun istiqbolli imkoniyatlar paydo bo‘ladi — bu yaqin chastotali notekis tizimlarni o‘zgartirish orqali amalga oshiriladi.

Hisoblash natijalari 3-rasmda keltirilgan. Chastotalarning ξ ga bog‘liqligi dissipativ bir jinsli tizimda kuzatilgan holatga o‘xshash — egri chiziqlar 5% aniqlikkacha bir-biriga to‘g‘ri keladi. Ammo so‘nish koeffitsiyentlarining xatti-harakati keskin o‘zgargan $\omega I \sim \xi$ bog‘liqligi monoton emas. Global so‘nish koeffitsiyenti ko‘rsatilgan xarakterli ξ qiymatida aniq ifodalangan maksimumga ega.

Xulosa. Masalani yechish jarayonida dissipativ - notekis muhitlarda to‘lqinlarning tarqalishi o‘rganildi. Natijada, tizimning fizik-mexanik va geometrik parametrlariga bog‘liq so‘nish tezligining bog‘liqligi monoton emasligi aniqlandi. Dissipativ jihatdan notekis muhitlarda esa faza tezligi va so‘nish tezligining tizimning geometrik hamda fizik–mexanik parametrlariga bog‘liqligi ham monoton emas ekani ko‘rsatildi.



3-rasm. A**lyuminiy tasma va muhit o‘rtasidagi kontakt holatida faza tezligi** χ_{R1} , χ_{R2} **hamda so‘nish koeffitsiyenti** χ_{I1}, χ_{I2} ning **to‘lqin soniga bog‘liq dispersiya grafigi.**

$C_{p1} = 5400 \text{ m} / s;\ \nu_1 = 0.35;\ C_{p2} = 2300 \text{ m} / s;\ \nu_1 = 0.35;\ C_{S1} = 1311\ m / s;$

$\rho_1 = 0.138 \text{ kg} / m^3;\ C_{s2} = 1311 \text{ m} / s;\ \rho_2 = 0.126 \text{ kg} / m^3.$

Olingan sonli natijalar asosida quyidagi xulosalar aniqlandi:

- Yupqa devorli konstruksiyalarning yumshoq qatlamdan ajralish ehtimoli mavjudligi hamda rezonans tezligigacha bo‘lgan diapazonda kontakt yuzasining o‘lchamlariga ta’sir kuchi aniqlangan.
- Materialning yopishqoqlik xossalarini hisobga olish natijasida faza tezliklari 10–15 % ga oshadi.
- Aniqlanishicha, kengayish va burilish to‘lqinlarining yuqori tartibli shakllari cheksiz muhitdagi to‘lqinlarning maksimal tezligi (C) dan oshadi, biroq gruppa tezligi hech qachon (C) dan yuqori bo‘lmaydi.
- Shuningdek, gruppa tezligi dispersiyali muhitda dispersiyasiz muhitga nisbatan 10–15 % ga yuqori bo‘lishi qayd etildi.

Boshqacha aytganda, impuls shakllari bir jinsli elastik jismlardagi kabi o‘zgarmas holatda qolmaydi, ya’ni to‘lqin shakli muhit bo‘ylab tarqalish jarayonida o‘zgaradi.

ADABIYOTLAR:

1. Aki K., Richard P. Quantitative seismology.- Moscow: Mir press, 1983, volume 1. -519 p.

2. Grinchenko VT, Muleshoe V.V. Harmonic vibrations and waves of elastic bodies, - Kiev, “Nauka Dumka press., 1981, -283p.

3. Davies R.M. Stress waves in solids. –Moscow, Because of foreign language. Liter., 1961, -104p.

4. Sheriff R., Geld art L.Seismic prospecting: in 2 t.T.1. trans. with English. – Moscow, “Nauka” press, 1987, -448 p.

5. Esanov N. Q., & Saipnazarov J. M. (2024). Effect of moving load on a cylindrical shell with an elastic filler. Modern Innovations, Systems and Technologies, 4(4), 0301–0309. https://doi.org/10.47813/2782-2818-2024-4-4-0301-0309.

6. Esanov, N. Q., & Saipnazarov, J. M. (2024) On propagation of natural waves in viscoelastic media.

7. Esanov N.K., Almuratov SH.N., Saipnazarov, J. M., Ishmamatov M, Raxmonova G.X. Free Vibrations of a Spherical shell with a Pinched Edge.

8. Esanov, N. Q., Natural and forsed osculations of pipelines in contact with the Wincler medium.

9. Safarov I.I., Esanov N. Q., & Saipnazarov J. M., Xalilov Sh.F. Колебания плоской вязкоупругой спиральной пружины.

УДК 53

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ И ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Мавлонов Тулкин,
профессор кафедры «Механика и компьютерное моделирование»
«Ташкентского института инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства» Национального
исследовательского университета, доктор технических наук
Алиев Актам Эркинович,
докторант кафедры «Механика и компьютерное моделирование»
«Ташкентского института инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства» Национального
исследовательского университета,
aktamaliyev994@gmail.com

Аннотация. *Расчёт динамического поведения конструкции заключается в определении перемещений и напряжений как функций времени. В качестве предварительного этапа часто проводится исследование собственных колебаний — движения, происходящего при отсутствии внешних воздействий. При этом определяются частоты и формы колебаний, что представляет собой сложную вычислительную задачу. Развитие вычислительной техники способствовало переоценке традиционных методов анализа прочности и надёжности инженерных объектов. Это привело к широкому применению численных методов. Среди них особенно выделяется метод конечных элементов, получивший признание и в нашей стране, и за рубежом, благодаря высокой точности и универсальности.*

Ключевые слова: *собственные колебания, собственные частоты, метод конечных элементов, деформации, перемещения, собственные формы колебаний, численные методы расчёта, упругие тела.*

QOBIQLI KONSTRUKSIYALARNING XUSUSIY TEBRANISHLARINI DINAMIK HISOBLASH VA TADQIQ ETISH

Annotatsiya. *Konstruksiyaning dinamik holatini hisoblash ko‘chish va kuchlanishlarni vaqt funksiyasi sifatida aniqlashdan iborat. Dastlabki bosqich sifatida ko‘pincha xususiy tebranishlar - tashqi ta’sirlar bo‘lmaganda sodir bo‘ladigan harakatni o‘rganish amalga oshiriladi. Bunda tebranishlarning chastotalari va shakllari aniqlanadi, bu esa murakkab hisoblash masalasi hisoblanadi. Hisoblash texnikasining rivojlanishi muhandislik obyektlarining mustahkamligi va ishonchliligini tahlil qilishning an’anaviy usullarini qayta baholashga yordam berdi. Bu esa sonli usullarning keng qo‘llanilishiga olib keldi. Ular orasida, ayniqsa, chekli elementlar usuli alohida ajralib turadi, u o‘zining yuqori aniqligi va universalligi bilan mamlakatimizda ham, xorijda ham e’tirof etilgan.*

Kalit so‘zlar: *xususiy tebranishlar, xususiy chastotalar, chekli elementlar usuli, deformatsiyalar, ko‘chishlar, xususiy tebranish shakllari, sonli hisoblash usullari, elastik jismlar.*

DYNAMICAL CALCULATION AND STUDY OF OWN VIBRATIONS OF SHELL STRUCTURES

Abstract. *Calculating the dynamic behavior of a structure involves determining displacements and stresses as functions of time. As a preliminary stage, the study of natural vibrations - the motion occurring in the absence of external influences - is often carried out. In this case, the frequencies and forms of oscillations are determined, which represents a complex computational task. The development of computing technology has contributed to the reassessment of traditional methods for analyzing the strength and reliability of engineering objects [1,2,3]. This led to the widespread use of numerical methods. Among them, the finite element method stands out, which has gained recognition both in our country and abroad [8,9,10], due to its high accuracy and versatility.*

Keywords: *natural vibrations, natural frequencies, finite element method, deformations, displacements, natural vibration forms, numerical calculation methods, elastic bodies.*

Математическая постановка задачи. В настоящей работе приводится алгоритм решения задачи о собственных пространственных колебаниях упругих тел; исследуется практическая сходимость алгоритма, а также приводятся результаты и анализ полученных решений для конкретных задач; анализируются полученные результаты при натурных динамических испытаниях [4,5**]**.

Рассматривается осесимметричное тело сложной геометрической конфигурации, на границе которого задаются произвольные однородные условия. Конструкция занимает область - V_1, фундамент - V_2, расположен на слое грунта - V_3. [4,5**]**. Нижнее основание слоя грунта неподвижно, боковая поверхность свободна от напряжений. Конструкция, фундамент и грунт являются упругими.

Задача состоит в определении собственных частот и не осесимметричных собственных форм колебаний тела, т.е. движения тела, при котором все точки колеблются по одному и тому же гармоническому закону, но с разными амплитудами [частота 3]. Амплитуды колебаний являются функциями координат r, z, φ в зависимости от номера гармоник $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$.

$$\vec{U} = \{U_r, U_\varphi, U_z\}$$

$$U_r = U_r^*(r,\varphi,z)\cos\omega t$$
$$U_\varphi = U_\varphi^*(r,\varphi,z)\cos\omega t$$
$$U_z = U_z^*(r,\varphi,z)\cos\omega t \qquad (1.1)$$
$$U_r^* = U_n(r,z)\cos n\varphi$$
$$U_\varphi^* = W_n(r,z)\sin\varphi$$
$$U_z^* = V_n(r,z)\cos n\varphi$$

здесь $\omega, \vec{U}^* = \{U_r^*(r,\varphi,z), U_\varphi^*(r,\varphi,z), U_z^*(r,\varphi,z)\}$ – соответственно собственная частота и форы колебаний.

Для математической постановки задачи используется принцип возможных перемещений, согласно которому работа всех активных сил, включая силы инерции на произвольном возможном перемещении, равна нулю. Подлежит определению поле перемещений $\vec{U}$, удовлетворяющее при любых возможных перемещениях вариационному уравнению:

$$\delta A = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_V \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\sigma\vec{U}dV = 0$$
$$\vec{x} \in \Sigma_z:\ \vec{U} = 0,\ \ \sigma\vec{U} = 0. \qquad (1.2)$$

где $\vec{U}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно компоненты перемещений, тензоры напряжений и деформации; $\sigma\vec{U}, \delta\varepsilon_{ij}$ – вариации перемещений и деформации; $V = V_1 + V_2 + V_3$ –объем тело; ρ – плотность материала; $\vec{x} = \{r, z, \varphi\}$ – цилиндрические координаты. $i, j = r, z, \varphi$.

Метод. Компоненты тензора деформации и вектора перемещений связаны соотношениями Коши

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r};\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{U_r}{r};\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z};$$
$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}\right); \qquad (1.3)$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}\right)$$
$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}\right).$$

Формулами (1.3) определяются геометрические соотношения рассматриваемой задачи в квадратичном приближении при малых удлинениях и сдвигах.

В случае, когда оболочка составлена из произвольного числа слоёв и главные направления упругости в каждой точке каждого слоя совпадают с направлениями координатных линий. Считаем, что материал слоёв подчиняется обобщённому закону Гука. В этом случае напряжения, возникающие в некоторой точке, отстоящей на расстоянии z от поверхности вращения, можно определить по формулам:

$$\sigma_{11}(t) = \frac{E_1\varepsilon_{11}(z)}{1-V_1V_2} + \frac{E_2\varepsilon_{22}(z)V_2}{1-V_1V_2},$$
$$\sigma_{22} = \frac{E_2\varepsilon_{22}(z)}{1-V_1V_2} + \frac{E_1V_1\varepsilon_{11}(z)}{1-V_1V_2},$$
$$\sigma_{12} = G\varepsilon_{12}(z),$$

где E_1, E_2 – модули Юнга соответственно по направлениям α_1, α_2; G-модуль сдвига в плоскости z = const; V_1, V_2-соответствующие коэффициенты Пуассона.

При этом

$V_1 E_2 = V_2 E_1.$

Связь между тензорами напряжений и деформаций также можно представить в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

где $\lambda, \mu -$ параметры Ляме, $\delta_{ij} -$ символ Кронекера. В частном случае для определения влияния физической нелинейнойости, в одномерном случае зависимость между напряжением и деформаций представим в виде:

$\sigma = E\varepsilon + \gamma\varepsilon^3$

где γ - коэффициент нелинейности.

Далее введём усилия и моменты, действующие на площадках $\alpha_1 = const$ и $\alpha_2 = const$; нормальные T_{11}, T_{22} и сдвигающее S усилия, изгибающие M_{11}, M_{22} и крутящий H моменты. Считаем, что эти усилия и моменты отнесены к единице длины соответствующей координатной линии. Положительные направления их указаны на рисунке 1.

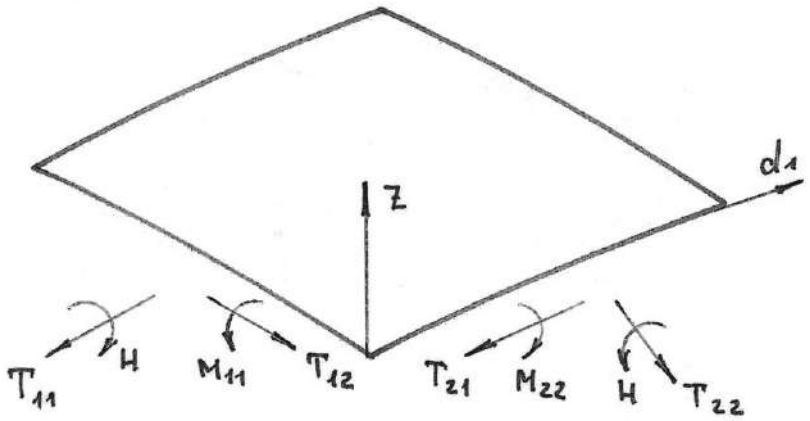


Рисунок 1.

После подстановки (1.1) в (1.2) + (1.4) и интегрирования полученного выражения по φ приходим к вариационному уравнению относительно собственных форм $\vec{U} = \{U, V, W\}$, т.е. задача сводится к счётному множеству спектральных задач, двухмерных по координатам и трёхмерных по компонентам перемещений. Откуда собственная форма колебаний $\vec{U}$ определяется с точностью до постоянного множителя, для устранения которого вводится дополнительное условие нормировки собственных форм

$$\int \vec{U}^2 dV = 1. \quad (1.5)$$

При этом рассматриваемая задача сводится к отыскиванию константы ω^2 и вектора-функции $\vec{U}(r, z)$, удовлетворяющих уравнениям (1.2) – (1.5) при любом кинематический возможном перемещении. Далее поставленная задача решается методом конечных элементов (МКЭ).

Результаты. В качестве примера рассмотрим осесимметричные собственные колебания цилиндрических оболочек со свободно опертыми краями $(U = 0,\ W = 0,\ W'' = 0)$, для следующих физико-механических параметров и геометрических размеров

$(L/R = 6,\ h/R = 0.22, y = 0.3, E = 1.0, \rho = 1.0)$. При этом находились точно собственные частоты и собственные формы колебаний, которые сопоставлялись с приближёнными решениями, полученными МКЭ. При решении данной задачи МКЭ, собственные частоты определялись как модифицированным степенным методом, так и методом Мюллера.

Таблица 1.

Собственные частоты, rad/sek	Точные значения	Собственные частоты цилиндрической оболочки, rad/sek	
		N=60	N=60
		FEM	Ansys (FEM)
ω_1	0.515284	0.515348	0.51682
ω_2	0.895951	0.896211	0.71397
ω_3	0.973206	0.973433	0.83679
ω_4	0.987720	0.988007	0.85351
ω_5	0.993010	0.993751	0.85372

МКЭ – метод конечных элементов, N – количество конечных элементов

Заключение. В таблице 1 приведены полученные точные собственные частоты для цилиндрической оболочки со свободно опертыми краями. Приведённые результаты показывают, что при учёте физической нелинейности в отличие от линейного случая, собственная частота изменяется на 12-15%. Анализ этих результатов и проведённые исследования по сходимости решения для оболочки показывают, что метод Мюллера позволяет получить результаты с высокой степенью точности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Tulkin Mavlanov, Sherzod Khudainazarov and Islomjon Khazratkulov. Natural Vibrations Of Structurally Inhomogeneous Multi-Connected Shell Structures With Viscoelastic Elements. Journal of Physics. 1425 012017. 2020. doi:10.1088/1742-6596/1425/1/012017

2. Mavlanov T. and Khudainazarov Sh. Calculation of structural-inhomogeneous multiply connected shell structures with viscoelastic elements E3S Web of Conferences. Vol. 97. No 040542. 2019. DOI:10.1051/e3sconf/20199704054

3. Mavlyanov, T. Development of methods and algorithms for calculating shell structures, taking into account structural heterogeneity and interaction with various media. Monograph. –T.:TIIIAME. -2019. P. -217.

4. Mirsaidov, M.M., Safarov, I.I., Teshaev, M.K., Boltayev, Z.I. Dynamics of structural - Inhomogeneous coaxial-multi-layered systems "cylinder-shells". Journal of Physics: Conference Series, 1706(1), 2020, № 0120331, ICAPSM 2020; Coimbatore, Virtual; India. DOI: 10.1088/1742-6596/1706/1/012033

5. Mirsaidov, M., Safarov, I.I., Teshaev, M.K. Dynamic instability of vibrations of thin-wall composite curvorine viscoelastic tubes under the influence of pulse pressure. E3S Web of Conferences 164(5), 2020, № 140132019, DOI: 10.1051/e3sconf/202016414013

6. Mirsaidov M. and Troyanovsky I. E. Forced axisymmetric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell. Polymer Mechanics 11(6). 1975. Pp. 953-955.

7. Mavlanov T. Iplar va egiluvchan iplar mexanikasi/ Tashkent-2024. 285 bet.

8. Жиенко, Ю. В. Конечно-элементный метод в механике конструкций. 166-171 стр. Москва-1980.

9. Кравчук, А. С., Сапожников, А. Г. Метод конечных элементов в задачах динамики сооружений. Киев: Вища школа,52-68 стр. Киев-1987.

10. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. 84 стр. Москва- 1975.

УЎК 666.972:546.28

БЕТОННИ МОДИФИКАЦИЯЛАШ УЧУН НАНОКРЕМНЕЗЁМДАН ФОЙДАЛАНИШ

Ёкубов Улугбек Адхамович,
У.А.Арифов номидаги Ион-плазма ва лазер технологиялари институти катта илмий ходими
yokubov.u@yandex.uz
Мирзаев Сирожиддин Зайниевич,
У.А.Арифов номидаги Ион-плазма ва лазер технологиялари институти бош илмий ходими
mirzaev@iplt.uz
Аллаев Бахтиёр Аширович,
У.А.Арифов номидаги Ион-плазма ва лазер технологиялари институти кичик илмий ходими
bahtiyor.74.74@mail.ru
Трунилина Ольга Викторовна,
У.А.Арифов номидаги Ион-плазма ва лазер технологиялари институти етакчи илмий ходим,
olvictru@gmail.com

Аннотация. *Олинган бетонни сиқиш пайтида турли концентрацияли анион сирт фаол моддасининг кучга таъсир қилиш самарадорлигини аниқлаш учун нанокремнеземнинг полидисперс намуналари текширилди. Нанозаррачаларнинг ўлчами Malvern Panalytical компаниясининг nanosight LM10 қурилмаси ёрдамида 405 nm тўлқин узунлигида NTA (nanoparticle tracking analysis) усули билан 5×10^8 zarrachalar/ml гача суюлтирилган эритмаларда 44 kHz частотали ультратовушли дисперсантда ўн дақиқагача ишлов берилган. Синов натижалари 3 масли гидрозол қўшилиши билан бетон-цемент сув аралашмасининг кучига энг самарали таъсир кўрсатади. SiO_2 нанозаррачаларининг % миқдори ва сулфонол концентрацияси мисел ҳосил бўлишининг критик концентрациясидан юқори эмас.*

Калит сўзлар*: наносиликат, гидрозол, сирт фаол моддалар, мисел ҳосил бўлишининг критик концентрацияси.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАНОКРЕМНЕЗЁМА ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАНИЯ БЕТОНА

Аннотация. *Для определения эффективности действия анионного сурфактанта различной концентрации на прочность при сжатии результирующего бетона исследовали полидисперсные образцы нанокремнезёма. Размер наночастиц контролировали с помощью прибора NanoSight LM10 фирмы Malvern Panalytical на длине волны 405 нм методом NTA (nanoparticle tracking analysis) в разбавленных до 5×10^8 частиц/мл растворах, подвергнутых предварительной десятиминутной обработке в ультразвуковом диспергаторе с частотой 44 кГц. Наиболее эффективно воздействие на прочность бетонно-цементной смеси воды затворения с добавлением гидрозоля с 3 мас.% содержанием наночастиц SiO_2 и концентрацией сульфонола не выше критической концентрации мицеллообразования.*

Ключевые слова*: нанокремнезём, гидрозоль, сурфактант, критическая концентрация мицеллообразования.*

NANOSILICA USAGE FOR CONCRETE MODIFICATION

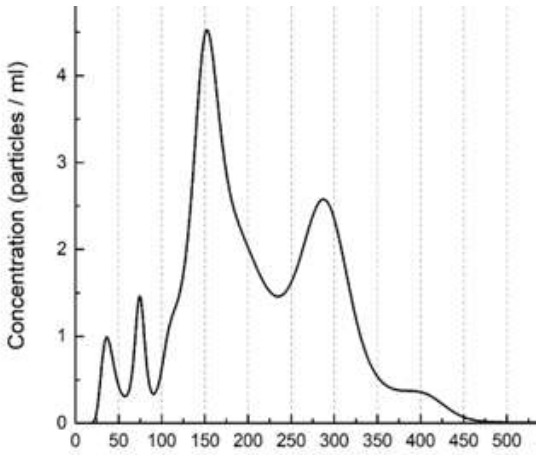
Abstract. *Polydisperse samples of nanosilicon were studied to determine the effectiveness of an anionic surfactant of various concentrations on the compressive strength of the resulting concrete. The size of the nanoparticles was monitored using the NanoSight LM10 device from Malvern Panalytical at a wavelength of 405 nm using the NTA (nanoparticle tracking analysis) method in solutions diluted to 5×108 particles/ml, subjected to a preliminary ten-minute treatment in an ultrasonic dispersant with a frequency of 44 kHz. The test results indicate the most effective effect on the strength of a concrete-cement mixture of mixing water with the addition of a 3 wt aerosol. The percentage of SiO2 nanoparticles and the concentration of sulfonol are not higher than the critical concentration of micelle formation.*

Keywords: *nanosilicon, hydrosol, surfactant, critical concentration of micelle formation.*

Кириш. Микро ва нанокремнезём каби металлургия чиқиндилари мустаҳкамлик хусусиятларини ошириб бериши, бетон ва темир-бетон ишлаб чиқаришда қўллашда сезиларли самара олиш имконини бермоқда. SiO_2 кремнезём газ тозалаш иншоотларида электрометаллургия комбинатларида ферросилиций ишлаб чиқаришда ҳосил бўлади, чиқинди газларда 50 нм дан 50 мкм гача бўлган зарралар ўлчамидаги полидисперс фракцияда 200 дан 20 000 кг/м^2 гача бўлган юқори дисперсликга эга [1]. Бетон ишлаб чиқариш учун микро ва нанокремнезёмдан фойдаланишнинг энг тез-тез қўлланиладиган усули бетон-цемент аралашмасига 10-20 мас.% кремнезем чиқиндиларини тўғридан тўғри қўшишдир, бу эса қиммат цемент сарфини сезиларли даражада тежайди. Реологик хоссаларини яхшилаш ва йўналтирилган кристаллаштиришнинг наноўлчамли марказларининг пайдо бўлиши динамик дисперс ўз-ўзини мустаҳкамлаш ва фазалараро чегараларни тузиш жараёнини ривожлантиришга ёрдам беради, бу эса бетон-цемент тошининг мустаҳкамланиши ва ёриқларга чидамлилигини оширишга олиб келади [2].

Нанокремнезём таркибидаги нанозарралар кристаллаш марказлари сифатида ҳам, гидратация жараёнларини тезлаштирувчи агентлар сифатида ҳам фаолият кўрсатишга қодир, бу эса наноқўшимчанинг сарфини сезиларли даражада камайтиради. Клинкер цементининг дисперсиялигидан юқори дисперсияли юпқа дисперс компонентлардан фойдаланилганда, бетоннинг таркибида унинг мустаҳкамлигини бир вақтнинг ўзида маркага ва ундан кўпроқ оширган ҳолда 50 %гача цементни тежаш имконияти пайдо бўлади. Нанокремнезёмнинг бетоннинг мустаҳкамлик хусусиятларига таъсири бўйича экспериментал тадқиқотлар шуни кўрсатдики, сиқишга бўлган мустаҳкамликни 20% гача оширишга қимматбаҳо кимёвий қўшимчалардан воз кечиш, сувни техник кремний ва кремний қотишмалари ишлаб чиқарадиган нанокремнезём чиқиндилари билан қориштирувчи сувни модификация қилиш орқали эришиш мумкин. Нанокремнезём, айниқса, иқтисодий жиҳатдан истиқболли, чунки ўзининг ўлчамлари ва юқори хусусий юзаси туфайли микрокремнезёмга нисбатан концентрацияларда бир хил даражада паст самарани таъминлаши мумкин. Бироқ, кичик концентрацияларда 1 мас.% ва ундан паст бўлганда, умумий ҳажм бўйича наноқўшимчани бир текис тақсимлашга эришиш муаммоси пайдо бўлади, буни ечими наномодификаторни қориштирувчи сувга қўшиш орқали ҳал этилади. Бу борада олинган гидрозолни барқарорлаштириш учун иккита ёндашув мавжуд. Усуллардан бири сувни физик майдонлар билан олдиндан ёки бир вақтда фаоллаштиришни назарда тутади [3,4]. Иккинчи усул сурфактант туридаги барқарорлаштирувчи кимёвий агентнинг зарур миқдорда қўшилиши билан боғлиқ [5-7]. Бундай ҳолатларнинг биринчисида сиқилиш мустаҳкамлигини камида 20 %га оширади, иккинчисида эса таққосланадиган мустаҳкамликни ошириш билан бир қаторда пластиклик ва қулай жойлаштирувликни қўшимча оширади.

Экспериментал усуллари. Мицелхосил бўлишнинг критик концентрацияси реологик усулда Rheostress 600 Haake реометри ёрдамида аниқланди. Нанозаррачалар ўлчами Malvern Panalytical



1-расм. Нанокремнезём намуналарида дисперслигининг тақсимланиши

фирмасининг NanoSight LM10 асбоби ёрдамида 405 нм тўлқин узунлигида НТА (nanoparticle tracking analysis) усулида 5×10^8 нанозаррачалар/мл гача суюлтирилган, 44 кГц частотали ултратовуш

диспергаторида дастлабки ўн дақиқалик ишлов берилган эритмаларда назорат қилинган. SiO_2 нанозарралар ўлчами ва сурфактант концентрациясининг бетон-цемент аралашмасининг пластиклигига таъсирини аниқлаш М500 цемент маркасидан фойдаланган ҳолда амалга оширилди. Қориштирувчи сув таркибида SiO_2 7 ва 100 нм заррачалар ўлчамли хамда 100 ва

200 мг/л сурфактант концентрацияли 3 мас.% нанокремнезем гидрозолини ўз ичига олган бўлиб, унинг асосида 4 та намуна тайёрланган, шу жумладан назорат намунаси наноқўшимчасиз тайёрланган. ГОСТ 310.4-81 “Цементлар. Эгиш ва сиқишда мустаҳкамлик чегарасини аниқлаш усуллари” ва ГОСТ 10181-2000 “Бетон аралашмалар. Синов усуллари” га мувофиқ намуналар тайёрланган ва синовлар ўтказилган. Қориштирувчи сув учун ичимлик суви ишлатилган, сурфактанти сифатида Сулфонол НП-1 дан фойдаланилган.

Экспериментал натижалар ва муҳокамалар. Турли концентрацияли анион сурфактантнинг самарадорлигини аниқлаш учун ҳосил бўлаётган бетонни сиқиш чоғида нанокремнезем намуналари 1-расмга мувофиқ зарралар дисперслигини тақсимлаган ҳолда текширилди. Синов натижалари таркибида SiO_2 нанозаррачалари бўлган ва сулфонол концентрацияси мицелхосил бўлишнинг критик концентрациясидан юқори бўлмаган гидрозол қўшилган ҳолда қориштирувчи сувнинг бетон-цемент аралашмасининг мустаҳкамлигига энг самарали таъсир кўрсатишини кўрсатади. Бетон намуналарини тайёрлаш учун портландцемент ва стандарт полифракцион қумдан иборат бўлган, массаси бўйича 1:3 нисбатда доимий сув цементи нисбатида В/Ц = 0,50 цемент-қум эритмасидан фойдаланилди. 2-4 намунани шакллантиришда текширилаётган гидрозоллар қориштирувчи сув сифатида ишлатилди, 1 намунани шакллантириш учун дистирланган сувдан фойдаланилган.

Намуналарни тайёрлаш, уларни қаттиқлаштириш тартибини сақлаш ва синовларга тайёрлаш ГОСТ 10180-2012 "БЕТОНЛАР. Назорат намуналари бўйича мустаҳкамликни аниқлаш усуллари" талабларга мувофиқ синовлар ўтказилган. Намуналарни сиқиш ва эгилиш синовлари 28 кунлик нормал қаттиқлашув даврида ўтказилди (1-жадвал).

1-жадвал

Бетон мустаҳкамлигининг қўшимчалар концентрациясига боғлиқлиги

Намуна	Нанозарранинг ўлчами, нм	Нанозарранинг концентрацияси мас.%	Сульфонол, концентрацияси мг/л	Мустаҳкамлик чегараси R, MPa		
				$R_{эгилиш}$	$R_{сиқиш}$	
				28 k	28 k	28 k, %
1	-	-	-	6,46	30,74	100
2	100	3	100	6,85	38,12	124
3	7	3	100	6,86	38,73	126
4	100	3	200	6,78	36,58	118

Сулфонолдан фойдаланиш гидрозол нанозарраларини агрегацияланишига тўсқинлик қилади, бу цемент тоши тузилишининг шаклланишига ижобий таъсир кўрсатади, унинг реологик хоссаларини яхшилаш орқали аралашманинг ҳаракатчанлигини оширади, унинг қулайлигини оширади, бу эса арматурага адгезиянинг ортишига ва сейсмик барқарорликнинг ошишига ёрдам беради. 2 нчи ва 3 нчи намуналарнинг 28 суткада қаттиқлашув кинетикасига ижобий таъсир кўрсатади ва сиқишга мустаҳкамликнинг энг катта таъсирига эга бўлиб, унда намуналарни сиқишда мустаҳкамлик чегарасига мос равишда 1 нчи назорат намунасидан 24% ва 26% га ошади. Сирт фаол моддаларнинг юқори концентрацияси билан ажралиб турадиган 4-намуна сиқилишга бўлган мустаҳкамлик тўпламининг сезиларли даражада пастлигини кўрсатади. Бу анионли СФМ концентрациясининг мицелла ҳосил бўлишининг критик концентрациясига яқинлашиши билан боғлиқ бўлиб, унга эришилганда гидрозол барқарорлигини йўқотади. Эгилишга мустаҳкамлик чегараси 2-4 нчи намуналарда назорат намунасига нисбатан бироз ортади.

Хулоса. Нанокремнезем ўз заррачаларининг ўлчами ва ривожланган солиштирма юзаси туфайли цемент эритмасининг суюқ матрицасини структуралаш учун катта реакцион қобилиятга эга. Нанозаррачалар юқори дисперсликка эга бўлиб, ўнлаб ва юзлаб мкм дисперсликка эга бўлган цемент заррачалари орасидаги донлараро бўшлиққа кириб, шаклланаётган структурани зичлаштиради. Бундай ҳолда, ёпишқоқликка эга гидросиликат суспензияси [8,9] ҳосил бўлади, бу эса пайдо бўладиган силикат кристалланиш марказларининг бир хил тақсимланишини таъминлайди, бу нафақат охирги бетон тошининг [10] мустаҳкамланишига, балки сейсмик қаршиликнинг ошишига ҳам ҳисса қўшади, бу эса арматурага адгезиянинг ошиши билан боғлиқ. 3 нчи намуна 7 нм нанозаррачаларнинг

юқори реакцион қобилияти туфайли сиқилишга бўлган мустаҳкамликнинг энг юқори ўсишини кўрсатди. Бироқ, заррачаларининг ўлчами 100 нм бўлган нанокремнезёмдан амалий фойдаланиш иқтисодий жиҳатдан самаралироқдир, чунки уни Ўзбекистонда ривожланган кремний қотишмаларини ишлаб чиқариш чиқиндиларидан олиш мумкин.

АДАБИЁТЛАР:

1. Абдурахманов Б.М., Ашуров Х.Б., Курбанов Б.Ш. Химико-металлургический передел кремнезема в моносилановое сырье для солнечной энергетики и наноэлектроники / Ташкент, Изд. «Navroz», 2018.-505с.

2. Урханова Л.А., Ефременко А.С. Бетон повышенной прочности на композиционном вяжущем материале // Строительные материалы. 2012. № 1. С. 32–34.

3. Мирзаев С.З., Ёкубов У.А., Трунилина О.В., Аллаев Б.А., Авдиевич В.Н., Гофурова М.В. Патент РУз № IAP 06675 «Способ активации воды затворения бетонно-цементной смеси» 2021

4. Yokubov U., Egamberdiev K., Allaev B., Trunilina O., Telyaev S., Gafurova M. «Silica nanoparticles hydrosol for concrete strength increase by adding to mixing water» // Journal of Chemical Technology and Metallurgy, 58 (5) 2023.- pp.932-936

5. Мирзаев С.З., Халилов У.Б., Эгамбердиев К.Б., Трунилина О.В., Аввалбоев А.А., Аллаев Б.А., Авдиевич В.Н. Особенности стабилизации гидрозоля наночастиц SiO_2// УФЖ, 3 2024.- с.50-54

6. Kurbanov M.Sh., Andriyko L.S., Panjiev J.A., Tulaganov S.A., Gun'ko V.M., Marynin A.I., Pikus S. Journal of Nanoparticle Research. 25, 202 (2023) doi.org/10.1007/s11051-023-05852-w.

7. Абдурахманов Б.М., Курбанов М.Ш., Тулаганов С.А., Эрназаров М., Андрийко Л.С., Маринин А.И., Шевченко А.Ю. // Узбекский физический журнал, 23, (1), 65-74. doi: https://doi.org/10.52304/.v23i1.226 (2021)

8. Azam Payzullaev, Sirogiddin Mirzaev, Muborak Gafurova, Shavkat Nurmatov, Bakhtiyor Allaev // Journal of Chemical technology and Metallurgy, 60 (4) 625 (2025)

9. Ёкубов У.А., Мирзаев С.З., Трунилина О.В., Аллаев Б.А., Авдиевич В.Н., Курбанбаев Ш.Э. Особенности модифицированной наночастицами SiO_2 структуры воды под комплексным воздействием акустических и электрических полей и ее практическое применение» // Узбекский Физический Журнал. 2020, т.22. – №2. – С.115-122.

10. Ёкубов У.А., Ходжаев К.Т., Аллаев Б.А., Авдиевич В.Н. Кремний оксиди нанодисперс кукунини бетонда қўллаш // ЎзР Миллий гвардияси Ҳарбий-техник институти ахборотномаси, Тошкент, 2020 йил. – №2. – Б. 154-157.

УДК 53

НАБЛЮДЕНИЕ САМОФОКУСИРОВКИ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Андреева Надежда Павловна,
Самаркандский государственный университет
Бункин Фёдор Васильевич,
Институт общей физики АН России
Власов Дмитрий Васильевич,
Институт общей физики АН России
Каршиев Киличбой,
Самаркандский государственный педагогический институт
Кравцов Юрий Александрович,
Институт общей физики АН России

Аннотация. *Теоретически и в эксперименте обсуждается возможность реализации прямого наблюдения самофокусировки в акустике за счёт взаимдействия звуковых пучков с капиллярно-гравитационными волнами на поверхности жидкости.*

Изучены процессы самофокусировки звуковых пучков при их распространении вблизи и при пересечении границы «жидкость–газ». Рассмотрено влияние нелинейных эффектов, отражения, преломления и поверхностных волн на эволюцию профиля звукового пучка. Описаны механизмы усиления локального звукового давления и формирования устойчивых фокусных областей на границе раздела жидкость-газ. Показаны возможности осуществление метода для калибровки мощности звукового пучка и контроля поверхности жидкости.

Ключевые слова: *самофокусировка, акустика, дисперсия, гидродинамика, дефокусировка, возвышение, вспучивание, интенсивность, изгибание, отражённый пучок, импеданс, компонента.*

IKKI MUHIT CHEGARASIDA AKUSTIK NURLARNI O‘Z-O‘ZIDAN FOKUSLANISHINI KUZATISH

Annotatsiya. *Nazariy va eksperimental jihatdan akustikada o‘z-o‘zidan fokuslanishni bevosita kuzatish imkoniyati tovush nurlarining suyuqlik sirtidagi kapillyar-gravitatsion to‘lqinlar bilan o‘zaro ta’siri asosida muhokama qilinadi. Tovush nurlarining «suyuqlik–gaz» chegarasi yaqinida va uni kesib o‘tishda tarqalish jarayonidagi o‘z-o‘zidan fokuslanish hodisalari tadqiq qilindi. Nochiziqli effektlar, aks ettirish, sinish va sirt to‘lqinlarining tovush nuri profilining evolyutsiyasiga ta’siri tahlil qilindi. Mahalliy akustik bosimning kuchayishi mexanizmlari va «suyuqlik–gaz» chegarasida barqaror fokuslash sohalarining hosil bo‘lishi bayon etildi. Shuningdek, ushbu usulni tovush nurining quvvatini kalibrlash va suyuqlik sirtini monitoring qilish uchun qo‘llash imkoniyatlari ko‘rsatildi.*

Kalit so‘zlar: *o‘z-o‘zidan fokuslanish, akustika, dispersiya, gidrodinamika, defokuslanish, sirt ko‘tarilishi, sirt qabarishi, intensivlik, egilish, qaytgan nur, akustik impedans, komponent.*

OBSERVATION OF SELF-FOCUSING OF ACOUSTIC BEAMS AT THE INTERFACE OF TWO MEDIA

Abstract. *The possibility of direct observation of self-focusing in acoustics, arising from the interaction of acoustic beams with capillary–gravity waves on a liquid surface, is discussed both theoretically and experimentally. The processes of self-focusing of acoustic beams during their propagation in the vicinity of and across the liquid–gas interface have been investigated. The influence of nonlinear effects, reflection, refraction, and surface waves on the evolution of the acoustic beam profile is analyzed. Mechanisms of local acoustic pressure enhancement and the formation of stable focal regions at the liquid–gas interface are described. The feasibility of applying this method for acoustic beam power calibration and liquid surface monitoring is demonstrated.*

Keywords: *self-focusing, acoustics, dispersion, hydrodynamics, defocusing, surface elevation, surface swelling, intensity, beam bending, reflected beam, acoustic impedance, component.*

Введение. В литературе неоднократно [1-9] обсуждался вопрос о возможности самофокусировки звуковых пучков на различных механизмах нелинейности. Основная трудность экспериментальной реализации этого явления связана с отсутствием дисперсии и эффективной генерацией высших гармоник, т.е. с формированием “пилы”. Эти эффекты, связанные с классической гидродинамической нелинейностью, затрудняют наблюдение самофокусировки и других нелинейных процессов [11]. Однако если ориентироваться на механизм акустической нелинейности, связанный с другими модами среды, то можно достаточно просто найти условие, когда само воздействие звуковых пучков, и в частности, самофокусировка, будет доминировать над гидродинамической нелинейностью. Так, в [6] экспериментально наблюдалась дефокусировка звуковых пучков в кристалле CdS на тепловом механизме.

Обзор литературных источников. Пусть на поверхность Z=0 падает гауссовский пучок $\omega_z = ReV_0\exp(-\rho^2/2a^2)$ где α - ширина пучка, ρ(x,y)- вектор в плоскости Z=0 (рисунок 1).

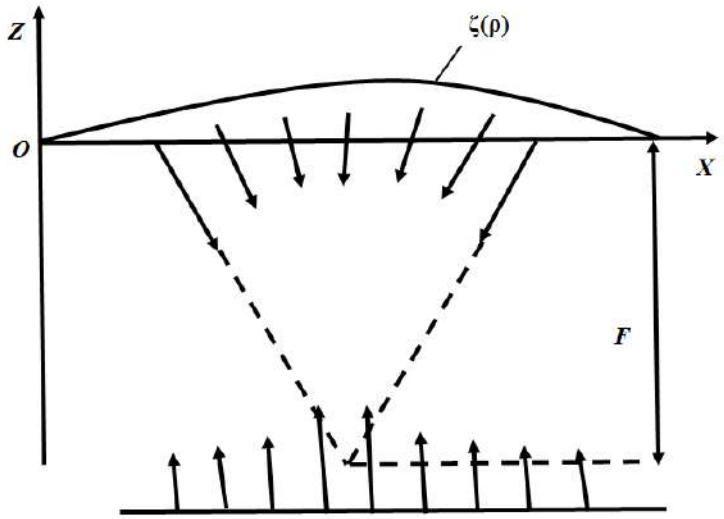


Рисунок 1.

Как известно, при практически полном (коэффициент отражения R близок к единице) отражении плоской звуковой волны от границы раздела жидкость-газ возникает радиационное давление [8]

$$P_{рад.} = 2\rho_0 \omega_z^2|_{z=0} \qquad (1)$$

уравновешивается силой тяжести $\sigma\rho_0 g$, силой поверхностного натяжения $\sigma\triangle_\rho\zeta$ [$\zeta=\zeta(\rho)$ - возвышение поверхности, σ -коэффициент поверхностного натяжения], так что в центре пучка вспучивание даётся формулой

$$\zeta(\rho)=|V_0|^2 e^{-\frac{\rho^2}{a^2}}(g + 4\sigma/\rho_0 a^2)^{-1} \qquad (2)$$

Как и в оптике [4], изгибание поверхности приводит к фокусировке отражённой волны, при этом в параксиальном фокальное расстояние F равно:

$$F = ga^2/4|V_0|^2 = ga^2\rho_0 c/8I_0(1+4\sigma/\rho_0 ga^2) \qquad (3)$$

где $I_0 = \rho_0 c\,|V_0|^2/2$ - интенсивность в центре звукового пучка. Если I_0=1 Вт/см^2, α=1 см, то для воды F=1,8 см. При интенсивности I_0=1 Вт/см^2, это расстояние меньше характерной длины L=50 см, на которой образуются ударные волны, которые могли бы усложнить картину самофокусировки. Заметим, что самофокусировка при отражении от поверхности не приводит к катастрофическому схлопыванию пучка и что в случае границы двух жидкостей можно реализовать как фокусировку, так и дефокусировку звукового пучка (в зависимости от импеданса дефокусировка возможна и в прошедшем, и в отражённом пучках).

Экспериментальные результаты и их анализ. В настоящей работе приводятся теоретическое обсуждение и результаты экспериментального наблюдения явления самофокусировки звуковых пучков при взаимодействии с поверхностью жидкости в соответствии с оценками, приведёнными в [4]. Отметим, что аналогичные оценки для света приведены в [12], а самофокусировка света на поверхности экспериментально наблюдалась в [13].

Как известно [4], при взаимодействии звукового пучка, с распределением интенсивности типа Гаусса (нормальная к поверхности компонента скорости имеет вид $W_z = Re\ V_0\exp(-\rho^2/2\alpha^2)$ с

поверхностью жидкости (коэффициент отражения R близок к единице) образуется вспучивание, высота которого определяется формулой [4]:

$$\zeta(\rho)=|V_0|^2 \exp(-\rho^2/\alpha^2)\,(g+4\sigma/\rho_0\alpha^2)^{-1} \qquad (4)$$

где α -ширина пучка, ρ (x,y) – вектор в плоскости Z=0, ρ - плотность жидкости, σ - коэффициент поверхностного натяжения. Изгибание поверхности приводит к фокусировке отражённой волны. Для проведения экспериментов по изучению явления самофокусировки звуковых пучков при их взаимодействии с поверхностью жидкости собрана экспериментальная установка, представленная на рисунке 2.

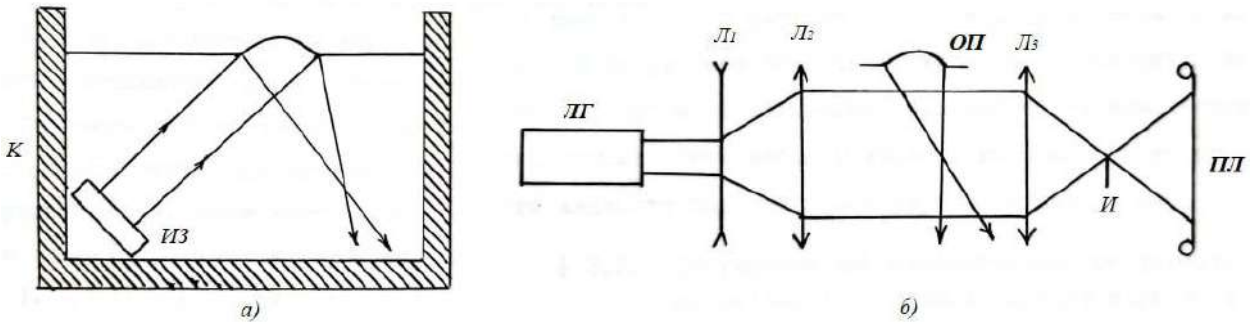


Рисунок 2. Схема экспериментальной установки

а) К - кювета с водой, ИЗ – излучатель с резонансной частотой 1,45 МГц б) ЛГ – гелий-неоновый лазер ЛГ-52, $Л_1$ и $Л_2$ – телескоп, ОП-отраженный пучок, $Л_3$-фокусирующая линза, И – игла, ПЛ – фотоплёнка

Для того чтобы исключить посторонние возмущения поверхности жидкости, кювета К из плексигласа, размером 300x100x200 мм наполненная водой, устанавливалась на конструкцию из металлических, жёстко связанных между собой столов с общим весом 7 т, которая в свою очередь была установлена на бетонной подушке весом 10 т. Бетонное основание экспериментальной установки покоилось на земле и не было механически связано с фундаментом здания.

Для возбуждения мощного направленного звукового пучка использовался дисковой пьезокерамической излучатель ИЗ с резонансной частотой 1.45 МГц (длина волны ~ 1 мм), диаметром 30 мм. Края излучающей пластины жестко закреплялись в оправе с помощью прижимных колец, что способствовало получению плавного распределения интенсивности звука по рабочему сечению излучателя. Для возбуждения излучателя использовался генератор на лампе ГИ-49 Б, максимальная мощность звукового пучка на поверхности жидкости ~ 4 Вт/см^2.

Излучатель помещался в кювету с водой, на поверхности которой образовывался прогиб, приводящий к фокусировке звукового пучка. Контроль распределения интенсивности звука до и после отражения от поверхности осуществлялся He-Ne лазером по теневому методу.

Излучение гелий-неонового лазера ЛГ-52 расширялось с помощью телескопа $Л_1$ и $Л_2$. Для увеличения панорамы картины самофокусировки падающий и отражённый пучки ОП фотографировались отдельно.

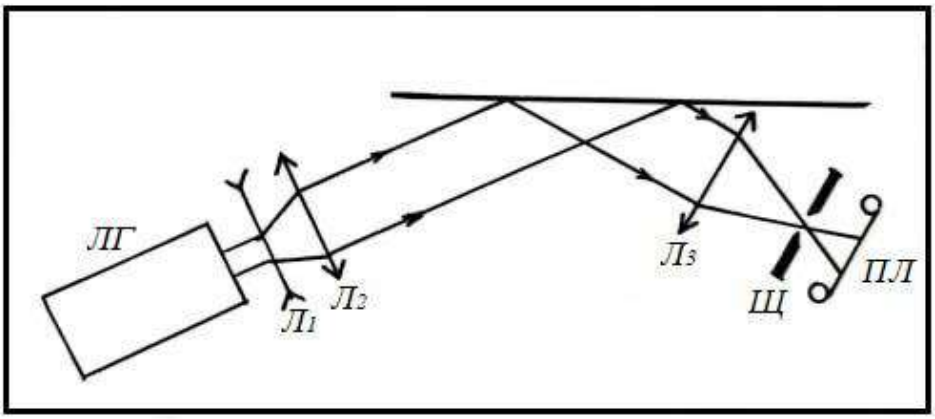


Рисунок 3. Метод контроля поверхности

Размер фотографируемого поля составлял 5 см. После телескопа пучок пропускался через падающий или отражённый от поверхности воды звуковой пучок. Далее излучение фокусировалось с

помощью линзы Л3, фокус которой перекрывался с помощью иглы И, изображение звукового пучка регистрировалось на фотоплёнку ПЛ.

Контроль распределения интенсивности звука в пучке по прогибу поверхности жидкости осуществлялся оптическим методом (рисунок 3).

При этом расширенный с помощью телескопа лазерный пучок падал снизу на поверхность воды под небольшим углом к поверхности. В отсутствие звуковой волны невозмущённая поверхность воды плоская, при этом в изображении наблюдается прямая линия (рисунок 4 а). Прогиб поверхности под действием радиационного давления приводит к искривлению линии, и появлению интерференционной картины (рисунок 4 б-е).

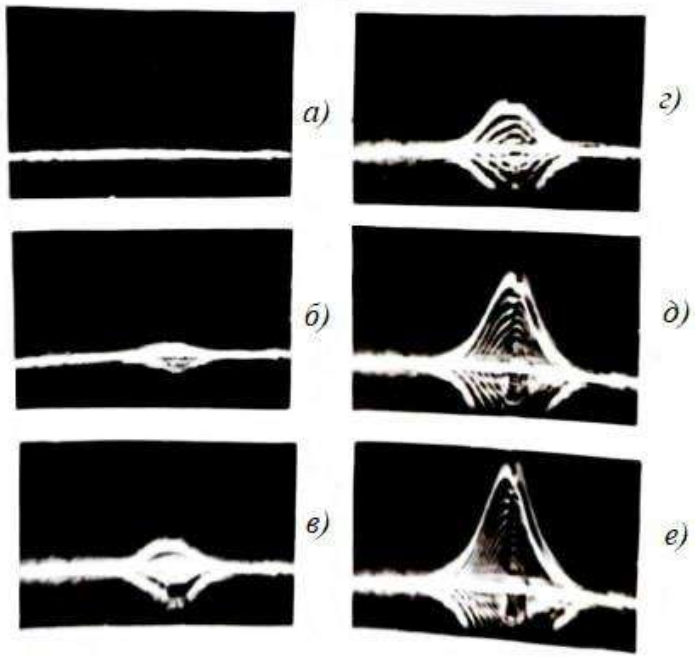


Рисунок 4. Интерферограммы поверхности воды при различных мощностях звукового пучка: 0,0016 (а), 0,0064 (б), 0,015 (в), 0,025(г), 0,076 (д) и 0,12 Вт/см^2

Если искривление поверхности описывается функцией f(x,y) (ось Z нормальная к поверхности), то угол максимального отклонения отражённых от поверхности лучей реализуется в точках, где $\frac{\partial^2 f(r,z)}{\partial r^2} = 0$, т.е. в точке $r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, и равен $\Delta = tg\varphi_0 + tg(2\theta + \varphi)$ где tg2θ=2(ξ /α)$\sqrt{r/l}/(1 - r\xi^2)/\alpha^2 l$)

здесь α – радиус пучка, ξ - высота поднятия, φ_0 - угол между падающим звуковым излучением и невозмущённой поверхностью жидкости, l – расстояние от центра пучка вдоль поверхности не возмущённой жидкости, предполагалось, что в эксперименте α=10 мм, $\varphi_0 = 3^0$, максимальный угол отклонения луча лазера $\Delta = 57^0$, ему соответствует при принятых допущениях $\xi_{теор}$ =4,3 мм, что хорошо согласуется с экспериментом.

Использованный метод пригоден для измерения высоты изгиба и мощности излучаемого звука (рисунок 4). При мощности излучения 1 Вт/см^2 высота подъёма изгиба ξ=1,3 мм, при 0,0016 Вт/см^2, ξ=2 мкм. Таким образом, точность измерения высоты прогиба порядка длины волны света.

Хотя восстановить точную картину изгиба поверхности по данной методике достаточно трудно, очевидно, она позволяет непосредственно контролировать гладкость распределения интенсивности звукового пучка и его амплитуду. Так, на рисунке 4 г-е хорошо заметно возмущение профиля прогиба вследствие присутствия на поверхность воды пылинки.

Изображения падающего и отраженного от поверхности звуковых пучков снимались в зависимости от мощности звукового пучка (рисунок 5).

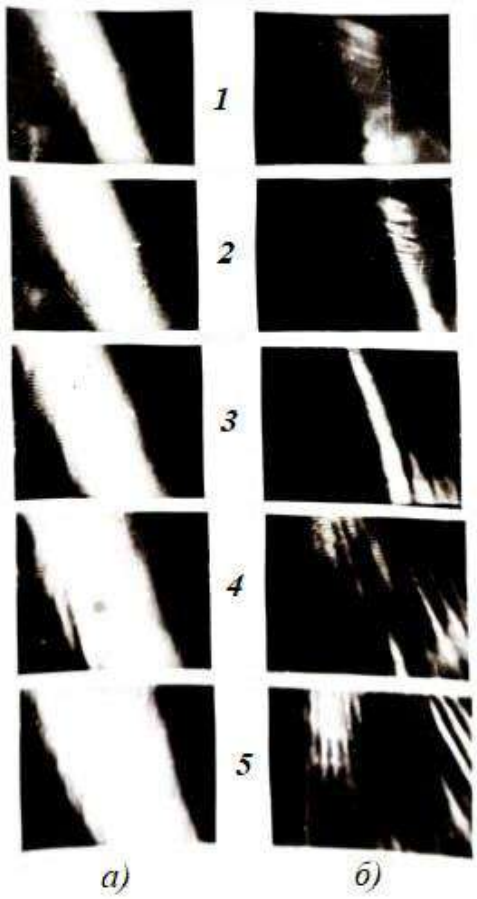


Рисунок 5. Изображение падающего (а) и отражённого от поверхности воды (б) звуковых пучков при различных мощностях: 0,016 (1), 0,64 (2), 1,44 (3), 2,56 (4), и 4 Вт/ см^2 (5)

Легко видеть, что распределение интенсивности падающего на поверхность пучка с повышением его мощности остаётся постоянным. Для отражённого от поверхности воды пучка наблюдается само воздействие: сужение и далее его распад на несколько пучков. Наблюдаемую картину распада пучка, можно объяснить, вероятно, тем, что при больших интенсивностях форма поверхности прогиба теряет устойчивость по отношению к малым возмущением интенсивности звукового пучка, также как это имеет место в оптике.

При превышении критической мощности звукового пучка рассматриваемая геометрия отражения звуковой волны от границы раздела нарушается. При мощности $P_{кр} = \pi\sqrt{l/r}\ \alpha^3\ \rho gc = 1{,}8\ 10^2$ Вт в точках $r_0 = \pm\alpha/\sqrt{2}$ волна, испускаемая излучателем, отражается параллельно невозмущённой границе жидкости. Если мощность звука увеличивать дальше, то появляются отражённые звуковые волны, направленные вверх, что приводит к искажению гладкой вершины прогиба поверхности и появлению образования, напоминающего по форме концентратор звуковых волн, это нелинейное акустическое явление следует, по-видимому, называть самоконцентрацией звука на поверхности жидкости. Интенсивность звуковых волн на конце концентратора в ~ 10 раз превышает интенсивность звука на оси, что приводит к образованию фонтана (рисунок 6 а, б) и интенсивному парообразованию и распылению жидкости в области максимально сильной концентрации звуковых волн (рисунок 6 в, г)

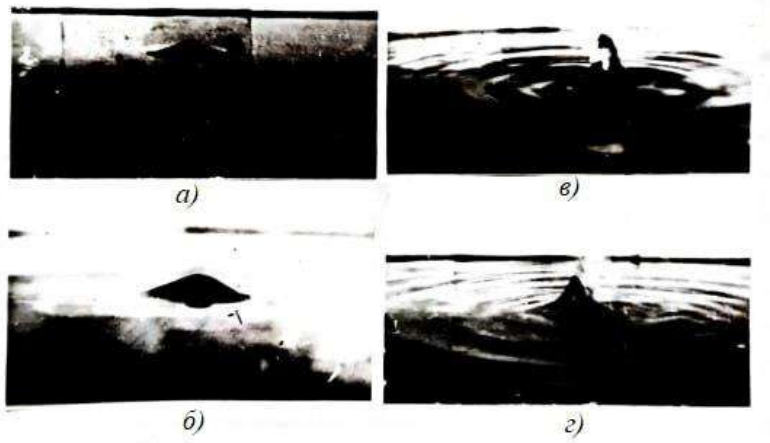


Рисунок 6. Изображение звукового фонтана при различных мощностях звукового пучка

Заключение. Таким образом, проведено исследование поведения падающего и отражённого от поверхности воды звукового пучка и экспериментально подтверждено явление самофокусировки звукового пучка при его взаимодействие с поверхностью жидкости. Предложен метод для калибровки мощности звукового пучка и контроля поверхности жидкости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Аскарьян Г.А., Пустовойт В.И. ЖЭТФ, 58, 647 (1970)*
2. *Аскарьян Г.А. Письма ЖЭТФ, 13, 395 (1971)*
3. *Аскарьян Г.А. Письма ЖЭТФ, 4, 144, (1966)*
4. *Бункин Ф.В., Власов Д.В., Кравцов Ю.А. Письма ЖТФ, т.7, в.6, с.325, (1981)*
5. *Андреева Н.П., Бункин Ф.В., Власов Д.В., Каршиев К., Кравцов Ю.А., Шурыгин Е.А. Препринт ФИАН СССР, № 163, М.1983, 10 стр.*
6. *Гуляев Ю.В. ФТТ, 12, 415, (1970)*
7. *Заболоцкая Е.А. Акуст. ж., 22, № 2., с.222 (1976)*
8. *Лощилов В.А. Самофокусировка акустических пучков в жидких средах. Акуст. ж.(2020).*
9. *Prosperetti., Leighton T.G. Akustik phenomer at liquid-gas interfaces.-Cambridge Univ. press. (2007)*
10. *Ландау Л.П., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ (1959)*
11. *Бункин Ф.В., Власов Д.В., Заболоцкая Е.А., Кравцов Ю.А. Письма ЖТФ, т.7, в.9, 560, (1981)*
12. *Кац А.В., Конторович В.М.. Письма ЖЭТФ, 9, 192, (1969)*
13. *Ashkin A., Driedzik J.M. Phys. Rev. Lett., 30, 139, (1973)*

УДК 532.516

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ НА МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА

Ражабов Сухроб Худойбердиевич,
доцент кафедры точных и естественных наук
Каттакурганского государственного педагогического института
rajabovsuxrob72@gmail.com

Аннотация. *Решены задачи о нестационарном течении вязкоупругой жидкости в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления на основе обобщённой модели Максвелла. Решением поставленной задачи определены формулы для распределения скорости, расход жидкости и другие гидродинамические величины. На основе найденных формул проанализированы переходные процессы при нестационарном течении вязкоупругой жидкости в плоском канале. По результатам анализа было показано, что переходные процессы под влиянием числа Дебора, определяющие свойство упругости жидкости в упруговязком, принципиально отличаются от переходного процесса в ньютоновской жидкости.*

Ключевое слово: *вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, продольная скорость, расход жидкости, стационарное течение.*

MAXVELL MODELI FOYDALANISHDA YASSI KANALDAGI VISKOELASTIK SIQMAS SUYUQLIKNING BEQAROR OQIMINI O‘RGANISH

Annotatsiya. *Doimiy bosim gradienti ostida tekis kanaldagi viskoelastik suyuqlikning beqaror oqimi bilan bog‘liq muammolar Maksvellning umumlashtirilgan modeli yordamida hal qilinadi. Bu muammoning yechimi tezlikni taqsimlash, suyuqlik oqimi tezligi va boshqa gidrodinamik miqdorlar formulalarini beradi. Bu formulalar asosida yassi kanalda viskoelastik suyuqlikning turg‘un bo‘lmagan oqimida vaqtinchalik jarayonlar tahlil qilinadi. Tahlil shuni ko‘rsatadiki, elastik suyuqlikdagi suyuqlikning elastikligini aniqlaydigan Debora sonining ta’siri ostida o‘tuvchi jarayonlar Nyuton suyuqligidagi vaqtinchalik jarayondan tubdan farq qiladi.*

Kalit so‘zlar: *qovushoq-elastik suyuqlik, o‘zgaruvchan oqim, bo‘ylama tezlik, suyuqlik sarfi, barqaror oqim.*

STUDY OF UNSTEADY FLOW OF A VISCOELASTIC INCOMPRESSIBLE FLUID IN A FLAT CHANNEL USING THE MAXWELL MODEL

Abstract. *Problems concerning the unsteady flow of a viscoelastic fluid in a flat channel under a constant pressure gradient are solved using the generalized Maxwell model. The solution to this problem yields formulas for velocity distribution, fluid flow rate, and other hydrodynamic quantities. Based on these formulas, transient processes during unsteady flow of a viscoelastic fluid in a flat channel are analyzed. The analysis shows that transient processes under the influence of the Deborah number, which determine the elasticity of a fluid in an elastoviscous fluid, are fundamentally different from the transient process in a Newtonian fluid.*

Keywords: *viscoelastic fluid, unsteady flow, longitudinal velocity, fluid flow rate, steady flow.*

Введение. Исследования нестационарного течения вязкоупругой жидкости в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления, широко используется в технических и технологических процессах. Как известно, вязкоупругие свойства неньютоновских жидкостей существенно влияют на гидродинамические характеристики потока. Так, например, при транспортировке высоковязкой и тяжёлой нефти и нефтепродуктов на большие расстояния и циркуляции бурового раствора в скважине одной из важных задач является разработка эффективного метода снижения гидродинамического сопротивления потоков [1,2]. В трубопроводном транспорте вязкой или вязкоупругой жидкости при пусковом и остановочном режиме рабочих органов (механизмов) наблюдается нестационарный поток. В таких случаях изменение расхода жидкости и другие гидродинамические характеристики потока существенно отличается от характеристики обычных потоков ньютоновской жидкости. Однако такие потоки часто используется в различных технологических процессах, в химической технологии, в биологической механике и в акустике. Многие исследования посвящены изучению нестационарных течений ньютоновских и неньютоновских, в частности, вязкоупругих жидкостей в трубах и каналах [3-10]. Впервые нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе было исследовано в

работах И.С. Громеки [3,4]. В них он определил изменение скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига на стенке. С помощью этих формул можно определить время установления гидродинамических величин при течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе. Затем эта задача была исследована во многих работах [5-10] для нестационарного течения вязкой жидкости. В [11] проанализированы нестационарные вязкоупругие течения жидкости Олдройда-В через бесконечную трубу круглого сечения. Жидкость движется под действием зависящего от времени градиента давления в трёх следующих случаях: 1) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальным законом; 2) градиент давления пульсирует; 3) градиент давления постоянный. Получены формулы для распределения скорости жидкости, расхода жидкости и другие гидродинамические характеристики потока.

Нестационарные пульсирующие течения вязкой и вязкоупругой жидкости в круглой цилиндрической трубе бесконечной длины под действием гармонического изменяющего градиента давления исследованы в работе [12]. При помощи решения задачи получены расчётные формулы для распределения скорости и расхода жидкости. Численные расчеты показали, что в пульсирующем потоке при меньших значениях безразмерной частоты колебаний скорость, расход и др. гидродинамические параметры из нулевого начального состояния устанавливаются медленно, сравнительно при больших частотах колебаний и близки к параметрам не пульсирующего потока. В осциллирующем потоке при больших значениях частоты колебаний, эти параметры устанавливаются практически мгновенно. На основе модели Максвелла рассмотрена задача нестационарного колебательного течения вязкоупругой жидкости в плоском канале [13,14]. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также её ускорение являются ограничивающим факторами для использования квазистационарного подхода. В работах [15,16] решены задачи нестационарного течения вязкоупругой жидкости в длинных трубах кольцевого сечения. Реологические характеристики жидкости считались не зависящими от скорости деформирования, с этим условием задача приводится к линейным уравнениям, и её аналитическое решение получено с помощью преобразования Лапласа. Результаты расчётов проведены для жидкости с постоянными свойствами соответствующей Ньютоновской жидкости, где развитие профилей скорости носит диффузионный характер. Скорость и касательные напряжения в каждой точке зазора монотонно растут до своих стационарных значений. Упругость жидкости придаёт волновой характер развитию её течения. Ламинарные колебательные течения вязкоупругих жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [17], где демонстрируется много интересных особенностей, отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей.

В работе [18] исследовано электрокинетическое течение вязкоупругих жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однонаправленно, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считается малыми, поэтому уравнение Пуассона-Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, когда преобладают упругие свойства жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливает электрокинетических эффектов, и вместе с тем усиливается эффективность преобразования электрокинетической энергии.

В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменение максимальной продольной скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига, на стенке возникающие при движении нестационарного потока, исследовано относительно мало. В большинстве случаев в гидродинамических моделях нестационарных течений жидкости заменялись последовательностью течений с квазистационарным распределением гидродинамических величин. В настоящее время вопрос правомерности исследования квазистационарных характеристик для определения поля касательных напряжений в нестационарных течениях вязкой и вязкоупругой жидкостей практически не решён. Естественно, что в таких условиях возникает необходимость использования гидродинамических моделей нестационарных процессов, учитывающих изменение гидродинамических характеристик потока в зависимости от времени.

В данной работе исследуется нестационарное течение вязкоупругой жидкости на обобщённой модели Максвелла в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления. Определяются расчётные формулы для распределения продольной скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига на стенке. Анализируются переходные процессы при пусковом режиме течения вязкоупругой жидкости.

1.Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим задачи нестационарного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Ось $0x$ проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось $0y$ направлена перпендикулярно к оси $0x$. Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала.

Дифференциальное уравнение движения вязкоупругой несжимаемой жидкости в напряжение имеет следующие вид [7-12,19-21]

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

где u - продольная скорость; p-давление; ρ-плотность; τ-касательная напряжения; t-время. Реологические уравнения состояния жидкости принимается в виде обобщённого уравнения Максвелла [17,18] $\tau=\tau_s+\tau_p,\ \tau_s=-\eta_s\frac{\partial u}{\partial y},\ \lambda\frac{\partial \tau_p}{\partial t}+\tau_p=-\eta_p\frac{\partial u}{\partial y}$ (2)

Здесь λ - время релаксации; τ_s-касательная напряжения Ньтоновской жидкости; τ_p-касательная напряжения Максвелловской жидкости; τ-касательная напряжения раствора; η_s-динамическая вязкость Ньтоновской жидкости; η_p - динамическая вязкость Максвелловской жидкости. Между динамическими вязкостями выполняется равенство [17,18,20,21] $\eta=\eta_s+\eta_p$

где η - динамическая вязкость раствора.

Подставляя (2) в уравнение движения (1) для скорости жидкости, получаем:

$$\rho(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial u}{\partial t}=-(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial p}{\partial x}+\eta_s(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\eta_p\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

Чтобы решать уравнений (3), необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Считаем, что до момента $t=0$, жидкость находится в покое. С момента $t=0$ жидкость движется за счёт положительного постоянного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}=const.$ В этом случае начальное условие и условие прилипания на стенке будут иметь вид:

$u=0$ при $t=0$, $u=0$ при $y=h$ (4)

В данном случае течение происходит симметрично по оси канала, поэтом $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ при $y=0$ (5)

Проводя преобразование Лапласа-Карсона, т.е. переходя от оригинала к изображению в уравнении (3) и граничными условиями (4) и (5), получим:

$$\frac{d^2\overline{u}(y,s)}{dy^2}+\frac{i^2\rho s}{\overline{\eta\eta*}(s)}\overline{u}(y,s)=\frac{1}{\overline{\eta\eta*}(s)}\frac{d\overline{p}(x)}{dx},\ \eta*(s)=(\frac{\eta_s}{\eta}+\frac{\eta_p}{\eta}\frac{1}{1+s\lambda})=(X+Z\frac{1}{1+s\lambda}) \quad (6)$$

Где X и Z - есть доля Ньютоновской и Максвеллской жидкости соответственно [17,18].

Фундаментальными решениями уравнения без правой части будут функциями косинуса и синуса $cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\overline{\eta\eta*}(s)}}y\right)$ и $\sin\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\overline{\eta\eta*}(s)}}y\right)$, а частным решением уравнения (3) с правой частью будет постоянная $-\frac{1}{\rho s}\frac{d\overline{p}(x)}{dx}$

Таким образом, общее решение уравнения (3) будет иметь вид:

$$\overline{u(y,s)}=Ccos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\overline{\eta\eta*}(s)}}y\right)+D\sin\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\overline{\eta\eta*}(s)}}y\right)-\frac{1}{\rho s}\frac{d\overline{p}(x)}{dx}. \quad (7)$$

С помощью граничного условия (5) находим постоянное D которое равняется нулю, а для определения постоянной C воспользуемся граничным условием (4). В результате этого для изображения скорости будем иметь:

$$\bar{u}(y,s)=\frac{1}{\rho s}\left(-\frac{d\bar{p}(x)}{dx}\right)\left(1-\frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)}\right).(8), u(y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}\frac{1}{\rho s}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left(1-\frac{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)}\right)\frac{ds}{s}.(9).$$

Используя формулу обращения преобразования Лапласа-Карсона, получим для скорости движения жидкости следующее интегральное выражение: (9)

Для вычисления интеграла (9) по комплексному переменному надо установить вычеты под интегрального выражения. Приравнивая знаменатель к нулю, и учитывая, что корни косинуса являются действительными числами, найдем: $s=0$ и $s=-\nu\frac{s_{1,2\eta}}{h^2}$ (10) Здесь $s_{1,2,n}$ есть решения трансцендентного уравнения $\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)=0$. Все полюсы будут простыми, поэтому мы можем воспользоваться разложением мероморфной функции на простые дроби в виде $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}=\frac{1}{\rho s}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{\left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)-\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right)\right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)}\frac{e^{st}}{s}=\frac{C_0}{s}+\sum_{i=1}^{2}\frac{C_{i,n}}{s-s_{i,n}}$ (11)

$$F_1(s)=\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)-\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right)\right)e^{st};\quad F_2(s)=\rho s^2\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right).$$

Для определения вычета C_0 мы должны умножить обе части равенство (11) на s, а затем устремить s к нулю, т.е.

$$C_0=\lim_{s\to 0}\frac{sF_1(s)}{F_2(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)-\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right)\right)}{\rho s^2\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)}=\frac{1}{2\eta}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)h^2\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right).(12)$$

Здесь учтено, что $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$. Для определения вычета $C_{i,n}$ надо умножить (11) на разность $s-s_{in}$ и устремить s к значению s_{in}, учитывая, что

$$C_{in}=\lim_{s\to s_{in}}\frac{F_1(s)}{\frac{F_2(s)-F_2(s_{in})}{s-s_{in}}}=\frac{F_1(s_{in})}{F_2'(s_{in})}.\qquad(13)$$

Теперь нам необходимо найти значение s_{in}, для этого воспользуемся уравнением $\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)=0$, его решение будет иметь вид: $i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h=\frac{2n+1}{2}\pi$ (14)

Здесь, учитывая, что $\eta^*(s)=(X+Z\frac{1}{1+s\lambda})$ приведём уравнение (14) к виду:

$$\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}h^2=-\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 \text{ или } s=-\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2\frac{\nu}{h^2}(X+Z\frac{1}{1+s\lambda}).\qquad(15)$$

Отсюда легко перевести уравнение (15) к следующему квадратному уравнению:

$$De\bar{s}^2-\bar{s}(1+XDea_0^2)+a_0^2=0\qquad(16)$$

Здесь $a_0=\frac{2n+1}{2}\pi$, $De=\frac{\lambda\nu}{h^2}$, $s=-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}$. Квадратное уравнение (16) имеет два корни: действительные разные, действительные равные и комплексные сопряжённые. Все эти случаи мы будем рассматривать в численном расчёте и обсуждении.

Теперь при учёте $\bar{s} = s_{in}$, найдём $C_{in} = \lim\limits_{s \to s_{in}} \dfrac{F_1(\bar{s})}{\dfrac{F_2(\bar{s}) - F_2(s_{in})}{\bar{s} - s_{in}}} = \dfrac{F_1(s_{in})}{F_2'(s_{in})}$, здесь числитель легко вычисляется:

$$F_1(s_{in}) = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s_{in}}{\eta\eta^*(s_{in})}}h\right) - cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s_{in}}{\eta\eta^*(s_{in})}}y\right)\right)e^{s_{in}t} = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(-cos\left(\frac{(2n+1)}{2}\pi\frac{y}{h}\right)\right)e^{s_{in}t}. (17)$$

Здесь учтено, что $\cos\left(i\sqrt{\dfrac{\rho s_{in}}{\eta\eta^*(s_{in})}}h\right) = 0$ Знаменатель вычисляется с помощью производной по s

$$F_2'(s) = 2\rho s\cos\left(ih\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}\right) - \rho s^2\sin\left(ih\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}\right)\left(ih\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}\right)_s' = -\rho s^2(-1)^n\left(ih\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}\right)_s' = -\rho s^2(-1)^n\frac{ih}{\sqrt{\nu}}\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s' (18) \quad (18)$$

где: $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$. Производная $\left(\sqrt{\dfrac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s'$ из формулы (18) вычисляется следующим образом:

$$\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s' = \frac{1}{2\left(\sqrt{\dfrac{s}{\eta^*(s)}}\right)}\left(\frac{s}{\eta^*(s)}\right)_s' = \frac{1}{2\left(\sqrt{\dfrac{s}{\eta^*(s)}}\right)}\left(\frac{\eta^*(s) - s\left(\eta^*(s)\right)_s'}{\eta^{*2}(s)}\right). (19)$$

Так как $\dfrac{ih}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\dfrac{s}{\eta^*(s)}} = \dfrac{2n+1}{2}\pi$, поэтому: $\left(\sqrt{\dfrac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s' = \dfrac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}}\left(\dfrac{\eta^*(s) - s\left(\eta^*(s)\right)_s'}{\eta^{*2}(s)}\right)$. (20)

Учитывая, что $\eta^*(s) = -\dfrac{4s}{(2n+1)^2\pi^2}\dfrac{h^2}{\nu}$, тогда (20) приобретает вид:

$$\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s' = \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}}\left(\frac{\eta^*(s) - s\left(\eta^*(s)\right)_s'}{\eta^{*2}(s)}\right) = \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}}\frac{(2n+1)^4\pi^4}{16s^2}\frac{\nu^2}{h^4}\left(\eta^*(s) - s\left(\eta^*(s)\right)_s'\right) (21)$$

Найдено производное (21) , учитывая (18) находим формулу для вычисления знаменателя (13) :

$$F_2'(s) = -\rho s^2(-1)^n\frac{ih}{\sqrt{\nu}}\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}}\right)_s' = -\rho s^2(-1)^n\frac{ih}{\sqrt{\nu}}\frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}}\frac{(2n+1)^4\pi^4}{16s^2}\frac{\nu^2}{h^4}\left(\eta^*(s) - \right. \quad (22)$$

$$\left. -s\left(\left(\eta^*(s)\right)_s'\right) = \rho(-1)^n\frac{(2n+1)^3\pi^3}{16}\frac{\nu}{h^2}\left(\eta^*(s) - s\left(\left(\eta^*(s)\right)_s'\right)\right.\right).$$

Вместо $\eta^*(s)$, подставляя его значение:

$$\eta^*(s) = (X + Z\frac{1}{1+s\lambda}) \quad \eta^{*\prime}(s) = \frac{-\lambda Z}{(1+s\lambda)^2}, \eta^*(s) - s\eta^{*\prime}(s) = (X + Z\frac{1}{1+s\lambda}) - \frac{-s\lambda Z}{(1+s\lambda)^2} = \frac{1 + 2\lambda s + \lambda^2 s^2 X}{(1+s\lambda)^2}$$

в (22) и учитывая, что $s = -\dfrac{\nu}{h^2}\bar{s}$, $De = \dfrac{\lambda\nu}{h^2}$, получим:

$$F_2'(\bar{s}) = \rho(-1)^n\frac{(2n+1)^3\pi^3}{16}\frac{\nu}{h^2}\left(\eta^*(s) - s\left(\left(\eta^*(s)\right)_s'\right) = (-1)^n\frac{(2n+1)^3\pi^3}{16}\frac{\eta}{h^2}\frac{1 - 2De\bar{s} + De^2\bar{s}^2 X}{(1 - sDe)^2} (23)$$

Найденные значения $F_1(\bar{s})$ и $F_2'(\bar{s})$ из (17) и (23), подставляя в (13) и заменяя $\bar{s}$ на $\bar{s}_{in}$, получим окончательные значения для C_{in} :

$$C_{in}=\frac{F_1(s_{in})}{F_2'(s_{in})}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(-cos\left(\frac{(2n+1)}{2}\pi\frac{y}{h}\right)e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}\right)}{(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^3\pi^3}{16}\frac{\eta}{h^2}\frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-s_{in}De)^2}}=\frac{16h^2}{\eta}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^n cos\left(\frac{(2n+1)}{2}\pi\frac{y}{h}\right)e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3\pi^3\frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-s_{in}De)^2}}.$$

Суммируя значеняя C_o и C_{in} и подставляя в (11), находим решение уравнение (3) в следующем виде:

$$u(y,t)=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)+32\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^n\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right)e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3\pi^3\frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-s_{in}De)^2}}.\right.,(24)\quad\frac{u(0,t)}{u_0}=1+32\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^n e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3\pi^3\frac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-\bar{s}_{in}De)^2}}.(25)$$

Здесь $u_0=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)$. Выражение (25) указывает на то , что при стремлении t к бесконечности распределение скорости становится параболическим т.е. $u(y,t)=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)\right.$

Таким образом, решение задачи о стационарном движении жидкости между параллельными стенками получается из решения задачи о нестационарном движении при обращении t в бесконечность.

2. Числовые расчёты и обсуждение. С использованием полученных формул (24) и (25) проведены числовые расчёты по установлению нестационарных процессов гидродинамических характеристик при нестационарном течении вязкоупругой жидкости. Для удобства сравнения установления Ньютоновской жидкости с установлением вязкоупругой жидкости проведём сначала исследование Ньютоновской жидкости. Формулы для расчёта Ньютоновской жидкости получается из формулы (24) и (25) при $\lambda=0,\ \eta^*(s)=1,\ X=1,\ Z=0$ в этом случае решение трансцендентного уравнения имеет вид:

$$\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta}}h\right)=0,\ \left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta}}h\right)=\frac{2n+1}{2}\pi,\ \ s=-\frac{\nu}{h^2}\bar{s},\ \ \bar{s}=\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2\ (27)$$

При помощи этих выражений из формулы (24) и (25) можно найти расчётные формулы для исследования Ньютоновской жидкости:

$$u(y,t)=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)+32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right)e^{-\frac{\nu}{h^2}\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2t}\right]\ (28)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_{0\max}}=1+32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}e^{-\frac{\nu}{h^2}\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2t}\qquad(29)$$

На основании формулы (29) произведены числовые расчёты, показывающие изменение отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного течения в зависимости от времени, которое показано на рисунке 1 Видно, что относительная максимальная скорость при нестационарном течении Ньютоновской жидкости, в зависимости от времени, монотонно увеличивается до величины, соответствующей стационарному течению.

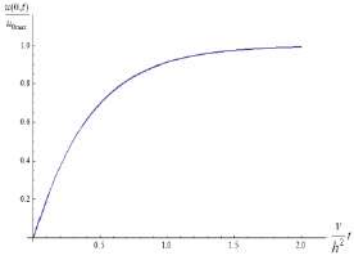


Рисунок 1. Изменение во времени отношение максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении Ньютоновской жидкости

Информация о процессе перехода ньютоновской жидкости из нестационарного режима течения в стационарный приведена во многих литературных источниках [7-12]. Однако процесс перехода вязкоупругих жидкостей из нестационарного течения в стационарное исследован относительно мало. Работы [15,16] также посвящены нестационарным движениям вязкоупругой жидкости в кольцевых трубах, решение которых основано на методе конечных разностей. Ниже мы приводим анализ задачи, решённой на основе обобщённой двух жидкостной модели Максвелла. Для этого используем формулы (24) и (25). Одним из физических свойств потока вязкоупругой жидкости является то, что в начальный момент времени скорость достигает своего максимального значения, затем переходит в стадию монотонного уменьшения и стационарного течения. На основе формул (24) и (25) проанализирован процесс перехода из нестационарного состояния к стационарному состоянию в плоском канале вязкоупругой жидкости, на основе моделью Максвелла. В данном случае при решении квадратного уравнения (16) определяются корни $s_{1n,2n}$, входящие в формулы (24) и (25). Известно, что квадратное уравнение (16), имеет два корня: действительные разные, действительные равные, и комплексные сопряжённые.

$$s_{1n}=\frac{1+XDea_0^2+\sqrt{1-2Dea_0^2(X-2)+X^2De^2a_0^4}}{2De}(30),\ s_{2n}=\frac{1+XDea_0^2-\sqrt{1-2Dea_0^2(X-2)+X^2De^2a_0^4}}{2De}(31)$$

Для того чтобы, корни квадратного уравнения были действительными, необходимо, чтобы дискриминант в формулах (30) и (31)

$(1-2Dea_0^2(X-2)+X^2De^2a_0^4)$был равен или больше нуля. В данном случае корни действительны, поэтому решения уравнений (24) и (25) представлены в таком виде:

$$u(y,t)=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)+32\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right)e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3\pi^3\dfrac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-s_{in}De)^2}}\right] \quad (32)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_0}=1+32\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^{n+1}e^{-\frac{\nu}{h^2}\bar{s}_{in}t}}{(2n+1)^3\pi^3\dfrac{1-2De\bar{s}_{in}+De^2\bar{s}_{in}{}^2X}{(1-\bar{s}_{in}De)^2}}. \quad (33)$$

В этом случае решения (32) и (33) будут выглядеть так же, как решения (24) и (25). Анализ формулы (32) и (33) представлен на рисунке 2.

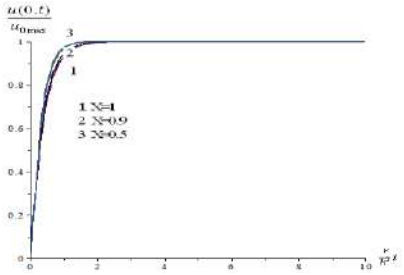


Рисунок 2. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении вязкоупругой жидкости (когда число Дебора $De=0.1$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости)

Из рисунке 2 видно, что в данном случае процессы нестационарности в потоке упруговязкой жидкости практически ничем не отличаются от процессов нестационарности в ньютоновской жидкости. В этом случае вместо нестационарности потока упруговязкой жидкости можно принять процесс установления нестационарного потока ньютоновской жидкости. Теперь рассмотрим случай, когда корни квадратного уравнения (16) состоят из комплексных сопряжённых корней. Этот случай наблюдается, когда дискриминант уравнения (16) меньше нуля. В этом случае решение квадратного уравнения определяется сдедующим образом:

$$s_{1n}=\frac{1+XDea_0^2+i\sqrt{2Dea_0^2(2-X)-X^2De^2a_0^4-1}}{2De}=a+bi.(34),s_{2n}=\frac{1+XDea_0^2-i\sqrt{2Dea_0^2(2-X)-X^2De^2a_0^4-1}}{2De}=a-bi.(35).$$

Здесь $a=\frac{1-XDea_0^2}{2De}$, $b=\frac{\sqrt{2Dea_0^2(2-X)-X^2De^2a_0^4-1}}{2De}$, $a_0=\frac{2n+1}{2}\pi$, $De=\frac{\lambda\nu}{h^2}$, $s_{1n}=a+bi$, $s_{2n}=a-bi$

Тогда решения (24) и (25), имеют следующий вид:

$$u(y,t)=\frac{h^2}{2\eta}\left(-\frac{dp(x)}{dx}\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi\frac{y}{h}\right)2e^{-\frac{\nu}{h^2}a_nt}}{(2n+1)^3\pi^3(M_2^2+N_2^2)}(M_3\cos b_n\frac{\nu}{h^2}t+N_3\sin b_n\frac{\nu}{h^2}t)(36)$$

$$\frac{u(0,t)}{u_0}=1+32\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}e^{-\frac{\nu}{h^2}a_nt}}{(2n+1)^3\pi^3(M_2^2+N_2^2)}(M_3\cos b_n\frac{\nu}{h^2}t+N_3\sin b_n\frac{\nu}{h^2}t).\quad(37)$$

Здесь $M_1=1-2a_nDe+a_n^2De^2-b_n^2$, $N_1=2a_nb_n-2b_nDe$, $M_2=1-2a_nDe+a_n^2De^2X-De^2b_n^2X$,
$N_2=2a_nb_nDe^2X-2b_nDe, M_3=M_1M_2+N_1N_2$, $N_3=-(M_1N_2-M_2N_1)$

Используя формулу (37), анализируем результаты численного расчёта нестационарного течения упруговязкой жидкости, когда решения уравнения (16) состоят из комплексных сопряжённых корней. На рисунке 3-6 показаны изменения во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении вязкоупругой жидкости (когда числа Деборы имеют значения $De=0.5$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости) Из рисунков видно, что переход из нестационарного состояния в стационарное на основе обобщённой модели Максвелла вязкоупругой жидкости проявляется в виде волны, в отличие от ньютоновской жидкости. На рисунках 3-6 видно, что время перехода в модели Максвелла , вязкоупругой жидкости в несколько раз больше, чем время перехода в модели ньютоновской жидкости. Например, можно заметить, что 3 раза на рисунке 1.4, 4 раза на рисунке 2; 3,5 раза на рисунке 5 и 4,5 раза на рисунке 6.

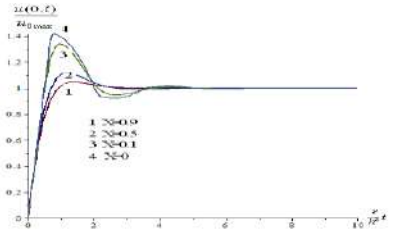


Рисунок 3. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении взкоупругой жидкости (когда число Дебора $De=0.5$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости)

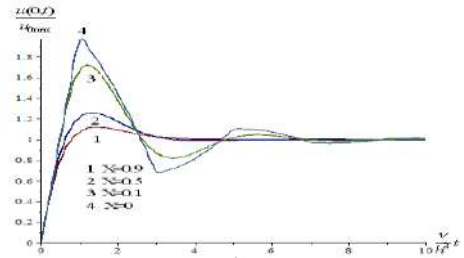


Рисунок 4. Изменение во времени отношение максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении взкоупругой жидкости (когда число Дебора $De=1$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости)

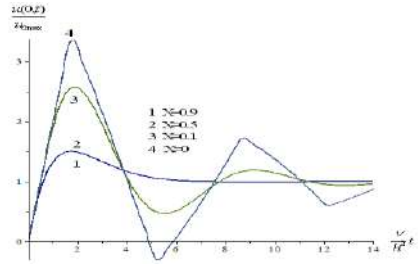


Рисунок 5. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении взкоупругой жидкости (когда число Дебора $De=3$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости)

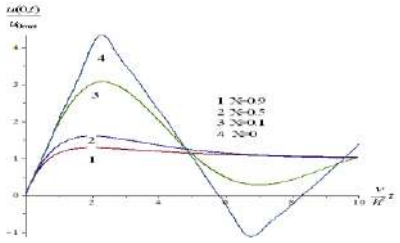


Рисунок 6. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении вязкоупругой жидкости (когда число Дебора $De = 5$, и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости)

В качестве основной причины резкого увеличения гидродинамических величин в процессе перехода упруговязкой жидкости, можно назвать силу инерции, учитываемую в модели Максвелла. Нетрудно видеть, что если убрать действие силы инерции, то она ничем не отличается от ньютоновской жидкости. Здесь эффект силы инерции объясняется наличием числа Деборы, то есть релаксации. Тот факт, что увеличение числа Деборы превышает отношение максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля вязкоупругой жидкости в 4,5-5 раз по сравнению с максимальной скоростью ньютоновской жидкости в переходном процессе, представлен на рисунках 5 и 6. Из рисунков 3-6 видно, что вязкоупругая жидкость, создаваемая смешиванием ньютоновской жидкости с нестационарными потоками вязкоупругой жидкости, может быть в определённом смысле стабилизирована нестационарным движением смеси. В этом случае мгновенное максимальное увеличение относительной максимальной скорости в результате увеличения концентрации ньютоновской жидкости может нормализовать свойства. Обеспечение реализации этой функции играет важную роль в технических и технологических процессах при предотвращении технических сбоев и неполадок.

Заключение. На основе обобщённой модели Максвелла решена задача о нестационарном течении упруговязкой жидкости под воздействием постоянного градиента давления в плоском канале. В решении определены формулы для определения распределения профиля скорости, расхода жидкости в нестационарном потоке упруговязкой жидкости. На основе установленных формул проанализированы процессы перехода характеристик упруговязкой жидкости в плоском канале из нестационарного в стационарное состояние. По результатам анализа было показано, что переходные процессы под влиянием числа Дебора, определяющие свойство упругости жидкости в упруговязком, принципиально отличаются от переходного процесса в ньютоновской жидкости. При этом было обнаружено, что процессы перехода характеристик упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное при малых значениях числа Дебора практически не отличаются от процессов перехода ньютоновской жидкости. При больших значениях числа Деборы установлено, что процесс перехода упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное состояние носит волновой характер, в отличие от процесса перехода ньютоновской жидкости, и время перехода в несколько раз больше, чем время перехода ньютоновской жидкости. Было обнаружено также, что при переходе могут возникать возмущённые процессы. Эти возмущённые процессы, происходящие в нестационарных потоках упруговязкой жидкости, могут быть в определённом смысле стабилизированы путём перемешивания в неё ньютоновской жидкости. Это показывает, что мгновенное максимальное увеличение относительной максимальной скорости в результате увеличения концентрации ньютоновской жидкости может нормализовать её возмущённые свойства. Реализация этого свойства важна в технических и технологических процессах при предотвращении технических сбоев или неполадок.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мирзаджанзаде А.Х., Караев А.К., Ширинзаде С.А. Гидравлика в бурении и цементировании нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1977.

2. Аметов И.М., Байдиков Ю.Н., Рузин Л.М. и др. Добыча тяжелых и высоковязких жидкостей. М.: Недра, 1985.

3. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Собр. Соч. – М., 1952. – с. 149-171.

4. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубах. Собр. соч. – М., 1952. – с. 172-183.13.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Дрофа, 2003.-840 с.8.

6. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков, – Ташкент, "Фан",1986. – 192 с.

7. Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н. Введение в механику несжимаемой жидкости. –Пермь, Изд. Пермского нац. иссл. полит. университета, 2019. – 127 с.

8. Hassan, A. Abu- EL. and EL-Maghawry Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd B fluid in: Rheology-New concepts, Applications and Methods, EA by Durairaj R., Published by In Tech., 2013, ch. 6., p.91-106

9 Наврузов К., Хакбердиев Ж.Б. Динамика неньютоновских жидкостей. – Ташкент: Фан", 2000.–246с

10. Navruzov K., Sharipova Sh. B. Tangential Shear Stress in an Oscillatory Flow of a Viscoelastic incompressible fluid in a plane Channel //Fluid Dynamics, 2023, vol. 58, N0 3 p.360-370.

11. Navruzov K., Fayziev R.A., Mirzoev A.A. Sharipova Sh. B. Tangential Shear Stress in an Oscillatory Flow of a Viscoelastic Fluid in a Flat Channel // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2023, p.1-14.

12. Шульман З.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. – Минск, 1983. – 256 с.

УДК 53

ПЕРВИЧНЫЕ ГАЛАКТИЧЕСКИЕ КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ И ГЕОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Хамраев Юлдаш Бурханович,
Самаркандский государственный педагогический институт,
yu-hamrayev@mail.ru
Янке Виктор Гугович,
Институт Пушкова (ИЗМИРАН) РАН
yanke@izmiran.ru
Абдурахмонов Мухиддин,
Самаркандский государственный педагогический институт
Тошмуродов Нуриддин Пардакулович,
Самаркандский государственный педагогический институт
nuriddintoshmurodov94@mail.ru

Аннотация. *В настоящей работе выполнен комплексный анализ взаимодействия первичных галактических космических лучей (ГКЛ) с магнитным полем Земли и особенностей проявления геомагнитных эффектов. Рассмотрены широтные вариации потоков, энергия и направленная фильтрация частиц в магнитосфере, а также влияние солнечной активности на локальные значения жёсткости отсечки $R_c(\phi,t)$. Использованы обобщённые ряды наземных нейтронных мониторов, данные спутниковых миссий и модельные расчёты R_c. Полученные результаты важны для оценки радиационных рисков в авиации и на околоземных орбитах, а также для совершенствования прогностических моделей космической погоды.*

Ключевые слова: *галактические космические лучи, геомагнитный эффект, жёсткость отсечки, нейтронный монитор, магнитосфера, космическая погода, анизотропия, полярные эффекты.*

PRIMARY GALACTIC COSMIC RAYS AND GEOMAGNETIC EFFECTS

Abstract. *This paper presents a comprehensive analysis of interactions between primary galactic cosmic rays (GCRs) and the Earth's magnetic field, with emphasis on geomagnetic effects. Latitude-dependent flux variations, energy-dependent filtering of low-energy particles, and solar-activity-driven modulations are discussed. The study synthesizes ground-based neutron monitor records, satellite observations, and model computations of cutoff rigidity $R_c(\phi,t)$. The outcomes are relevant for radiation risk assessments in aviation and near-Earth space operations, and for improving space weather forecasting tools.*

Keywords: *galactic cosmic rays, geomagnetic effect, cutoff rigidity, neutron monitor, magnetosphere, space weather, anisotropy, polar effects.*

BIRINCHI GALAKTIK KOSMIK NURLAR VA GEOMAGNETIK TA'SIRLAR

Annotatsiya. *Ushbu maqolada birlamchi galaktik kosmik nurlarning Yer magnit maydoni bilan o'zaro ta'siri va geomagnit effektlarning namoyon bo'lishi tahlil qilinadi. Geomagnit kenglik va quyosh faolligiga bog'liq ravishda kosmik nurlar oqimi va energiya spektridagi o'zgarishlar ko'rib chiqildi. Tadqiqotda neytron monitorlari, sun'iy yo'ldosh ma'lumotlari va R_c modellashtiruvi ishlatiladi. Natijalar aviatsiya va kosmik texnika uchun radiatsiya baholashda geomagnit omillarni hisobga olish zarurligini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: *galaktik kosmik nurlar, geomagnit effect, qattiqlik (Rc), neytron monitor, magnitosfera, kosmik ob-havo, anizotropiya, qutb effektlari.*

Введение. Космические лучи (КЛ) – это поток высокоэнергетических заряженных частиц (в основном протонов и ядер лёгких элементов), приходящих из внешних источников галактики и внегалактических объектов. Первичные галактические космические лучи (ГКЛ) подвергаются модуляции в гелиосфере и фильтрации в магнитосфере Земли. Траектории заряженных частиц искривляются, часть частиц отклоняется, часть не достигает атмосферы из-за магнитного экрана — это и есть геомагнитные эффекты.

Долгосрочное наблюдение за потоками КЛ важно не только для фундаментальной астрофизики, но и для прикладных задач: оценки радиационной нагрузки на самолётах, прогнозирования условий для работы электроники спутников и планирования пилотируемых миссий. В последние годы наблюдательные миссии (AMS-02, PAMELA, ACE) и широкая сеть наземных нейтронных мониторов обеспечили большое число высококачественных данных, что позволяет сочетать наблюдения и моделирование для детального изучения $R_c(\phi,t)$ — жёсткости отсечки как функции широты и времени.

В работе поставлены цель и задачи, направленные на систематизацию знаний о влиянии магнитного поля Земли на доступность первичных ГКЛ, а также на оценку практической значимости этих эффектов.

Цель и задачи исследования. Цель: исследовать влияние магнитного поля Земли и его временных возмущений на пространственное распределение и спектральные характеристики первичных галактических космических лучей у поверхности Земли.

Задачи:

• Систематизировать наблюдательные ряды нейтронных мониторов по широтам.

• Построить и проанализировать модельную зависимость жёсткости отсечки $R_c(\phi)$.

• Оценить влияние магнитных бурь (индексы K_p, Dst) на локальные изменения потока.

• Выработать рекомендации по учёту геомагнитных эффектов в оценках радиационной безопасности.

Объект и методы исследования. Объект исследования: первичные галактические космические лучи и их взаимодействие с магнитным полем Земли (магнитосферой).

Методология:

1. Наблюдательные данные. Обобщённые ряды нейтронных мониторов (Oulu, Tashkent, Alma- Ata, Mexico City и др.) используются для оценки широтной зависимости интенсивности и временных вариаций.

2. Спутниковые данные. AMS-02, PAMELA, ACE – для определения формы энергетического спектра первичных частиц в диапазоне $0.1–10^3$ GeV.

Моделирование жёсткости отсечки. В приближённой форме жёсткость отсечки R_c аппроксимируется: $R_c(\phi) \approx R_0 \cos^4 \phi$,

где ϕ – геомагнитная широта, R_0 – параметр, зависящий от локальных особенностей магнитного поля. Более точные расчёты выполняются методом обратной трассировки траекторий заряженных частиц в заданной конфигурации магнитного поля (модель Tsyga- nenko и её модификации).

3. Статистический анализ. Корреляционный анализ временных рядов с индексами геомагнитной активности (K_p, Dst) и спектральный анализ краткосрочных вариаций.

4. Визуализация. Построение кривых $I(\phi)$ и $R_c(\phi)$ средствами pgfplots; табличное сравнение репрезентативных станций.

Анализ литературы. За последние 10–15 лет исследования в области модуляции КЛ и геомагнитной фильтрации существенно продвинулись. Potgieter (2013) дал обзор процессов модуляции в гелиосфере; Usoskin et al. (2017) — анализ вариаций потоков в полярных областях; Mishev et al. (2021) — моделирование отсечек; Koldobskiy et al. (2021) и Adriani et al. (2017) исследовали временную эволюцию спектров по данным AMS-02 и PAMELA. Работы по численному моделированию (Tsyganenko) обеспечивают инструменты расчёта локальных значений R_c с учётом возмущений магнитосферы.

Обзор показывает необходимость сочетания наблюдений и моделирования: наблюдательные ряды дают эмпирические тренды, а расчёты жёсткости отсечки позволяют интерпретировать энергетическую фильтрацию.

Результаты моделирования и наблюдений.

Широтная зависимость интенсивности

Модельные и наблюдательные данные демонстрируют возрастание интенсивности КЛ с увеличением геомагнитной широты. В простейшем подходе зависимость интенсивности $I(\phi)$ можно аппроксимировать как:

$$I(\phi) = I_0 + a\phi + b\phi^2,$$

где I_0, a, b — эмпирические параметры, определяемые по данным станций. На практике форма кривой определяется локальной топографией и высотой станции, а также текущим состоянием магнитосферы.

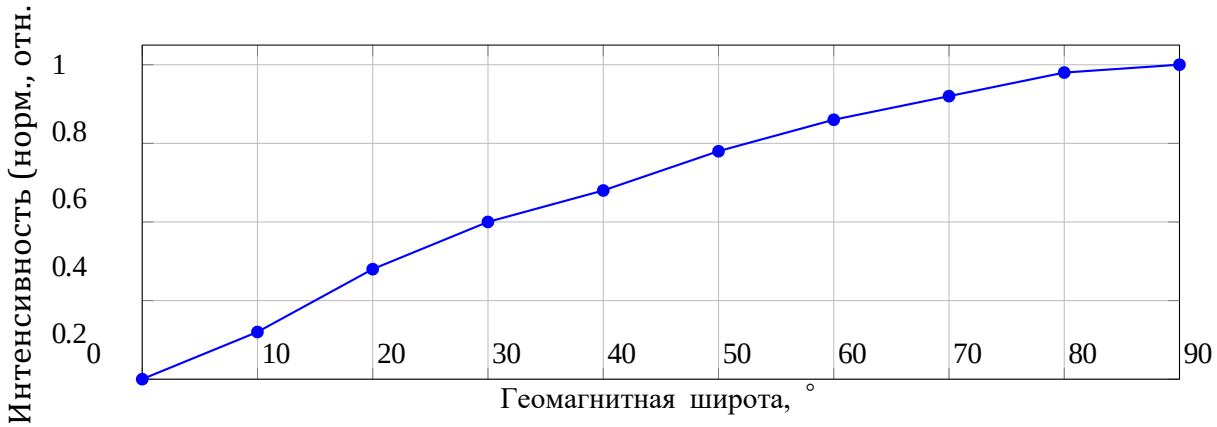


Рисунок 1. Модельная/идеализированная зависимость интенсивности КЛ от геомагнитной широты

Жёсткость отсечки $R_c(\phi)$

Используя приближение $R_c(\phi) \approx R_0 \cos^4 \phi$ с $R_0 \approx 15$ GV для приблизительной оценки, получаем характерную форму, убывающую к полюсам.

Жёсткость отсечки $R_c(\phi)$

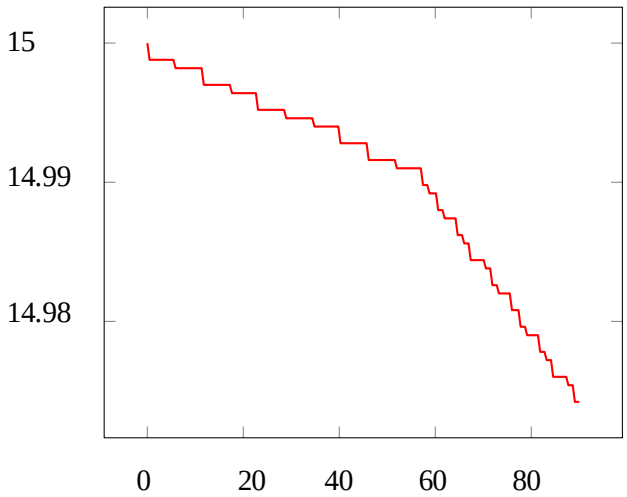


Рисунок 2. Модельная зависимость жёсткости отсечки $R_c(\phi)$ (приближённая формула)

Влияние магнитных бурь. Кратковременные возмущения магнитосферы (высокие значения индексов K_p, отрицательные всплески Dst) могут приводить к временному снижению R_c в отдельных областях и, как следствие, к вспышкам потока низкоэнергетических частиц на наземных станциях. Анализ корреляций показывает устойчивую связь между резкими изменениями нейтронного потока и крупными геомагнитными возмущениями.

Обсуждение. Результаты моделирования и анализ данных позволяют выделить несколько ключевых замечаний:

• Широтный эффект: экваториальные регионы демонстрируют наивысшие значения R_c, что

ограничивает проникновение низкоэнергетических компонент; полярные регионы наиболее подвержены доступу этих компонент.

• Энергетическая селективность: магнитосферный фильтр действует как энергоёмкий порог – частицы ниже локальной R_c не достигают атмосферы.

• Темпоральная изменчивость: магнитные бури и транзиентные возмущения изменяют локальные значения R_c и вызывают быстрые вариации нейтронного потока.

• Практические последствия: повышенная радиационная нагрузка на авиамаршрутах в высоких широтах и возможные риски для электроники спутников при бурных эпизодах.

Для точного количественного соответствия модели и наблюдений необходимо выполнять расчёты с использованием современных неоднородных моделей магнитного поля (Tsyganenko, TS04) и полной трассировки частичных траекторий в реальном времени.

Практическая значимость и научная новизна. Практическая значимость: предложенная схема анализа и модельные оценки R_c могут быть использованы при оперативной оценке радиационной обстановки для авиакомпаний и операторов космических аппаратов, а также при развитии систем прогноза космической погоды.

Научная новизна: интеграция обобщённых рядов нейтронных мониторов с приближенными и более точными расчётами жёсткости отсечки, а также акцент на временной изменчивости $R_c(\phi,t)$ при учёте магнитных бурь.

Сводная таблица (пример).

Таблица 1.

Репрезентативные станции и типичные относительные значения потока (иллюстрация)

Станция	Геогр. широта	Отн. интенсивность	Комментарий
Oulu (Finland)	65° N	Высокая	Близко к геомагнитному полюсу, чувствительна к полярным эффектам
Tashkent (Uzbekistan)	41° N	Средняя	Средние широты, влияние R_c заметно
Alma-Ata (Kazakhstan)	43° N	Средняя	Высота станции влияет на поток
Mexico City (Mexico)	19° N	Низкая	Экваториальные широты, высокая фильтрация

Выводы.

1. Геомагнитная конфигурация Земли определяет пространственное распределение и спектр первичных ГКЛ у поверхности.

2. Жёсткость отсечки $R_c(\phi,t)$ является ключевым параметром для оценки доступа низкоэнергетических частиц и должна учитываться при расчётах радиационной нагрузки.

3. Для прикладных задач (авиация, спутники) необходимо интегрировать расчёты R_c с оперативными данными о магнитосферной активности.

4. Перспективы: развитие динамических моделей $R_c(\phi,t)$ и их валидация по единой сети нейтронных мониторов и спутниковым наблюдениям.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Potgieter M.S. Solar modulation of cosmic rays // Living Reviews in Solar Physics. – 2013. – Vol. 10. – P. 3.

2. Usoskin I.G., Koldobskiy S.A., Kovaltsov G.A. et al. Cosmic ray variability and geomagnetic effects // Space Science Reviews. – 2017. – Vol. 212. – P. 383–408.

3. Bieber J.W., Evenson P.A. Cosmic ray anisotropy and geomagnetic effects // Astroparticle Physics. – 2019. – Vol. 104. – P. 47–58.

4. Mishev A., Usoskin I., Koldobskiy S. Modelling of geomagnetic cutoff rigidities // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2021. – Vol. 126, e2020JA028.

5. Maurin D., Melot F., Taillet R. Cosmic ray data from ground-based and satellite observations // Advances in Space Research. – 2014. – Vol. 54. – P. 350–365.

6. Gieseler J., Heber B., Herbst K. An empirical modification of the force field approach // Astronomy

& Astrophysics. – 2017. – Vol. 589. – P. A32.

7. Koldobskiy S.A., Bindi V., Corti C., et al. Solar modulation of cosmic rays observed by AMS-02 // Astrophysical Journal. – 2021. – Vol. 917. – P. 23.

8. Adriani O., Barbarino G.C., Bazilevskaya G.A., et al. PAMELA measurements of cosmic ray spectra // Astrophysical Journal. – 2017. – Vol. 801. – P. 29.

9. Moraal H., McCracken K.G. The time dependence of cosmic ray modulation // Space Science Reviews. – 2012. – Vol. 176. – P. 299–319.

10.Dorman L.I. Cosmic Rays in Magnetospheres of the Earth and other Planets. – Dordrecht: Springer, 2019. – 450 p.

11.Tsyganenko N.A. Modeling the global magnetic field of the magnetosphere: recent progress // Journal of Geophysical Research. – 2013. – Vol. 118. – P. 1–18.

UO‘K 53

LOOP KVANT GRAVITATSIYASIDA TASHQI ASIMPTOTIK BIR JINSLI MAGNIT MAYDONDAGI O‘Z-O‘ZIGA DUAL QORA O‘RANING TO‘RT POTENSIALINI HISOBLASH

Uktamov Uktamjon Xayrulla o‘g‘li,
O‘zbekiston Fanlar akademiyasi Ulug‘bek nomidagi Astronomiya instituti
Astronomiya ko‘chasi, 33, Toshkent 100052, O‘zbekiston
Davlataliyev Akbar Akmaljon o‘g‘li,
O‘zbekiston Fanlar akademiyasi Ulug‘bek nomidagi Astronomiya instituti
Astronomiya ko‘chasi, 33, Toshkent 100052, O‘zbekiston
Mardiyev Islomxon Raxmatillayevich,
Samarqand davlat pedagogika instituti assistenti
islomkhon0211@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada “Loop Kvant Gravitatsiyasi” (LQG) doirasidagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘ra atrofida, tashqi magnit maydonda joylashgan magnit dipollari va elektr zaryadlangan zarralarning harakati o‘rganish uchun zarur bo‘lgan to‘rt potensiali uchun analitik yechim topildi. Ishlab chiqilgan LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘ra uchun maydon tenglamalari va elektromagnit to‘rt-vektor potensiali aniqlanadi.*

Kalit so‘zlar: *Loop, kvant gravitatsiyasi, qora o‘ra, O‘z-o‘ziga duallik, to‘rt potensial,tashqi asimptotik bir jinsli maydon, nisbiylik nazariyasi.*

CALCULATION OF FOUR POTENTIALS OF A SELF-DUAL BLACK HOLE IN AN EXTERNAL ASYMPTOTIC HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD IN LOOP QUANTUM GRAVITY

Abstract. *The article presents an analytical solution for the four-potential which can be used to study the motion of magnetic dipoles and electrically charged particles orbiting in the vicinity of the black holes in Loop Quantum Gravity (LQG) immersed in an external asymptotically uniform magnetic field. The field equations and the electromagnetic four-vector potential for the self-dual black hole in LQG are determined.*

Keywords: *Loop quantum gravity, black hole, self-duality, four-potential, external asymptotically uniform field, general relativity.*

РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХ ПОТЕНЦИАЛОВ САМОДУАЛЬНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ ВО ВНЕШНЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПЕТЛЕВОЙ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

Аннотация: *В статье представлено аналитическое решение для четырёхпотенциала, которое может быть использовано для изучения движения магнитных диполей и электрически заряженных частиц, обращающихся вблизи чёрных дыр в рамках петлевой квантовой гравитации (Loop Quantum Gravity, LQG), погружённых во внешнее асимптотически однородное магнитное поле. Определены уравнения поля и электромагнитный четырёхвекторный потенциал для самодуальной чёрной дыры в LQG.*

Ключевые слова: *петлевая квантовая гравитация, чёрная дыра, самодуальность, четырёхпотенциал, внешнее асимптотически однородное поле, общая теория относительности.*

Kirish. Umumiy nisbiylik nazariyasi (GR) eng muvaffaqiyatli gravitatsiya nazariyasi hisoblansa-da, u bir qator muhim nazariy va kuzatuv muammolariga duch kelmoqda. Nazariy jihatdan, GR kvant tamoyillarini o‘z ichiga olmaganligi sababli, kvant mexanikasi bilan birlashtirish muammosi yechimsiz holatda qolmoqda (1). Bundan tashqari, GR ham koinotning yaratilish paytida (2), ham qora o‘ra ichidagi fazovaqtda (3) ma‘lum fizika qonunlari ishlamay qoladigan singularliklarni bashorat qiladi. Kuzatuv jihatidan esa GR qorong‘u materiya va qorong‘u energiya kabi hodisalarni izohlashda qiyinchiliklarga duch kelmoqda. Bu muammolarning barchasi klassik GR nazariyasini o‘zgartirish talab qilinishini ko‘rsatadi. Xususan, kvant gravitatsion effektlarni hisobga olganimizdan so‘ng, fazovaqt singularliklari hal qilinishi kerak. Ushbu qiyinchiliklar tortishishning modifikatsiyalangan nazariyalari va kvant gravitatsiyasini potensial yechimlar sifatida o‘rganishga undaydi. Ushbu o‘zgartirilgan nazariyalarni qat‘iy sinovdan

o‘tkazish, ulardan qaysi biri (agar biron bittasi bo‘lsa) tortishishning har tomonlama va aniq modelini taqdim eta olishini aniqlash uchun juda muhimdir.

Natijalar va ularning tahlili. Loop kvant gravitatsiyasi (LQG) klassik Katta Portlash va qora o‘ra singularliklariga nisbatan chiroyli yechim taqdim etadi. Yaqinda LQG da polimerizatsiya prosedurasidan foydalangan holda mini-superspace doiradasida o‘z-o‘ziga dual fazovaqt deb nomlanuvchi muntazam statik fazovaqt metriksi olingan (4). Bu fazovaqt muntazam bo‘lib, hech qanday fazovaqt egilishi singularligiga ega emas. Qora o‘ra fazovaqtini kvantlashdagi polimerizatsiya prosedurasi o‘z-o‘ziga dual fazovaqtga kvant effektlarini boshqaruvchi ikkita ichki parametrni joriy qiladi: minimal maydon va Barbero-Immirzi parametri. Bundan tashqari, bu fazovaqt T-duallik tamoyillari bilan mos keladigan o‘z-o‘ziga dual xususiyatni namoyish etishi ko‘rsatilgan (5). Shuningdek, bu uning o‘z-o‘ziga dual fazovaqt deb atalishining sababidir. So‘nggi yillarda LQG doiradasidagi qora o‘ralarning kvant kengaytmalariga keng qamrovli tadqiqotlar qaratildi, ulardan (6) kabi maqolalariga e‘tibor qilishlari tavsiya etiladi.

O‘z-o‘ziga dual fazo vaqtga kvant effektlari ikkita ichki parametr – minimal maydon va Barbero-Immirzi parametri tomonidan boshqariladi. Bu shunday qiziqarli savolni tug‘iladi: bu kvant effektlar joriy va/yoki kelajakdagi tajribalar uchun qandaydir kuzatuv imzolarini qoldirishi mumkinmi, shundayki kvant effektlar to‘g‘ridan-to‘g‘ri sinovdan o‘tkaziladimi yoki cheklanadimi? Bunday mulohazalar o‘tgan o‘n yilliklarda turli xil tajriba va kuzatishlar natijasida ko‘plab tadqiqotlarning paydo bo‘lishiga olib keldi (7) da LQG ning kvant effektlari aylanuvchi qora o‘raning soyasiga qanday ta‘sir qilishini batafsil o‘rganilgan va supermassiv M87* qora o‘ra bo‘yicha Event Horizon Teleskopi (EHT) ning so‘nggi kuzatishlari bilan solishtirishlar taqdim etilgan. Bundan tashqari, o‘z-o‘ziga dual fazovaqtdagi gravitatsion linzalash o‘rganildi, LQG dan kelib chiqqan polimerik funktsiya radio to‘lqinlarning Quyosh gravitatsion og‘ishi bo‘yicha geodezik juda uzun baza interfeometriyasi o‘lchovlari ma‘lumotlaridan foydalangan holda cheklandi (8). (8) dagi so‘nggi tadqiqotlar bu tekshiruvni Quyosh tizimigacha kengaytirgan va LQG ning P polimerik funksiyasi bo‘yicha kuzatuv cheklovlarini olgan. Shuni ta‘kidlash kerakki, o‘z-o‘ziga dual qora o‘ra va boshqa turdagi loop kvant qora teshiklarining fenomenologik o‘rganilishi ham keng miqyosda olib borilgan, buning uchun (9) va ulardagi adabiyotlarga qarang.

Ushbu maqolada biz LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘rani tashqi magnit maydon mavjudligida ko‘rib chiqamiz. Fazovaqt geometriyasining tabiatini tushunish uchun biz yangi kvant tuzatish parametri va atrof-muhitdagi mavjud maydonlarning ta‘sirini tahlil qilamiz. Buning uchun biz yuqorida tilga olingan fazovaqt geometriyasi atrofida magnit dipol momentiga va elektr zaryadiga ega bo‘lgan zarralarning harakatini o‘rganamiz. E‘tibor berish kerak bo‘lgan muhim nuqta shundaki, GR yoki gravitatsiyaning muqobil nazariyalarining yechimini astrofizik jarayonlar, masalan, rentgen nurlari ma‘lumotlari (10) va akkretsion disk (11) orqali, so‘nggi kuzatishlar (12) bilan astrofizik ixcham ob‘ektlar atrofida sinovdan o‘tkazish mumkin, bu juda foydali sinovlar sifatida muhim rol o‘ynaydi. Boshqa tomondan, mumkin bo‘lgan urinishlardan biri sifatida, ixcham ob‘ektlarning noyob jihatlarini chuqurroq tushunish uchun ular atrofidagi sinov zarralarining harakatini tahlil qilish ham qimmatlidir. Shuning uchun, yuqorida aytib o‘tilgan sinovlar astrofizik ixcham ob‘ektlarning noma‘lum jihatlarini ochib berish va ularning kutilgan xatti-harakatlaridan chetga chiqishni ta‘minlashda o‘z o‘rni bo‘ladi. Astrofizik nuqtai nazardan, tashqi magnit maydonlarning mavjudligi ixcham ob‘ektlar yaqinidagi zaryadlangan zarralarning harakatini belgilashda hal qiluvchi rol o‘ynashi ta‘kidlanishi lozim. Elektromagnit maydonlarning ta‘siri turli tortishish nazariyalaridagi qora o‘ralar atrofidagi elektr zaryadli va noldan farqli magnit dipol momentiga ega bo‘lgan sinov zarralarida keng ko‘lamda ko‘rib chiqilgan va o‘rganilgan (13).

Astrofizik ssenariyda, qora o‘ra o‘zining gravitatsion cho‘kishi tufayli o‘z magnit maydoniga ega emas, bu kvastatsionar yondashuvda kamida t^{-1}bilan susayadi (masalan, (14) ga qarang). Biroq, yaqin atrofdagi ob‘ektlar, masalan, aylanuvchi qora teshiklar atrofidagi akkretsion disklar (15), neytron yulduzlari (16) va magnitarlar (17) tomonidan ishlab chiqarilishi mumkin bo‘lgan tashqi sinov magnit maydonining mavjudligini faraz qilish mumkin. Biroq, M87 bo‘yicha EHT ning so‘nggi kuzatuv topilmalari V404 Cygni ikkilik qora o‘ra tizimi uchun tojda magnit maydon kuchi $B \sim 33.1 \pm 0.9\ G$ tartibida ekanligini xabar qildi (18). Bundan tashqari, EHT hamkorlari o‘z hisobotida M87 galaktikasidagi supermassiv qora tuynuq atrofidagi nurlanish sohasida o‘rtacha magnit maydon kuchi $B \sim 1 - 30\ G$ tartibida ekanligini e‘lon qildi (19). Ushbu maqolada biz LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora tuynuqning katta masofalarda asimptotik bir xil va z-o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan tashqi magnit maydonga botgan holatdagi xususiyatlarini o‘rganamiz. Biroq, real astrofizik stsenariyda magnit maydon qora o‘raning yaqin atrofida, ayniqsa uning ufqiga juda yaqin joyda murakkab konfiguratsiyaga ega bo‘lishi mumkin, lekin ma‘lum bir masofada, ayniqsa fazoning mahalliy qismida uni bir xil maydon sifatida yaqinlashtirish mumkinligi ta‘kidlanishi lozim. Bu qora o‘ralar atrof-muhitidagi magnit maydonlar uchun yaxshi qabul qilingan yaqinlashishdir. Masalan, qora o‘ra atrofidagi

akkretsion diskdagi oqim halqasi tomonidan hosil qilingan magnit maydon, agar qora o‘ra hajmi disk hajmiga nisbatan ancha kichik bo‘lsa, bir xil deb hisoblanishi mumkin (masalan, (20) ga qarang). Bundan tashqari, qora o‘ra magnitar ekvatorial tekisligidan etarlicha masofada joylashganda magnit maydon deyarli bir xil maydon sifatida ko‘rib chiqilishi mumkin (21). Ushbu tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, magnit maydon nisbatan uzoq masofada asimptotik bir xil magnit maydon sifatida qaralishi mumkin.

Ushbu maqola quyidagicha tuzilgan: II bo‘limda biz LQG dagi qora tuynuq fazovaqti va atrofdagi magnit maydon xususiyatlarini qisqacha muhokama qilamiz. III bo‘limda biz magnit dipol momentiga ega bo‘lgan zarralarning harakatini o‘rganamiz, keyin esa IV bo‘limda tashqi bir xil magnit maydonga kiritilgan o‘z-o‘ziga dual qora tuynuq atrofidagi elektr zaryadlangan zarralar dinamikasini o‘rganamiz. Biz butun maqola davomida fazovaqt metriksi uchun (–, +, +, +) belgisini va c=G=M=1 birliklar tizimidan foydalanamiz.

Tashqi asymptotik bir jinsli magnit maydonga kiritilgan Loop kvant qora o‘rasi. Biz (22) da taklif etilgan, odatda o‘z-o‘ziga dual fazovaqt deb nomlanuvchi LQG dagi kvant tuzatilgan Schwarzschild fazovaqtiga kirish bilan boshlaymiz. LQG doirasidagi qora o‘ralarning samarali modellarida odatda polimerga o‘xshash kvantlash usuli qo‘llaniladi. Bu yondashuv qora o‘ra fazovaqtining faza fazosidagi kanonik o‘zgaruvchilar (b, c) ni ularning regularizatsiyalangan moslamalari bilan almashtirishni o‘z ichiga oladi: $b \to \frac{\sin(\delta_b b)}{\delta_b}$ va $c \to \frac{\sin(\delta_c b)}{\delta_c}$. δ_b va δ_c parametrlari LQG da kvant effektlari namoyon bo‘ladigan masshtablarni belgilovchi kvant polimerik parametrlardir. $\delta_b, \delta_c \to 0$ chegarasida klassik fizika tiklanishiga erishiladi. Biroq, kvant gravitatsiyasining to‘liq nazariyasi hali mavjud emas va shuning uchun δ_b va δ_b ni tanlash uchun keng qamrovli asos noaniq bo‘lib qolmoqda. Ushbu maqolada biz $\delta_b$va δ_c ni doimiylar sifatida ko‘rib chiqadigan (LQG dagi μ_0-sxema deb nomlanuvchi) muayyan tanlovdan kelib chiqqan o‘z-o‘ziga dual fazovaqtni o‘rganamiz. () da ko‘rsatilishicha, yechimdagi minimal maydonni LQG ning A_{min} minimal maydoni bilan identifikatsiya qilish erkin parametrlardan birini kamaytirish imkonini beradi. Natijada, o‘z-o‘ziga dual fazovaqtda LQG effektlari ikkita parametr bilan tavsiflanadi: minimal maydon A_{min} va polimerik parametr δ (bundan keyin δ_b δ deb belgilanadi).

LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘raning samarali metriksi (22) ga ko‘ra quyidagicha berilgan:

$$d\tau^2 = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + C(r)(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \qquad [1]$$

bunda A(r), B(r) va C(r) quyidagicha ifodalinishi mumkin:

$$A(r) = -g_{tt} = \frac{(r-r_+)(r-r_-)(r+r_*)^2}{r^4+a_0^2}, \qquad [2]$$

$$B(r) = \frac{1}{g_{rr}} = \frac{(r-r_+)(r-r_-)r^4}{(r+r_*)^2(r^4+a_0^2)},$$

$$C(r) = \frac{g_{\varphi\varphi}}{sin^2\theta} = r^2 + \frac{a_0^2}{r^2}.$$

bu yerda $r_+ = \frac{2M}{(1+P)^2}$ va $r_+ = \frac{2MP^2}{(1+P)^2}$ qora o‘raning ikkita voqealar gorizontiga ishora qiladi, $r_* = \sqrt{r_+ r_-}$ esa qora o‘raning ADM massasi M ga ega. Bu yerda biz faqat tashqi gorizont bilan cheklanamiz. Shuni ta‘kidlaymizki, kvant tuzatishidan kelib chiqqan P funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$P = \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}-1}{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}, \qquad [3]$$

Bu yerda, ϵ=$\gamma\delta$ Immirzi parametri γ va LQG dagi polimerizatsiya jarayonida kvant tuzatilgan Gamilton chegarasida golonomiyalarni aniqlash uchun bog‘lanish bo‘yicha integrallanadigan yo‘llarni belgilash uchun kiritilgan polimerik parametr δ ning ko‘paytmasini ifodalaydi, bu ϵ <1 shartni qanoatlantiradi. E‘tibor berish kerak bo‘lgan nuqta shundaki, biz LQG dan kelib chiqqan kvant effektlarini o‘rganish uchun faqat P ga e‘tibor qaratamiz. a_0 parametri $a_0 = \frac{A_{min}}{8\pi}$ tenglama bilan aniqlanadi, bunda $A_{min} = 4\pi\gamma\sqrt{3l_{Pl}^2}$ LQG ning minimal maydon oralig‘iga ishora qiladi. Bu yerda l_{Pl} Plank uzunligidir.

Plank uzunligidagi parameterni ahamiyatsiz deb hisoblanishi mumkin. Shuning uchun biz $a_0 = 0$ deb hisoblaymiz.

Bu yerda bizning asosiy maqsadimiz, B_0 magnit maydon kuchlanganligiga ega bo‘lgan asimptotik bir xil tashqi magnit maydon mavjudligida LQG qora o‘rasining yaqin atrofida zaryadlangan zarracha harakatini o‘rganishdir. Buning uchun biz elektromagnit maydonning to‘rt potensiali A^μ ni topishimiz kerak. (13) maqolalariga amal qilib, biz magnit maydonni bir xil va LQG qora o‘rasining simmetriya o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan deb hisoblaymiz, bu uning asimptotik xususiyatlariga asoslanadi. Buni amalga oshirish uchun aylanmaydigan qora o‘ra uchun vektor potensialining ansatzini quyidagicha yozish mumkin:

$$A^\mu = c_t(r, B_0)\varepsilon_t^\mu + [\frac{B}{2} + c_\varphi(r, B_0)]\varepsilon_\varphi^\mu, \qquad [4]$$

Bu yerda ε_t^μ=(1,0,0,0) va ε_φ^μ=(0,0,0,1) vaqtsimon va fazosimon Killing vektorlariga ishora qiladi. A^μ ning aniq shaklini manbasiz Maksvell tenglamalari yechimi sifatida aniqlanishi mumkin (). Aylanmaydigan vakuum qora o‘ra uchun Maksvell maydon tenglamalari $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ elektromagnit maydon tenzori bilan $F_{;\nu}^{\mu\nu}$ =0 orqali aniqlanishi mumkin. Keyin LQG qora o‘ra fazovaqtida A^μ uchun Maksvell maydon tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$A_{;\nu}^{\phi;\nu} - R_\nu^\varphi A^\nu = 0. \qquad [5]$$

Solving Eq.(5) we can find four potential A^μ as:

$$A^\mu = \frac{B_0}{2}\,(\beta)^{\mathcal{A}}\;{}_2F_1\,(\mathcal{A}, \mathcal{A}+3, 2\mathcal{A}+3, \beta)\varepsilon_\varphi^\mu, \qquad [6]$$

Bu yerda, ${}_2F_1$(a,b;c;z)=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$ gipergeometrik funktsiyani ifodalaydi, $\mathcal{A} = \sqrt{\frac{1-2P}{1+2P}} - 1$ va $\beta = \frac{r(1+4P)}{2M(1+2P)}$ kiritilgan yangi o‘zgaruvchilardir. P=0 bo‘lganda to‘rt potensial Schwarzschild holatiga qisqarishi, ya‘ni $A_\varphi = \frac{1}{2}B_0 r^2 sin^2(\theta)$ bo‘lishi aniq.

1-rasmda biz LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora tuynuq yaqinidagi magnit maydon chiziqlarini ko‘rsatganmiz. 1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, kvant tuzatish parametri P Schwarzchild qora o‘rasi holatiga nisbatan o‘z-o‘ziga dual qora o‘raning yaqin atrofidagi magnit maydon chiziqlariga ta‘sir ko‘rsatishi mumkin.

To‘rt potensial (1.6-tenglama) asosida elektromagnit tenzorning noldan farqli komponentlarini olish ancha oson bo‘lib, ular quyidagicha berilgan:

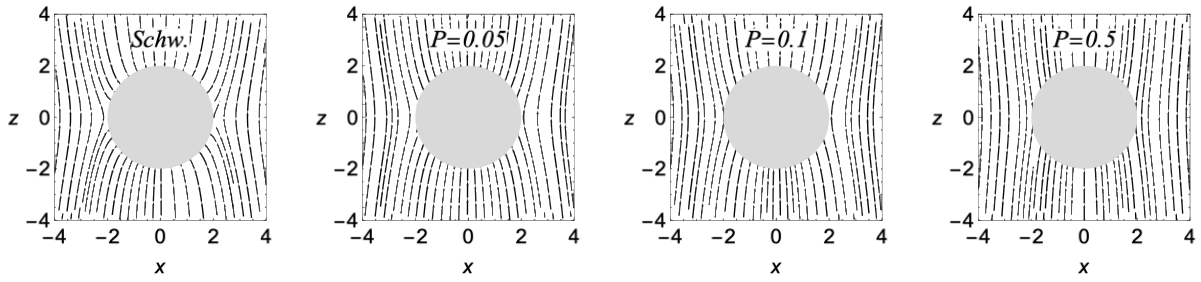
$$\begin{aligned} F_{r\phi} &= \frac{(\mathcal{B})^{\mathcal{A}}}{2} B_0 r \sin^2\theta \\ &\times \Big[\frac{\mathcal{B}\mathcal{C} r\,{}_2F_1\,(\mathcal{A}+1, \mathcal{A}+4; 2(\mathcal{A}+2); \mathcal{B})}{\Xi} + \\ &+ (\mathcal{A}+2)_2\,F_1\,(\mathcal{A}, \mathcal{A}+3; 2\mathcal{A}+3; \mathcal{B})\Big], \qquad (1.9) \end{aligned}$$

$$F_{\theta\phi} = \frac{(\mathcal{B})^{\mathcal{A}}}{2} B_0 r^2\,\sin 2\theta \times {}_2F_1\,(\mathcal{A}, \mathcal{A}+3; 2\mathcal{A}+3; \mathcal{B}). \quad (1.10)$$

Bu yerda shuni ta’kidlash kerakki, biz yangi o‘zgaruvchilarni, masalan $\mathcal{C} = \sqrt{1-4P^2} - 6P - 1$ va $\Xi = 2\sqrt{1-4P^2} + 2P + 1$ ni belgilaymiz. Shu tarzda, biz $B^\rho = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\alpha\beta\sigma\gamma}F_{\sigma\gamma}u_\propto$ yordamida magnit maydon komponentlarini topishimiz mumkin. Bu yerda g (self-dual Schwarzschild metriksi) tenglamaning determinanti, $\epsilon^{\alpha\beta\sigma\gamma}$ Levi-Chivita belgisining psevdotenzor shakli, $u_\propto$ esa kuzatuvchining to‘rt tezligidir. Shundan so‘ng, magnit maydonning ortonormal komponenti quyidagicha olinishi mumkin:

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{F_{r\phi}}{\sqrt{g_{rr}g_{\phi\phi}}}.$$

Bu yerda biz kuzatuvchi nol burchak momentli kuzatuvchi (ZAMO) da joylashgan deb faraz qilamiz. Shuning uchun, $u_\propto u^\propto = -1$ normallashtirish sharti $u_t = \frac{1}{\sqrt{-g^{tt}}}$ ni topish imkonini beradi.



1-rasm. Rasm LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora tuynuq yaqinidagi magnit maydon chiziqlarini kvant tuzatish parametri P ning turli qiymatlari (mos ravishda ε = 0.3571 va ε = 0.4707) uchun ko‘rsatadi

Xulosa. Ushbu maqolada biz LQG doirasidagi tashqi asimptotik bir jinsli magnit maydonga kiritilgan o‘z-o‘ziga dual qora o‘rani ko‘rib chiqdik. Fazo-vaqt geometriyasi haqida ma’lumot olish va uning tabiatini sinovdan o‘tkazish uchun kvant tuzatish parametri va elektromagnit o‘zaro ta‘sirlarning zarralar geodeziklariga ta‘sirini chuqur o‘rganish zarur. Shu maqsadda biz LQG dagi fazovaqt geometriyasi atrofidagi muhitda magnit dipollar va elektr zaryadlangan zarralarning harakatin uchun zarur b o‘lgan t o‘rt-potensial uchun analytik yechim oldik. LQG dagi o‘z-o‘ziga dual qora o‘ra holati uchun maydon tenglamalarini chiqardik va elektromagnit to‘rt-vektor potensialini aniqladik. Bu kelajakda LQG doirasidagi bir jinsli asymptotik magnit maydonda joylashgan qora o‘ra atrofidagi zarrachalar harakatini va bu orqali akretsion disk chegarasini aniqlashga imkoni paydo bo‘ladi.

ADABIYOTLAR:

1. *R.J.Adler,Am.J.Phys.78,925(2010),arXiv:1001.1205[gr-qc].*
2. *A. Borde and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 72, 3305 (1994), arXiv:gr- qc/9312022 [gr-qc] .*
3. *S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The large-scale structure of space- time. (1973).*
4. *L. Modesto, Int. J. Theor. Phys. 49, 1649 (2010), arXiv:0811.2196 [gr- qc]*
5. *L. Modesto and I. Pre´mont-Schwarz, Phys. Rev. D 80, 064041 (2009), arXiv:0905.3170 [hep-th].*
6. *A. Ashtekar, J. Olmedo, and P. Singh, Phys. Rev. Lett. 121, 241301 (2018), arXiv:1806.00648 [gr-qc] .*
7. *A.Perez,Rep.Prog.Phys.80,126901(2017),arXiv:1703.09149[gr-qc]*
8. *A.Perez,Rep.Prog.Phys.80,126901(2017),arXiv:1703.09149[gr-qc]*
9. *Y.-C. Liu, J.-X. Feng, F.-W. Shu, and A. Wang, Phys. Rev. D 104, 106001 (2021), arXiv:2109.02861 [gr-qc]*
10. *F. de Felice and F. Sorge, Class. Quantum Grav. 20, 469 (2003).*
11. *R. M. Wald, Phys. Rev. D 10, 1680 (1974).*
12. *F. de Felice, F. Sorge, and S. Zilio, Class. Quantum Grav. 21, 961 (2004).*
13. *O. L. M. Ginzburg V. L., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47, 1030 (1964).*
14. *M. Y. Piotrovich, N. A. Silant‘ev, Y. N. Gnedin, and T. M. Natsvlishvili, ArXiv e-prints (2010), arXiv:1002.4948 [astro-ph.CO] .*
15. *J.L.Anderson and J.M. Cohen, Astrophys. Space Sci. 9, 146 (1970)*
16. *V. S. Morozova, B. J. Ahmedov, and O. Zanotti, Mon. Not. R. Astron. Soc. 419, 2147 (2012), arXiv:1107.3327 [astro-ph.HE]*
17. *J. Kova´r, P. Slany´, C. Cremaschini, Z. Stuchl´ık, V. Karas, and A. Trova, Phys. Rev. D 90, 044029 (2014), arXiv:1409.0418 [gr-qc] .*
18. *Y. Dallilar and et al., Science 358, 1299 (2017).*
19. *R. Narayan, D. C. M. Palumbo, M. D. Johnson, and et al., Astrophys. J.*

912, 35 (2021), arXiv:2105.01804 [astro-ph.HE] . J. Kova˘r, P. Slany´, C. Cremaschini, Z. Stuchl´ık, V. Karas, and A. Trova, Phys. Rev. D 90, 044029 (2014), arXiv:1409.0418 [gr-qc] .

20. *Z. Stuchl´ık and M. Kolos˘, Eur. Phys. J. C 76, 32 (2016), arXiv:1511.02936 [gr-qc] .*
21. *L. Modesto, Int. J. Theor. Phys. 49, 1649 (2010), arXiv:0811.2196 [gr- qc]*

UO‘K 53

STAROBINSKY-BEL-ROBINSON GRAVITATSIYA NAZARIYASIDA BIR JINSLI BO‘LMAGAN PLAZMA MUHITIDA GRAVITATSION LINZALANISH

Davlataliyev Akbar Akmaljon o‘g‘li,
O‘zbekiston Fanlar akademiyasi Ulug‘bek nomidagi Astronomiya instituti, Astronomiya ko‘chasi 33, Toshkent 100052, O‘zbekiston
Uktamov Uktamjon Xayrulla o‘g‘li,
O‘zbekiston Fanlar akademiyasi Ulug‘bek nomidagi Astronomiya instituti, Astronomiya ko‘chasi 33, Toshkent 100052, O‘zbekiston
Alloqulov Mirzabek Ulug‘bek o‘g‘li,
O‘zbekiston Fanlar akademiyasi Ulug‘bek nomidag Astronomiya instituti, Astronomiya ko‘chasi 33, Toshkent 100052, O‘zbekiston
Karshiboyev Shavkat Esirgapovich,
Samarqand davlat pedagogika instituti Fizika kafedrasi assistenti

Annotatsiya. *Ushbu tadqiqot Starobinsky-Bel-Robinson gravityatsiya nazariyasi doirasida aylanuvchi qora tuynukning optik xususiyatlarini o‘rganadi va qo‘shimcha β parametrini hisobga oladi. Qora tuynuk bir jinsli bo‘lmagan plazma bilan o‘ralgan bo‘lib, plazma parametri k uning foton traektoriyalariga ta'sirini aks ettiradi. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, β parametrining foton harakatiga ta'siri qora tuynuk yaqinida sezilarli bo‘lsa-da, qora tuynukdan masofa ortishi bilan kamayadi. Tortishish linzalashi tufayli fotonlarning burilish burchagi, qora tuynukning aylanish tezligiga bog'liq holda, plazma parametri k ning qiymati ortishi bilan doimiy ravishda kamayadi. β parametrining mavjudligi qora tuynuk yaqinida maksimal burilish burchagiga olib keladi va fotonlar qora tuynuk ufqidan uzoqlashgani sari bu burchak kamayadi. Bundan tashqari, foton sferasining radiusi β parametri hamda qora tuynukning aylanish tezligi sezilarli ta'sir ko‘rsatadi, plazma parametriga bog'liqligi esa nisbatan zaifdir.*

Kalit so‘zlar*: Starobinsky modeli, Bel–Robinson tenzori, Gravitatsion, linzalanish, Plazma muhit, Nur egilishi, Fazoviy vaqt, Gravitatsion to‘lqinlar, Modifikatsiyalangan gravitatsiya, Optik effektlar, Kosmik plazma.*

GRAVITATIONAL LENSING IN STAROBINSKY-BEL-ROBINSON GRAVITY IN NON-UNIFORM PLASMA

Abstract. *This study investigates the optical properties of a rotating black hole within the framework of Starobinsky–Bel–Robinson gravity, incorporating an additional parameter β. The black hole is surrounded by a non-uniform plasma, with the plasma parameter k reflecting its influence on photon trajectories. The results indicate that while the influence of the β parameter on photon motion is significant near the black hole, it diminishes with increasing distance from the black hole. The deflection angle of photons due to gravitational lensing, which depends on the black hole’s spin, consistently decreases as the value of the plasma parameter k increases. The presence of the β parameter leads to a maximum deflection angle near the black hole, which decreases as photons move away from the black hole’s horizon. Furthermore, the radius of the photon sphere is significantly affected by both the β parameter and the black hole’s spin, while its dependence on the plasma parameter is relatively weak.*

Keywords: *Starobinsky model, Bel–Robinson tensor, Gravitational lensing, Plasma medium, Light deflection, Spacetime, Gravitational waves, Modified gravity, Optical effects, Cosmic plasma.*

ГРАВИТАЦИОННОЕ ЛИНЗИРОВАНИЕ В ГРАВИТАЦИИ СТАРОБИНСКОГО–БЕЛЛА–РОБИНСОНА В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Аннотация. *В данном исследовании рассматриваются оптические свойства вращающейся чёрной дыры в рамках гравитационной теории Старобинского–Белла–Робинсона с учётом дополнительного параметра β. Чёрная дыра окружена неоднородной плазмой, параметр которой kkk отражает её влияние на траектории фотонов. Результаты показывают, что влияние*

параметра β на движение фотонов значительно вблизи чёрной дыры, но уменьшается с увеличением расстояния от неё. Угол отклонения фотонов, вызванный гравитационным линзированием и зависящий от спина чёрной дыры, систематически уменьшается с ростом значения параметра плазмы k. Наличие параметра β приводит к максимальному углу отклонения вблизи горизонта чёрной дыры, который уменьшается по мере удаления фотонов от неё. Кроме того, радиус фотонной сферы существенно зависит как от параметра β, так и от спина чёрной дыры, в то время как его зависимость от параметра плазмы сравнительно слаба.

Ключевые слова: *модель Старобинского, тензор Белла–Робинсона, гравитационное линзирование, плазменная среда, отклонение света, пространство-время, гравитационные волны, модифицированная гравитация, оптические эффекты, космическая плазма.*

Kirish. Eynshteynning umumiy nisbiylik nazariyasi (UNN) qora tuynuklarning mavjudligini bashorat qiladi va bu g‘oya endi ularning soyasi [1, 2] va ularning kosmik to‘qnashuvlari paytida chiqarilgan gravitatsion to‘lqinlar [3] orqali kuzatilishi natijasida tasdiqlandi. Garchi OHN katta muvaffaqiyatlarga erishgan bo‘lsa-da, u ma’lum cheklovlarga duch keladi. Xususan, u Koinotning tezlashgan kengayishini tushuntira olmaydi va o‘z doiradasida gravitatsiyani kvantlash muammosini hal qilishda qiynaladi. Ushbu muammolarni hal qilish uchun turli muqobil gravitatsiya nazariyalarini taklif qilish bo‘yicha bir qancha urinishlar amalga oshirilgan. Buning bir usuli OHN dagi Eynshteyn-Gilbert harakatini o‘zgartirishdir [4].

Yaqinda, Richi skalyari va Bel-Robinson tenzori bilan bog‘liq kvadratik hadlarni qo‘shish orqali Eynshteyn-Gilbert harakatini kengaytirish yangi gravitatsiya nazariyasi yuzaga keldi. Starobinsky-Bel-Robinson (SBR) gravitatsiyasi [5] sifatida tanilgan ushbu nazariya o‘n bir o‘lchovli past energiyali M-nazariyasidan ilhomlangan. SBR gravitatsiyasining to‘rt o‘lchovli shakli $\beta > 0$ sharti bilan chegaralangan va M-nazariyasining kompaktifikatsiyasi orqali aniqlanishi mumkin bo‘lgan, β bilan belgilangan simli bog‘lanish parametrini o‘z ichiga oladi [6].

Umumiy nisbiylik nazariyasining (OHN) Eynshteyn maydon tenglamalari va turli modifikatsiyalangan gravitatsiya nazariyalaridan kelib chiqqan qora tuynuk echimlari adabiyotlarda keng o‘rganilgan. Ushbu tadqiqotlar ushbu ultraixcham ob’ektlar atrofidagi kuchli gravitatsion maydonlarni o‘rganishga qaratilgan [7–28]. Qora tuynuk fazo-vaqtida massali va massasiz zarrachalarning harakatini tahlil qilish, ushbu muhitlarning asosiy xususiyatlari va tuzilishini tushunish uchun qimmatli tushunchalar beradi.

Natijalar va ularning tahlili. Starobinsky-Bel-Robinson (SBR) gravitatsiya nazariyasi doirasida ham statik, ham aylanuvchi qora tuynuk echimlari aniqlandi [6, 29]. SBR gravitatsiyasidagi ushbu qora tuynuk echimlari geodezik harakat va termodinamika nuqtai nazaridan tekshirilgan. So‘nggi tadqiqotlarda SBR gravitatsiya nazariyasidagi Shvarshildga o‘xshash qora tuynuklarning Hoking harorati, bosimi va entropiyasi o‘rganilgan [6]. Bundan tashqari, Belhaj va boshq. tomonidan SBR gravitatsiyasidagi statik va aylanuvchi qora tuynuklar tomonidan foton nurlarining qora tuynuk soyalari va gravitatsion og‘ish hodisalari tadqiq qilingan [29].

Astrofizik nuqtai nazardan, fotonlar qora tuynuklar atrofida plazma muhitida harakat qiladi, degan fikr keng tarqalgan [30]. Qora tuynuklar atrofida plazmadan tashkil topgan akkretion disklarning mavjudligi qora tuynuk soyasining holatini sezilarli darajada o‘zgartirishi mumkin, bu esa turli to‘lqin uzunliklarida kuzatiladigan fotonlar paydo bo‘lishiga olib keladi [31]. Shuning uchun, plazma fotonlar dinamikasiga va ularning qora tuynuk ufqi yaqinidagi traektoriyalariga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin, bu esa qora tuynuklarning fazo-vaqt geometriyasi to‘g‘risida yangi tushunchalar taklif qilishi mumkin. Bu esa qora tuynuklar atrofidagi plazma muhitida fotonlar harakatini o‘rganish zaruratini keltirib chiqaradi.

Qora tuynuklar atrofidagi plazma muhitida foton harakatining ahamiyatini hisobga olgan holda, ham umumiy nisbiylik nazariyasi, ham turli modifikatsiyalangan tortishish nazariyalarida turli xil qora tuynuk turlari uchun bir qator diqqatga sazovor natijalar erishildi [3, 32–50]. Ushbu tadqiqotda biz β parametri bilan tavsiflangan SBR tortishish nazariyasi doirasida, notekis plazma muhitida joylashgan aylanuvchi qora tuynuklar tomonidan fotonlarning harakati va bog'liq hodisalar, masalan, qora tuynuk soyalarining shakllanishi va foton nurlarining tortishish og'ishi hodisasini o‘rganamiz. Biz SBR nazariyasidagi Kerrga o‘xshash qora tuynuklarning ufqi yaqinida notekis plazma parametri k ning foton harakatiga ta'sirini o‘rganamiz.

Tadqiqotimiz shuni ko‘rsatadiki, β parametrining ta'siri Kerrga o‘xshash qora tuynuklarning ufqi yaqinida sezilarli bo‘lsa-da, qora tuynukdan uzoqroq masofalarda kamayadi. Biz fotonlarning tortishish og'ish burchagi qora tuynukning aylanishi va plazma parametri k ga bog'liq ekanligini qayd etamiz. Simli β parametrining mavjudligi qora tuynukning yaqin atrofida maksimal tortishish og'ish burchagiga olib keladi va bu markaziy ob'ektdan masofa ortishi bilan kamayadi. Bundan tashqari, kuzatishimizcha, foton sferasining radiusi β parametri va qora tuynukning aylanishi ta'sirida sezilarli o‘zgaradi, ammo plazma

parametri k dan minimal ta'sirlanadi. Shuningdek, β va k parametrlari tufayli qora tuynuk soyasining shakli buzilishi (deformatsiya) kuzatiladi, bu esa soyaning chap tomonini o‘zgartiradi va uning hajmini kamaytiradi. Batafsil ma'lumotlar keyingi bo‘limlarda keltirilgan.

Starobinsky-Bel-Robinson (SBR) tortishish nazariyasi doirasidagi Kerrga o‘xshash qora tuynukni o‘rganish quyidagicha tuzilgan. Keyingi bo‘limda (II-bo‘lim) biz SBR nazariyasidagi Kerr tipidagi qora tuynukni tavsiflovchi fazo-vaqt metrikasi qisqacha sharhini beramiz. Shundan so‘ng, III-bo‘limda biz SBR tortishishi kontekstida Kerr tipidagi qora tuynuk bilan bog'liq foton harakati va tortishish linzalashi hodisalarini o‘rganamiz. Xulosa qismida (IV-bo‘lim) esa biz o‘z topilmalarimizni umumlashtiramiz va muhokamalarimiz asosida xulosalar chiqaramiz.

Biz G = 1 = c bo‘lgan geometriyalashtirilgan birliklardan foydalanamiz, yunon indekslari 0 dan 3 gacha qamrab oladi va fazo-vaqt imzosini (–, +, +, +) deb hisoblaymiz.

Starobinsky-Bel-Robinson gravitatsiyasidagi Kerr tipidagi qora tuynuk. O‘lchovli modifikatsiyalangan gravitatsiya nazariyalarida maydon tenglamalarining aniq qora tuynuk echimlarini o‘rganish katta e’tiborga sazovor bo‘ldi. Biz, yaqinda [51] da ko‘rsatilganidek, M-nazariyasiga asoslangan va o‘n bir o‘lchovli fazo-vaqtda joylashgan Starobinsky-Bel-Robinson (SBR) gravitatsiyasi doirasidagi qora tuynuk echimlarini o‘rganamiz. M-nazariya metrika va M2-branlar bilan bog‘langan hamda M5-branlarga dual bo‘lgan CMNP 3-formali tenzorni o‘z ichiga olgan maxsus boson sektoriga asoslangan [52]. Kompaktifikatsiya mexanizmi va barqarorlashtirish sxemalari uchun zarur bo‘lgan simli oqimlarni hisobga olgan holda, bog‘langan to‘rt o‘lchovli gravitatsiya modellarini olish mumkin [6, 51].

$$S_{SBR} = \frac{M_{pl}^2}{2} \int d^4x\sqrt{-g} \left[R + \frac{R^2}{6m^2} - \frac{\beta}{32M_{pl}^6}(\mathcal{P}^2 - \mathcal{G}^2) \right] ,$$

bu yerda g metrika tenzorining determinantini ifodalaydi, M_{pl} qisqartirilgan Plank massasini bildiradi $M_{pl} = 1/\sqrt{8\pi G} \simeq 2 \times 1018GeV$ va R Richi skalyar egriligini bildiradi.

SBR gravitatsiya harakati umumiy nisbiylik nazariyasidagi Gilbert harakatiga nisbatan qo‘shimcha m va β parametrlarini kiritadi va inflyatsiyani o‘z ichiga olgan yangi fizik modellarni shakllantirish uchun qo‘llanilgan [53]. SBR gravitatsiyasida statik Shvarshild tipidagi qora tuynuk echimlari olingan bo‘lib, m parametri harakat tenglamasini yechish orqali aniqlandi [6]. Termodinamik miqdorlar simli gravitatsiya parametri β tomonidan o‘zgartirilishi ko‘rsatilgan. Natijada, bu aylanmas echimning chiziqli elementi quyidagicha ifodalanadi:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 ,$$

bu yerda f (r) metrik funksiya:

$$f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \beta \left(\frac{4\sqrt{2}\pi r_s}{r^3} \right)^3 \left(\frac{108r - 97r_s}{5r} \right) ,$$

bu yerda $r_s = 2M$ bo‘lib, M umumiy massa parametrini ifodalaydi. Keyinchalik, aylanuvchi qora tuynuk echimlarini olish uchun qo‘shimcha parametrlarni o‘z ichiga olgan ba'zi modifikatsiyalangan gravitatsiya modellarida Nyumen-Janis algoritmi [54,55] qo‘llanilishi mumkin. Xususan, SBR gravitatsiyasida Boyer-Lindquist koordinatalaridagi metrika chiziq elementi quyidagicha berilgan:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &- 2a \sin^2\theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) dt d\phi \\ &+ \sin^2\theta [\Sigma + a^2 \sin^2\theta \left(2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \right) d\phi^2 , \end{aligned}$$

bu yerda yangi paameter

$$\Delta = a^2 + r^2 \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{1024\pi^3 \beta M^3 (108r - 194M)}{5r^{10}} \right] ,$$

va

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

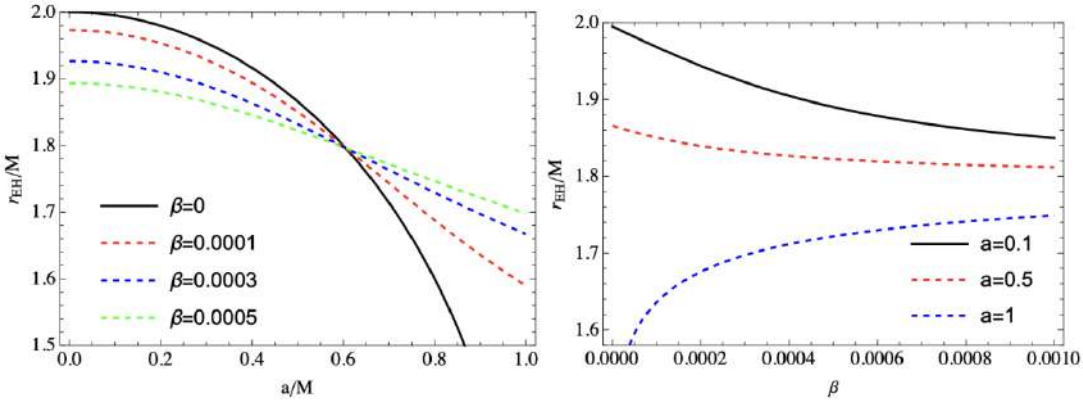
Ikkita parametr, a va β kiritilgan, bunda quyidagi taniqli qora tuynuk echimlari olinadi: `a = 0` bo‘lganda aylanmaydigan qora tuynuklar, va β = 0 bo‘lganga Delta funksiyasi bilan Kerr echimi olinadi.

$$\Delta_{Kerr}(r) = a^2 + r^2 - 2Mr \ .$$

Δ = 0 shartidan hodisa ufqi radiusi bilan fazo-vaqt parametrlari o‘rtasidagi bog'liqlikni olish mumkin, bu 1-rasmda tasvirlangan. Qora tuynukning aylanish tezligi oshishi bilan hodisa ufqi radiusining kamayishi ayon ko‘rinadi. Biroq, bu kamayish tezligi β parametriga kuchli bog'liq, buni 1-rasmning yuqori panelida ko‘rish mumkin.

Shu o‘rashning ikkinchi panelida esa, hodisa ufqi radiusining β parametrining o‘zgarishiga nisbatan xatti-harakati turli a aylanish qiymatlari uchun turlicha ekanligi ko‘rsatilgan. Aniqrog'i, nisbatan sekin aylanadigan qora tuynuk uchun β parametri oshishi bilan hodisa ufqi kichiklashsa, tez aylanayotgan qora tuynuk uchun esa β parametri oshishi bilan hodisa ufqi kengayadi.

Simli gravitatsiya parametri β ning SBR qora tuynuklarining termodinamik xossalariqa ta'siri oldingi ishlarda o‘rganilgan [6]. Bizning asosiy maqsadimiz bu yerda aylanuvchi SBR qora tuynugi bilan bog'liq optik xususiyatlarni, masalan, qora tuynuk soyasi va yorug'likning og'ishini, o‘rganishdir.



1-rasm. Hodisa garizonti radiusining fazo-vaqt parametrlariga bog‘liqligi

Foton geodeziklari va gravitatsion linzalash. Ushbu bo‘limda biz SBR gravitatsiyasi doirasidagi Kerr tipidagi qora tuynukning fazo-vaqtida fotonlarning harakati va gravitatsion linzalash hodisasini o‘rganamiz.

A. Foton harakati

Odatda, qora tuynuk atrofidagi muhit magnitlanishmagan sovuq plazmadan tashkil topgan deb faraz qilinadi. Plazmadagi elektron zichligi N(x) bilan ifodalangan holda, elektron plazma tebranish chastotasi [56] manbasida ko‘rsatilgandek:

$$w_p(x)^2 = \frac{4\pi e^2 N(x)}{m_e} \ ,$$

bu yerda x fazoviy koordinatalarni, e va m_e esa mos ravishda elektron zaryadi va massasini bildiradi. O‘q simmetrik fazo-vaqtda bu quyidagicha ifodalanishi mumkin [57]:

$$w_p^2 = \frac{h(r) + g(\theta)}{\Sigma} \ ,$$

bu yerda h(r) va g(θ) mos ravishda radial va burchak funktsiyalaridir. Mumkin bo‘lgan yondashuvlardan biri g(θ) = 0 va h(r) = k√r deb olishdir [57]. Bizni θ = π/2 bo‘lgan ekvatorial tekislikdagi foton harakati qiziqtirgani sababli, elektron plazma chastotasi soddalashadi:

$$w_p(r)^2 = \frac{k}{r^{3/2}} \ .$$

Plazmaning sindirish ko‘rsatkichi, plazma chastotasi ω_p ning tegishli kuzatuvchi tomonidan o‘lchangan foton chastotasi ω ga nisbati sifatida quyidagicha aniqlanadi:

$$n^2 = 1 - \frac{w_p^2}{w^2} .$$

Shunga ko‘ra, fotonning trayektoriyasi ekvatorial tekislikka chegaralanadi. Bundan buyon hisob-kitoblarimizda M = 1 va ekvatorial tekislik uchun θ = π/2 shartini qabul qilamiz.

Geometrik optika, elektromagnit to‘lqinlarning (yorug‘likning) tarqalishini ma’lum sharoitlarda nurlar orqali yaqinlashtirish mumkin bo‘lganda, optikada foydali model hisoblanadi. Umumiy nisbiylik nazariyasida, geometrik optika doirasida, yorug‘lik egri fazo-vaqtda tarqaladi va qo‘shimcha ravishda sindiruvchi va dispersiv plazma muhiti ta’siriga uchraydi. Bunga birinchi bo‘lib Synge [58] tomonidan geometrik optikani tasvirlash uchun Gamilton yondashuvi kontekstida dalil keltirilgan.

Plazma mavjud bo‘lganda, egri fazo-vaqtda fotonlarning tarqalishini boshqaruvchi Gamilton quyidagi ifoda bilan berilgan [59]:

$$H(x^i, p_i) = \frac{1}{2}[g^{ik} p_i p_k + w_p^2] = 0 .$$

Gamilton differensial tenglamalaridan

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} ,$$

va shuningdek, fazo-vaqtning statsionarligi va o‘q simmetriyasidan kelib chiqadigan ikkita harakat doimiysidan (zarchaning energiyasi va burchak momentiga mos keladi):

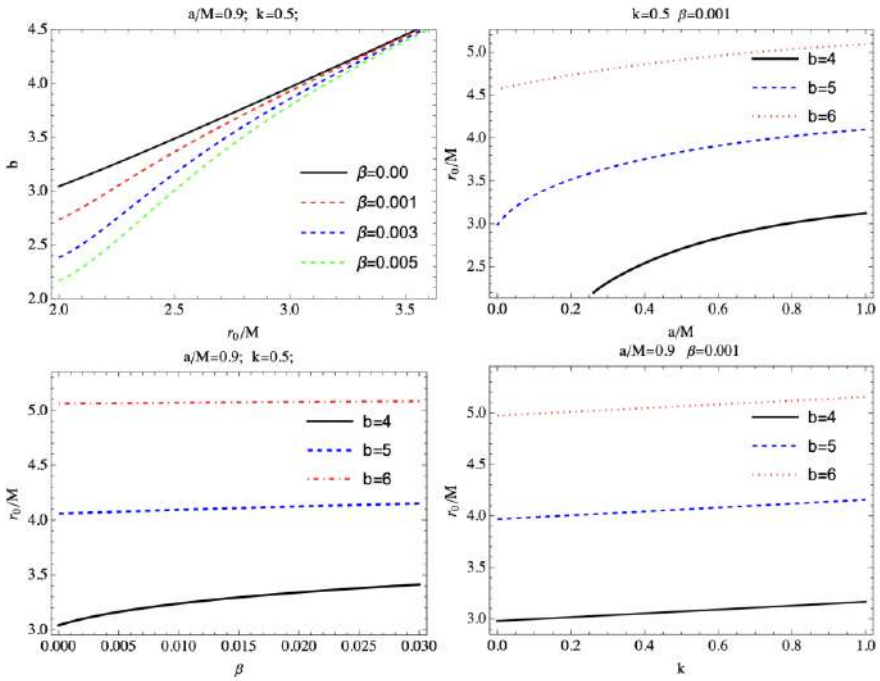
$$E = -p_t = w, L = p_\phi ,$$

foydalanib, ˙t, ˙r, ˙ϕ larni olish mumkin.

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{E g_{\phi\phi} - L g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}, \\
\frac{d\phi}{d\tau} &= -\frac{E g_{t\phi} + L g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}, \\
V(r) = \frac{dr}{d\tau} &= \sqrt{\frac{E^2 g_{\phi\phi} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi})\omega_p^2 + 2L g_{t\phi} + L^2 g_{tt}}{g_{rr}(g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi})}} .
\end{aligned}$$

Gravitatsion linzalash. Ushbu tadqiqotda biz SBR gravitatsiyasidagi Kerr tipidagi qora tuynuk tomonidan fotonlarning gravitatsion linzalashini o‘rganamiz. Biz fotonning SBR gravitatsiyasidagi Kerr tipidagi qora tuynukning ekvatorial tekisligidagi uzoq joydan, b = L/E ta’sir parametri bilan tavsiflangan holda, yo‘l olib, so‘ngra asimptotik cheksizlikka qaytadigan stsenariyni ko‘rib chiqamiz. Yuqoridagi tizimining uchinchi tenglamasi va ˙r=0 sharti asosida eng yaqin yaqinlashish radiusi r_0 ning ta’sir parametri b ga bog‘liqligini tahlil qilamiz.

Tanlangan fazo-vaqt parametrlari qiymatlari uchun r_0, b va fazo-vaqt parametrlari o‘rtasidagi bog‘liqlik 2-rasmda keltirilgan. Yuqori chap paneldan ko‘rinib turibdiki, qora tuynuk yaqinida fotonlarning ta’sir parametri bilan eng yaqin yaqinlashish radiusi o‘rtasidagi farq sezilarli darajada o‘zgaradi va bu ikki parametr ortishi bilan bu farq kamayadi. Ayniqsa, β parametrining mavjudligi bu bog‘liqlikka, markaziy qora tuynukning bevosita yaqin atrofida, kuchli ta’sir ko‘rsatadi. Ushbu parametrning katta qiymatlari eng yaqin yaqinlashish radiusining bir xil qiymati uchun ta’sir parametrining kichikroq qiymatlariga to‘g‘ri keladi. Yuqori o‘ng panelga o‘tsak, qora tuynukning tezroq aylanishi bir xil ta’sir parametri uchun fotonlarning eng yaqin yaqinlashish radiusining kattaroq bo‘lishiga olib kelishi aniq ko‘rinadi. Bu hodisa qora tuynukning katta aylanishi natijasida kuchliroq gravitatsion maydon paydo bo‘lishi bilan izolanadi. Natijada, belgilangan ta’sir parametri uchun markaziy qora tuynukka yaqinlashayotgan fotonlar kamroq tortishish kuchiga uchraydi, bu esa eng yaqin yaqinlashish radiusining kattalashishiga olib keladi. Pastki chap panel eng yaqin yaqinlashish radiusining β parametri bilan o‘zgarishini ko‘rsatadi. Ayniqsa, bu bog‘liqlik faqat ta’sir parametrining kichik qiymatlari uchun muhim bo‘lib, ta’sir parametri ortishi bilan kamayadi. Nihoyat, pastki o‘ng panelda biz plazmaning k parametri orqali ta’sirini ko‘rsatamiz. Kuzatish mumkinki, r_0 va k o‘rtasidagi bog‘liqlik tanlangan parametrlar diapazonida deyarli chiziqli hisoblanadi. k ning oshishi r_0 ning mos ravishda oshishiga olib keladi.



2-rasm. Eng yaqin yaqinlashish radiusi r_0 ning ta'sir parametri b, plazma parametri k va β parametriga bog'liqligi

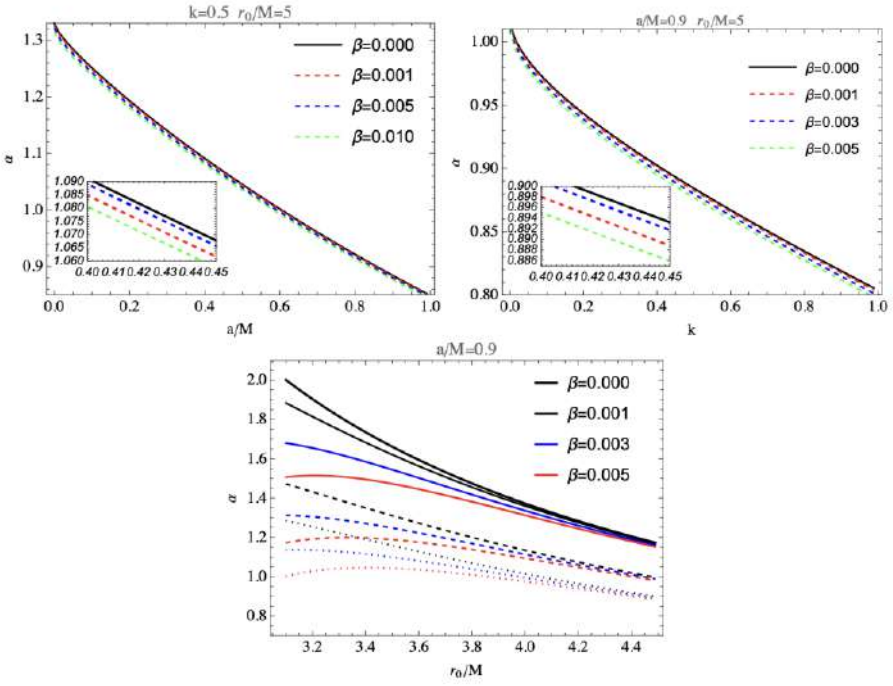
Radial koordinata r va ϕ burchagi o‘rtasidagi bog‘liqlik quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\frac{d\phi}{dr} = -\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}\frac{g_{t\phi} + bg_{tt}}{\sqrt{g_{\phi\phi} - (g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})\frac{k}{r^{\frac{3}{2}}} + 2bg_{t\phi} + b^2 g_{tt}}}$$

Ekvatorial tekislikda (θ = π/2), radial koordinata r va ϕ burchagio‘rtasidagi bog‘liqlik (17) dagi ikkinchi va uchinchi tenglamalardan olinadi.

Keyin, og‘ish burchagi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\alpha = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{d\phi}{dr} dr - \pi.$$



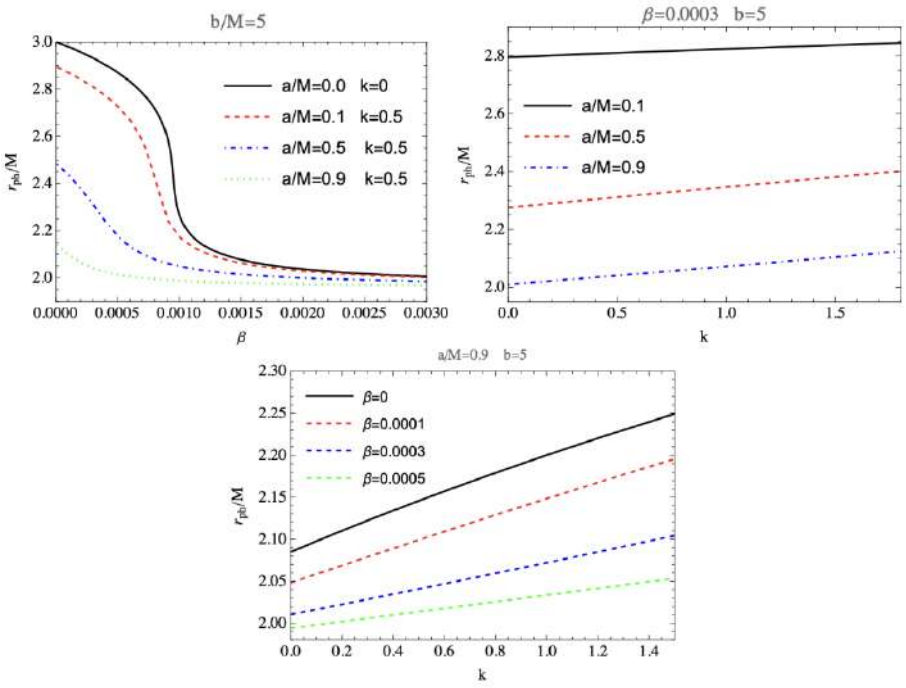
3-rasm. Fotonlarning og‘ish burchagining r_0, β, a va k parametrlariga bog‘liqligi. Uzluksiz chiziqlar k = 0, uzlikli chiziqlar k = 0.5, nuqtali chiziqlar k = 1 holatlari uchun

Yuqoridagi integral raqamli usulda hisoblanadi va 3-rasmda tasvirlangan. 3-rasmdagi birinchi grafikda qora tuynukning aylanishi oshishi bilan SBR gravitatsiyasidagi aylanuvchi Kerr tipidagi qora tuynuk fazo-vaqtida harakatlanayotgan fotonlarning og‘ish burchagining kamayishi aniq ko‘rinadi. Shaklning ikkinchi panelida ham og‘ish burchagining plazma parametri k ga bog‘liqligini ko‘rsatuvchi egri chiziqlarning o‘xshash xatti-harakati kuzatiladi. So‘nggi panelda fotonlarning og‘ish burchagining eng yaqin yaqinlashish radiusining o‘zgarishi bilan bog‘liqligi tasvirlangan. So‘nggi grafikdan ko‘rinib turibdiki, og‘ish burchagining eng yaqin yaqinlashish radiusiga bog‘liqligi monoton emas. Xususan, qora tuynuk yaqinida og‘ish burchagi eng yaqin yaqinlashish radiusi ortishi bilan ortadi, maksimal qiymatga yetguncha, shundan so‘ng kamaya boshlaydi. Bu xatti-harakat β ni o‘z ichiga olgan va butun r radial koordinata diapazoni uchun fazo-vaqt metrikasiga kiritilgan qo‘shimcha hadning monoton bo‘lmagan tabiati tufayli yuzaga keladi. Barcha grafiklarda og‘ish burchagining β parametri ortishi bilan kamayishi kuzatiladi.

Quyidagi shartlar asosida echimlarni topish orqali:

$$V(r) = 0\,,$$
$$V'(r) = 0\,,$$

foton sferasining fazo-vaqt parametrlariga bog'liqligini aniqlash mumkin, bu SBR gravitatsiyasidagi Kerr tipidagi qora tuynuk atrofidagi soyaning shakllanishini tushunish uchun muhim ahamiyatga ega.



4-rasm. Foton sferasi radiusining fazo-vaqt va plazma parametrlariga bog'liqligi tasvirlangan

Birinchi panelda, β parametri ortishi bilan foton sferasi radiusining qisqarishi, ayniqsa qora tuynuk aylanishi kichik qiymatlarida sezilarli ekanligi ko‘rsatilgan. β ~ 0.001 atrofida, ayniqsa aylanmaydigan (a = 0) va plazmasiz (k = 0) stsenariylar uchun radiusning keskin kamayishi kuzatiladi. Ikkinchi panelda, foton sferasi bilan plazma parametri k o‘rtasidagi chiziqli bog'liqlik tasvirlangan bo‘lib, yuqori aylanish qiymatlari uchun chiziqlar pastga siljiydi. Nihoyat, uchinchi grafikda, foton sferasi radiusining plazma parametriga nisbatan o‘zgarish tezligi β ga bog'liqligi tasvirlangan bo‘lib, β ning katta qiymatlari kichikroq o‘zgarishlarga olib keladi.

Radial funksiya V(r) (17)-da berilgan bo‘lib, radial koordinata r bo‘yicha hosila prim (') bilan belgilangan. 4-rasm foton sferasining fazo-vaqt parametrlariga bog‘liqligini ko‘rsatadi. Shaklning birinchi panelida β parametrining oshishi foton sferasi radiusining kamayishiga olib kelishi, va bu o‘zgarish tezligining qora tuynukning aylanishi kichik qiymatlarida aniqroq namoyon bo‘lishi ko‘rsatilgan. Xususan, aylanmaydigan holat uchun a = 0 va qora tuynuk atrofida plazma bo‘lmaganda k = 0, foton sferasining radiusi β~0.001 atrofida keskin kamayishi va chiziqlarning aylanish parametri katta qiymatlari uchun silliqlashishi kuzatiladi. 4-rasmning ikkinchi paneliga o‘tsak, plazma parametri k ning oshishi foton sferasining deyarli chiziqli o‘zgarishiga olib kelishi, qora tuynukning aylanishi esa chiziqlarni pastga siljitishi aniq ko‘rinadi. So‘nggi grafikdan foton sferasi radiusining plazma parametriga nisbatan o‘zgarish

tezligi β parametriga kuchli bog‘liq ekanligini ko‘rish mumkin. Xususan, β ning katta qiymatlari kichikroq o‘zgarish tezliklariga olib keladi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda biz β bilan belgilangan qo‘shimcha fazo-vaqt parametri bilan tavsiflangan SBR gravitatsiyasidagi aylanuvchi qora tuynukning optik xususiyatlarini o‘rganib chiqdik. Biz qora tuynukning notekis plazma bilan o‘ralgan va foton harakatiga ta’siri plazma parametri k bilan miqdoriy aniqlangan stsenariyni ko‘rib chiqdik. Tahlillarimiz shuni ko‘rsatdiki, fotonlarning eng yaqin yaqinlashish radiusi bilan ta’sir parametri o‘rtasidagi bog‘liqlik markaziy qora tuynukning bevosita yaqin atrofida β parametrining sezilarli ta’sirini ochib beradi. Biroq, bu ta’sir uzoqroq masofalarda sezilarli darajada kamayadi. Bundan tashqari, qora tuynukning fazo-vaqtida fotonlarning og‘ish burchagi bo‘yicha batafsil tadqiqotimiz shuni ko‘rsatdiki, ham qora tuynukning aylanishi, ham plazma parametrining oshishi og‘ish burchagining monoton kamayishiga olib keladi. Biroq, og‘ish burchagining eng yaqin yaqinlashish radiusiga bog‘liqligi β parametri mavjud bo‘lganda monoton bo‘lmagan xatti-harakati namoyon etadi, ya’ni u eng yaqin yaqinlashish radiusining ortishi bilan avval maksimalga chiqadi, so‘ngra kamayadi. Shuningdek, biz foton sferasining radiusi plazma parametri k ga qora tuynukning aylanishi va β parametriga nisbatan ancha kam ta’sir ko‘rishini kuzatdik. Ayniqsa, foton sferasi radiusi β parametrining o‘zgarishi bilan keskin o‘zgarishlarga uchray oladi, shu bilan birga u qora tuynukning aylanishiga nisbatan standart bog‘liqlikni namoyon etadi.

Xulosa qilib shuni ta'kidlash mumkinki, bizning topilmalarimiz SBR gravitatsiyasi bilan bog‘liq β parametrining fotonlar va fazo-vaqtning o‘ziga xatti-harakatiga kuchli ta’sirini ta’kidlaydi. Qiziqarlisi shundaki, β dagi o‘zgarishlar bilan fazo-vaqtning monoton bo‘lmagan xatti-harakati qiziqarli natijalarga olib keladi va bu SBR gravitatsiyasi kabi modifikatsiyalangan tortishish nazariyalaridagi gravitatsion o‘zaro ta'sirlarning murakkabligini ochib beradi.

ADABIYOTLAR:

1. K. Akiyama et al. (Event Horizon Telescope), Astrophys. J. Lett. 875, L1 (2019), arXiv:1906.11238 [astro-ph.GA] .

2. K. Akiyama et al. (Event Horizon Telescope), Astrophys. J. Lett. 875, L5 (2019), arXiv:1906.11242 [astro-ph.GA] .

3. B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, and T. Adams (LIGO

4. Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016). S. Shankaranarayanan and J. P. Johnson, Gen. Rel. Grav. 54, 44 (2022), arXiv:2204.06533 [gr-qc] .

5. S. V. Ketov, Universe 8 (2022), 10.3390/universe8070351.

6. R. Campos Delgado and S. V. Ketov, Phys. Lett. B 838, 137690 (2023), arXiv:2209.01574 [gr-qc] .

7. R. M. Wald, Phys. Rev. D 10, 1680 (1974).

8. S. Shaymatov, F. Atamurotov, and B. Ahmedov, Astrophys. Space Sci. 350, 413 (2014).

9. S. Shaymatov, M. Patil, B. Ahmedov, and P. S. Joshi, Phys. Rev. D 91, 064025 (2015).

10.I. Hussain and S. Ali, Eur. Phys. J. Plus 131, 275 (2016), arXiv:1601.01295 [gr-qc] .

11.N. Dadhich, A. Tursunov, B. Ahmedov, and Z. Stuchl´ık, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 478, L89 (2018), arXiv:1804.09679 [astro-ph.HE] .

12.C. A. Benavides-Gallego, A. Abdujabbarov, D. Malafarina, B. Ahmedov, and C. Bambi, Phys. Rev. D 99, 044012 (2019).

13.S. Shaymatov, J. Vrba, D. Malafarina, B. Ahmedov, and Z. Stuchl´ık, Phys. Dark Univ. 30, 100648 (2020), arXiv:2005.12410 [gr-qc] .

14.S. Shaymatov, B. Narzilloev, A. Abdujabbarov, and C. Bambi, Phys. Rev. D 103, 124066 (2021).

15.J. Rayimbaev, B. Narzilloev, A. Abdujabbarov, and B. Ahmedov, Galaxies 9 (2021), 10.3390/galaxies9040071.

16.B. Narzilloev, J. Rayimbaev, A. Abdujabbarov, and B. Ahmedov, Galaxies 9 (2021), 10.3390/galaxies9030063.

17.B. Narzilloev and B. Ahmedov, New Astron. 98, 101922 (2023).

18.B. Narzilloev and B. Ahmedov, Symmetry 14 (2022), 10.3390/sym14091765.

19.B. Narzilloev and B. Ahmedov, Symmetry 15, 293 (2023).

20.B. Narzilloev, A. Abdujabbarov, and A. Hakimov, International Journal of Modern Physics A 37, 2250144 (2022), https://doi.org/10.1142/S0217751X22501445 .

21.D. Ovchinnikov, M. U. Farooq, I. Hussain, A. Abdujabbarov, B. Ahmedov, and Z. c. v. Stuchl´ık, Phys. Rev. D 104, 063027 (2021).

22.B. Narzilloev and B. Ahmedov, Int. J. Mod. Phys. A 38, 2350026 (2023).

23.Abdulxamidov, Farrux, Benavides-Gallego, Carlos A., Narzilloev, Bakhtiyor, Hussain, Ibrar, Abdujabbarov, Ahmadjon, Ahmedov, Bobomurat, and Xu, Haiguang, Eur. Phys. J. Plus 138, 635 (2023).

24.H. Alibekov, B. Narzilloev, A. Abdujabbarov, and B. Ahmedov, Symmetry 15 (2023), 10.3390/sym15071414.

25.A. Ditta, X. Tiecheng, S. Mumtaz, F. Atamurotov, G. Mustafa, and A. Abdujabbarov, Physics of the Dark Universe 41, 101248 (2023).

26.B. Narzilloev, I. Hussain, A. Abdujabbarov, B. Ahmedov, and C. Bambi, Eur. Phys. J. Plus 136, 1032 (2021), arXiv:2110.01772 [gr-qc] .

27.T. Mirzaev, S. Li, B. Narzilloev, I. Hussain, A. Abdujabbarov, and B. Ahmedov, European Physical Journal Plus 138, 47 (2023).

28.E. Battista and G. Esposito, Eur. Phys. J. C 82, 1088 (2022), arXiv:2202.03763 [gr-qc] .

29.A. Belhaj, H. Belmahi, M. Benali, Y. Hassouni, and M. B. Sedra, (2023), arXiv:2304.03883 [hep-th] .

30.P. Madau and C. Thompson, The Astrophysical Journal 534, 239 (2000).

31.G. S. Bisnovatyi-Kogan and O. Y. Tsupko, Universe 3 (2017).

32.F. Atamurotov, S. Shaymatov, P. Sheoran, and S. Siwach, JCAP 08, 045 (2021), arXiv:2105.02214 [gr-qc] .

33.G. Z. Babar, F. Atamurotov, S. Ul Islam, and S. G. Ghosh, Phys. Rev. D 103, 084057 (2021), arXiv:2104.00714 [gr-qc] .

34.F. Atamurotov, S. Shaymatov, and B. Ahmedov, Galaxies 9 (2021).

35.Atamurotov, Farruh, Abdujabbarov, Ahmadjon, and Rayimbaev, Javlon, Eur. Phys. J. C 81, 118 (2021).

36.W. Javed, I. Hussain, and A. ¨Ovg¨un, Eur. Phys. J. Plus 137, 148 (2022), arXiv:2201.09879 [gr-qc] .

37.W. Javed, M. Aqib, and A. ¨Ovg¨un, Phys. Lett. B 829, 137114 (2022), arXiv:2204.07864 [gr-qc] .

38.V. S. Morozova, B. J. Ahmedov, and A. A. Tursunov, 346, 513 (2013).

39.B. Turimov, B. Ahmedov, A. Abdujabbarov, and C. Bambi, International Journal of Modern Physics D 28 (2018), 10.1142/S0218271820400131.

40.F. Atamurotov, F. Sarikulov, A. Abdujabbarov, and B. Ahmedov, European Physical Journal Plus 137, 336 (2022).

41.F. Atamurotov, F. Sarikulov, V. Khamidov, and A. Abdujabbarov, Eur. Phys. J. Plus 137, 567 (2022).

42.Atamurotov, Farruh, Alloqulov, Mirzabek, Abdujabbarov, Ahmadjon, and Ahmedov, Bobomurat, Eur. Phys. J. Plus 137, 634 (2022).

43.F. Atamurotov, D. Ortiqboev, A. Abdujabbarov, and G. Mustafa, The European Physical Journal C 82 (2022), 10.1140/epjc/s10052-022-10619-z.

44.A. Chowdhuri and A. Bhattacharyya, Phys. Rev. D 104, 064039 (2021), arXiv:2012.12914 [gr-qc] .

45.M. Fathi, M. Olivares, and J. R. Villanueva, Eur. Phys. J. C 81, 987 (2021), arXiv:2104.07721 [gr-qc] .

46.F. Atamurotov and S. G. Ghosh, Eur. Phys. J. Plus 137, 662 (2022).

47.G. Mustafa, F. Atamurotov, I. Hussain, S. Shaymatov, and A. ¨Ovg¨un, Chinese Physics C 46, 125107 (2022).

48.F. Atamurotov, I. Hussain, G. Mustafa, and K. Jusufi, Eur. Phys. J. C 82, 831 (2022), arXiv:2209.01652 [gr-qc] .

49.F. Atamurotov, I. Hussain, G. Mustafa, and A. ¨Ovg¨un, Chin. Phys. C 47, 025102 (2023).

50.X. He, T. Xu, Y. Yu, A. Karamat, R. Babar, and R. Ali, Annals of Physics 451, 169247 (2023).

51.S. V. Ketov, Universe 8, 351 (2022), arXiv:2205.13172 [gr-qc] .

52.E. Witten, Nucl. Phys. B 500, 3 (1997), arXiv:hep-th/9703166 .

53.S. V. Ketov, E. O. Pozdeeva, and S. Y. Vernov, JCAP 12, 032 (2022), arXiv:2211.01546 [gr-qc] .

54.S. P. Drake and P. Szekeres, Gen. Rel. Grav. 32, 445 (2000), arXiv:gr-qc/9807001 .

55.H. Erbin, Universe 3, 19 (2017), arXiv:1701.00037 [gr-qc] .

56.G. S. Bisnovatyi-Kogan and O. Y. Tsupko, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 404, 1790 (2010).

57.J. Bad´ıa and E. F. Eiroa, Phys. Rev. D 104, 084055 (2021), arXiv:2106.07601 [gr-qc] .

58.J.L.Synge (1961).

59.R. Kulsrud and A. Loeb, Phys. Rev. D 45, 525 (1992).

UO‘K 504.05: 621.039.7: 543.3

TEXNOGEN HUDUDLARDAGI ATMOSFERA HAVOSINING RADIATSION KO‘RSATKICHLARINI RADIOMETRIK USULLAR YORDAMIDA BAHOLASH

Haydarov Umidjon Erkin o‘g‘li,
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti tayanch doktoranti
umidjon_haydarov@samdu.uz
Muzafarov Amrullo Mustafoevich,
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti professori, kimyo fanlari doktori
muzafarov@ngmk.uz

Annotatsiya. *Ushbu tadqiqot ishida texnogen hududlardagi radiatsion ko‘rsatkichlar - tuproq yuzasidagi radonning oqim zichligi (ROZ), havodagi radonning ekvivalent muvozanatdagi hajmiy aktivligi (REMHA) va ekvivalent doza quvvatlari (EDQ) aniqlangan. Tadqiqot obyekti sifatida uran konlari mavjud hududlarning kuzatish nuqtalari, uranni yer ostida tanlab eritish uchastkalari, oqova chiqindilarini saqlash joylari (хвостохранилищах) va balansdan tashqari kon chiqindilari saqlanadigan hududlar tanlab olingan. Tadqiqot natijalariga ko‘ra ROZ qiymatlari 892 dan 7967 mBk/m²·s gacha, REMHA qiymatlari 10 dan 90 Bq/m³ gacha, EDQ qiymatlari esa 0,12 dan 10,8 μZv/soat gacha ekanligi aniqlandi. Olingan natijalar va hududlar o‘rtasidagi farq diagrammalar orqali taqqoslangan. Hududlardagi radiatsion ko‘rsatkichlar Python dasturlash tili yordamida yaratilgan grafiklar asosida qiyosiy tahlil qilingan.*

Kalit so‘zlar: *radiatsiya, ekotizim, doza, aktivlik, uranni yer ostida tanlab eritish, ekspozitsion doza, ekvivalent doza, boxplot, whisker.*

ОЦЕНКА РАДИАЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА В ТЕХНОГЕННЫХ РАЙОНАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДИОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Аннотация. *В данном исследовании определены радиационные показатели в техногенных районах – плотность потока радона (ППР) с поверхности почвы, эквивалентная равновесная объёмная активность радона (ЭРОА) в воздухе и мощности эквивалентной дозы (МЭД). В качестве объекта исследования были выбраны наблюдательные точки районов, где расположены урановые месторождения, участки подземного выщелачивания урана, места хранения сточных отходов (хвостохранилища) и территории складирования забалансовых рудных отходов. Согласно результатам исследования, значения ППР составляют от 892 до 7967 мБк/м²·с, значения ЭРОА – от 10 до 90 Бк/м³, а значения МЭД – от 0,12 до 10,8 мкЗв/ч. Полученные результаты и различия между территориями были сопоставлены с помощью диаграмм. Радиационные показатели по территориям сравнительно проанализированы на основе графиков, созданных с использованием языка программирования Python.*

Ключевые слова*: радиация, экосистема, доза, активность, подземное выщелачивание урана, экспозиционная доза, эквивалентная доза, boxplot, whisker.*

ASSESSMENT OF RADIATION INDICATORS OF ATMOSPHERIC AIR IN TECHNOGENIC AREAS USING RADIOMETRIC METHODS

Abstract. *In this study, the radiation parameters in technogenic areas were determined, including the radon flux density (RFD) from the soil surface, the equilibrium equivalent volumetric activity of radon (EEVA) in the air, and the equivalent dose rates (EDR). The objects of the study were observation points in areas with uranium deposits, sites of in-situ leaching of uranium, wastewater storage facilities (tailing ponds), and territories where off-balance ore wastes are stored. According to the results, RFD values ranged from 892 to 7967 mBq/m²·s, EEVA values from 10 to 90 Bq/m³, and EDR values from 0.12 to 10.8 μSv/h. The obtained results and the differences between the areas were compared using diagrams. Radiation parameters across the sites were comparatively analyzed using graphs generated with the Python programming language.*

Keywords: *radiation, ecosystem, dose, activity, in-situ leaching of uranium, exposure dose, equivalent dose, boxplot, whisker.*

Kirish. Atrof-muhitdagi nurlanish ko‘plab tabiiy va sun’iy nurlanish manbalardan kelib chiqadi. Uran, toriy va kaliy kabi radionuklidlar barcha ekotizim obyektlarida uchraydi. Insonlarga ta’sir etadigan umumiy tabiiy radiatsion dozaning ~ 82 % tabiiy manbalardan keladi. Bularning ichida radon va uning yemirilishidan hosil bo‘ladigan radiaktiv elementlari taxminan 55 % ni tashkil qiladi [1].

Radon (^{222}Rn) — tabiiy radioaktiv inert gaz bo‘lib, uran (^{238}U) yemirilish zanjiridagi radiy (^{226}Ra) ning parchalanishi natijasida hosil bo‘ladi. Uran ma’lum darajada barcha tog‘ jinslari va tuproqlarda mavjud. Shuning ekan radon tabiiy muhitda doimiy ravishda hosil bo‘ladi va emanatsiya koeffitsienti orqali tuproq zarrachalaridan bo‘shliqlarga chiqadi. Radonning tuproqdan ajralib chiqishi diffuziya va konveksiya jarayonlari bilan sodir bo‘ladi. Tuproqning g‘ovakligi, namligi va tarkibidagi yoriqlar radonning harakatiga ta’sir qiladi. Quruq, g‘ovak va yoriqli joylarda radon tezroq harakatlanadi. Namlik ko‘p bo‘lsa, radon suvda erib qoladi va harakati sekinlashadi [2–4]. Tuproq yuzasidan radon gaz holida atmosferaga chiqadi. Uning chiqishi ko‘pincha geologik yoriqlar, vulqonli hududlar va ayniqsa uran rudalari joylashgan hududlarda kuchli bo‘ladi. Shamol va harorat farqi radonning havoda tarqalishini tezlashtiradi. Atmosferaga chiqqan radon qisqa muddat yashovchi parchalanish mahsulotlariga (poloniy, vismut, qo‘rg‘oshin izotoplari) aylanadi. Ular aerozol zarrachalariga yopishib, odam nafas olganda o‘pkaga tushadi va sog‘liq uchun xavf tug‘diradi.

So‘nggi yillarda uran tarkibli hududlarda, uran konlarining chiqindi saqlash joylarida va unga tutash aholi yashash punktlarida radiatsion monitoring bo‘yicha keng qamrovli baholash ishlari amalga oshirilmoqda. Uran tarkibli hududlarning atmosfera havosida doimiy ravishda radonning ekvivalent muvozanat hajmli faolligi va nurlanishlarning ta’sir qiluvchi effektiv doza quvvatlarini nazorat qilib borish radiatsion nurlanish oqibatida kelib chiqadigan ko‘plab muammolarning oldini oladi. Xususan, yuqori dozali radon gazidan uzoq muddat davomida nafas olish yoki ifloslangan suvni iste’mol qilish oqibatida o‘pka va oshqozon saratoni, shuningdek boshqa nurlanish bilan bog‘liq bo‘lgan muammolar xavfini oshiradi. Inson salomatligiga ta’siridan tashqari, radionuklidlarning tuproq va suvda to‘planishi mahalliy ekotizimlarni buzishi, oziq-ovqat zanjirini ifloslantirishi hamda qishloq xo‘jaligi unumdorligiga salbiy ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Qo‘shni Qozog‘istonning shimoliy Stepnogorsk mintaqasida olib borilgan tadqiqotlar uran konlari hududlarida radionuklidlarning sezilarli darajada to‘planishini ko‘rsatgan, shuningdek, turar-joy hududlarida qayd etilgan radioaktiv anomaliyalar jahon o‘rtacha ko‘rsatkichlaridan yuqori bo‘lgani aniqlangan [5-7].

Xuddi shunday natijalar dunyoning boshqa uran qazib olish hududlarida ham qayd etilgan. Masalan, Chexiya va Ruminiyada eski uran konlari yuqori darajadagi yopiq radon konsentratsiyalari hamda yer osti suvlarining uzoq muddatli ifloslanishi bilan bog‘liq bo‘lib, mahalliy aholiga doimiy nurlanish xavfini tug‘diradi [8, 9]. AQShda, xususan Navaxo milliy hududida tarixiy uran qazib olish jarayonlari keng ko‘lamli tuproq va suv ifloslanishiga olib kelgan, bu esa saraton kasalliklari darajasining oshishiga sabab bo‘lgan va katta miqyosdagi ekologik-sanitariya tadqiqotlari hamda rekultivatsiya dasturlarini amalga oshirishni talab etgan [10]. Mazkur xalqaro misollar shuni ko‘rsatadiki, uran qazib olish hududlarida va chiqindi saqlash obyektlarida doimiy monitoring va radiatsion xavfni baholash tadqiqotlari zarurdir. Shu jihatdan Respublikamizda bunday tadqiqotlarning olib borilishi dolzarb hisoblanadi.

Ushbu tadqiqotning maqsadi – texnogen hududlarda atrof-muhitdagi gamma nurlanish darajalari hamda radon konsentratsiyalarini baholash orqali mahalliy aholi uchun mumkin bo‘lgan nurlanish xavflarini aniqlashdir.

Radonning ekvivalent muvozanatdagi hajmiy aktivligi (REMHA) - radon izotoplarining qisqa yarim parchalanish davriga ega bo‘lgan hosilalari - ^{218}Po, ^{214}Pb, 214Bi; ^{212}Pb va ^{212}Bi ning hajmiy aktivliklarining yig‘indisidan iboratdir. REMHA radon va uning hosilaviy elementlari o‘rtasida radioaktiv muvozanat mavjud deb faraz qilgan holda, havodagi radon va uning qisqa umrli hosilalaviy elementlarining alfa energiyasini baholash uchun hosil qilingan ko‘rsatkichdir. O‘lchangan qiymatlar xalqaro me’yoriy tashkilotlar, jumladan ICRP (International Commission on Radiological Protection) tomonidan belgilangan xavfsizlik chegaralari bilan taqqoslanib, xavfi yuqori bo‘lgan hududlarni aniqlashga qaratildi. Ushbu tadqiqot natijalari radiatsion ta’sir yuqori bo‘lgan hududlarni aniqlash orqali nurlanish darajasini kamaytirish va aholining sog‘lig‘ini muhofaza qilish uchun zarur bo‘lgan choralarni ishlab chiqishda tavsiyalar berishga xizmat qiladi [11-12].

Tadqiqot ishlari uranli hududlarni kuzatish nuqtalarida, uranni yer ostida tanlab eritish uchastkalarida, oqova chiqindilarini saqlash joylarida (хвостохранилищах) va balansdan tashqari rudalar (kon chiqindilari) uyumlarida o‘tkazildi. Ushbu hududlar aholi yashash punktlariga yaqin bo‘lmasa-da, ko‘pchilik radionuklidlar *chang va aerozollarning shamol bilan ko‘chishi orqali osongina migratsiyalanadi. Eng katta migratsiya bahor-yoz faslida kuzatiladi, radionuklidlarning yuqori darajada to‘planishi esa shamol tezligi kamayadigan joylarda (pastliklar, bo‘rtmalar, yonbag‘irlar) va aholi yashaydigan hududlarda sodir bo‘ladi [13]*.

O‘lchov qurilmalari va tadqiqot usullari.

Gamma-nurlanishlarning ekspozitsion doza quvvatini (EDQ) o‘lchash. Gamma-nurlanishlarning ekspozitsion doza quvvatini *H*(10)* o‘lchash Rossiyaning “DOZA” kompaniyasi tomonidan ishlab chiqarilgan ДКС-96 radiometr-dozimetri yordamida bajarildi. Ushbu ko‘chma qurilma aynan ionlashtiruvchi nurlanishni, xususan gamma nurlanishini aniqlash va miqdoriy baholash uchun mo‘ljallangan. Ssintillyatsion detektor bilan jihozlangan **ДКС-96** dozimetri belgilangan vaqt oralig‘ida (1–60 s) nurlanish doza quvvatini ~0,1 μZv/soat dan 10 Zv/soat gacha bo‘lgan diapazonda o‘lchaydi. Dozimetrning o‘lchash xatoligi ±12% ni tashkil etadi.

Atmosfera havosidagi radonning solishtirma aktivligini o‘lchash. Atmosfera havosidagi radonning ekvivalent muvozanatdagi hajmiy aktivligi qiymati (REMHA) “Alpharad Plus” avtomatik ixcham radiometr yordamida o‘lchandi (ishlab chiqaruvchi – DOZA SPZ, Rossiya Federatsiyasi). Alpharad Plus yarimo‘tkazgichli kremniy detektori asosida ishlaydi va radon hamda toron parchalanishi natijasida ajralib chiqadigan alfa-zarralar energiyasini aniq qayd etishga mo‘ljallangan. Bu esa havodagi radon konsentratsiyasini yuqori aniqlikda baholash imkonini beradi.

Alpharad Plus radon (Radon-222) konsentratsiyasini keng diapazonda – 1 dan 2 × 10^6 hisob/soniya (cps) oralig‘ida o‘lchay oladi. Ushbu diapazon fon darajasidagi past konsentratsiyalarni ham, xavf yuqori bo‘lgan hududlardagi yuqori darajalarni ham samarali aniqlash imkonini beradi. Qurilmaning REMHA ni o‘lchashdagi nisbiy xatoligi ±30% bo‘lib, bu hisoblash statistikasi, kalibrlash aniqligi, atrof-muhit omillari va asbob sezgirligini hisobga oladi.

Har bir joyda o‘lchash jarayoni taxminan 2 soat davom etdi. Bunga 30 daqiqa radon to‘planish davri hamda ketma-ket 20 daqiqalik ikki o‘lchash sikli kiritildi. Har bir sikl oldidan havo o‘lchash kamerasiga pompalanib, namuna sifatini ta’minlashga e’tibor berildi. Barcha o‘lchovlar radonni havoda aniqlash bo‘yicha [30] qo‘llanmalarda belgilangan eng yaxshi amaliyotlarga qat’iy muvofiq olib borildi. Ushbu qoida va standartlarga rioya qilish natijalarning izchilligi, aniqligi va xalqaro darajada solishtirilishini ta’minladi.

Har bir aholi punktida turli nuqtalarda o‘rtacha 5 ta o‘lchash amalga oshirildi. Har bir nuqtada statistik tebranishlarni kamaytirish va ma’lumotlarning ishonchliligini oshirish maqsadida 3 martadan takroriy o‘lchovlar o‘tkazildi. Ushbu 3 natijaning arifmetik o‘rtachasi hisoblab chiqilib, mazkur nuqta uchun doza ko‘rsatkichi sifatida qayd etildi.

Radon oqimining zichligini aniqlash. Radon-222 ning oqim zichligini o‘lchash usuli, ma’lum yuzaga ega bo‘lgan grunt yuzasidan chiqadigan radon-222 miqdorini namuna oluvchi idishda yoki o‘lchash kamerasi ichida yig‘ilishiga asoslanadi. Tekshirilayotgan hududda radonning oqim zichligini o‘lchash uchun nazorat nuqtasi atrofida gorizontal maydon tayyorlanadi. Maydonning hajmi kamida 0,2 × 0,2 m² bo‘lishi lozim. O‘lchash maydoni qor, chiqindi, o‘simlik qoldiqlari va yirik toshlardan tozalanadi, 3–5 sm chuqurlikkacha yumshatiladi va yuzasi tekislanadi. Maydon tayyorlagandan keyin o‘lchash kamida 20 daqiqa o‘tgach boshlanadi. Namunalarni olishda atrof-muhit harorati –2 °C dan +50 °C gacha va nisbiy namlik +25 °C da 100 % bo‘lishi kerak. Namunalar muzlagan yoki suv bosgan grunt yuzasidan olinmaydi. O‘lchashlar qariyb 20 daqiqa davom etadi va o‘lchash tugagach, ekranda hisoblangan radon oqim zichligi (ROZ) qiymati chiqadi.

Radon oqim zichligi (ROZ)ni hisoblash formulasi quyidagicha:

$$\text{ROZ} = Q \cdot \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right) \cdot \frac{(V_1+V_2)}{T \cdot S} \cdot \exp(\lambda_{Rn} \cdot t) \qquad (1)$$

Bu yerda: Q – o‘lchangan radonning solishtirma hajmiy aktivligi, Bq·m^{-3}; V_2 – o‘lchash kamerasining hajmi, V_2 = 0,94 l; V_1 – probirkadagi namunaviy hajm, V_1 = 1,05 l; t – namuna olish boshlangan va tugatilgan vaqtlar farqi, min, t = t_2 – t_1; λ_{Rn} –^{222}Rn ning yemirilish doimiysi, $\lambda = 1{,}26 \times 10^{-4}$ min^{-1}; V_3 – to‘plovchi kamera va ulovchi naychalarning bo‘sh hajmi, V_3 = 0,563 l; T – mustaqil havo nasosining namunani olish paytidagi ishlash vaqti, T = 300 s; S – to‘plovchi kamera yordamida yer yuzasidan radon yig‘ish maydoni, S = 0,0163 m².

Natijalar va tahlillar. Uran konlari mavjud hududlarning kuzatish nuqtalarida, uranni yer ostida tanlab eritish uchastkalarida, oqova chiqindilarini saqlash joylarida (хвостохранилищах) va balansdan tashqari rudalar (kon chiqindilari) uyumlarida - tuproq yuzasidagi radonning oqim zichligi (ROZ), havodagi radonning ekvivalent muvozanatdagi hajmiy aktivligi (REMHA) va ekvivalent doza quvvati (EDQ) o‘lchov natijalari 1-jadvalda keltirilgan.

Olingan radiatsion ko‘rsatkichlarining (ROZ, REMHA, EDQ) o‘rtacha qiymatlari orasidagi farqni 1, 2 va 3 – rasmlardagi diagrammalar orqali yaqqol ko‘rish mumkin. Diagrammadagi joy nomlari quyidagi tartibda keltirilgan:

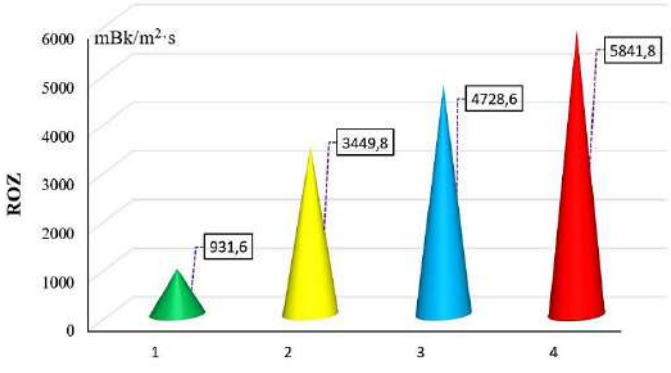
1- kuzatish punktlaridagi o‘lchov natijalarining o‘rtacha qiymati;

2- uranni yer ostida tanlab eritish uchastkalaridagi o‘lchov natijalarining o‘rtacha qiymati;

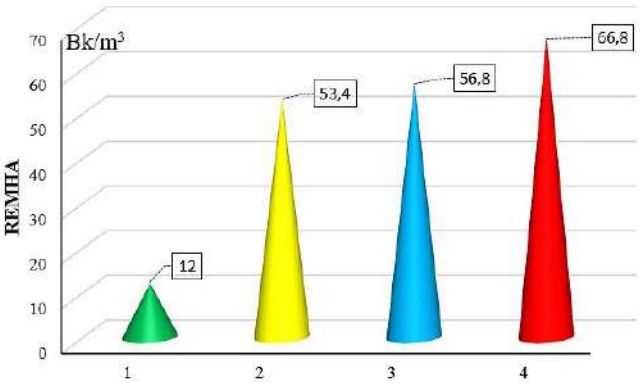
3- oqova chiqindilarini saqlash joylaridagi o‘lchov natijalarining o‘rtacha qiymati;
4- balansdan tashqari rudalar uyumlaridagi o‘lchov natijalarining o‘rtacha qiymati.

1-jadval.

№	ROZ (ППР, RFD) mBk/m²·s	REMHA (ЭРОА, EEVA) Bk/m³	EDQ (МЭД, EDR) mkZv/soat
Kuzatish punktlaridagi o‘lchov natijalari			
1	892±214	11	0,18
2	927±228	12	0,17
3	1012±226	15	0,16
4	910±201	10	0,12
5	917±205	12	0,14
O‘rtacha qiymat	931±214	12	0,154
Uranni yer ostida tanlab eritish uchastkalaridagi o‘lchov natijalari			
6	2092±549	28	2,24
7	3123±671	32	2,17
8	3676±745	57	2,47
9	4119±916	68	2,58
10	4239±1010	82	2,79
O‘rtacha qiymat	3444±778	53,4	2,45
Oqova chiqindilarini saqlash joylaridagi o‘lchov natijalari			
11	4112±859	31	2,25
12	4322±971	46	2,66
13	5176±1005	64	2,87
14	4688±906	56	3,14
15	5345±1103	87	4,32
O‘rtacha qiymat	4728±968	56,8	3,048
Balansdan tashqari rudalar uyumlaridagi o‘lchov natijalari			
16	4673±1069	56	10,8
17	6032±1109	68	5,60
18	5323±1003	65	6,80
19	5214±1016	55	4,65
20	7967±1093	90	9,35
O‘rtacha qiymat	5841±1085	66,8	7,44

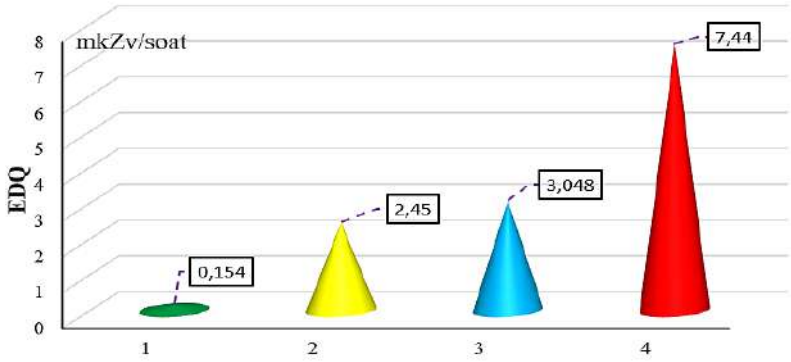


1-rasm. Joylardagi tuproq yuzasida radon oqim zichligining farqi



2-rasm. Joylardagi radonning ekvivalent muvozanat hajmiy aktivligi farqi

1-rasmdan ko‘rinadiki, radonning oqim zichligi kuzatish punktlarida eng kichik bo‘lib (o‘rtacha 931±214 mBk/m^2·s), eng katta qiymat esa balansdan tashqari rudalar (kon chiqindilari) uyumlarida (o‘rtacha 5841±1085 mBk/m^2·s) aniqlangan. Radonning ekvivalent muvozanat hajmiy aktivligi va ekvivalent doza quvvatlari ham 2 va 3-rasmlarda keltirilganidek eng kichik qiymatlar kuzatish punktlarida, eng katta qiymatlar esa balansdan tashqari rudalar (kon chiqindilari) uyumlarida aniqlangan.



3-rasm. Joylardagi ekvivalent doza quvvatining farqi

Tadqiqot o‘tkazilgan uranli hududlardagi ROZning qiymatlari 892÷7967 mBk/m^2·s oralig‘ida, REMHA qiymatlari 10 ÷ 90 Bk/m^3 oralig‘ida, EDQ qiymatlari esa 0,12 ÷ 10,8 mkZv/soat oralig‘iga aniqlangan. Ushbu qiymatlar O‘rta Osiyoning boshqa davlatlari va bir qator mamlakatlarning uranli hududlari bilan solishtirilganda yuqori ko‘rsatkich emas [14]. Xususan:

Havodagi radonning konsentratsiyasi:

- Kurday, Qozog‘iston – tashqarida: 20 dan 90 Bq/m³ gacha;
- Shekaftar, Qirg‘iziston – tashqarida: 2 dan 15 Bq/m³ gacha;
- Taboshar, Tojikiston – uy ichida: 15 dan 330 Bq/m³ gacha;
- Digmai, Tojikiston – tashqarida: 16 dan 1500 Bq/m³ gacha.

Gamma nurlanishlarning ekvivalent doza quvvatlari:

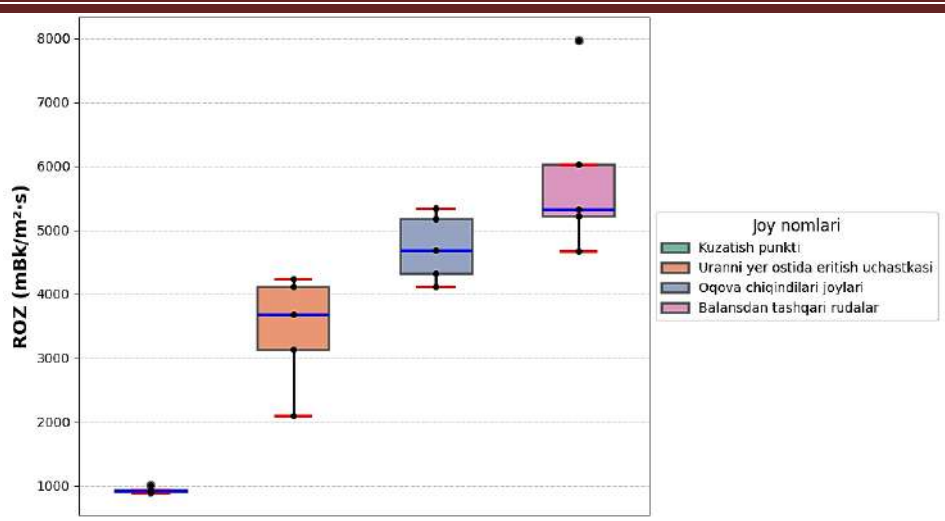
- Kurday, Qozog‘iston – tashqi muhitda: 0,14 dan 0,95 μZv/soat gacha;
- Shekaftar, Qirg‘iziston – tashqi muhitda: 0,16 dan 1,12 μZv/soat;
- Minkush, Qirg‘iziston – tashqi muhitda (texnogen chiqindi to‘plam hududida): 0,13 dan 0,50 μZv/soat;
- Kaji-Say, Qirg‘iziston – tashqi muhitda (chiqindi to‘plam hududida): 0,3 dan 15 μZv/soat, uran rudasi mavjud nuqtada 100 μZv/soat;
- Taboshar, Tojikiston – tashqi muhitda, Ko‘l kareri atrofida: 0,3 dan 3,9 μZv/soat;
- Digmai chiqindi to‘plami, Tojikiston – tashqi muhitda: 0,12 dan 22 μZv/soat.

Ushbu ko‘rsatkichlar NATO SfP RESCA loyihasi va JNKKT (Joint Norwegian–Kazakhstan–Kyrgyzstan–Tajikistan) loyihasi natijalarining umumiy hisobotidan olindi [14].

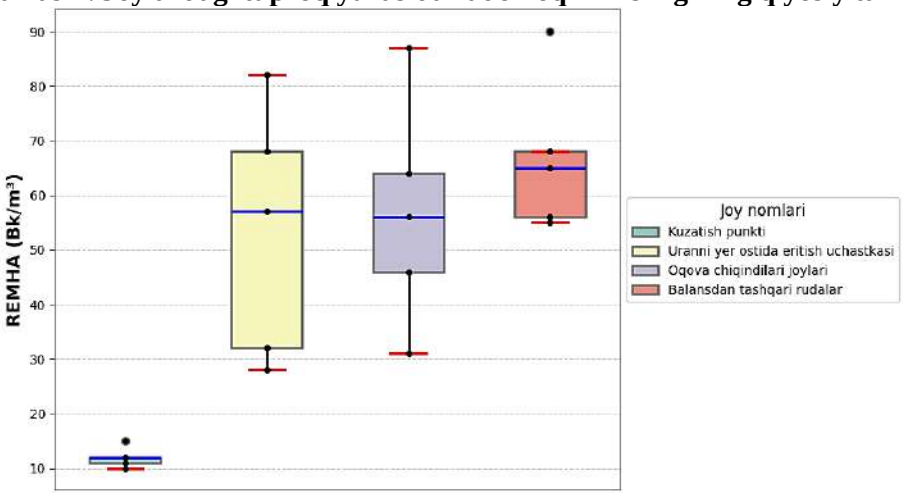
Tadqiqot hududlarida tuproq yuzasidagi radonning oqim zichligi (ROZ), radonning ekvivalent muvozanatdagi hajmiy aktivligi (REMHA) va ekvivalent doza quvvati (EDQ) qiymatlarining mediana, standart og‘ish va outlier qiymatlarini aniqlash Python dasturlash tilining Matplotlib va Seaborn kutubxonalarida yaratilgan grafiklar asosida amalga oshirildi (4.a.b.c-rasmlar).

Har bir panelda:

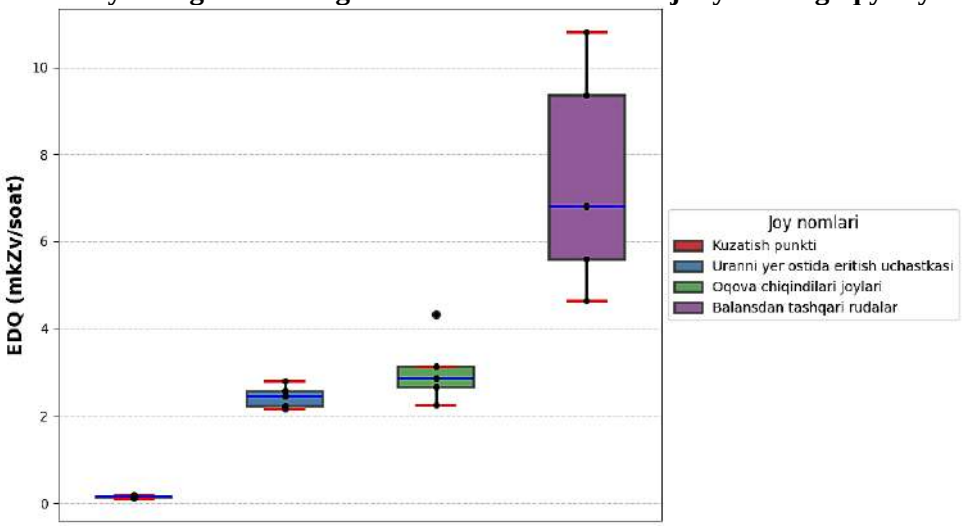
- *boxplot (quti)*larning yuqori va pastki chegaralari radiatsion ko‘rsatkichning 25-75% percentil oralig‘ini (IQR) va medianani (quti ichidagi chiziq) ko‘rsatadi;
- *whisker* (*boxplotdan tashqaridagi gorizontal qizil chiziq*)lar IQR·1.5 qoidasi bo‘yicha cho‘ziladi va 90% aniqlik oralig‘ini ko‘rsatadi;
- whiskerlar tashqarisidagi nuqtalar outlier (ajralib turgan qiymatlar) sifatida belgilangan. Qora nuqtalar esa har bir individual o‘lchovni ifodalaydi (stripplot, nuqtalar jitter-siz tartiblangan).
- boxplot (quti)lar ichidagi ko‘k gorizontal chiziqlar mediana o‘rtacha qiymatni ko‘rsatadi.



4.a-rasm. Joylardagi tuproq yuzasida radon oqim zichligining qiyosiy tahlili



4.b-rasm. Joylardagi radonning ekvivalent muvozanat hajmiy aktivligi qiyosiy tahlili



4.c-rasm. Joylardagi ekvivalent doza quvvatining qiyosiy tahlili

4-rasm. (a) ROZ (mBq/m²·s), (b) REMHA (Bq/m³) va (c) EDQ (μZv/soat) joylar bo‘yicha qiyosiy tahlillari

Tahlil va xulosalar.

1. Radon oqim zichligi (ROZ, mBk/m²·s).

20 ta nuqtada o‘lchangan ROZ qiymatlari 892 dan 7967 mBk/m²·s gacha diapazonda bo‘ldi. Umumiy o‘rtacha qiymat 3891 ± 1782 mBk/m²·s, mediana esa 4322 mBk/m²·s, standart og‘ish 1782 mBk/m²·s ni tashkil etdi. Eng katta qiymat 7967 mBk/m²·s balansdan tashqari rudalar uyumida qayd etilgan

bo‘lib, bu kuzatish punktlaridagi fon qiymatlaridan (892–1012 mBk/m²·s) qariyb 8–9 baravar yuqori ekanligi aniqlandi.

2. Radonning ekvivalent muvozanat hajmiy aktivligi (REMHA, Bq/m³).

REMHA qiymatlari 10 dan 90 Bq/m³ gacha o‘zgarib, o‘rtacha qiymat 39 ± 24 Bq/m³, mediana esa 32 Bq/m³ ga teng bo‘ldi. Maksimal qiymat 90 Bq/m³ balansdan tashqari rudalar uyumida kuzatildi. Bu qiymatlar ICRP (300 Bq/m³) normalaridan ancha past, ammo texnogen hududlarda fon qiymatlaridan 7–8 baravar yuqori.

3. Ekvivalent doza quvvati (EDQ, μZv/soat).

EDQ qiymatlari 0,12 dan 10,8 μSv/soat gacha diapazonda ekanligi aniqlandi. Umumiy o‘rtacha qiymat 3,0 ± 2,6 μZv/soat, mediana esa 2,5 μZv/soat ni tashkil etdi. Maksimal qiymat 10,8 μZv/soat balansdan tashqari rudalarda qayd etilgan bo‘lib, bu tabiiy fon qiymatlaridan (0,12–0,18 μZv/soat) 50–90 baravar yuqori.

Umumiy xulosa.

- Kuzatish punktlarida barcha parametrlar tabiiy fon darajasida va me’yorlarda.
- Texnogen hududlarda (uranni yer ostida eritish uchastkasi, chiqindilar va rudalar uyumlari) radon oqimi, REMHA va EDQ sezilarli oshgan.
- Outlier sifatida 80–90 Bq/m³ REMHA va 9–11 μZv/soat EDQ qiymatlari qayd etilgan.
- Bu natijalar tuproqning o‘tkazuvchanligi, yer osti radon manbalari, uran rudalarining zahirasi hamda chiqindilarni saqlash texnologiyasi bilan izohlanadi.

Shunday qilib, ushbu tadqiqot natijalar radiatsiya xavfi yuqori hududlarni aniqlash uchun muhim ma’lumot bersa-da, to‘liq va ishonchli radon va gamma nurlanishlar dozasini baholashda faqat keng qamrovli va uzoq muddatli monitoring orqali aniqlanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Toxicological Profile for Ionizing Radiation. Agency for Toxic Substances and Disease Registry (US); September 1999. “Sources of Population Exposure to Ionizing Radiation.” NCBI Bookshelf, U.S. National Library of Medicine.

2. ICRP (International Commission on Radiological Protection). Radiological Protection Against Radon Exposure; SAGE Publication: London, UK, 2014.

3. Moshupya, P.M.; Mohuba, S.C.; Abiye, T.A.; Korir, I. Evaluation of Indoor Radon Activity Concentrations and Controls in Dwellings Surrounding the Gold Mine Tailings in Gauteng Province of South Africa. Int. J. Environ. Res. Public Health 2023, 20, 7010. [CrossRef] [PubMed]

4. Aghdam M.M.; Crowley Q.; Rocha C.; Dentoni V.; Da Pelo S.; Long S.; Savatier M. A study of natural radioactivity levels and radon/thoron release potential of bedrock and soil in southeastern Ireland. Int. J. Environ. Res. Public Health 2021, 18, 2709. [CrossRef]

5. Kashkinbayev Ye Kazymbet, P.; Bakhtin, M.; Khazipova, A.; Hoshi, M.; Sakaguchi, A.; Ibrayeva, D. Indoor Radon Survey in Aksu School and Kindergarten Located near Radioactive Waste Storage Facilities and Gold Mines in Northern Kazakhstan (Akmola Region). Atmosphere 2023, 14, 1133. [CrossRef]

6. Aumalikova M.; Bakhtin M.; Kazymbet P.; Zhumadilov K.; Altaeva N.; Ibrayeva D.; Shishkina E. Site-specifc concentration of uranium in urine of workers of the hydrometallurgical plant of Stepnogorsk mining and chemical combine. Radiat. Environm. Biophys. 2020, 59, 703–710. [CrossRef]

7. Ibrayeva D.S.; Aumalikova, M.N.; Ilbekova, K.B.; Bakhtin, M.; Kazymbet, P.K.; Ibrayeva, S.h.S. Zhumadilov KSh Assessment of radiation exposure in the settlements located in Stepnogorsk area Euras. J. Phys. Funct. Mat. 2021, 5, 52–63.

8. Kulich M.; Reˇricha V.; Reˇricha R.; Shore D.L.; Sandler, D.P. Incidence of non-lung solid cancers in Czech uranium miners: A case-cohort study. Environ. Res. 2011, 111, 400–405. [CrossRef]

9. Cosma C.; Cuco¸s A.; Papp B.; Begy R.; Dicu T.; Moldovan M.; Tru¸tă L.; Ni¸tă, D.C.; Burghele, B.; Suciu, L.; et al. Radon and remediation measures near Băi¸ta-¸Stei old uranium mine (Romania). Acta Geophys. 2013, 61, 859 875. [CrossRef]

10.Hornung, R.W. The Navajo People and Uranium Mining. Public Health Rep. 2007, 122, 822–823. [CrossRef]

11.Ibrayeva D.; Bakhtin M.; Kashkinbayev Ye Kazymbet P.; Zhumadilov K.; Altaeva N.; Aumalikova, M.; Shishkina, E. Radiation situation in the territories affected by mining activities in Stepnogorsk areas, Republic of Kazakhstan: Pilot study. Radiat. Protect. Dosimet. 2020, 189, 517–526. [CrossRef] [PubMed]

12.Kashkinbayev Y., Ibrayeva D., Aumalikova M., Saifulina E., Bizhanova D., Mussayeva E., Shokabayeva A., Kairullova M., Lesbek A., Kazhiyakhmetova B. Radon Concentration Survey in Settlements Located in Uranium Mining Territory in Northern Kazakhstan. Int. J. Environ. Res. Public Health 2025, 22, 723. https://doi.org/10.3390/ijerph2205072

13.Haydarov U.E., To'xtayev U.O'., Raxmonov Sh.X., Muzafarov A.M. Ekotizim obyektlarida radionuklidlar tarqlishi va migratsiyasi omillari // Fizikada fundamental va amaliy tadqiqotlar Xalqaro konferensiyasi materiallari. O'zMU, 16-17-may, 2025-yil, 113-115 betlar.

14.Salbu B., & Stegnar P. (Eds.). (2008). Legacy of uranium mining activities in Central Asia: Contamination, impact and risks. Springer. ISSN 0805-7214.

UO'K 531:621-752:681

DOIRAVIY PLASTINKANING DINAMIK SO'NDIRGICH BILAN CHIZIQLIMAS KO'NDALANG TEBRANISHLARI USTUVORLIGINI TEKSHIRISH

Dusmatov Olimjon Musurmonovich,
Samarqand davlat universiteti
Nazariy va injenerlik mexanikasi kafedrasi professori
fizika-matematika fanlari doktori, professor
dusmatov62@bk.ru;
Xodjabekov Muradjon Usarovich,
Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti
Qurilish muhandisligi kafedrasi v.b professori
fizika-matematika fanlari doktori(DSc)
uzedu@inbox.ru;
Xasanov Jaxongir Alijon o'g'li,
Samarqand davlat universiteti
Nazariy va injenerlik mexanikasi kafedrasi doktoranti
xasanovjaxongir089@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu ishda kinematik qo'zg'alishlarda gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinkaning dinamik so'ndirgich bilan chiziqlimas ko'ndalang tebranishlari ustuvorligi tekshirilgan. Ustuvorlik shartlari sistema parametrlariga bog'liq holda analitik ko'rinishda aniqlangan va sonli hisoblashlar natijasida tahlil qilingan.*

Kalit so'zlar: *doiraviy plastinka, dinamik so'ndirgich, kinematik qo'zg'alish, gisterezis, dissipativ, tebranish, ustuvorlik.*

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ

Аннотация. *В этой работе исследована устойчивость круглой пластины с упругодиссипативными характеристиками гистерезисного типа и с динамическим гасителем при кинематических воздействиях. Определены условия устойчивости в аналитическом виде в зависимости от параметров системы и проанализированы результаты численных расчетов.*

Ключевые слова: *круглая пластина, динамический гаситель, кинематическое воздействие, гистерезис, диссипативный, колебание, устойчивость.*

STABILITY ANALYSIS OF NONLINEAR TRANSVERSE VIBRATIONS OF A CIRCULAR PLATE WITH A DYNAMIC ABSORBER

Abstract. *Abstract: In this work, the stability of nonlinear transverse vibrations of a circular plate with a dynamic absorber and a hysteresis-type elastic dissipative characteristic under kinematic excitation is investigated. Stability conditions are determined analytically as a function of system parameters and analyzed numerically.*

Keywords: *circular plate, dynamic absorber, kinematic excitation, hysteresis, dissipative, vibration, stability.*

Kirish. Mashinasozlik, aviatsiya, kemasozlik va boshqa ko'plab sohalarda turli tipdagi qurilmalar va ularning elementlarini zararli tebranishlardan himoyalash natijasida mustahkamligini, uzoq muddat samarali ishlashini ta'minlash muammolari dolzarb hisoblanadi. Bu borada zararli tebranishlarni pasaytirishda dinamik so'ndirgichlar keng qo'llaniladi. Jumladan turli plastinka tipidagi tebranishlardan himoyalanuvchi qurilmalarni dinamik so'ndirishlar bilan matematik modellashtirish, dinamikasini va ustuvorligini tekshirish masalalariga ko'plab ilmiy tatqiqot ishlari bag'ishlangan.

[1-2] – ishlarda plastinkaning dinamik so'ndirgich bilan birgalikdagi ko'ndalang tebranishlarini chekli ayirmalar usullar yordamida va elastik asosda yotuvchi plastinkaning bir nechta dinamik so'ndirgichlar bilan birgalikdagi kinematik qo'zg'alishlar ta'siridagi ko'ndalang tebranishlari tekshirilgan. Dinamik so'ndirgich sifatida to'plangan massa olingan. Keng chastota diapazonida plastinkaning tebranishlarini so'ndirish uchun

bir nechta massalarni plastinkaning turli joylariga o‘rnatish zarurligi keltirilgan bo‘lib, massalarning optimal qiymatlari aniqlangan. Dinamik so‘ndirgichlar massalar va prujinalardan iborat deb olingan. Tajriba natijalari analitik yechimlar bilan taqqoslangan va natijalarning ishonchliligi ko‘rsatilgan.

[3-4] – ishlarda izotrop va ortotrop, tebranishlardan himoyalanuvchi plastinkalarning tebranishlarini so‘ndirish masalalari yechilgan va elastik asosga mahkamlangan plastinkaning xususiy tebranish chastotalarini aniqlash metodikalari keltirilgan. Plastinkaning xususiy chastotalari, massa va bikrlik matritsalari chekli ayirmalar usuli bilan aniqlangan. Tomonlari nisbatining o‘zgarishi bilan chastotalarning o‘zgarishi tahlil qilingan. Plastinka materiali uchun 6061-T6 markali alyumin olingan bo‘lib, tajriba yo‘li bilan aniqlangan chastotalar qiymatlari Krixgof-Lyav nazariyasi bo‘yicha olingan natijalar bilan taqqoslangan, xulosalar keltirilgan.

[5] – ish plastinka harakatining noustuvorlik chegaralarini aniqlashga bag‘ishlangan. Bunda harakat tenglamalari va chegaraviy shartlar Gamilton prinsipidan foydalanib aniqlangan. Noustuvorlik chegaralarining analitik ifodalari Gurvits kriteriysi yordamida hosil qilingan va demfirlash koeffitsientlarining noustuvorlik sohalariga ta’siri tekshirilgan. Sonli hisoblashlar o‘tkazishda differensial kvadratura usulidan foydalanilgan. Dastlabki to‘rtta xususiy chastotalar va xususiy tebranishlar formalarida noustuvorlik chegaralari sonli tahlil qilingan va xulosalar keltirilgan.

[6] – ishda materiali nomukammal qarshilikli doiraviy plastinkalarning dinamik so‘ndirgichlar va to‘plangan massalar bilan birgalikdagi tebranishlari o‘rganilgan. Tebranishlarni dinamik so‘ndirish effektivligi baholangan. Parametrlarni tanlash bo‘yicha tavsiyalar ishlab chiqilgan.

[7-8] – ishlarda tebranishlardan himoyalanuvchi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali plastinkalarning garmonik va tasodifiy qo‘zg‘alishlar ta’sirlaridagi ko‘ndalang tebranishlari matematik modellashtirilgan va dinamikasi o‘rganilgan. Plastinka materialining gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikalari Pisarenko-Boginich gipotezasi asosida e’tiborga olinib, dinamik so‘ndirgichni effektivligi baholangan, tavsiyalar ishlab chiqilgan.

Masalani qo‘yilishi va yechish metodikasi. Garmonik kinematik qo‘zg‘alishlarda gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko‘ndalang tebranishlari ustuvorligini tekshirish masalasini qaraymiz.

Doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko‘ndalang tebranishlari differensial tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi [9]:

$$
\begin{aligned}
&D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2 PQT+3(-\eta_1+j\eta_2)\sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1}\frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)}TT_a^{i_1}\times\\
&\times\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\beta_1|\beta_1|_a^{i_1}\right)+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\beta_2|\beta_2|_a^{i_1}\right)\right]+6D(1-\mu)\times\\
&\times(-\nu_1+j\nu_2)\sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2}\frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)}TT_a^{i_2}\left(\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\beta_3|\beta_3|_a^{i_2}\right)\right)+\\
&+\rho hPQ\ddot{T}-c(1+(-\gamma_1+j\gamma_2)[D_0+f(\zeta_0)])\zeta\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)=-\rho hW_0;\\
&P_0Q_0\ddot{T}+\ddot{\zeta}+n^2(1+(-\gamma_1+j\gamma_2)[D_0+f(\zeta_0)])\zeta=-W_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

bunda $P=P(r)$ va $Q=Q(\theta)$ - lar mos ravishda radius r va burchak θ larga bog‘liq funksiyalar bo‘lib, chegaraviy shartlardan aniqlanadi; $T=T(t)$ - vaqtning funksiyasi; T_a - T o‘zgaruvchining amplituda qiymatlari hisoblanadi. $C_{i_1}(i_1=0,\dots,k_1)$, $K_{i_2}(i_2=0,\dots,k_2)$ - $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}$ va z_i plastinka materialini siklik deformatsiyalardagi koordinatalarga mos nuqtalarda eksperimental olingan $\alpha_1=f_r(z)$, $\alpha_2=f_\theta(z)$, $\alpha_3=g(z)$ chiziqlardan aniqlanuvchi parametrlar [10]; $n=\sqrt{\frac{c}{m}}$, c, m – mos ravishda dinamik so‘ndirgichning xususiy chastotasi, bikrligi va massasi; ζ – plastinkaga nisbatan dinamik so‘ndirgichning ko‘chishi; η_1, η_2, ν_1, ν_2 – plastinka materialining dissipativ xossalarini ifodalovchi gisterezis sirtmog‘idan aniqlanuvchi koeffitsentlar; γ_1, γ_2 - lar dinamik so‘ndirgich elastik dempferlovchi elementi materialining dissipativ xossalarini ifodalovchi gisterezis sirtmog‘idan aniqlanuvchi koeffitsentlar [8]; $f(\zeta_{ot})$ – dinamik so‘ndirgich elastik dempferlovchi elementi materialining nisbiy deformatsiya maksimal qiymatlarining umumiy ko‘rinishdagi funksiyasi bo‘lib, tebranishlar dekrementini ifodalaydi; $f(\zeta_{ot})=D_1\zeta_{ot}+\cdots+D_{s_1}\zeta_{ot}^{s_1}$; $D_0, D_1, \dots D_{s_1}$ - lar gisterezis sirtmog‘idan topiladigan, so‘ndirgich elastik dempferlovchi elementini dempferlash xossalariga bog‘liq tajribadan aniqlanadigan parametrlar [8]; $P_0=P(r_0)$ va $Q_0=Q(\theta_0)$ – lar mos ravishda radius r_0 va burchak θ_0 larga bog‘liq funksiyalari;

$\beta_1 = Q\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}Q\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}P\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}\right)$; $\beta_2 = \frac{1}{r}Q\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}P\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \mu Q\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$; $\beta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}P\frac{\partial Q}{\partial \theta}$; W_0 – asos tezlanishi; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ - silindrik qattiqlik; E - Yung moduli; h - plastinkaning qalinligi; μ – Puasson koeffitsenti.

(1) differensial tenglamalar sistemasining birinchi tenglamasi uchun Bubnov-Galerkin usulidan foydalanib ortogonallik shartiga asosan hamda ba'zi almashtirishlardan keyin quyidagi differensial tenglamalar sistemasi olingan:

$$\begin{gathered}\ddot{T} + \omega_{01}^2 RT - n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0 N\zeta = -d_* W_0;\\ P_0 Q_0\ddot{T} + \ddot{\zeta} + n^2 N\zeta = -W_0,\end{gathered} \tag{2}$$

bunda $\mu_0 = \frac{m}{\rho h\pi R_0^2}$; $\mu_1 = \frac{\pi R_0^2}{d_1}$; $N = 1 + (-\gamma_1 + j\gamma_2)[D_0 + f(\zeta_0)]$;

$$R = 1 + (-\eta_1 + j\eta_2)R_1 + (-\nu_1 + j\nu_2)R_2;$$

$$R_1 = \frac{3D}{\omega_{01}^2\rho h d_1}\sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1}\frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)}|T|_a^{i_1}G_{i_1};$$

$$G_{i_1} = \iint_S PQ[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\beta_1|\beta_1|_a^{i_1}\right) + (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})\beta_2|\beta_2|_a^{i_1}]ds;$$

$$R_2 = \frac{6D(1-\mu)}{\omega_{01}^2\rho h d_1}\sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2}\frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)}|T|_a^{i_2}H_{i_2};$$

$$H_{i_2} = \iint_S PQ(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta})(\beta_3|\beta_3|_a^{i_2})ds;$$

$$d_* = \frac{d_2}{d_1};\ d_1 = \int_0^{2\pi} Q^2\,d\theta\int_{r_0}^{R_0} P^2\,dr;\ d_2 = \int_0^{2\pi} Qd\theta\int_{r_0}^{R_0} P\,dr;$$

ω_{01}- plastinkaning xususiy chastotasi; R_0 - doiraviy plastinka radiusi; r_0 - chegaraviy shartlar berilgandagi ichki soha radiusi.

(2) differensial tenglamalar sistemasini quyidagicha yozamiz:

$$\begin{gathered}\ddot{T} + (1 + R_1^* + jR_2^*)\omega_{01}^2 T - n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0(1 + N_1^* + jN_2^*)\zeta = -d_* W_0;\\ P_0 Q_0\ddot{T} + \ddot{\zeta} + n^2(1 + N_1^* + jN_2^*)\zeta = -W_0,\end{gathered} \tag{3}$$

bunda

$$R_1^* = -\eta_1 R_1 - \nu_1 R_2;\quad R_2^* = \eta_2 R_1 + \nu_2 R_2;$$
$$N_1^* = -\gamma_1[D_0 + f(\zeta_0)];\quad N_2^* = \gamma_2[D_0 + f(\zeta_0)].$$

Asos tezlanishini $W_0 = \varepsilon p_0\cos\omega t$ deb olib ($\varepsilon p_0 \ll 1$), (3) differensial tenglamalar sistemasi yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$\begin{gathered}T = T_a(t)\cos\left(\omega t + \alpha(t)\right);\\ \zeta = \zeta_a(t)\cos\left(\omega t + \beta(t)\right),\end{gathered} \tag{4}$$

bunda $T_a(t), \alpha(t)$ va $\zeta_a(t), \beta(t)$ – sekin o'zgaruvchili funksiyalar bo'lib, mos ravishda T va ζ o'zgaruvchilarning amplituda va boshlang'ich fazalari hisoblanadi.

(4) yechimlarni va ulardan olingan ikkinchi tartibli hosilalarni (3) differensial tenglamalar sistemasiga qo'yamiz. Ba'zi hisoblashlardan so'ng natijada garmonik qo'zg'alishlarda gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so'ndirgichlarning birgalikdagi chiziqlimas ko'ndalang tebranishlarining normal ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, ya'ni

$$\begin{aligned}\dot{T}_a &= \frac{1}{2\omega}\{\left(\mu_0\mu_1 P_0 Q_0 n^2\zeta_a(-(1+N_1^*)\cos\beta + N_2^*\sin\beta) - d_*\varepsilon p_0\right)\sin\alpha +\\ &+\mu_0\mu_1 P_0 Q_0 n^2\zeta_a\left((1+N_1^*)\sin\beta + N_2^*\cos\beta\right)\cos\alpha - R_2^*\omega_{01}^2 T_a\};\\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{2\omega T_a}\{\left(\mu_0\mu_1 P_0 Q_0 n^2\zeta_a(-(1+N_1^*)\cos\beta + N_2^*\sin\beta) - d_*\varepsilon p_0\right)cos\,\alpha -\\ &-\mu_0\mu_1 P_0 Q_0 n^2\zeta_a\left((1+N_1^*)\sin\beta + N_2^*\cos\beta\right)\sin\alpha + ((1+R_1^*)\omega_{01}^2 - \omega^2)T_a\};\\ \dot{\zeta}_a &= \frac{1}{2\omega}\{(P_0 Q_0\omega_{01}^2 T_a(-(1+R_1^*)\cos\alpha + R_2^*\sin\alpha) + (d_* P_0 Q_0 - 1)\varepsilon p_0)\times\end{aligned} \tag{5}$$

$$\times \sin\beta + P_0Q_0\omega_{01}^2T_a\big((1+R_1^*)\sin\alpha + R_2^*\cos\alpha\big)\cos\beta -$$
$$-N_2^*\zeta_a n^2(1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2)\};$$
$$\dot{\beta} = \frac{1}{2\omega\zeta_a}\{(P_0Q_0\omega_{01}^2T_a(-(1+R_1^*)\cos\alpha + R_2^*\sin\alpha) + (d_*P_0Q_0-1)\varepsilon p_0)\times$$
$$\times cos\beta - P_0Q_0\omega_{01}^2T_a\big((1+R_1^*)\sin\alpha + R_2^*\cos\alpha\big)\sin\beta +$$
$$+(1+N_1^*)\zeta_a n^2(1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2) - \omega^2\zeta_a\}.$$

Aniqlangan (5) normal tenglamalar sistemasidan $\dot{T}_a = 0;\ \dot{\alpha} = 0;\ \dot{\zeta}_a = 0;\ \dot{\beta} = 0$ bo‘lganda qaralayotgan sistemaning statsionar tebranishlarining amplitudaviy qiymatlarini hosil qilish mumkin, ya’ni

$$T_a = \varepsilon p_0\sqrt{\frac{\{(1+N_1^*)(d_*+\mu_0\mu_1P_0Q_0)n^2 - d_*\omega^2\}^2 + \{(d_*+\mu_0\mu_1P_0Q_0)n^2N_2^*\}^2}{l_1^2+l_2^2}};$$
$$\zeta_a = \varepsilon p_0\sqrt{\frac{\{(1+R_1^*)\omega_{01}^2 + (d_*P_0Q_0-1)\omega^2\}^2 + \{R_2^*\omega_{01}^2\}^2}{l_1^2+l_2^2}}, \qquad (6)$$

bunda

$$l_1 = \{\big((1+R_1^*)(1+N_1^*) - N_2^*R_2^*\big)\omega_{01}^2 - \omega^2(1+N_1^*)(1+\mu_0\mu_1P_0Q_0)\}n^2 + \omega^2(\omega^2 - (1+R_1^*)\omega_{01}^2);$$
$$l_2 = \{\big((1+R_1^*)N_2^* + (1+N_1^*)R_2^*\big)\omega_{01}^2 - \omega^2N_2^*(1+\mu_0\mu_1P_0Q_0)\}n^2 - \omega^2\omega_{01}^2R_2^*.$$

(6) statsionar yechim ustuvorligini tekshirish maqsadida qo‘zg‘atilgan harakat differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Buning uchun (5) normal ko‘rinishdagi differensial tenglamalar sistemasini variatsialaymiz

$$\frac{d}{dt}\delta T_a = \frac{1}{2\omega}[-\omega_{01}^2\frac{\partial(T_aR_2^*)}{\partial T_a}\delta T_a + T_a\left(\omega^2 - \omega_{01}^2(1+R_1^*)\right)\delta\alpha +$$
$$+n^2\mu_0\mu_1P_0Q_0\left(\frac{\partial\big(\zeta_a(1+N_1^*)\big)}{\partial\zeta_a}sin\varphi + \frac{\partial(\zeta_aN_2^*)}{\partial\zeta_a}cos\varphi\right)\delta\zeta_a +$$
$$+n^2\mu_0\mu_1P_0Q_0\zeta_a\big((1+N_1^*)cos\varphi - N_2^*sin\varphi\big)\delta\beta];$$
$$\frac{d}{dt}\delta\alpha = \frac{1}{2\omega}[\frac{1}{T_a}\left(\omega_{01}^2\frac{\partial\big(T_a(1+R_1^*)\big)}{\partial T_a} - \omega^2\right)\delta T_a - \omega_{01}^2R_2^*\delta\alpha +$$
$$+\frac{n^2\mu_0\mu_1P_0Q_0}{T_a}\left(\frac{\partial(\zeta_aN_2^*)}{\partial\zeta_a}sin\varphi - \frac{\partial\big(\zeta_a(1+N_1^*)\big)}{\partial\zeta_a}cos\varphi\right)\delta\zeta_a +$$
$$+\frac{n^2\mu_0\mu_1P_0Q_0\zeta_a}{T_a}(N_2^*cos\varphi + (1+N_1^*)sin\varphi)\delta\beta];$$
$$\frac{d}{dt}\delta\zeta_a = \frac{1}{2\omega}(\omega_{01}^2P_0Q_0\left(\frac{\partial(T_aR_2^*)}{\partial T_a}cos\varphi - \frac{\partial\big(T_a(1+R_1^*)\big)}{\partial T_a}sin\varphi\right)\delta T_a + \qquad (7)$$
$$+T_a\omega_{01}^2P_0Q_0(R_2^*sin\varphi + (1+R_1^*)cos\varphi)\delta\alpha - (1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2)n^2\frac{\partial(\zeta_aN_2^*)}{\partial\zeta_a}\delta\zeta_a +$$
$$+\zeta_a(\omega^2 - (1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2)n^2(1+N_1^*))\delta\beta);$$
$$\frac{d}{dt}\delta\beta = \frac{1}{2\omega}(-\frac{\omega_{01}^2P_0Q_0}{\zeta_a}\left(\frac{\partial\big(T_a(1+R_1^*)\big)}{\partial T_a}cos\varphi + \frac{\partial(T_aR_2^*)}{\partial T_a}sin\varphi\right)\delta T_a -$$
$$-\frac{T_a\omega_{01}^2P_0Q_0}{\zeta_a}\big((1+R_1^*)sin\varphi - R_2^*cos\varphi\big)\delta\alpha + \frac{1}{\zeta_a}\times$$
$$\times\left((1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2)n^2\frac{\partial\big(\zeta_a(1+N_1^*)\big)}{\partial\zeta_a} - \omega^2\right)\delta\zeta_a - (1+\mu_0\mu_1P_0^2Q_0^2)n^2N_2^*\delta\beta),$$

bunda $\varphi = \beta - \alpha$.

(7) qo‘zg‘atilgan harakat differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\lambda_1^4 + e_3\lambda_1^3 + e_2\lambda_1^2 + e_1\lambda_1 + e_0 = 0, \qquad (8)$$

bunda

$\lambda_1 = 2\omega\lambda$; λ - xarakteristik son;

$$e_3 = \frac{\omega_1^2 \partial(T_a R_2^*)}{\partial(T_a)} + \omega_1^2 R_2^* + \frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} + \Omega_2 n^2 N_1^*;$$

$$e_2 = \omega_1^2 R_2^* \Omega_2 n^2 N_1^* + \frac{{\Omega_2}^2 n^4 \partial(\zeta_a N_2^*) N_1^*}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\omega_1^2 R_2^* \Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} -$$

$$- \frac{n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 \Omega_1}{\zeta_a} - \frac{(R_2^* cos\varphi - R_1^* sin\varphi)}{\zeta_a} - n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 \times$$

$$\times \left(\frac{\partial(\zeta_a N_2^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_1^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)} \right) \times (R_1^* cos\varphi + R_2^* sin\varphi) - (\omega^2 - \omega_1^2 R_1^*) \times$$

$$\times \left(\frac{\omega_1^2 \partial(T_a R_1^*)}{\partial(T_a)} - \omega^2 \right) - \frac{\omega_1^2 \partial(T_a R_2^*) \left(-\omega_1^2 R_2^* - \frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} - \Omega_2 n^2 N_1^* \right)}{\partial(T_a)} -$$

$$-(\omega^2 - \Omega_2 n^2 N_2^*) \left(\frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)} - \omega^2 \right) - n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 \times$$

$$\times \left(\frac{\partial(\zeta_a N_1^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_2^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)} \right) \left(\frac{\partial(T_a R_2^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} - \frac{\partial(T_a R_1^*) sin\varphi}{\partial(T_a)} \right) +$$

$$+ n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 \Omega_3 \left(\frac{\partial(T_a R_1^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} + \frac{\partial(T_a R_2^*) sin\varphi}{\partial(T_a)} \right);$$

$$e_1 = -\frac{1}{\partial(T_a)} (\omega_1^2 \partial(T_a R_2^*) (-\frac{\omega_1^2 R_2^* \Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} - \omega_1^2 R_2^* \Omega_2 n^2 N_1^* +$$

$$+ n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 (R_1^* cos\varphi + R_2^* sin\varphi) \left(\frac{\partial(\zeta_a N_2^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_1^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)} \right) -$$

$$- \frac{{\Omega_2}^2 n^4 \partial(\zeta_a N_2^*) N_1^*}{\partial(\zeta_a)} + \frac{n^2 \mu_0 \mu_1 P_0^2 Q_0^2 \omega_1^2 \Omega_1 (R_2^* cos\varphi - R_1^* sin\varphi)}{\zeta_a} + (\omega^2 -$$

$$- \Omega_2 n^2 N_2^*) (\frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)} - \omega^2))) - \omega_1^2 R_2^* (\frac{{\Omega_2}^2 n^4 \partial(\zeta_a N_2^*) N_1^*}{\partial(\zeta_a)} + (\omega^2 - \Omega_2 n^2 N_2^*) \times$$

$$\times (\frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)} - \omega^2)) + \frac{1}{T_a} (n^2 \mu_0 \mu_1 P_0 Q_0 (\frac{\partial(\zeta_a N_2^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_1^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)}) \times$$

$$\times (-P_0 Q_0 \omega_1^2 T_a (R_1^* cos\varphi + R_2^* sin\varphi) \Omega_2 n^2 N_1^* - (\omega^2 - \Omega_2 n^2 N_2^*) \omega_1^2 P_0 Q_0 T_a \times$$

$$\times (R_2^* cos\varphi - R_1^* sin\varphi))) + \frac{1}{T_a} (n^2 \mu_0 \mu_1 P_0 Q_0 \Omega_1 \times$$

$$\times (-\frac{P_0 Q_0 \omega_1^2 T_a (R_1^* cos\varphi + R_2^* sin\varphi)}{\zeta_a} \left(\frac{\Omega_2 n^2 \partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)} - \omega^2 \right) -$$

$$- \frac{P_0 Q_0 T_a n^2 \Omega_2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} \omega_1^2 (R_2^* cos\varphi - R_1^* sin\varphi))) + (\omega^2 - \omega_1^2 R_1^*) \times$$

$$\times (\frac{\omega_1^2 \partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a} - \omega^2) \left(-\frac{n^2 \Omega_2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} - n^2 \Omega_2 N_1^* \right) + P_0^2 Q_0^2 \mu_0 \mu_1 n^2 \times$$

$$\times \omega_1^2 (\frac{\partial(\zeta_a N_1^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_2^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)}) (\frac{\partial(T_a R_2^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} - \frac{\partial(T_a R_1^*) sin\varphi}{\partial(T_a)}) \times$$

$$\times (-\omega_1^2 R_2^* - n^2 \Omega_2 N_1^*) - P_0^2 Q_0^2 \mu_0 \mu_1 n^2 \omega_1^2 \Omega_3 \times$$

$$\times \left(\frac{\partial(T_a R_1^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} + \frac{\partial(T_a R_2^*) sin\varphi}{\partial(T_a)} \right) \left(-\omega_1^2 R_2^* - \frac{n^2 \Omega_2 \partial(\zeta_a N_2^*)}{\partial(\zeta_a)} \right) -$$

$$- T_a (\omega^2 - \omega_1^2 R_1^*) (\frac{1}{T_a} (P_0^2 Q_0^2 \mu_0 \mu_1 n^2 \omega_1^2 (\frac{\partial(\zeta_a N_2^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} + \frac{\partial(\zeta_a N_1^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)}) \times$$

$$\times (\frac{\partial(T_a R_2^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} - \frac{\partial(T_a R_1^*) sin\varphi}{\partial(T_a)}) - \frac{1}{T_a \zeta_a} (P_0^2 Q_0^2 \mu_0 \mu_1 n^2 \Omega_1 \times$$

$$\times \omega_1^2 \left(\frac{\partial(T_a R_1^*) cos\varphi}{\partial(T_a)} + \frac{\partial(T_a R_2^*) sin\varphi}{\partial(T_a)} \right))) - P_0 Q_0 \mu_0 \mu_1 n^2 (\frac{\partial(\zeta_a N_1^*) sin\varphi}{\partial(\zeta_a)} +$$

$$+ \frac{\partial(\zeta_a N_2^*) cos\varphi}{\partial(\zeta_a)}) \left(\left(\frac{\omega_1^2 \partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a} - \omega^2 \right) P_0 Q_0 \omega_1^2 (R_1^* cos\varphi + R_2^* sin\varphi \right) -$$

$$-(\omega^2-\Omega_2 n^2 N_2^*)\omega_1^2 P_0 Q_0\left(\frac{\partial(T_a R_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_a R_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}\right))-$$

$$-P_0 Q_0\mu_0\mu_1 n^2\zeta_a(\Omega_3\left(\frac{\left(\frac{\omega_1^2\partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a}-\omega^2\right)P_0 Q_0\omega_1^2}{\zeta_a}(R_2^* cos\varphi-R_1^* sin\varphi\right)+$$

$$+\frac{1}{\zeta_a}(P_0 Q_0\omega_1^2(\frac{\partial(T_a R_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_a R_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2)));$$

$$e_0=\frac{1}{\partial T_a}(\omega_1^2\partial(T_a R_2^*)(-\omega_1^2 R_2^*(\frac{{\Omega_2}^2 n^4\partial(\zeta_a N_2^*)N_1^*}{\partial(\zeta_a)}-(\omega^2--n^2\Omega_2 N_2^*)\times$$

$$\times(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2))+\frac{1}{T_a}(P_0 Q_0\mu_0\mu_1 n^2(\frac{\partial(\zeta_a N_2^*)sin\varphi}{\partial(\zeta_a)}+\frac{\partial(\zeta_a N_1^*)cos\varphi}{\partial(\zeta_a)})\times$$

$$\times(P_0 Q_0 T_a\omega_1^2(R_1^* cos\varphi+R_2^* sin\varphi)n^2\Omega_2 N_1^*+(\omega^2-\Omega_2 n^2 N_2^*)P_0 Q_0 T_a\omega_1^2\times$$

$$\times(R_2^* cos\varphi-R_1^* sin\varphi)))+\frac{1}{T_a}(n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0\Omega_1\times$$

$$\times(\frac{P_0 Q_0\omega_1^2 T_a(R_1^* cos\varphi+R_2^* sin\varphi)\left(\frac{n^2(P_0^2 Q_0^2\mu_0\mu_1+1)\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2\right)}{\zeta_a}+$$

$$+\frac{P_0 Q_0 T_a n^2\omega_1^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_2^*)(R_2^* cos\varphi-R_1^* sin\varphi)}{\partial(\zeta_a)\zeta_a}))))-T_a(\omega^2-\omega_1^2 R_1^*)\times$$

$$\times(\frac{1}{T_a}((\frac{\omega_1^2\partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a}-\omega^2)(\frac{{\Omega_2}^2 n^4\partial(\zeta_a N_2^*)N_1^*}{\partial(\zeta_a)}-(\omega^2-n^2\Omega_2 N_2^*)\times$$

$$\times(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2)))+\frac{1}{T_a}(n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0(\frac{\partial(\zeta_a N_2^*)sin\varphi}{\partial(\zeta_a)}+\frac{\partial(\zeta_a N_1^*)cos\varphi}{\partial(\zeta_a)})\times$$

$$\times(P_0 Q_0\omega_1^2(\frac{\partial(T_a R_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_a R_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})\Omega_2 n^2 N_1^*-(\omega^2-\Omega_2 n^2 N_2^*)\times$$

$$\times\omega_1^2 P_0 Q_0(\frac{\partial(T_a R_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_a R_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})))+\frac{1}{T_a}(n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0\times$$

$$\times\Omega_1(\frac{1}{\zeta_a}\left(P_0 Q_0\omega_1^2\left(\frac{\partial(T_a R_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_a R_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}\right)\left(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2\right)\right)-$$

$$-\frac{n^2\omega_1^2 P_0 Q_0\Omega_2\partial(\zeta_a N_2^*)\frac{\partial(T_a R_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_a R_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}}{\partial(\zeta_a)\zeta_a})))+n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0\times$$

$$\times(\frac{\partial(\zeta_a N_1^*)sin\varphi}{\partial(\zeta_a)}+\frac{\partial(\zeta_a N_2^*)cos\varphi}{\partial(\zeta_a)})(\frac{1}{T_a}((\frac{\omega_1^2\partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a}-\omega^2)\times$$

$$\times(-P_0 Q_0\omega_1^2 T_a(R_1^* cos\varphi+R_2^* sin\varphi)\Omega_2 n^2 N_1^*-(\omega^2-\Omega_2 n^2 N_2^*)P_0 Q_0 T_a\omega_1^2\times$$

$$\times(R_2^* cos\varphi-R_1^* sin\varphi)))-\omega_1^2 R_2^*(P_0 Q_0\omega_1^2(\frac{\partial(T_a R_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_a R_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})\times$$

$$\times\Omega_2 n^2 N_1^*-(\omega^2-\Omega_2 n^2 N_2^*)P_0 Q_0\omega_1^2(\frac{\partial(T_a R_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_a R_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}))+$$

$$+\frac{1}{T_a}(n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0\Omega_1(\frac{P_0^2 Q_0^2\omega_1^4 T_a(\frac{\partial(T_a R_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_a R_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})(R_2^* cos\varphi-R_1^* sin\varphi)}{\zeta_a}+$$

$$+\frac{P_0^2 Q_0^2\omega_1^4 T_a\left(\frac{\partial(T_a R_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_a R_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}\right)(R_1^* cos\varphi+R_2^* sin\varphi)}{\zeta_a}))-$$

$$-n^2\mu_0\mu_1 P_0 Q_0\zeta_a\Omega_3(\frac{1}{T_a}((\frac{\omega_1^2\partial(T_a R_1^*)}{\partial T_a}-\omega^2)\times$$

$$\times\frac{P_0 Q_0\omega_1^2 T_a(R_1^* cos\varphi+R_2^* sin\varphi)\left(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_a N_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-\omega^2\right)}{\zeta_a}+$$

$$+\frac{P_0Q_0T_an^2\omega_1^2\Omega_2\partial(\zeta_aN_2^*)(R_2^*cos\varphi-R_1^*sin\varphi)}{\partial(\zeta_a)\zeta_a})) - \omega_1^2R_2^* \times$$

$$\times(-\frac{1}{\zeta_a}(P_0Q_0\omega_1^2(\frac{\partial(T_aR_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_aR_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})(\frac{n^2\Omega_2\partial(\zeta_aN_1^*)}{\partial(\zeta_a)}-$$

$$-\omega^2))+\frac{P_0Q_0n^2\omega_1^2\Omega_2\partial(\zeta_aN_2^*)\left(\frac{\partial(T_aR_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_aR_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}\right)}{\partial(\zeta_a)\zeta_a})+$$

$$+\frac{1}{T_a}(n^2\mu_0\mu_1P_0Q_0(\frac{\partial(\zeta_aN_2^*)sin\varphi}{\partial(\zeta_a)}+\frac{\partial(\zeta_aN_1^*)cos\varphi}{\partial(\zeta_a)})\times$$

$$\times\frac{P_0^2Q_0^2\omega_1^4T_a(\frac{\partial(T_aR_2^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}-\frac{\partial(T_aR_1^*)sin\varphi}{\partial(T_a)})(R_2^*cos\varphi-R_1^*sin\varphi)}{\zeta_a}+$$

$$+\frac{P_0^2Q_0^2\omega_1^4T_a\left(\frac{\partial(T_aR_1^*)cos\varphi}{\partial(T_a)}+\frac{\partial(T_aR_2^*)sin\varphi}{\partial(T_a)}\right)(R_1^*cos\varphi+R_2^*sin\varphi)}{\zeta_a})));$$

$$\Omega_1=N_2^*cos\varphi+N_1^*sin\varphi;\ \Omega_2=P_0^2Q_0^2\mu_0\mu_1+1;\ \Omega_3=N_1^*cos\varphi-N_2^*sin\varphi.$$

Ustuvorlik nazariyasiga ko‘ra harakat ustuvor bo‘lishi uchun xarakteristik tenglamaning ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo‘lishi yetarli. Aniqlangan to‘rtinchi tartibli xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo‘lishlik shartlarini Gurvits kriteriysiga asosan ko‘rsatamiz.

$$e_3>0,\ \ e_2>0,\ \ e_1>0,\ \ e_0>0,\ \ e_1e_2e_3-e_3^2e_0-e_1^2>0. \qquad (9)$$

Hosil qilingan (9) tengsizliklar orqali ifodalangan shartlar garmonik qo‘zg‘alishlar ta’siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va elastik dempferlovchi elementi materialining dissipativlik xarakteristikalari gisterezis tipidagi dinamik so‘ndirgichning birgalikdagi chiziqlimas ko‘ndalang tebranishlari ustuvorlik shartlarini ifodalaydi. Ushbu ustuvorlik shartlari ustuvorlik chegaralarini, sohalarini sistema konstruktiv parametrlarning turli qiymatlarida aniqlash hamda tahlil qilish imkonini beradi.

Sonli hisoblashlar va natijalar tahlili. Doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichlarning birgalikdagi tebranishlari ustuvorlik shartlarini sonli hisoblashlar natijasida tahlil qilamiz.

Doiraviy plastinka materiali uchun 40X po‘latni va uning o‘lchamlarini quyidagicha olamiz [11]:

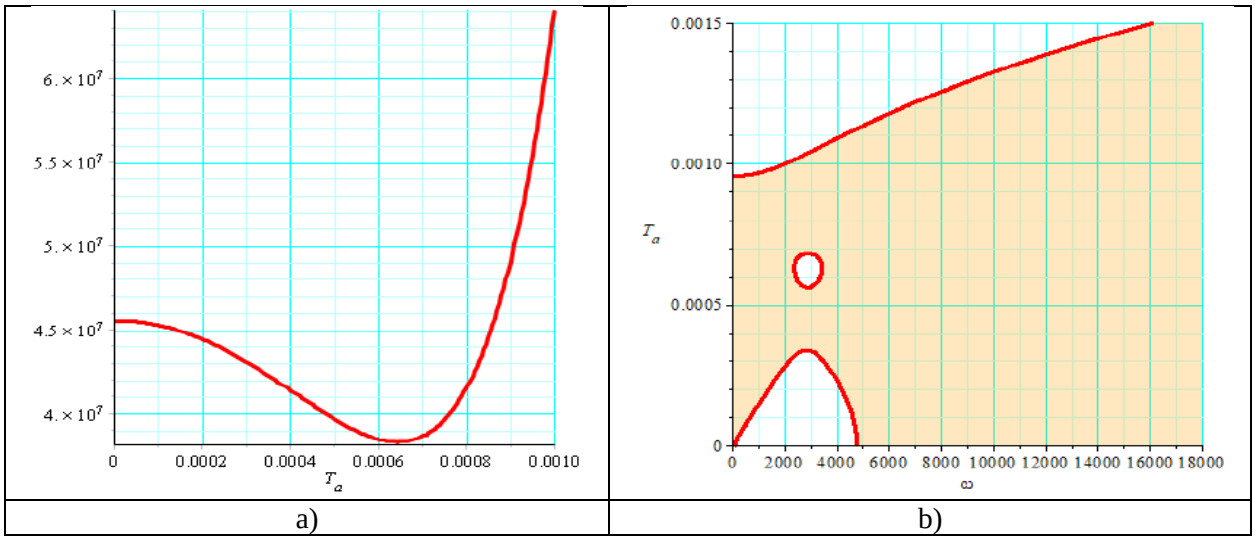
$$E=2.08\cdot10^{11}\frac{N}{m^2};\ \rho=7810\ \frac{kg}{m^3};\ \mu=0.3;\ r=0.12\,m;\ R=0.135\,m;\ h=0.12\cdot10^{-2}m;$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}=\frac{2.08\cdot10^{11}\cdot(0.12)^3\cdot10^{-6}}{12(1-0.3^2)}=32.91428571Nm.$$

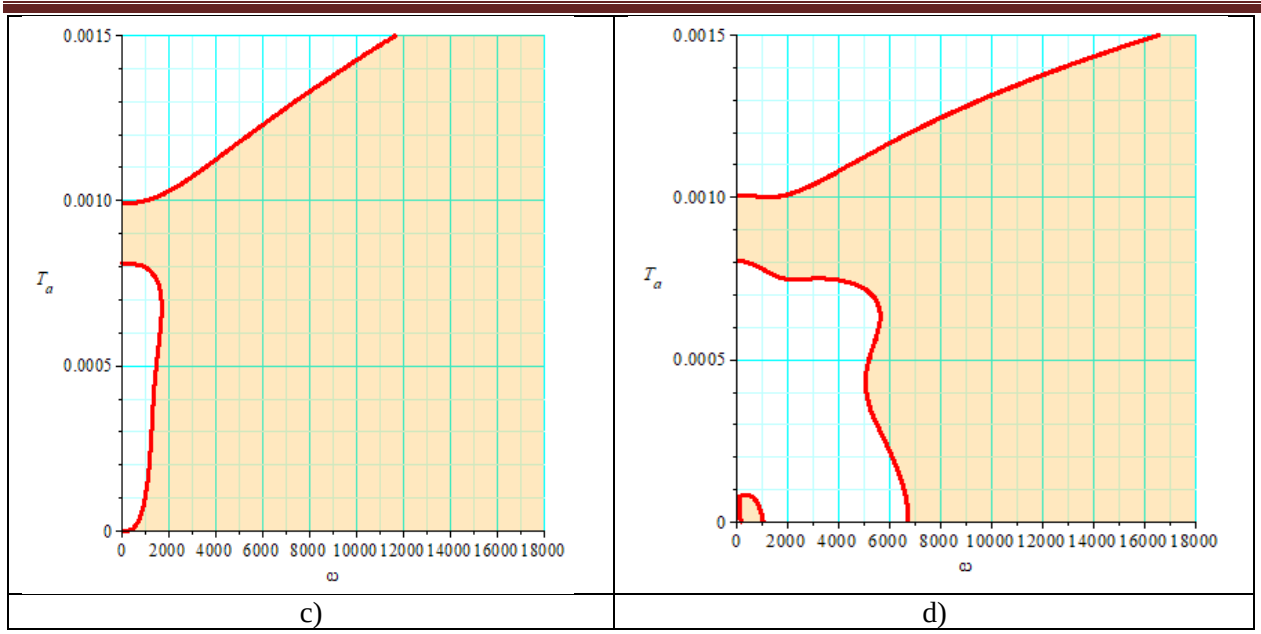
Dinamik so‘ndirgichning demfirlovchi elementi materiali sifatida epoksiuretan KDU-2 polimerni olamiz [8]. Bunda

$$D_0=0;\ D_1=146.4053;\ D_2=-12354.58;\ D_3=320537.86.$$

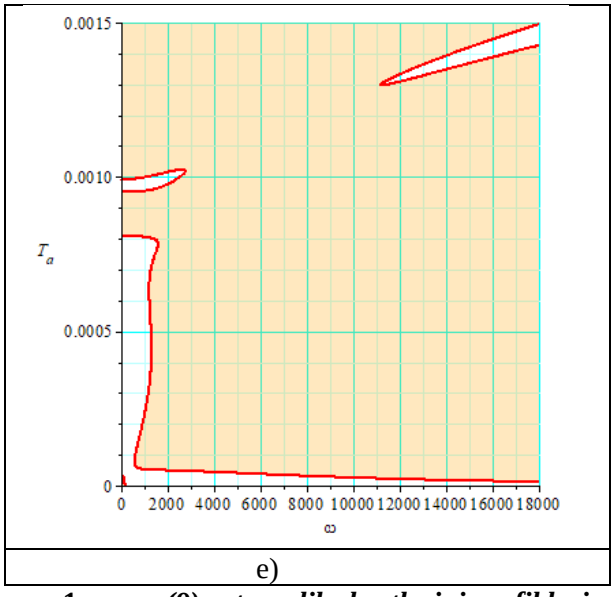
Olingan (9) tengsizliklar orqali ifodalangan shartlarni, ya’ni garmonik qo‘zg‘alishlar ta’siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichning birgalikdagi chiziqlimas tebranishlari ustuvorlik shartlarini sonli tahlil qilamiz.



a) b)



c) d)



e)

1-rasm. ***(9) ustuvorlik shartlarini grafiklari***

1- rasmdagi a,b,c,d,e,-grafiklarda $m = 0.000424\ kg, c = 10^4 N/m, n = 4856.6\ s^{-1}$, $\mu_0 = 0.001$ bo‘lganda mos ravishda garmonik qo‘zg‘alishlar ta’siridagi gisterezis tipidagi elastik dissipativ xarakteristikali doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichning birgalikdagi chiziqlimas tebranishlari (9) ustuvorlik shartlarining grafigiklari keltirilgan.

1- rasmdagi a-grafikda e_3 funksiyaning grafigi keltirilgan. e_3 funksiyaning analitik ifodasidan ko‘rishimiz mumkinki, u chastotaga bog‘liq aniqlanmagan. Shu sababli bu grafikda T_a argumentning o‘zgarishi bilan e_3 funksiyaning qiymatlar sohasi grafigi keltirilgan. Bu grafikdan e_3 funksiya musbat aniqlangan ekanligini va ustuvorlik shartini qanoatlantirishini ko‘rish mumkin.

1-b,c,d,e,- rasmlarda mos ravishda e_2, e_1, e_0, $e_1e_2e_3 - e_3^2e_0 - e_1^2$ funksiyalar bilan aniqlangan ustuvor va noustuvor sohalar hamda ular orasidagi chegaraning grafigi keltirilgan. Bu grafiklarda qizil rang bilan ustuvorlik chegarasi ko‘rsatilgan bo‘lsa, bo‘yalgan soha ustuvorlik va bo‘yalmagan soha noustuvorlik sohalari hisoblanadi. Bu grafiklardan $\omega \in [7000\ s^{-1}; 18000\ s^{-1}]$ bo‘lganda amplitudalari $T_a \in [0.0001m; 0.001m]$ intervalda bo‘lgan tebranishlar ustuvor bo‘ladi. Bundan tashqari butun chastota o‘qida amplitudalari $T_a < 0.0001$ m bo‘lgan tebranishlar noustuvor bo‘ladi.

Xulosa. Doiraviy plastinkani dinamik so‘ndirgich bilan birgalikdagi ko‘ndalang tebranishlari ustuvorligi tekshirilgan. Ustuvorlik shartlari sistema parametrlariga bog‘liq holda analitik ko‘rinishda aniqlangan. Doiraviy plastinka va dinamik so‘ndirgichning birgalikdagi ko‘ndalang tebranishlarida ustuvorlik shartlarining analitik ifodalari sonli tahlil qilinib, parametrlarning turli qiymatlarida ustuvor va noustuvor

sohalarning o‘zgarishi ko‘rsatildi. Xususan dinamik so‘ndirgich massasining doiraviy plastinka massasi nisbatining ortishi noustuvor tebranishlarni yuzaga keltirishi aniqlandi, ustuvorlik chegaralarining parametrlarga bog‘liq holda o‘zgarishi asoslab berildi.

ADABIYOTLAR:

1. Белоус В.А. Динамичкское гашение колебаний пластины на упругом основании. Труды Одесского политехнического университета. Т. 2(30), 2005, с. 19-22.

2. Antonio Z., Giovanni I., Francesco P., Tetyana Sh. Vibrations of plates with complex shape: experimental modal analysis, finite element method, and R-functions method. Shock and Vibration, Volume 2020, Article ID 8882867, pp. 1-23. https://doi.org/10.1155/2020/8882867

3. Mohammad A.G., Amr M.O. Vibrations analysis of rectangular plates with clamped corners. Open Engineering. Volume 8, 2018, pp. 275–283. https://doi.org/10.1515/eng-2018-0030

4. Patrick D., Dominic M., Fadi A., James A., Inès Ch. Simplified setup for the vibration study of plates with simply-supported boundary conditions. MethodsX, Volume 6, 2019, pp. 2106–2117.

5. Zhang D., Tang Y., Chen L. Internal resonance in parametric vibrations of axially accelerating viscoelastic plates. European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 75, 2019, pp. 142-155. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.02

6. Коренев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

7. Дусматов О.М. Моделирование динамики виброзащитных систем. –Т.: Издательство Фан, 1997. - 167 с.

8. Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. – К.: Техника, 1997. - 204 с.

9. O.M.Dusmatov, J.A.Xasanov. Динамическое гашение нелинейных колебаний круглой упругой пластины при кинематических воздействиях. Проблемы механика, Узбекский журнал, 2024, № 4. - с 84-89.

10. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. -К.: Наук. думка, 1981. -220 с.

11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. -К.: Наук. думка, 1971. - 210 с.

UO‘K 57

FOYDALANILMAYDIGAN CHIQINDI MANBALARIDAN BIOLOGIK FAOL MODDALARNI AJRATISH VA ULARNI OZIQ-OVQAT SANOATIDA QO‘LLASH

Matsafayeva Shaxnoza Toxirovna,
Abu Rayhon Beruniy nomidagi
Urganch davlat universiteti tayanch doktoranti
shahnozamatsafaeva@gmail.com
Normatov Anvar Mirzayevich,
Toshkent kimyo-texnologiya instituti professori, t.f.f.d.
anvarnormatov450gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada uchta asosiy qism – mavzuning dolzarbligi, o‘rganilganlik darajasi va qilingan tahlil natijalari asosida, foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni ajratib olish va ularni oziq-ovqat sanoatida qo‘llash masalalari yoritilgan. Mazkur mavzuni o‘rganish jarayonida nafaqat biologik faol moddalarning ajratib olinishi va ularning xossalari, balki sanoat chiqindilarining qayta ishlanishiga alohida urg‘u berilgan. Bundan tashqari, oziq-ovqat chiqindilaridan olinadigan biologik faol moddalarning funksional xususiyatlari va inson salomatligi uchun foydasi haqida keng qamrovli ta’rif berildi. Shu bilan birga, oziq-ovqat sanoatida bunday moddalardan foydalanish imkoniyatlari, ularning iqtisodiy va ekologik ahamiyati yoritilib, sog‘lom ovqatlanish va sanoat chiqindilarini kamaytirish bilan bog‘liq dolzarb masalalarni baholash imkoniyati yaratildi.*

Kalit so‘zlar: *tizimli yondashuv, biologik faol moddalar, oziq-ovqat chiqindilari, suyak, teri, qon, yog‘ qoldiqlari, kollagen, peptidlar.*

ИЗВЛЕЧЕНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИ АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ ИЗ НЕИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ОТХОДОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Аннотация. *В данной статье освещены вопросы выделения биологически активных веществ из неиспользуемых источников отходов и их применения в пищевой промышленности на основе трёх основных аспектов - актуальности темы, степени изученности и результатов проведённого анализа. В процессе изучения данной темы особое внимание уделяется не только выделению биологически активных веществ и их свойствам, но и переработке промышленных отходов. Кроме того, дано всестороннее описание функциональных свойств биологически активных веществ, получаемых из пищевых отходов, и их пользы для здоровья человека. Наряду с этим были рассмотрены возможности использования таких веществ в пищевой промышленности, их экономическое и экологическое значение, а также создана возможность оценить актуальные вопросы, связанные со здоровым питанием и сокращением промышленных отходов.*

Ключевые слова: *системный подход, биологически активные вещества, пищевые отходы, кости, кожа, кровь, жировые остатки, коллаген, пептиды.*

EXTRACTION OF BIOLOGICALLY ACTIVE SUBSTANCES FROM UNUSED WASTE SOURCES AND THEIR APPLICATION IN THE FOOD INDUSTRY

Abstract*. This article addresses the extraction of biologically active substances from unused waste sources and their application in the food industry, based on three main components: the relevance of the topic, the degree of its study, and the results of analysis. In the process of examining this topic, special emphasis is placed not only on the isolation of biologically active substances and their properties but also on the processing of industrial waste. Furthermore, a comprehensive description is provided regarding the functional characteristics of biologically active substances obtained from food waste and their benefits for human health. Additionally, the article highlights the potential uses of such substances in the food industry, their economic and environmental significance, and provides an opportunity to assess critical issues related to healthy nutrition and the reduction of industrial waste.*

Keywords: *systemic approach, biologically active substances, food waste, bone, skin, blood, fat residues, collagen, peptides.*

Kirish. Hozirgi davrda dunyo oziq-ovqat sanoatida barqarorlik, resurslardan oqilona foydalanish va ekologik muammolarni kamaytirish masalalari dolzarb hisoblanadi. Oziq-ovqat ishlab chiqarish jarayonida katta hajmdagi organik chiqindilar hosil bo‘ladi. Ularning katta qismi to‘liq qayta ishlanmaydi yoki foydalanilmay tashlab yuboriladi. Shu boisdan chiqindi oqimlaridan biologik faol moddalarni (BFM) ajratib olish va ularni oziq-ovqat mahsulotlari texnologiyasiga tatbiq etish nafaqat ekologik, balki iqtisodiy va sog‘liqni saqlash nuqtayi nazaridan ham muhim hisoblanadi. Biologik faol moddalar (BFM) — bu tirik organizmlar fiziologik jarayonlariga ijobiy yoki salbiy ta’sir ko‘rsatishga qodir bo‘lgan tabiiy yoki sintetik kelib chiqishga ega bo‘lgan kimyoviy birikmalardir. Ular oziq-ovqat mahsulotlari, o‘simlik va hayvon to‘qimalari, mikroorganizmlar, hamda ayrim sintetik yo‘llar orqali olinadigan manbalarda uchraydi. Biologik faol moddalar odam organizmida modda almashinuvi jarayonlarining tartibga solinishida, immun tizimi faoliyatida, hujayra regeneratsiyasida, energiya hosil bo‘lishida va organizmni tashqi zararli omillardan himoya qilishda muhim o‘rin tutadi. Ularning qatoriga vitaminlar, mineral moddalar, fermentlar, peptidlar, alkaloidlar, flavonoidlar, organik kislotalar, fitosterinlar, omega-3 va omega-6 yog‘ kislotalari, polifenollar, antioksidantlar hamda boshqa ko‘plab komponentlar kiradi. So‘nggi yillarda oziq-ovqat sanoatida biologik faol moddalar asosida funksional mahsulotlar ishlab chiqarish, ularni parhezbop qo‘shimcha sifatida qo‘llash va farmatsevtika sohasida dorivor vositalar yaratish keng rivojlanmoqda. Biologik faol moddalar tabiiy manbalarga ko‘ra asosan uch guruhga ajratiladi: o‘simlik manbali, hayvon manbali va mikrobiologik manbali moddalardir.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. O‘simlik manbali BFM tarkibiga alkaloidlar, flavonoidlar, taninlar, glikozidlar, efir moylari kiradi. Hayvon manbali BFM esa kollagen, peptidlar, kazein, sut zardobi oqsillari, xitin, xitozan kabi birikmalardan iborat. Mikrobiologik manbali moddalar esa ko‘proq probiotik mikroorganizmlar (laktobakteriyalar, bifidobakteriyalar), antibiotiklar, fermentlar va organik kislotalardan iborat bo‘ladi. Biologik faol moddalar organizmda turlicha vazifalarni bajaradi. Ularning asosiy funksiyalaridan biri – antioksidantlik xususiyatidir. Antioksidant moddalar (vitamin C, E, karotinoidlar, polifenollar) hujayralarda erkin radikallarni neytrallab, oksidlanish jarayonlarini sekinlashtiradi va qarish jarayoniga qarshi kurashadi. Shuningdek, ular yurak-qon tomir tizimi kasalliklari, saraton, qandli diabet kabi surunkali kasalliklarning oldini olishda yordam beradi. Ikkinchi muhim xususiyati – immunomodulyatorlikdir, ya’ni organizmning himoya kuchlarini oshirish. Masalan, beta-glukanlar, selen va sink kabi moddalarning immun tizim faoliyatini faollashtirishi isbotlangan. Uchinchi muhim vazifasi – metabolik jarayonlarni normallashtirishdir. Omega-3 yog‘ kislotalari qon lipidlarining me’yorda bo‘lishini ta’minlaydi, qonda “yaxshi xolesterin” (HDL) miqdorini oshiradi va “yomon xolesterin” (LDL)ni kamaytiradi. Shu bilan birga, probiotik bakteriyalar ovqat hazm qilish tizimini tartibga soladi, vitaminlar sintezida ishtirok etadi va ichak mikroflorasining muvozanatini tiklaydi. Biologik faol moddalar ko‘pincha oziq-ovqat qo‘shimchalari sifatida iste’mol qilinadi. Oziq-ovqat qo‘shimchalari ko‘rinishida ular kapsula, kukun, sirop, tabletkalar shaklida ishlab chiqariladi. Ularning me’yordan ortiqcha qabul qilinishi esa ba’zi hollarda allergik reaksiyalar, toksik ta’sir yoki boshqa nojo‘ya ta’sirlarga olib kelishi mumkin. Shu sababli ularni qo‘llashda ilmiy asoslangan me’yorlarga rioya etish lozim.

Sanoat miqyosida oziq-ovqat ishlab chiqarish jarayonida hosil bo‘ladigan chiqindilarni qayta ishlash va ulardan foydali moddalarni ajratib olish masalasi bugungi kunda eng dolzarb ilmiy-amaliy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Oziq-ovqat sanoatida ko‘plab turdagi chiqindilar mavjud bo‘lib, ular orasida suyak, teri, qon, yog‘ qoldiqlari, kollagen, oqsillar, peptidlar va boshqa organik moddalar ajralib turadi. Mazkur chiqindilar ko‘pincha qayta ishlanmay, yoqib yuboriladi yoki tashlab yuboriladi, bu esa ekologik muammolar, sanitariya gigiyena bilan bog‘liq xavflar, shuningdek, iqtisodiy yo‘qotishlarga olib keladi. Shu boisdan zamonaviy texnologiyalar yordamida ushbu chiqindilardan biologik faol moddalarni ajratib olish, ularni oziq-ovqat sanoatida, farmatsevtika, kosmetika va biotexnologiya sohalarida samarali qo‘llash ekologik barqarorlik va iqtisodiy samaradorlikni oshirishga xizmat qiladi.

Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan ajratib olinadigan biologik faol moddalar (BFM) tarkibiga kollagen va uning gidroliz mahsulotlari – peptidlar, oqsillar, aminokislotalar, yog‘ kislotalari, mineral moddalar, fermentlar va boshqa ko‘plab bioaktiv komponentlar kiradi. Ushbu moddalar inson organizmi uchun zarur bo‘lgan oziqaviy, funksional va biologik xususiyatlarga ega. Masalan, kollagen peptidlari teri elastikligini oshiradi, suyak va bo‘g‘im to‘qimalarini mustahkamlaydi, immunitetni ko‘taradi. Qondan olinadigan oqsillar immunomodulyator va antimikrob xususiyatga ega bo‘lsa, suyaklardan ajratib olinadigan mineral moddalar (kalsiy, fosfor) suyak to‘qimalari uchun muhim. Yog‘ qoldiqlaridan olinadigan yog‘ kislotalari esa emulgator, stabilizator va oziq-ovqat qo‘shimchalari sifatida ishlatiladi.

Suyak chiqindilari eng ko‘p uchraydigan manbalardan biri bo‘lib, ulardan kollagen, kalsiy fosfat, mineral tuzlar va jelatin ajratib olinadi. Jelatin oziq-ovqat sanoatida shirinliklar, desertlar, jele mahsulotlari, kapsulalar ishlab chiqarishda keng qo‘llaniladi. Suyaklardan shuningdek, suyak bulonlari, bioaktiv

qo‘shimchalar, hayvon ozuqalari uchun mineral konsentratlar tayyorlanadi. Teri chiqindilari asosan kollagen peptidlari olish uchun ishlatiladi. Kollagenning gidroliz mahsulotlari biologik faol peptidlar bo‘lib, ular bioqo‘shimchalar, sport oziqlanishi mahsulotlari, antioksidant vositalar tarkibida mavjud. Teri chiqindilaridan ajratib olingan moddalar shuningdek kosmetologiya va farmatsevtikada ham keng qo‘llanadi.

Qon chiqindilari oqsillarga, peptidlarga, gemoproteinlarga boy. Ularning asosiy qismi immunomodulyator sifatida qo‘llanilib, organizmni kasalliklardan himoya qiladi. Qondan ayrim fermentlar va oqsillar ajratib olinib, maxsus bioaktiv preparatlar ishlab chiqariladi. Masalan, plazma oqsillari farmatsevtikada, ba’zi peptidlar esa oziq-ovqat qo‘shimchalari ishlab chiqarishda ishlatiladi. Qondan olinadigan gem temir manbai sifatida ham katta ahamiyatga ega bo‘lib, temir tanqisligi bilan bog‘liq anemiyani davolashda biologik qo‘shimcha sifatida qo‘llaniladi.

Yog‘ qoldiqlari esa asosan yog‘ kislotalariga boy bo‘lib, ular emulgator, stabilizator, konsistensiya hosil qiluvchi qo‘shimchalar sifatida ishlatiladi. Masalan, stearin, olein, linoleik va boshqa yog‘ kislotalari oziq-ovqat va kosmetika sanoatida muhim o‘rin tutadi. Yog‘ kislotalari tarkibida omega-3 va omega-6 to‘yintirilmagan yog‘ kislotalari bo‘lib, ular inson salomatligi uchun juda zarur. Shu sababli yog‘ chiqindilarini qayta ishlash orqali olingan mahsulotlar funksional oziq-ovqat ishlab chiqarishda ishlatiladi.

Kollagen va peptidlar esa bugungi kunda eng ko‘p o‘rganilayotgan biologik faol moddalar sirasiga kiradi. Kollagenning gidroliz mahsulotlari bo‘lgan peptidlar antioksidant, antiglikemik, antimikrob xususiyatlarga ega. Ular oziq-ovqat qo‘shimchalari sifatida ishlatilib, sog‘lom ovqatlanish konsepsiyasini ta’minlashda katta ahamiyat kasb etadi. Masalan, non, makaron, sut mahsulotlariga kollagen peptidlari qo‘shilganda ularning biologik qiymati oshadi, iste’molchilarning immuniteti kuchayadi.Biologik faol moddalarni chiqindilardan ajratib olish jarayoni turli texnologiyalar asosida amalga oshiriladi. Kimyoviy usullar (gidroliz, ekstraksiya, eritmalar bilan ishlash), fermentativ usullar (proteazalar yordamida oqsillarni parchalanishi), fizik-kimyoviy usullar (membranali filtrlash, ultrafiltratsiya, ion almashinish xromatografiyasi) va biotexnologik yondashuvlar keng qo‘llanadi. Masalan, kollagen peptidlarini olish uchun odatda fermentativ gidroliz usuli qo‘llaniladi. Bunda proteaza fermentlari yordamida kollagen oqsili kichik peptid zanjirlarga parchalanadi va ular yuqori biologik faollikka ega bo‘ladi. Jelatin olishda esa asosan issiqlik va kislota-ishqoriy gidroliz usullaridan foydalaniladi.

Oziq-ovqat sanoatida biologik faol moddalar turlicha qo‘llaniladi. Birinchidan, ular qo‘shimcha sifatida mahsulotlarning oziqaviy va biologik qiymatini oshiradi. Masalan, non, makaron, qandolat mahsulotlariga kollagen peptidlari qo‘shilganda ularning oqsil qiymati oshadi, hazm bo‘lishi yaxshilanadi. Ikkinchidan, bioaktiv moddalar mahsulotlarning funksional xususiyatini kuchaytiradi. Masalan, sut mahsulotlariga qo‘shilgan peptidlar immunomodulyator ta’sir ko‘rsatadi. Uchinchidan, ayrim moddalar mahsulotlarning texnologik jarayonlarini yaxshilashga yordam beradi – jelatin konsistensiyani mustahkamlaydi, yog‘ kislotalari emulsiya hosil qiladi, oqsillar ko‘pikni barqarorlashtiradi. To‘rtinchidan, ular oziq-ovqatni saqlash muddatini uzaytiradi, chunki bioaktiv peptidlar antimikrob ta’sir ko‘rsatishi mumkin.

Biologik faol moddalarni chiqindilardan ajratib olishning iqtisodiy va ekologik foydasi ham juda katta. Bir tomondan, chiqindilar qayta ishlanadi va ekologik muhitga salbiy ta’sir kamayadi. Ikkinchi tomondan, yuqori qo‘shimcha qiymatga ega bo‘lgan bioaktiv moddalar olinadi va ularni sotish orqali katta iqtisodiy foyda keltirish mumkin. Shuning uchun ko‘plab davlatlarda “nol chiqindi texnologiyalari” konsepsiyasi rivojlantirilmoqda.Xalqaro tajribaga nazar tashlansa, Yaponiya, Germaniya, AQSh, Koreya, Xitoy kabi davlatlarda oziq-ovqat chiqindilaridan biologik faol moddalarni ajratib olish keng yo‘lga qo‘yilgan. Masalan, Yaponiya kollagen peptidlari ishlab chiqarishda dunyoda yetakchi hisoblanadi va ular kosmetika hamda oziq-ovqat mahsulotlariga keng qo‘shiladi. Xitoy esa suyak va teridan jelatin ishlab chiqarishda yetakchi. AQSh va Yevropa mamlakatlarida qon chiqindilaridan oqsillar va fermentlar ajratib olinib, farmatsevtika sanoatida ishlatiladi.

Biologik faol moddalarni qo‘llashning istiqbollari ham keng. Oziq-ovqat sanoatida sog‘lom va funksional ovqatlanishga bo‘lgan talab oshib borayotganligi sababli bioaktiv moddalar asosida yangi mahsulotlar ishlab chiqarish tobora ommalashmoqda. Shuningdek, sport oziqlanishi, parhez mahsulotlari, bolalar ovqatlanishi, qariyalar uchun maxsus ovqatlar ishlab chiqarishda ham biologik faol qo‘shimchalarga ehtiyoj ortib bormoqda. Shu boisdan chiqindi manbalaridan bunday moddalarni ajratib olish nafaqat iqtisodiy va ekologik jihatdan, balki sog‘liqni saqlash va jamiyat farovonligi nuqtayi nazaridan ham muhim hisoblanadi.

Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni ajratib olish va ularni oziq-ovqat sanoatida qo‘llash zamonaviy biotexnologiyaning eng dolzarb yo‘nalishlaridan biridir. Ushbu jarayon natijasida suyak, teri, qon, yog‘ qoldiqlari, kollagen va peptidlardan yuqori biologik qiymatga ega bioaktiv moddalar olinadi. Ular oziq-ovqat mahsulotlarining oziqaviy qiymatini oshiradi, funksional xususiyatlarini

kuchaytiradi, sog‘liq uchun foydali ta’sir ko‘rsatadi, texnologik jarayonlarni yaxshilaydi. Shu bilan birga, chiqindilarning qayta ishlanishi orqali ekologik muammolar hal qilinadi va iqtisodiy samaradorlik oshadi. Kelajakda bunday texnologiyalarni keng joriy etish orqali oziq-ovqat sanoati barqaror rivojlanishi, aholining sog‘lom ovqatlanish darajasi oshishi va sanoat chiqindilari minimal darajaga tushishi ta’minlanadi.

1-jadval .

Biologik faol moddalarning asosiy guruhlari va vazifalari

№	Guruhlar	Namunalari	Asosiy vazifalari
1.	Vitaminlar	A, B, C, D, E, K	Metabolizmni tartibga solish, immunitetni mustahkamlash, antioksidant
2.	Mineral moddalar	Ca, Mg, Fe, Zn, Se	Suv-tuz balansini ta’minlash, suyak va qon hosil bo‘lish jarayoni
3.	Omega-3 va Omega-6 kislotalar	Eikosapentaen, dokozogeksaen	Yurak-qon tomir sog‘ligini ta’minlash, yallig‘lanishga qarshi ta’sir
4.	Antioksidantlar	Flavonoidlar, karotinoidlar, polifenollar	Erkin radikallarga qarshi kurash, qarishni sekinlashtirish
5.	Probiotiklar	Laktobakteriyalar, bifidobakteriyalar	Ovqat hazm qilishni yaxshilash, ichak mikroflorasini tiklash
6.	Fermentlar	Proteaza, lipaza, amilaza	Ovqat hazm qilish jarayonida oqsil, yog‘ va uglevodlarni parchalash

Biologik faol moddalarning oziq-ovqat sanoatida qo‘llanilishi keng ko‘lamda amalga oshirilmoqda. Masalan, non mahsulotlariga vitaminlar va minerallar qo‘shilishi, sut mahsulotlarida probiotik bakteriyalarni qo‘llash, ichimliklarga antioksidant qo‘shimchalar kiritish orqali funksional oziq-ovqatlar ishlab chiqarilmoqda. Bunday mahsulotlar sog‘lom ovqatlanish konsepsiyasiga mos keladi va jamiyat salomatligini mustahkamlashga xizmat qiladi. Shuningdek, oziq-ovqat chiqindilaridan biologik faol moddalarni ajratib olish bo‘yicha ham tadqiqotlar olib borilmoqda. Masalan, meva va sabzavot po‘stlog‘idan polifenollar, urug‘laridan yog‘ kislotalari, hayvon suyak va terilaridan kollagen, qon qoldiqlaridan gemoproteinlar olinadi. Bu nafaqat chiqindilardan samarali foydalanish, balki iqtisodiy va ekologik foyda ham beradi. Biologik faol moddalar farmatsevtika sohasida dorivor preparatlar tayyorlashda ham keng qo‘llaniladi. Masalan, alkaloidlar og‘riq qoldiruvchi vositalarda, flavonoidlar yurak-qon tomir dorilarida, omega-3 yog‘ kislotalari ateroskleroz profilaktikasida, probiotiklar esa ichak kasalliklarining oldini olishda ishlatiladi. Biologik faol moddalarni ajratib olish va sanoatda qo‘llash uchun turli fizik-kimyoviy usullar qo‘llaniladi: ekstraksiya, fermentatsiya, xromatografiya, distillatsiya, ultrafiltratsiya va boshqa zamonaviy texnologiyalar. Shu bilan birga, sifat nazorati va xavfsizlik talablari ham muhim ahamiyat kasb etadi, chunki ularning noto‘g‘ri dozalarda qo‘llanishi salomatlik uchun zararli bo‘lishi mumkin.

2-jadval .

Ba’zi biologik faol moddalarning manbalari va ta’siri

№	Biologik faol modda	Asosiy manbasi	Inson organizmiga ta’siri
1.	Vitamin C	Sitrus mevalari, qora smorodina	Immunitetni oshiradi, antioksidant, temir so‘rilishini yaxshilaydi
2.	Omega-3 yog‘ kislotalari	Baliq yog‘i, chiydan olingan yog‘lar	Yurak-qon tomir faoliyatini yaxshilaydi, xolesterinni kamaytiradi
3.	Flavonoidlar	Zangori mevalar, ko‘k choy, kakao	Antioksidant, yallig‘lanishga qarshi, qon aylanishini yaxshilaydi
4.	Beta-glukanlar	Suli doni, qo‘ziqorinlar	Immunomodulyator, qand miqdorini me’yorga keltiradi
5.	Kollagen	Hayvon suyaklari, terisi, baliq qobig‘i	Teri va bo‘g‘im sog‘lig‘ini mustahkamlaydi

Biologik faol moddalar inson salomatligi uchun beqiyos ahamiyatga ega bo‘lib, ularni ilmiy asoslangan holda qo‘llash orqali sog‘lom turmush tarzini ta’minlash, turli kasalliklarning oldini olish va

hayot sifatini oshirish mumkin. Shu bois, ularning manbalari, vazifalari va qo‘llanilish sohalarini chuqur o‘rganish ham ilmiy, ham amaliy jihatdan dolzarb masalalardan biri hisoblanadi.

Tadqiqot usullari. Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni ajratish va ularni oziq-ovqat sanoatida qo‘llash masalasi dolzarb hisoblanadi, chunki suyak, teri, qon hamda yog‘ qoldiqlari tarkibida yuqori qiymatli oqsillar, kollagen va bioaktiv peptidlar mavjud bo‘lib, ularni qayta ishlash orqali funksional qo‘shimchalar sifatida ishlatish mumkin. Masalan, suyaklardan kollagen va mineral moddalar ajratilib, jelatin ishlab chiqarishda qo‘llaniladi, bu esa qandolat mahsulotlari, desertlar va farmatsevtika preparatlarida keng ishlatiladi. Teri qoldiqlaridan kollagen peptidlari olinib, oziq-ovqat qo‘shimchalari hamda sport oziqlanishida oqsil manbai sifatida ishlatiladi. Qon qoldiqlari esa gemoproteinlarga boy bo‘lib, ulardan gem temir ajratiladi va biologik qo‘shimchalar tarkibiga kiritiladi, chunki u inson organizmida temir tanqisligini oldini olishda samarali hisoblanadi. Yog‘ qoldiqlaridan esa bioaktiv lipidlar va fosfolipidlar olinib, ularning ayrimlari emulgator sifatida, boshqalari esa yurak-qon tomir tizimi uchun foydali omega-3 va omega-6 kislotalar manbai sifatida qo‘llaniladi. Kollagen va peptidlar ajratib olinishi oqsillarni gidrolizlash yoki fermentativ parchalanish orqali amalga oshiriladi va natijada hosil bo‘lgan peptidlar antioksidant, immunomodulyator va antimikrob xususiyatlarga ega bo‘lib, ularni parhez ovqatlarda, sport ichimliklarida va dorivor preparatlarda ishlatish imkonini beradi. Shu tariqa, chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni samarali ajratish oziq-ovqat sanoatida nafaqat mahsulotlarning oziqaviy qiymatini oshiradi, balki resurslardan oqilona foydalanish, chiqindilarni kamaytirish va ekologik barqarorlikni ta’minlashga ham xizmat qiladi.

3-jadval .

Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan ajratiladigan biologik faol moddalar va ularning qo‘llanilishi

№	Manba	Ajratiladigan modda	Qo‘llanilishi
1.	Suyak	Kollagen, mineral	Jelatin, suyak bulonlari, qo‘shimchalar
2.	Teri	Kollagen peptidlari	Bioqo‘shimchalar, antioksidantlar
3.	Qon	Oqsillar, peptidlar	Immunomodulyator, antimikrob vositalar
4.	Yog‘ qoldiqlari	Yog‘ kislotalari	Emulgator, yog‘ mahsulotlari
5.	Kollagen	Jelatin, peptidlar	Oziq-ovqat va kosmetika qo‘shimchalari

Foydalanilmaydigan chiqindi manbalaridan biologik faol moddalarni ajratish jarayoni murakkab texnologik bosqichlardan iborat bo‘lib, asosan **suyak, teri, qon, yog‘ qoldiqlari, kollagen, peptidlar, oqsillar va boshqa moddalar** asosiy manba hisoblanadi. Bunday chiqindilardan biologik faol moddalarni ajratish tartibi ilmiy va sanoat amaliyotida quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi:

4-jadval .

Chiqindi manbalari, ajratiladigan moddalar va ularning oziq-ovqat sanoatida qo‘llanilishi

№	Manba (chiqindi turi)	Ajratiladigan biologik faol modda	Ajratish usuli	Oziq-ovqat sanoatida qo‘llanishi
1.	Suyak	Kollagen, mineral modda (Ca, P)	Kislota-ishqoriy ekstraksiya, fermentatsiya	Jelatin, biologik qo‘shimchalar
2.	Teri	Kollagen, oqsil peptidlari	Fermentativ gidroliz	Elastiklashtiruvchi jel, kapsulalar
3.	Qon	Gem, gemoproteinlar, aminokislotalar	Markazdan qochma ajratish, quritish	Hayvon oqsili kukunlari
4.	Yog‘ qoldiqlari	Fosfolipidlar, tokoferol, yog‘ kislotalari	Erituvchi yordamida ekstraksiya	Yog‘li emulsiya, margarin qo‘shimchasi
5.	Umumiy oqsilli chiqindi	Bioaktiv peptidlar, fermentlar	Enzimatik gidroliz, ultrafiltratsiya	Sport ovqatlari, funksional ichimliklar

Natijalar va uning muhokamasi. Biologik faol moddalarning funksional xususiyatlari va inson salomatligiga ta’siri masalasi bugungi kunda zamonaviy ovqatlanish ilmi va tibbiyotining eng dolzarb yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi, chunki ushbu moddalar inson organizmining normal fiziologik jarayonlarini qo‘llab-quvvatlash, turli kasalliklarning oldini olish, immunitetni mustahkamlash va umumiy hayot sifatini oshirishda katta ahamiyat kasb etadi. Biologik faol moddalarga vitaminlar, mineral moddalar,

aminokislotalar, peptidlar, oqsillar, lipidlar, yog‘ kislotalari, fermentlar, polisaxaridlar, probiotik va prebiotiklar, fitokimyoviy birikmalar, antioksidantlar va boshqa ko‘plab tarkibiy qismlar kiradi. Ularning funksional xususiyatlari, avvalo, fiziologik jarayonlarga bevosita ta’sir ko‘rsatishi bilan belgilanadi: masalan, antioksidant xususiyatga ega bo‘lgan moddalar (polifenollar, C va E vitaminlari, karotinoidlar) hujayralarni oksidlanish stressidan himoya qilib, qarish jarayonini sekinlashtiradi hamda yurak-qon tomir tizimi kasalliklari xavfini kamaytiradi; probiotiklar va prebiotiklar ichak mikroflorasini me’yorlashtirib, ovqat hazm qilish jarayonini yaxshilaydi, disbakterioz va immunitet pasayishining oldini oladi; omega-3 va omega-6 yog‘ kislotalari hujayra membranalari barqarorligini ta’minlaydi, miyaga ijobiy ta’sir qiladi, yallig‘lanish jarayonlarini kamaytiradi va ateroskleroznng rivojlanishini sekinlashtiradi; bioaktiv oqsil peptidlari organizmda immunomodulyator, antihipertenziv, antimikrob va antioksidant faoliyat ko‘rsatadi. Shuningdek, polisaxaridlar (beta-glukanlar, pektin, inulin) qondagi xolesterin miqdorini pasaytiradi, glyukoza almashinuvini me’yorlashtiradi, qondagi shakar miqdorini nazorat qilishda yordam beradi va bu orqali qandli diabetning oldini olishda foydali hisoblanadi. Biologik faol moddalar inson salomatligiga bevosita ta’sir ko‘rsatishi bilan birga, funksional oziq-ovqat mahsulotlari tarkibiga qo‘shilganida, ularning qiymatini yanada oshiradi va sog‘lom ovqatlanish tamoyillarini amalga oshirishga xizmat qiladi. Shu bois biologik faol moddalar nafaqat an’anaviy parhez komponentlari, balki sog‘lom turmush tarzining ajralmas qismi sifatida qaraladi, ularning yetishmovchiligi turli xil kasalliklarga, masalan, vitamin yetishmovchiligi, osteoporoz, yurak-qon tomir kasalliklari, metabolik sindrom, saraton va boshqa xastaliklarning rivojlanishiga sabab bo‘lishi mumkin, aksincha me’yorida va muvozanatli qabul qilinganda inson umrini uzaytirish, organizmning himoya kuchlarini mustahkamlash, ruhiy va jismoniy faoliyatni yaxshilash hamda sog‘lom va faol hayot kechirish imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytiradi.

5-jadval .

Biologik faol moddalarning funksional xususiyatlari va inson salomatligiga ta’siri

№	Modda turi	Funksional xususiyati	Salomatlikka ta’siri
1.	**Kollagen peptidlari**	Antioksidant, antiglikemik	Teri elastikligi, bo‘g‘imlarni mustahkamlaydi
2.	**Jelatin**	Konsistensiya hosil qiladi	Ovqat hazmini yaxshilaydi
3.	**Qon oqsillari**	Antimikrob, immunomodulyator	Immunitetni kuchaytiradi
4.	**Yog‘ kislotalari**	Emulgator, stabilizator	Yurak-qon tomir sog‘lig‘ini qo‘llab-quvvatlaydi
5.	**Mineral moddalar (Ca, P)**	Skelet tizimini mustahkamlaydi	Suyak sinishini kamaytiradi, osteoporoz profilaktikasi

6-jadval .

Foydalanilmaydigan chiqindi manbalarini ajratib olishda yillar kesimida ilmiy-texnologik rivojlanish bosqichlari

№	Yillar	Ilmiy-texnologik yondashuv	Xususiyatlari
1.	1960–1980	Mexanik va issiqlik ishlov	Asosan suyakka asoslangan jelatin olish, oqsil parchalanishi yetarli darajada boshqarilmagan
2.	1980–1995	Kimyoviy ekstraksiya	Kislota va ishqor yordamida oqsil-kollagen ajratish, ammo ekologik muammo kuchli
3.	1995–2010	Fermentativ usullar	Proteazalar yordamida oqsil va peptidlarni yumshoq sharoitda olish, yuqori bioaktivlik
4.	2010–2020	Membrana texnologiyalari	Ultrafiltratsiya, nanofiltratsiya bilan yuqori tozalikdagi oqsil-peptid konsentratlari
5.	2020–hozir	Biotexnologik va “zero-waste” yondashuvlar	Asosan suyakka asoslangan jelatin olish, oqsil parchalanishi yetarli darajada boshqarilmagan

Foydalanilmaydigan chiqindilardan biologik faol moddalarni ajratish zamonaviy texnologiyalarda ekologik toza, yuqori samarali va chiqindisiz (zero-waste) usullar asosida olib borilmoqda. Natijada funksional oziq-ovqat, biologik qo‘shimcha va farmatsevtik preparatlar ishlab chiqarishda muhim manba hisoblanmoqda.

Takliflar. Chiqindilardan BFM ajratish bo‘yicha “zero-waste” konsepsiyasiga tayanuvchi klaster yondashuvni joriy etish; xomashyo oqimlarini (suyak, teri, qon, yog‘ qoldiqlari) alohida yig‘ish,

identifikatsiya va izlenish (traceability) tizimini yo‘lga qo‘yish; fermentativ gidroliz, membrana ajratish (UF/NF), superkritik CO_2 va etanol kabi GRAS erituvchilarga asoslangan “yashil” ekstraksiyani pilot-zavod darajasida sinovdan o‘tkazish; mahsulot xavfsizligi uchun HACCP, ISO 22000 va laboratoriya kompetentligini ta’minlash uchun ISO/IEC 17025 talablarini bosqichma-bosqich integratsiya qilish; O‘zDSt va xalqaro reglamentlar (etiketkalash, dozaj, allergenlik, og‘ir metallar, mikrobiologik ko‘rsatkichlar, halol talablar) bilan uyg‘un texnik reglament va STP (SOP)larni ishlab chiqish; LCA (hayot sikli bahosi) va texnik-iqtisodiy asos (TEO) orqali energiya va suv sarfini, uglerod izini, chiqindi qolig‘ini hamda bir kg mahsulotga to‘g‘ri keladigan tannarxni hisoblash; validatsiyalangan analitik usullar (HPLC/LC-MS/MS, ICP-MS, FTIR) bilan kollagen/peptid profilini, yog‘ kislotalari spektrini, biofaollikni (antioksidant, antimikrob, ACE-ingibitsiya) hamda saqlanish muddatini (shelf-life) baholash; qon va teri bilan ishlashda sovutish zanjiri, biogigiyena va bioxavfsizlik protokollarini kuchaytirish; valorizatsiya kaskadini yo‘lga qo‘yish (birinchi fraksiyada oziq-ovqat/sport ovqatlari uchun yuqori qiymatli peptidlar, keyingi fraksiyalarda yem-qo‘shimcha, o‘g‘it yoki bioenergiya); PAT (jarayonni real vaqtda nazorat) va raqamli egizak (digital twin) orqali partiya-partiya sifat barqarorligini ta’minlash; universitet-sanoat konsorsiumi asosida ilmiy grantlar, texnologiya transferi, intellektual mulk va litsenziyalash mexanizmlarini shakllantirish; bozor yo‘naltirilgan mahsulot portfelini tuzish (non/makaron uchun kollagen peptidli premikslar, sut mahsulotlari uchun bioaktiv peptid kontsentratlar, ichimliklar uchun polifenol-omega mikrokapsulalari) hamda sinov marketingi va iste’molchi qabul qilish tadqiqotlarini o‘tkazish; xavfsizlik-samaradorlik klinik/yarim klinik sinovlarini rejalash (doza-javob, bioo‘zlashtirilish, nojo‘ya ta’sir monitoringi); logistika va talab prognozini optimallashtirish uchun chiqindi oqimlari bo‘yicha ma’lumotlar bazasi va ta’minot zanjiri shaffofligini yaratish; kadrlar tayyorlash (texnolog, mikrobiolog, analitik kimyogar, QC) va ishlab chiqarish xodimlari uchun modul kurslar; jamoatchilikni xabardor qilish va SMM orqali funksional mahsulotlarning foydasini tushuntirish.

Xulosa. Maqolada yoritilgan ilmiy va amaliy asoslar shuni ko‘rsatadiki, suyak, teri, qon va yog‘ qoldiqlaridan BFM ajratish resurslardan oqilona foydalanish, ekologik yukni kamaytirish va yuqori qo‘shimcha qiymat yaratishning ishonchli yo‘lidir; “yashil” ekstraksiya, fermentativ gidroliz va membrana texnologiyalari bilan uyg‘unlashtirilgan, HACCP–ISO 22000–ISO/IEC 17025 tizimlari bilan kafolatlangan, LCA va TEO bilan iqtisodiy jihatdan asoslangan yondashuv qisqa muddatda pilot bosqichdan sanoat masshtabiga o‘tishga, barqaror funksional oziq-ovqat assortimentini kengaytirishga, sog‘liq uchun foydali bioaktiv qo‘shimchalar bozorida mahalliy raqobatbardosh brendlarni shakllantirishga hamda “zero-waste” maqsadlariga erishishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Xolmurodov A., & Jo‘rayev M. (2021). Oziq-ovqat chiqindilaridan biologik faol moddalarni olish texnologiyalari. Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti.

2. O‘zbekiston Respublikasi Qishloq xo‘jaligi vazirligi. (2019). Chiqindilardan foydalanish va qayta ishlash texnologiyalari.

3. Иванов П. Н., & Сидоров В. А. (2020). Биологически активные вещества из отходов пищевой промышленности. Москва: Колос.

4. Петрова Е. Л. (2021). Использование растительных и животных отходов для выделения функциональных ингредиентов. Санкт-Петербург: Наука.

5. Ayala-Zavala J. F., et al. (2011). Food waste valorization for producing active compounds: A review. Critical Reviews in Food Science and Nutrition, 490 p.

6. Sagar N. A., et al. (2018). Fruit and vegetable waste: Bioactive compounds, their extraction, and possible utilization. Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety, 531 p.

7. Благонравова М. В., и др. (2021). Комплексное использование отходов переработки кальмара. Труды вузов. Пищевая технология.

8. Катанаева М. Д., и др. (2023). Биологическая переработка отходов пищевой промышленности: перспективы и задачи. Электронный научный журнал eLIBRARY.

9. Кобилова Г. И., Калдыбекова Ж. Б. (2024). Биотехнологические методы утилизации пищевых отходов для получения высокоценных добавок. Universum: технические науки, 8(125).

UO‘K 57

MAHALLIY BUG‘DOY DONLARIDAN NAVLI UN TORTISHDA, ULARNING TEXNOLOGIK, REOLOGIK VA FIZIK-KIMYOVIY XOSSALARINING AHAMIYATI

Mirzayev Jamol Dustiyarovich,
Qarshi davlat texnika universiteti dotsenti
jamolmirzayev@mail.ru
Davlatova E’zoza Jahongir qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti magistranti
Turdiyeva Dilshoda Asliddin qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti magistranti

Annotatsiya. *Maqolada donlarning texnologik xossalari, ularning namligiga va haroratiga bog‘liq holda o‘zgarib borishi, tegirmonda, bug‘doy donidan navli un tortishda, donni boshlang‘ich texnologik xossalarini yo‘naltirilgan holda belgilangan o‘lchamda o‘zgartirib, bu xossalarni optimal ko‘rsatkichlarda barqaror saqlash muhim texnologik ahamiyatga ega bo‘lib bu yo‘nalishda amalga oshirilgan tadqiqotlarning natijalari bayon qilingan.*

Kalit so‘zlar: *don, bug‘doy, reologik xossalar, fizik xossalar, gidrotermik ishlov berish, namlik, endosperm, sellyuloza, kuldorlik, strukturaviy-mexanik xossalar, botanik va biologik alomatlar.*

ЗНАЧЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ, РЕОЛОГИЧЕСКИХ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕСТНОГО ЗЕРНА ПШЕНИЦЫ ПРИ ПОМОЛЕ СОРТОВОЙ МУКИ

Аннотация. *В статье описываются изменения технологических свойств зерна в зависимости от его влажности и температуры. Отмечается, что при помоле сортовой муки из пшеничного зерна на мельнице важное технологическое значение имеет целенаправленное изменение исходных технологических свойств зерна до заданных параметров и стабильное поддержание этих свойств на оптимальном уровне. Представлены результаты исследований, проведенных в этом направлении.*

Ключевые слова: *зерно, пшеница, реологические свойства, физические свойства, гидротермическая обработка, влажность, эндосперм, целлюлоза, зольность, структурно-механические свойства, ботанические и биологические признаки.*

THE IMPORTANCE OF TECHNOLOGICAL, RHEOLOGICAL, AND PHYSICOCHEMICAL PROPERTIES IN MILLING VARIETAL FLOUR FROM LOCAL WHEAT GRAINS

Abstract. *The article discusses the technological properties of grains and how they change depending on moisture content and temperature. In the mill, when producing varietal flour from wheat grain, it is of great technological importance to purposefully modify the initial technological properties of the grain to a specified degree and maintain these properties at optimal levels consistently. The results of research conducted in this direction are presented.*

Keywords: *grain, wheat, rheological properties, physical properties, hydrothermal treatment, moisture, endosperm, cellulose, ash content, structural-mechanical properties, botanical and biological characteristics.*

Kirish. Tegirmonchilik sanoatining mahsuloti hisoblangan un sun’iy tarzda ishlab chiqarilmaydi, lekin un mahsulotlariga qo‘shimchalar qo‘shish orqali uning konsentratsiyasini kamaytirib, tayyor mahsulotning tannarxini kamaytirish muammolarining oldi olingan. Buning uchun ishlab chiqarilayotgan unlarning sifatiga yuqori talablar qo‘yiladi.

Ishlab chiqarishga kelayotgan donning endospermasi va qobiqlarini strukturaviy-mexanik xossalarini farqi juda kam bo‘ladi. Shuning uchun ularni bir-biridan ajratish juda qiyin bo‘lib, bunday donlarni qayta ishlash (maydalash) natijasida tayyor mahsulot sifati keskin pasayadi. Gidrotermik ishlov berishda, asosan donni qobig‘i va endospermasining xususiyatlarini farqini oshirish uchun ularning gigroskopik xususiyatlaridan keng foydalaniladi. Bunda, tegirmonlarda jarayon shunday olib boriladiki, endospermning mustahkamligi kamaytiriladi va qobiqning mustahkamligi oshiriladi. Bu o‘zgarish qancha jadal borsa, shuncha donni qayta ishlab, un tortish samaradorligi yuqori bo‘ladi. Donning texnologik xossalarini

o‘zgartirish darajasi gidrotermik ishlov berishning aniq usullari va donni suv bilan o‘zaro harakatini alohidaligi bilan aniqlanadi.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Don suvda bo‘ktirilganda bir necha sekund davomida 3-5% namlikni o‘ziga olishi, keyingi bir necha vaqt davomida donning namligi o‘zgarmasligi aniqlangan [1,2,3,4,5,10]. Bunda dastlabki namlikni donning meva qobig‘i o‘ziga oladi. Meva qobig‘idagi kapilyarlar, g‘ovaklar va bo‘shliqlar birinchi namlikni saqlovchi sig‘im vazifasini o‘taydi. Meva qobig‘i olgan namlik mustahkam bog‘lanmagan bo‘lib, tez atmosferaga bug‘lanib ketishi tadqiq qilingan [8,10]. Suvni mustahkam saqlash va uni yo‘qolishini oldini olish, donning keyingi urug‘ qobig‘i, aleyron qatlami va murtakni yuqori gidrofilligi orqali taminlanadi. Chunki suv donning bu qatlamlarida tez ko‘chadi, uning tarkibidagi oqsil va kraxmal bilan mustahkam bog‘lanadi.

Tegirmonga qayta ishlashga kelayotgan don partiyalarining xossalari har xil bo‘ladi. Bu donlarga gidrotermik ishlov berganda ularning xossalari ham har xil o‘zgaradi. Har bir don partiyasiga gidrotermik ishlov berishni kerakli rejimini tanlash uchun ishlov berishning rejimlariga bog‘liq holda, donda bo‘ladigan o‘zgarishlar haqidagi ma’lumotlarni bilish ushbu don partiyasi uchun gidrotermik ishlov berishni optimal rejimini qo‘llash imkonini beradi. Natijada donning texnologik xossalari yaxshilanadi va barqaror bo‘ladi.

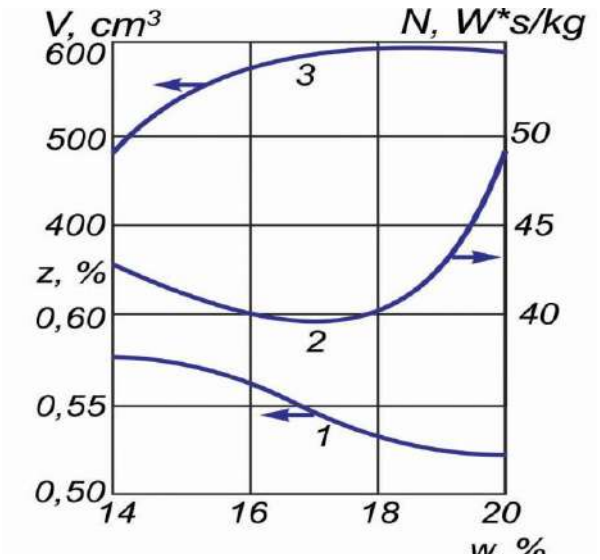
Tegirmonlarda donga gidrotermik ishlov berish, avtomatik ravishda nazorat qilish va sozlash sistemalariga ega bo‘lgan murakkab mashina hamda apparatlar bilan bir qatorda, yana oddiy namlovchi mashina va dimlash bunkerlarida olib boriladi. Bularning hammasi texnologik sxema orqali bog‘langan bo‘lib, donning xossalariga tasir qilishni ketma - ketligini belgilaydi.

Tegirmonlarda donga gidrotermik ishlov berishni zamonaviy rejimlari ishlab chiqilgan bo‘lib, ular donlarning texnologik, reologik va fizik-kimyoviy xossalari hamda tayyor mahsulotning funksional xossalari o‘rganilgan holda keng qo‘llanilmoqda. Mahalliy bug‘doy donlaridan navli un tortishga tayyorlashda gidrotermik ishlov berish rejimlarini takomillashtirish yetarli darajada o‘rganilmagan.

Bug‘doy - (Triticum L) - boshoqdoshlar oilasiga mansub bo‘lib, eng muhim oziq-ovqat o‘simligidir. Yer yuzidagi quruqlikning 1/82 ga yaqin hamda ekin ekiladigan maydonning 1/5 ga yaqin qismida bug‘doy ekiladi. Bug‘doy donida oqsil moddasi: o‘rta Osiyo navlarida 15-20%, g‘arbiy Yevropa navlarida 11-14% gacha tashkil etadi. Bug‘doy donidan turli nav unlar, yormalar, kraxmal, spirt va boshqa mahsulotlar ishlab chiqariladi. Bug‘doy donini qayta ishlashda tip ko‘rsatkichi muhim texnologik ahamiyatga ega [1, 9].

Tegirmonlarga qayta ishlashga kelayotgan don partiyalarining xossalariga qarab har bir don partiyasiga gidrotermik ishlov berishni kerakli rejimini tanlash uchun ishlov berishning rejimlariga bog‘liq holda, donda bo‘ladigan o‘zgarishlar haqida ma’lumotlarni bilish kerak. Bu har bir don partiyasi uchun gidrotermik ishlov berishni optimal rejimini qo‘llash imkonini beradi. Natijada donning texnologik xossalari yaxshilanishi va barqaror bo‘lishi tadqiq qilingan [1, 9].

O‘zbekiston Respublikasida rayonlashtirilgan IV tip. kuzgi qizil bug‘doy navlaridan 40 tadan ortig‘i yetishtiriladi. Shulardan, aksariyati mamlakatimizda yaratilgan.



1-**rasm. I tipli bug‘doyning texnologik xossalariga don namligini ta’siri**: 1-unning kuldorligi; 2-solishtirma energiya sarfi; 3- nonni hajmiy chiqishi.

Donning texnologik xossalarini tayyor mahsulotning chiqishi va sifati ob’ektiv baholaydi [2]. Bu ko‘rsatkichlar har xil omillar ta’sirida ahamiyatli o‘zgarishi tadqiq qilingan. Bu omillarga quyidagilar kiradi: donning yirikligi, donning to‘laligi, endospermning (mag‘izning) nisbiy miqdori, namlik va boshqalar.

Un tortishda, mayda dondan un kam va sifati past chiqishi, yirik donning qobiqlari yengil ajralishi, un va oraliq mahsulotlar chiqishi sezilarli darajada ortishi tajribaviy yo‘llar bilan isbotlangan [12,17].

Donning namligi uning texnologik xossalariga sezilarli ta’sir qilishi aniqlangan. 70 % li un tortishda don namligini, unning kuldorligi va solishtirma energiya sarfiga ta’siri 1.1 - rasmda keltirilgan. Keltirilgan grafikdan ko‘rinib turibdiki, bug‘doy doni namligi ortishi bilan unning kuldorligi kamayishi kuzatiladi. Ammo don namligini ortishi un tortish uchun solishtirma energiya sarfini ko‘payishiga ham sabab bo‘lmoqda. Bunda donning texnologik xossalari ahamiyatli darajada yomonlashadi.

Donning texnologik xossalarini aniqlashning asosiy ko‘rsatkichlaridan biri bu, solishtirma elektroenergiya sarfidir. Solishtirma elektroenergiya sarfining miqdori, donning strukturali-mexanik xossasi bilan, maydalash jarayonini tashkil etish, maydalash mashinalari va boshqa uskunalarning konstruksiyalarini alohidaligi va boshqalar bilan aniqlanadi.

Tegirmonlarda, barcha jarayonlar uchun elektroenergiya sarfini 100 % deb qabul qilinsa, shundan don va don mahsulotlarini maydalash jarayoniga taxminan 70% elektroenergiya sarf qilinishi aniqlangan [6,7]. Un zavodlarida, un tortish turiga bog‘liq holda solishtirma elektroenergiya sarfining tavsiya etilgan o‘rnatilgan me’yorlari 1- jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

Un zavodlarida solishtirma elektroenergiya sarfining tavsiya etilgan me’yorlari, kVt soat 1 t un olish uchun

Un tortish turlari	Un zavodlari	
	Mexanik transport bilan	Pnevmatik transport bilan
Bug‘doy donidan novvoylik uni tortish: Ko‘p navli va bir navli 75 % li (komplekt yuqori unumdorli uskunalar bilan jihozlangan tegirmonlarda)	-	105...120
Ko‘p navli va bir navli 72 % li texnologik jarayonning rivojlangan sxemasi bilan	65...70	85...94
Uch va ikki navli 75-78%li texnologik jarayonning qisqartirilgan sxemasi bilan	52...60	85...90
Bir navli 82-85 % li	48...55	67...77
Jaydari navli 96 % li	21...24	30...34
Makaron uchun bug‘doydan un tortish: Ikki navli 75 % li Uch navli 75 % li	 62...66 60...64	 85...98 83...95
Javdar donidan un tortish: Bir navli (elangan) 63 % li Ikki navli 80 % li Bir navli (sidirma) 87 % li Jaydari navli 95 % li	 55...60 45...50 42...45 20...23	 71...78 59...65 55...59 30...38
Bug‘doy va javdar aralashmalaridan un tortish: Bug‘doy-javdar donidan jaydari navi 96 % li Javdar-bug‘doy donidan jaydari navi 95 % li	 28...30 26...28	 34...37 32...35

Bug‘doy doni anatomik qismlarining turlicha kimyoviy tarkibga egaligi uning reologik xossalarini murakkablashtiradi.

Bug‘doy donini navli un tortishga tayyorlashda gidrotermik ishlov berish usullarini tanlashda: qayta ishlashga kelayotgan bug‘doy doni partiyasining dastlabki namligi, uning texnologik sifat ko‘rsatkichlari, texnologik sxema, namlovchi uskunaning texnik parametrlari va namlovchi suvning harorati va uning boshqa ko‘rsatkichlari muhim texnologik ahamiyat ega.

Tadqiqot usullari. Tadqiq qilinayotgan bug‘doy donlarining texnologik tahlilini bajarish uchun mavjud standart usullaridan foydalaniladi.

Olingan namuna quyidagi standartlarga asosan tahlil qilindi: GOST 13586.5-85 bo‘yicha bug‘doy namligini, GOST 10840-64 bo‘yicha bug‘doy donining naturasini, GOST 10842-89 bo‘yicha 1000 ta don vaznini, GOST 10987-76 bo‘yicha bug‘doy shaffofligini, GOST 10847-74 bo‘yicha bug‘doy kuldorligini, GOST 23586.1-68 bo‘yicha bug‘doyda kleykovina miqdori va sifati aniqlandi.

Natijalar va muhokamalar. Donning texnologik xossalarini o‘zgartirish darajasi gidrotermik ishlov berishning aniq usullari va donni suv bilan o‘zaro harakatini alohidaligi bilan aniqlanadi [11].

Bugungi kunda tegirmon sanoati rivojlangan davlatlarda bug‘doy donini navli un tortishga tayyorlashda, tayyor mahsulotning funksional xossalarini oshirish maqsadida vibratsion namlovchi uskunalar hamda namlashda qo‘llaniladigan suvni fizik-kimyoviy ishlov berish keng qo‘llanilib kelinmoqda. Ushbu gidrotermik ishlov berish usulidan Respublikamiz tegirmonlarida foydalanilmaydi. Mazkur tadqiqotda dastlab, mahalliy bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy xossalarini aniqlab, ularni Rossiya hamda Qozog‘istonda yetishtirilgan bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy xossalari bilan taqoslash maqsadida mahalliy “Sila”, “Pervitsa” va “Brigada” hamda Qozog‘iston respublikasida yetishtirilgan “Astana-2” va

Rossiya Federatsiyasida yetishtirilgan “G‘azg‘on” bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlari aniqlandi. Tajribadan olingan natijalar 2 - jadvalda keltirilgan.

Tajriba natijalaridan ma’lum bo‘ldiki, mahalliy “Sila” navining 760 gr/l va uning 1000 don vazni 37 gr va Qozog‘iston Respublikasida yetishtirilgan “Astana-2” navida natura og‘irligi 803 gr/l va uning 1000 don vazni 36 gr ni tashkil etgan. Bunda bug‘doy doni navlarida natura og‘irligi va 1000 don vazni ko‘rsatkichlari nomutanosib bo‘lishi ularning shakli bilan izohlanadi. Bug‘doy doni qanchalik sharsimon shaklga ega bo‘lishi, ularning natura og‘irligi pasayishiga olib kelishi, tadqiqotlar tahlilidan aniqlandi. Ushbu navlarning 1000 don vazni bilan endosperm miqdorlari taqoslanganda mutonosibligini ko‘rish mumkin. Agarda bug‘doy doni fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlarning navlar bo‘yicha taqoslanganda nomutanosib kelishi ularning boshqa ko‘rsatkichlari bilan ham belgilanadi. Ushbu mahalliy bug‘doy navining, Rossiya Federatsiyasida yetishtirilgan “G‘azg‘on” bug‘doy doni navi bilan fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlari taqqoslanganda quyidagicha ifodalanadi. Ularni, shishasimonliklari taqqoslanganda “Sila” navida 45% va “G‘azg‘on” navida 41 % ni tashkil etgan. Bug‘doy doni shishasimonligini uning kleykovinasi sifati va miqdoriga ta’sir qilishi O.N Chebotaryov, A.Yu. Shazzo, Ya.F Martыnenkolar tomonidan o‘rganilgan [12, 8]. Ular tomonidan olib borilgan tadqiqot natijalariga ko‘ra: bug‘doy donining shishasimonligi uning kleykovinasi miqdori va sifatiga to‘g‘ri proporsionalligi o‘rganilgan. Mahalliy “Sila” bug‘doy navida kleykovinaning miqdori 27 % va “G‘azg‘on”(Rossiya) navida 28 % ni tashkil etganligi ushbu olib borilgan tadqiqot natijalariga mosmasligi keltirilgan. Buni yetishtirishning tuproq va iqlim sharoitlari, agrotexnik tadbirlar kompleksi ta’siri ostida shakllanishi bilan tushuntiriladi. Lekin ularning IDK ko‘rsatkichlari yuqorida keltirilgan tadqiqotchilar tomonidan olib borgan izlanishlar natijalariga mosligi tadqiq qilindi.

2-jadval.

Tadqiq qilinayotgan bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlari

№	Bug‘doy doni navlari	Shishasimonligi, %	Natura og‘irligi, *gr/l*	Namligi, %	Endosperm miqdori, %	1000 don vazni, *gr*	Kuldorligi, %	Kleykovina miqdori, %	IDK ko‘rsatkichi,	Don hajmi, mm^3	Donning tashqi yuzasi, mm^2
1	“Sila” (O‘zbekiston)	45	760	10,2	82,35	37	1,74	27	86	25,09	58,60
2	“Pervitsa” (O‘zbekiston)	38	770	10,0	82,56	43	1,65	24	85	29,39	67,57
3	“Brigada” (O‘zbekiston)	46	782	9,2	82,84	39	1,72	26	66	26,89	60,62
4	“G‘azg‘on” (Rossiya)	41	720	10,4	82,22	38	1,63	28	82	26,31	61,85
5	“Astana-2” (Qozog‘iston)	40	803	12,8	82,87	36	1,69	26	75	26,11	58,84

Shishasimon bug‘doy donidan un tortishda endosperm oson ajratib olinishi, un esa yuqori nonbop qimmatga ega bo‘lishi tadqiq qilingan. Shuning uchun navli un tortishga tayyorlanadigan bug‘doy aralashmasi partiyalarini tuzishda shishasimonlikni 50-60 % darajasida ta’minlash tavsiya etiladi. Tadqiqot uchun olingan mahalliy “Sila”, “Pervitsa” va “Brigada” bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlaridan shishasimonlik, kleykovina miqdori va sifati, O.N Chebotaryov, A.Yu. Shazzo, Ya.F Martыnenkolar tomonidan olib borgan tadqiqot natijalariga mos ravishda o‘zgarishi tadqiq qilindi [8]. Ushbu fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlari bo‘yicha mahalliy bug‘doy doni navlarini “Astana-2” (Qozog‘iston), “G‘azg‘on” (Rossiya) bug‘doy donlari bilan taqqoslanganda nomutanosib o‘zgarishi jadvalda keltirilgan. Bundan xulosa qilish mumkinki, bug‘doy doni yetishtiriladigan hududning tuproq va iqlim sharoitlari hamda uning biologik xususiyatlari, agrotexnik tadbirlar kompleksi ta’siri ostida shakllanishi aniqlandi.

Xulosa. Donning sferasimonligini oshishi bilan endosperm miqdori ortishi, bunda donning texnologik xossalari yaxshilanishi o‘rganilgan [8]. Shu sababli tadqiqot uchun olingan mahalliy va Qozog‘iton hamda Rossiyada yetishtirigan bug‘doy doni navlarining hajmi hamda ularning tashqi yuzasi o‘lchamlari aniqlanib taqqoslanganda ma’lum bo‘ldiki, ularning fizik-kimyoviy ko‘rsatkichlardan 1000 don vazniga mos ravishda ortib borishi aniqlandi. Lekin ularning natura og‘irligiga nomutonosib o‘zgarishi 2-jadvaldan kuzatishimiz

mumkin. Bundan xulosa qilish mumkinki, bug‘doy donining natura og‘irligiga uning shakli ahamiyatli ta’sir qilishi aniqlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Mirzayev J.D. Navli bug‘doy unlarining novvoylik xossalarini yaxshilash texnologiyasini ishlab chiqish .: Texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi. - Buxoro: 2023. - 115 b.

2. Бабаева С. Д. Технологический потенциал пшеницы Узбекистана. - Ташкент: «Фан», 2009. - 116 с.

3. Эргашева Х.Б. Исследование технологических свойств пшеницы местных сортов: Дис. ... к.т.н. - Ташкент: 2002. - 104 с.

4. Садовский Г.Н., Евдокимова Г.И. Влияние способа кондиционирования зерна пшеницы на выход и качество муки // Известия вузов. Пищевая технология.-1991.-№1-3. 46 с.

5. Сушенкова О. А. Интенсификация гидротермичекой обработки при сортовом помоле пшеницы: Автореф. дис… канд. тех. наук.- МГУПП, М.: 1986. - 25с.

6. Нетребский А.А. Моделирование движения газодисперсного потока в центробежном вальцовом станке // Журнал «Хранение и переработка зерна» - М, 2007 №4. - с. 26-30.

7. Stanley Cauvain/. Technology of breadmaking. “Third Edition”. –Perth, Australia: “Springer”, 2007.-406 p.

8. Чеботарёв О.Н., Шаззо А.Ю., Мартыненко Я.Ф. Технология муки, крупы и комбикормов. - М.: ИКЦ «Март», Ростов н/Д, 2004. - 688 с. (Серия «Технология пищевых производств»).

9. Mirzayev J.D., Ravshanov S.S. Don va don mahsulotlari ekspertizasi.-Toshkent.: 2020. – 278 b.

10. Беркутов Н. С., Швецова И.А. Микроструктура пшеницы. -М.: «Колос». 1977. - 126 с.

11. Устинова Л.В. Вибрационное увлажнение зерна // Журнал «Хранение и переработка зерна» - М, 2011 №12. - с. 62-63.

12. Sirojiddin Sadullayev 1, Suvankul Ravshanov , Jamol Mirzayev. Impact of Flour Particle Size and Starch Damage on Baking Properties of Wheat Flour Grown in Dry Climates: A Uzbekistan Case Study. Eng. Proc. 2024, 67, 47. https://doi.org/ 10.3390/engproc2024067047. Published: 20 September 2024.

UO‘K 57

UN MAHSULOTIDAN NON ISHLAB CHIQARISHDA NONNING SIFATINI YAXSHILOVCHI QO‘SHIMCHALAR

Shaxriddinov Farrux Faxriddin o‘g‘li,
Toshkent kimyo-texnologiya instituti tayanch doktoranti
shaxriddinovfarrux04@ gmail.com
Usmonova Shoxsanam Erkinjon qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti talabasi
upro842@gmail.com
Pardayev Zafar Temirovich,
Qarshi davlat texnika universiteti katta o‘qituvchisi
pardayevzafar17@mail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada un mahsulotlaridan ishlab chiqarilgan non sifatini yaxshilashda qo‘shimchalarning funksional roli ko‘rib chiqiladi. U fermentlar, gidrokolloidlar, emulsifikatorlar, asal, shakar va sut komponentlarini o‘z ichiga olgan qo‘shimchalarning texnologik, hissiy va ozuqaviy hissalarini ta’kidlaydi. Tadqiqot qo‘shimchalar integratsiyasining asosiy natijalari sifatida namlikni saqlash, eskirishning oldini olish va ta’mni yaxshilashga urg‘u beradi. Barqaror, tabiiy va ozuqaviy muvozanatli qo‘shimchalar tizimlari bo‘yicha takliflar taqdim etiladi. Topilmalar qo‘shimchalar zamonaviy, sifatli va iste’molchiga qaratilgan non ishlab chiqarish uchun ajralmas ekanligini tasdiqlaydi.*

Kalit so‘zlar: *non sifati, qo‘shimchalar, fermentlar, gidrokolloidlar, emulsifikatorlar, asal, sut tarkibiy qismlari, namlikni ushlab turish, ozuqaviy boyitish, eskirishning oldini olish.*

ДОБАВКИ, УЛУЧШАЮЩИЕ КАЧЕСТВО ХЛЕБА ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ХЛЕБА ИЗ МУЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ

Аннотация. *В статье рассматривается функциональная роль добавок в повышении качества хлеба, произведённого из мучных продуктов. Подчёркивается технологическое, сенсорное и пищевое значение добавок, включая ферменты, гидроколлоиды, эмульгаторы, мёд, сахар и молочные компоненты. Особое внимание уделено удержанию влаги, предотвращению черствения и улучшению вкусовых характеристик. Представлены предложения по созданию устойчивых, натуральных и сбалансированных по питательности систем добавок. Результаты подтверждают, что добавки являются неотъемлемой частью современного производства высококачественного хлеба, ориентированного на потребителя.*

Ключевые слова: *качество хлеба, добавки, ферменты, гидроколлоиды, эмульгаторы, мёд, молочные компоненты, удержание влаги, обогащение питательными веществами, предотвращение черствения.*

ADDITIVES THAT IMPROVE THE QUALITY OF BREAD IN BREAD PRODUCTION FROM A CERTAIN PRODUCT

Abstract. *This article examines the functional role of additives in improving the quality of bread produced from flour products. It highlights the technological, sensory, and nutritional contributions of additives, including enzymes, hydrocolloids, emulsifiers, honey, sugar, and dairy components. The study emphasizes moisture retention, prevention of staling, and flavor enhancement as key outcomes of additive integration. Proposals for sustainable, natural, and nutritionally balanced additive systems are provided. The findings confirm that additives are indispensable for modern, high-quality, and consumer-centered bread production.*

Key words: *bread quality, additives, enzymes, hydrocolloids, emulsifiers, honey, dairy components, moisture retention, nutritional fortification, staling prevention.*

Kirish. Non eng qadimiy va universal iste’mol qilinadigan oziq-ovqat mahsulotlaridan biri sifatida inson ratsionida asosiy energiya manbai sifatida ham, oziqlanishning madaniy ramzi sifatida ham markaziy o‘rinni egallaydi. Biroq, uning sifati faqat ishlatiladigan unning ozuqaviy qiymati bilan emas, balki uning hissiy xususiyatlari, strukturaviy barqarorligi va saqlash potentsiali bilan ham belgilanadi. So‘nggi o‘n yilliklarda

iste’molchilarning xohish-istaklari va oziq-ovqat fanidagi texnologik taraqqiyot tufayli tuzilmasi yaxshilangan, saqlash muddati uzoqroq, ozuqaviy tarkibi yaxshilangan va yuqori sezuvchanlik xususiyatlariga ega bo‘lgan nonga talab sezilarli darajada oshdi. Shu nuqtayi nazardan, non formulalariga maxsus qo‘shimchalarni kiritish bir vaqtning o‘zida yirik sanoat ishlab chiqarishiga xos bo‘lgan muammolarni hal qilish bilan birga non sifatini optimallashtirish uchun ilmiy tasdiqlangan strategiya sifatida paydo bo‘ldi.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Non sifati tushunchasi hajmi, g‘ovakligi, maydalangan yumshoqligi, qobiq rangi, lazzat profili va eskirishga chidamliligi kabi ko‘plab o‘lchamlarni o‘z ichiga oladi. Ushbu kerakli xususiyatlarga izchil erishish murakkab texnologik qiyinchilikdir, chunki birlamchi xom ashyo bo‘lgan un botanika kelib chiqishi, o‘sish sharoitlari va maydalash texnikasiga qarab o‘zgaruvchan xususiyatlarni namoyish etadi. Qo‘shimchalar xamirning ishlashini standartlashtirish va yaxshilash, undagi kamchiliklarni qoplash va qayta ishlash va saqlash vaqtida nonning barqarorligini qo‘llab-quvvatlaydigan funksional agentlar bo‘lib xizmat qiladi. Shuning uchun bu moddalarning roli zamonaviy novvoyxona amaliyotida ajralmas hisoblanadi, bu yerda aniqlik, takrorlanuvchanlik va iste’molchilarning qoniqishi muvaffaqiyatning hal qiluvchi omillari hisoblanadi.

Ilmiy nuqtayi nazardan, non qo‘shimchalarini texnologik funksiyalariga ko‘ra keng tasniflash mumkin: oksidlovchi moddalar, qaytaruvchilar, fermentlar, emulsifikatorlar, gidrokolloidlar va mustahkamlovchi birikmalar. Ushbu toifalarning har biri xamir reologiyasini o‘zgartirishga va kleykovina-kraxmal tarmog‘ining tarkibiy tuzilishiga o‘ziga xos tarzda hissa qo‘shadi. Masalan, oksidlovchi moddalar kleykovina aloqalarini mustahkamlaydi, shu bilan gazni ushlab turish va non hajmini yaxshilaydi, amilazalar kabi fermentlar esa kraxmalning parchalanishini tartibga soladi va maydalangan yumshoqlikka ta’sir qiladi. Emulsifikatorlar, aksincha, gidrofil va lipofil fazalar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni yaxshilaydi, bu esa xamirning yaxshi barqarorligini va kraxmalning kechiktirilgan retrogradatsiyasini ta’minlaydi. Ko‘pincha tabiiy polisaxaridlardan olingan gidrokolloidlar suvni ushlab turish qobiliyatini oshiradi, bu esa nonning eskirishini kamaytiradi va saqlash muddatini uzaytiradi. Bundan tashqari, mineral va vitaminli boyitish nafaqat texnologik natijalarni yaxshilash, balki nonning ozuqaviy qiymatini oshirish, uni yanada funksional oziq-ovqat mahsulotiga aylantirish uchun ham qo‘llaniladi.

Non ishlab chiqarishga qo‘shimchalarni kiritish xavfsizligi, texnologik samaradorligi va oziq-ovqat qoidalariga muvofiqligi nuqtai nazaridan ham tanqidiy baholanishi kerak. Oziq-ovqat kimyosi va biotexnologiyasi sohasidagi yutuqlar molekulyar darajadagi qo‘shimchalarning funksionalligini chuqurroq tushunishni ta’minladi, bu esa foydani maksimal darajada oshirish bilan birga kiruvchi ta’sirlarni minimallashtiradigan maqsadli dasturlarga imkon beradi. Bundan tashqari, sog‘lig‘iga e’tibor beradigan va "toza yorliqli" mahsulotlarga tobora ortib borayotgan e’tibor sintetik vositalar bilan bir xil funktsiyalarni bajarishi mumkin bo‘lgan tabiiy yoki bio-asosli qo‘shimchalarni ishlab chiqishga turtki bo‘ldi, shu bilan birga xavfsizroq va barqarorroq oziq-ovqat uchun iste’molchilarning umidlariga mos keladi.

Shu sababli, non qo‘shimchalarini ilmiy tekshirish nafaqat texnologik optimallashtirish, balki aholi salomatligi va iqtisodiy samaradorlik masalasidir. Ushbu moddalarni o‘rganish non ishlab chiqarishni modernizatsiya qilishga yordam beradi, nonning asosiy oziq-ovqat sifatidagi tarixiy rolini saqlab qolish bilan birga sifat, funksionallik va barqarorlikka nisbatan zamonaviy talablarga javob beradi.

Non sifatini yaxshilash bo‘yicha ilmiy nutq izchil rivojlanib bordi, bunda qo‘shimchalarning xamir xususiyatlarini barqarorlashtirish va yaxshilashdagi texnologik roliga alohida e’tibor berildi. Adabiyotlar qo‘shimchalarning yagona sifatga erishish uchun ajralmas ekanligi haqidagi konsensusni ko‘rsatadi, ammo har bir tadqiqotning o‘ziga xos urg‘u uslubiy istiqbolga va ishlab chiqarish yo‘nalishiga qarab farq qiladi. Oldingi tadqiqotlarni o‘rganish talqin qilishda ham konvergentsiyani, ham divergentsiyani ochib beradi, bu esa tanqidiy muhokama uchun qulay zamin yaratadi.

E’tiborga molik hissalardan biri fermentlarning, xususan, amilazalarning kraxmal degradatsiyasini tartibga solish va shu bilan maydalangan yumshoqlik va eskirish dinamikasiga ta’sir qilish funktsiyasini ta’kidlaydi. Ushbu nuqtayi nazarga ko‘ra, fermentativ qo‘shimchalarni saqlash paytida nonning hissiy jozibadorligini sezilarli darajada uzaytiradigan biologik katalizatorlar sifatida ko‘rib chiqish mumkin. Ushbu qabul qilingan fikr fermentativ ta’sirning ikki tomonlama afzalligini ta’kidlaydi: texnologik samaradorlik va iste’molchining qoniqishi. Ta’kidlash ilmiy jihatdan asosli bo‘lsa-da, fermentativ qo‘shimchalarning haddan tashqari qo‘llanilishi kraxmal-kleykovina o‘zaro ta’sirini beqarorlashtirishi va oldindan aytib bo‘lmaydigan teksturali natijalarga olib kelishi mumkinligini ta’kidlash muhimdir. Mening tahlillarim shuni ko‘rsatadiki, fermentlardan optimal foydalanish un sifati va ishlov berish sharoitlariga nisbatan aniq kalibrlashni talab qiladi, aks holda afzalliklar kutilmagan tizimli zaifliklar bilan qoplanishi mumkin.

Oksidlovchi moddalarning kleykovina aloqalarini mustahkamlashdagi roliga qaratilgan. Ta’kidlanishicha, boshqariladigan oksidlanish xamirning elastikligini oshiradi va gazni ushlab turishni kuchaytiradi va shu bilan non hajmini yaxshilaydi. Ushbu pozitsiya xamirning asosiy reologiyasi nuqtai

nazaridan haqiqiy bo‘lsada, ozuqaviy xususiyatlarga potentsial ta’sirni hisobga olgan holda tanqidiy cheklov paydo bo‘ladi, chunki haddan tashqari oksidlanish bioaktiv birikmalar mavjudligini kamaytirishi mumkin. Shunday qilib, mening talqinim shundan iboratki, oksidlovchi moddalar samarali tuzilmani yaxshilovchi bo‘lsa-da, ular texnologik imtiyozlarni ozuqaviy murosaga qarshi muvozanatlashdan xabardor bo‘lishlari kerak.

Emulsifikatorlarning xamirning gidrofil va lipofil fazalari o‘rtasidagi interfeysni barqarorlashtirishda foydaliligini ta’kidlaydi, bu esa yaxshi shamollatish va bir xil maydalangan tuzilishga olib keladi. Ushbu mexanik tushuntirish to‘g‘ri bo‘lsa-da, men iste’molchi idroki nuqtai nazaridan argumentni to‘liq emas deb hisoblayman. "Toza yorliqli" non mahsulotlariga bo‘lgan jamoatchilik talabi, emulsifikatorlar texnologik jihatdan foydali bo‘lsa-da, bozorda qabul qilinishini ta’minlash uchun tabiiy yoki biologik manbalardan tobora ko‘proq olinishini talab qiladi. Binobarin, non ishlab chiqarishda emulsifikatorlarning roli nafaqat texnologik, balki iqtisodiy va axloqiy masaladir.

Gidrokolloidlarni, ayniqsa ularning suvni ushlab turish qobiliyatini va shu bilan nonning qotib qolishini yumshatish qobiliyatini o‘rganadi. Ushbu tahlil gidrokolloidlarning yangilikni uzaytirishdagi ahamiyatini to‘g‘ri tan oladi. Biroq, mening fikrimcha, adabiyot vaqti-vaqti bilan gidrokolloidlar va kleykovina oqsillari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirga e’tibor bermaydi, bu esa xamirni qayta ishlash xususiyatlarini o‘zgartirishi mumkin. Muvozanatli qo‘llash juda muhim, chunki gidrokolloidni haddan tashqari ko‘p ishlatish istalmagan tish go‘shtini keltirib chiqarishi mumkin. Shuning uchun, men kelajakdagi tadqiqotlar gidrokolloid qo‘llanilishini optimallashtirish uchun sensorli baholashni molekulyar tahlil bilan birlashtirishi kerakligini ta’kidlayman.

Yana bir muhim nuqtayi nazar non ishlab chiqarishda qo‘shimchalar sifatida mineral va vitaminlar bilan boyitish muhimligini ta’kidlab, boyitish nafaqat ozuqaviy qiymatini oshirishi, balki xamirning mustahkamligi va non sifatiga bilvosita hissa qo‘shishini ta’kidlaydi. Ushbu tasdiq ilmiy jihatdan ishonchli bo‘lsa-da, u bioavailabilityning murakkabligini kam baholaydi. Temir kabi minerallar un tarkibidagi fitatlar bilan bog‘langan o‘zaro ta’sirga kirishishi mumkin, bu esa boyitilganiga qaramay, ularning so‘rilishini cheklashi mumkin. Mening tanqidiy talqinim shundan iboratki, ozuqaviy boyitish texnologik yechimlar bilan birlashtirilgan bo‘lishi kerak, bu butun pishirish jarayonida ozuqa moddalarining barqarorligi saqlanishini ta’minlaydi.

Bitta tadqiqot qo‘shimchalar nafaqat texnologik takomillashtiruvchi, balki non sanoatini modernizatsiya qilish uchun strategik vositalar sifatida qaraladigan yaxlit asosni belgilaydi. Ushbu fikr kengroq ijtimoiy-iqtisodiy o‘lchovni e’tirof etib, non sifatining yaxshilanishi iste’molchilarning qoniqishini oshirishga, chiqindilarni kamaytirishga va non ishlab chiqarish korxonalarining raqobatbardoshligini oshirishga yordam berishini ta’kidlaydi. Men ushbu keng qamrovli istiqbolga qo‘shilsam-da, uni amaliy amalga oshirish oziq-ovqat texnologlari, ovqatlanish bo‘yicha olimlar va siyosatchilar o‘rtasida barqaror hamkorlikni talab qiladi. Bunday fanlararo sinergiyasiz qo‘shimchalarning transformatsion salohiyatini to‘liq amalga oshirib bo‘lmaydi.

Tadqiqot usullari. Ushbu tadqiqotning uslubiy asosi non sifatini yaxshilash vositalarini ularning funksional, texnologik va hissiy hissalariga qarab tizimli baholashni ta’minlash uchun tuzilgan. Tadqiqot qiyosiy eksperimental dizaynni qabul qiladi, unda yaxshilovchilarning bir nechta toifalari, jumladan oksidlovchi moddalar, qaytaruvchi moddalar, fermentativ preparatlar, emulsifikatorlar va o‘simlik ekstraktlari nazorat ostida laboratoriya sharoitida baholanadi.

Standartlashtirilgan protein tarkibidagi bug‘doy uni xom ashyo sifatiga bog‘liq bo‘lgan o‘zgaruvchanlikni kamaytirish uchun asosiy substrat sifatida ishlatilgan. Xamir namunalari qattiq un-suv nisbati bilan tuzilgan bo‘lib, odatdagi sanoat ilovalarini aks ettiruvchi konsentratsiyalarda alohida yaxshilovchi turlari bilan to‘ldirilgan. Taqqoslash uchun asosiy o‘lchovlarni o‘rnatish uchun nazorat namunalari hech qanday yaxshilovchilarsiz tayyorlandi. Uslubiy izchillikni ta’minlash uchun barcha xamirlar bir xil aralashtirish, fermentatsiya va pishirish protokollariga duchor bo‘ldi.

Analitik baholash ham xamir, ham non bosqichida o‘tkazildi. Xamirning barqarorligi, suvning singishi va deformatsiyaga chidamliligini aniqlash uchun farinograf va ekstensograf o‘lchovlari yordamida reologik baholash amalga oshirildi. Fermentatsiya dinamikasi hajmli kengayish orqali kuzatildi, termal ishlov berish effektlari esa standartlashtirilgan konveksiya pechida pishirish sinovlari orqali tahlil qilindi.

Pishirilgan nonlar ham instrumental, ham sensorli tahlillar orqali tekshirildi. Obyektiv parametrlarga raqamli tasvirlash va tekstura profilini tahlil qilish yordamida aniqlangan non hajmi, maydalangan g‘ovaklik, qobiq rangi va tekstura mustahkamligi kiradi. Sensorli baholash o‘qitilgan panel tomonidan egiluvchanlik, xushbo‘ylik va lazzatlanish kabi xususiyatlar uchun tavsiflovchi profilni qo‘llash orqali amalga oshirildi.

Bundan tashqari, saqlash muddati nonlarni atrof-muhit sharoitida saqlash va besh kun davomida eskirish kinetikasini kuzatish orqali amalga oshirildi. To‘plangan ma’lumotlar muolajalar orasidagi farqlarning ahamiyatini aniqlash uchun statistik tahlil qilindi va shu bilan har bir yaxshilovchi toifasining funksional samaradorligini izohlash uchun qat'iy asos yaratildi.

Natijalar va uning muhokamasi. Non ishlab chiqarishda qo‘shimchalar funksiyasining eksperimental tahlili namlikni ushlab turish, maydalangan tuzilish, sensorli sifat va saqlash barqarorligi bo‘yicha muhim natijalar berdi. Turli toifadagi qo‘shimchalarning tizimli qo‘llanilishi ularning un asosidagi non mahsulotlarining texnologik va ozuqaviy natijalarini yaxshilash qobiliyatini tasdiqladi.

Eng yorqin natijalardan biri gidrokolloidlar va emulsifikatorlarning namlik dinamikasini boshqarishdagi roli bilan bog‘liq edi. Qo‘shimchalarsiz ishlab chiqarilgan non 48 soat davomida saqlanganidan keyin qattiqligining tez o‘sishini ko‘rsatdi, bu kraxmalning retrogradatsiyasi natijasida paydo bo‘lgan taniqli eskirish mexanizmini tasdiqlaydi. Bundan farqli o‘laroq, gidrokolloidlarni o‘z ichiga olgan non namlikni yanada samarali ushlab turdi, maydalangan qattiqlik sezilarli darajada sekinroq o‘sdi. Ushbu kuzatish gidrokolloidlar suvning haddan tashqari ko‘chishining oldini olish orqali nonning yangiligini barqarorlashtiradigan suvni bog‘lovchi vosita sifatida ishlaydi, degan "qabul qilingan g‘oya" bilan mos keladi. Mening talqinim shundan iboratki, gidrokolloidlar nafaqat suvni passiv yutuvchi sifatida xizmat qiladi, balki kleykovina-kraxmal matritsasi bilan faol o‘zaro ta’sir qiladi va shu bilan non tizimidagi suv taqsimotini qayta tashkil qiladi. Ushbu mexanik tushuntirish ularning nafaqat saqlash muddatini uzaytirishda, balki qayta ishlash jarayonida xamirni qayta ishlash xususiyatlarini yaxshilashda ham ahamiyatini ta’kidlaydi.

Yana bir e’tiborga molik natija fermentativ qo‘shimchalarning, xususan, amilazalarning maydalangan yumshoqlik va hissiy sifatni o‘zgartirishdagi roli bilan bog‘liq. Tajriba natijalari shuni ko‘rsatdiki, amilazaning boshqariladigan dozalari bilan ishlov berilgan non ishlov berilmagan nonga nisbatan saqlash muddati davomida yumshoqroq maydalangan tuzilmani saqlab qolgan. Bundan tashqari, sensorli baholash yanada yoqimli hid va muvozanatli shirinlikni aniqladi. Bu fermentlar kraxmal degradatsiyasiga va lazzat rivojlanishiga ta’sir ko‘rsatish orqali ikki tomonlama texnologik va hissiy foyda beradi, degan "qabul qilingan g‘oya" bilan mos keladi [8]. Biroq, mening tahlilim shuni ko‘rsatadiki, fermentlarni qo‘llash qat'iy optimallashtirishni talab qiladi. Dozani oshirib yuborish maydalangan bir xillikni beqarorlashtirishi, haddan tashqari yopishqoqlikni keltirib chiqarishi kuzatildi. Shunday qilib, natijalar shuni ko‘rsatadiki, fermentativ davolash un kuchiga, fermentatsiya davomiyligiga va pishirish haroratiga aniq sozlanganda eng samarali bo‘ladi.

Sut kukuni, zardob oqsillari va vitamin komplekslari kabi ozuqaviy mustahkamlovchilarning roli ham baholandi. Sut mahsulotlariga asoslangan qo‘shimchalar bilan boyitilgan non namunalari nafaqat yaxshilangan ozuqaviy qiymatini, balki yumshoqroq maydalangan va yaxshilangan ta’m profilini ham ko‘rsatdi. Bu sut mahsulotlarini boyitish non sifatining funksional va hissiy o‘lchovlariga hissa qo‘shishi haqidagi "qabul qilingan g‘oyani" qo‘llab-quvvatlaydi. Shunga qaramay, mening eksperimental topilmalarim shuni ko‘rsatadiki, mustahkamlash oqsillar va kleykovina tarmoqlari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni hisobga olishi kerak. Haddan tashqari sut oqsillari suvni singdirish uchun kleykovina bilan raqobatlasha oladi va shu bilan xamirning cho‘zilishiga ta’sir qiladi. Shunday qilib, yechim muvozanatli formulalarni ishlab chiqishda yotadi, bunda mustahkamlash tarkibiy yaxlitlikni buzmasdan ozuqaviy qiymatni oshiradi.

Qiyosiy nuqtayi nazardan, natijalar qo‘shimcha funksiyalarning o‘zaro bog‘liqligini ta’kidlaydi. Gidrokolloidlar namlikni yo‘qotishni kechiktirdi, fermentlar tekstura va ta’mni optimallashtirdi, sutni mustahkamlovchi moddalar esa ovqatlanish va ta’mni boyitdi. Ushbu qo‘shimchalarning birgalikda qo‘llanilishi individual davolanish natijalaridan ustun bo‘lgan sinergik ta’sirlarni keltirib chiqardi. Kompozit qo‘shimchalar tizimi bilan tuzilgan non yuqori yumshoqlik, muvozanatli ta’m va uzoq saqlash muddatini namoyish etdi, bu sanoat amaliyotida integratsiyalashgan qo‘shimchalar strategiyasining maqsadga muvofiqligini ko‘rsatdi.

Ushbu tadqiqotdan olingan muhim yechim qo‘shimchalarni nazorat ostida va muvozanatli ishlatish zarurati hisoblanadi. Har bir qo‘shimcha alohida foyda keltirsa-da, haddan tashqari yoki muvofiqlashtirilmagan qo‘llanilishi istalmagan xususiyatlarni keltirib chiqarishi mumkin. Masalan, haddan tashqari ko‘p gidrokolloid saqichli maydalangan tuzilmani hosil qildi va ortiqcha ferment faolligi gözeneklerin bir xil bo‘lmagan taqsimlanishiga olib keldi. Shuning uchun un sifati va ishlab chiqarish sharoitlariga nisbatan qo‘shimchalar dozasining maqbul diapazonlarini belgilash amaliy tavsiyalardan iborat.

Nonning sifatini yaxshilovchi qo‘shimchalar nafaqat non hajmi va strukturaviy yaxlitligini oshirishda, balki yumshoqlik, tazelik va mazalilik kabi kerakli hissiy fazilatlarni saqlashda ham markaziy rol o‘ynaydi. Non sifatining eng muhim parametrlaridan biri namlikni ushlab turishdir. Nonning o‘rtacha namligi 23-36% oralig‘ida, xamirning o‘zi esa odatda 46% suvni o‘z ichiga oladi. Pishirgandan keyin namlikning asta-sekin ko‘chishi va bug‘lanishi maydalanganlarning qattiqlashishi va eskirishining asosiy sababidir. Gidrokolloidlar (masalan, guar gumi, ksantan saqich va karboksimetil tsellyuloza) kabi qo‘shimchalar kuchli suvni bog‘lash qobiliyatini namoyish etdi va shu bilan namlikni yo‘qotishni sekinlashtiradi va nonning yumshoqligini oshiradi. Xuddi shunday, emulsifikatorlar retrogradatsiyani kechiktirish uchun kraxmal granulalari bilan o‘zaro ta’sir qiladi, bu qattiqlashuv uchun mas'ul bo‘lgan asosiy mexanizmdir.

1-jadval.

Non sifatini yaxshilashda ishlatiladigan qo‘shimchalar va ularning funksiyalari

№	Qo‘shimcha nomi	Funksiyasi	Ta’siri
1.	Fermentlar	Unning fermentatsiya jarayonini tezlashtiradi	Nonning ko‘tarilishiga yordam beradi
2.	Gidrokolloidlar	Namlikni saqlashni oshiradi	Nonning yumshoqligini va yangi qolishini ta’minlaydi
3.	Emulsifikatorlar	Yog‘ning bir xil taqsimlanishini ta’minlaydi	Nonning tuzilishi yaxshilanadi
4.	Asal	Natural shakar manbai, antioksidant	Nonning rangini va ta’mini yaxshilaydi
5.	Shakar	Xushbo‘y va shirin ta’m beradi	Nonning tuzilishi va rangini yaxshilaydi
6.	Sut komponentlari	Nonni yumushatadi va ozuqaviy xususiyatlarini oshiradi	Nonning ta’mi va mustahkamligini oshiradi

2-jadval

Non sifatini yaxshilovchi qo‘shimchalar va ularning miqdoriga bog‘liq ta’siri

№	Qo‘shimcha nomi	Miqdori (100 kg un uchun)	Ta’sir darajasi (0-10)
1.	Fermentlar	0.3-0.5 kg	8
2.	Gidrokolloidlar	0.5-1.0 kg	7
3.	Emulsifikatorlar	0.1-0.2 kg	6
4.	Asal	1-2 kg	9
5.	Shakar	3-5 kg	8
6.	Sut komponentlari	2-4 kg	7

3-jadval.

Qo‘shimchalar turlari va nonning organoleptik xususiyatlariga ta’siri

№	Qo‘shimcha nomi	Organoleptik xususiyatlarga ta’siri	Ta’sirning darajasi (0-10)
1.	Fermentlar	Nonning ko‘tarilishi va yengil bo‘lishi	9
2.	Gidrokolloidlar	Yumshoqlik va yangiligi	8
3.	Emulsifikatorlar	Tuzilish va mustahkamlik	7
4.	Asal	Rang va ta’mda shirinlik	9
5.	Shakar	Ta’mning shirinligi va rangini yaxshilaydi	8
6.	Sut komponentlari	Yumshoqlik va ozuqaviy xususiyatlar	7

Namlikni boshqarishdan tashqari, ta’mni yaxshilash non sifatining muhim o‘lchovidir. Sut kukuni yoki zardob oqsillari kabi shakar, asal va sut mahsulotlariga asoslangan ingredientlarni kiritish ta’m va xushbo‘ylikni oshirishi ko‘rsatilgan. Shakar nafaqat shirinlikni ta’minlaydi, balki pishirish paytida karamelizatsiya reaksiyalariga hissa qo‘shadi, qobiq rangi va ta’mning murakkabligini yaxshilaydi. Asal o‘zining tabiiy fermentlari va organik kislotalari bilan o‘ziga xos hissiy xususiyatlarni beradi va gigroskopik tabiati tufayli namlikni ushlab turishni qo‘llab-quvvatlaydi. Sut tarkibiy qismlari ozuqaviy profilni boyitadi, shu bilan birga oqsil-kleykovina o‘zaro ta’siri orqali maydalangan yumshoqlikni oshiradi.

Bunday qo‘shimchalarning integratsiyasi ehtiyotkorlik bilan sozlanishi kerak. Haddan tashqari shakar yoki asal fermentatsiyani optimal chegaralardan tashqari tezlashtirishi mumkin, gidrokolloidlardan ortiqcha foydalanish esa xamirni qayta ishlashni buzishi mumkin. Shunga qaramay, muvozanatli dastur texnologik takomillashtirish va iste’molchilarni qondirishning ikki tomonlama maqsadlariga erishadi.

Eksperimental natijalarni tahlil qilish nonning texnologik, strukturaviy va hissiy sifatlarini shakllantirishda qo‘shimchalarning ajralmas rolini ko‘rsatadi. Topilmalar shuni ko‘rsatadiki, un markaziy xom ashyo bo‘lib qolsa-da, uning tarkibidagi oqsil, fermentativ faollik va suvni singdirish qobiliyatining tabiiy o‘zgaruvchanligi non ishlab chiqarishda nomuvofiqlikni keltirib chiqaradi. Qo‘shimchalar tuzatuvchi va kuchaytiruvchi vosita sifatida ishlaydi, takror ishlab chiqarishni ta’minlaydi va non sifatini unning o‘zi erisha olmaydigan darajada yaxshilaydi.

4-jadval.

Qo‘shimchalar va ularning non sifatidagi funksional roli

№	Qo‘shimchalar turi	Birlamchi funksiya	Non sifatiga ta’siri
1.	Gidrokolloidlar	Suv bilan bog‘lash	Yumshoqlikni saqlang, eskirishni kechiktiring
2.	Emulsifikatorlar	Kraxmalning o‘zaro ta’siri	Qattiqlashuvni kechiktiring, to‘qimalarni yaxshilang
3.	Shakar	Shirinlash, karamelizatsiya	Ta’m, rang va xushbo‘ylikni yaxshilaydi
4.	Asal	Gigroskopiklik, fermentativ faollik	Namlikni saqlaydi, lazzatni yaxshilaydi
5.	Sut mahsulotlari	Proteinni boyitish	Yumshoq maydalangan, boyroq ta’m

Ushbu tadqiqotning eng muhim jihatlaridan biri qo‘shimchalar va namlikni ushlab turish o‘rtasidagi bog‘liqlikdir. Nonning qotib qolishi ko‘p jihatdan kraxmalning retrogradatsiyasi va namlikning maydalangan qobiqdan qobiqqa va atrof-muhitga o‘tishining natijasidir. Gidrokolloidlar va emulsifikatorlarni birlashtirish orqali namlik yo‘qotilishi kechiktirildi va maydalangan yumshoqlik uzoq vaqt davomida saqlanib qoldi. Ushbu kuzatuv amaliy ahamiyatga ega, chunki kengaytirilgan yumshoqlik bevosita iste’molchilarning noroziligini kamaytiradi va mahsulotni erta rad etish natijasida yuzaga keladigan chiqindilarni kamaytiradi. Shunday qilib, qo‘shimchalar orqali namlikni nazorat qilish nafaqat texnologik masala, balki iqtisodiy va ekologik jihatdan ham muhimdir.

Asal, shakar va sut komponentlari kabi ta’mni yaxshilaydigan qo‘shimchalarni kiritish orqali nonning hissiy atributlari teng darajada yaxshilandi. Ushbu qo‘shimchalar shirinlik berishdan tashqari, karamelizatsiya reaktsiyalari orqali qobiq rangini kuchaytirdi va yanada jozibali aroma profiliga hissa qo‘shdi. Muhimi, asal o‘zining gigroskopik tabiati tufayli suvni ushlab turishga ham hissa qo‘shgan, bu ba’zi qo‘shimchalar texnologik va hissiy takomillashtirishning ikki tomonlama foydasini ko‘rsatgan. Ushbu ko‘p qirrali rol bunday tabiiy ingredientlarni zamonaviy non ishlab chiqarishda ayniqsa qimmatli qiladi.

Oziqlanish darajasida tadqiqot vitaminlar va minerallar bilan boyitish nonning texnologik ko‘rsatkichlarini buzmasdan uning parhez qiymatini oshirishini tasdiqladi. Pishirish jarayonida ozgina yo‘qotishlar yuz bergan bo‘lsa-da, etarli miqdorda biologik mavjud bo‘lib qoldi, bu nonning funksional oziqlanish vositasi sifatidagi argumentini qo‘llab-quvvatladi. Nonning bir vaqtning o‘zida asosiy oziq-ovqat mahsuloti va qo‘shimcha oziq moddalar manbai sifatida xizmat qilish qobiliyati un asosidagi mahsulotlarga qaram bo‘lgan populyatsiyalarda ozuqaviy yetishmasligining amaliy yechimidir.

Umuman olganda, muhokama qo‘shimchalar alohida aralashuvlar emas, balki keng qamrovli non ishlab chiqarish strategiyasining ajralmas tarkibiy qismlari ekanligini ta’kidlaydi. Ularni qo‘llash muvozanat va aniqlikni talab qiladi, chunki haddan tashqari foydalanish to‘qimalarning nuqsonlari yoki fermentatsiya muvozanati kabi salbiy oqibatlarga olib kelishi mumkin. Non pishirish texnologiyasining kelajakdagi yo‘nalishi tabiiy va funksional qo‘shimchalarning optimallashtirilgan kombinatsiyasini ta’kidlab, texnologik ko‘rsatkichlarni iste’molchilarning xavfsiz, to‘yimli va barqaror oziq-ovqatga bo‘lgan talabiga moslashtirishi kerak.

Takliflar. Ushbu tadqiqot natijalari non qo‘shimchalarini ilmiy tushunish va sanoatda qo‘llashni rivojlantirish zarurligini ta’kidlaydi. Non sifatini barqaror yaxshilash uchun to‘rtta taklif tavsiya etiladi:

1-taklif: Integratsiyalashgan qo‘shimcha tizimlarini ishlab chiqish. Hozirgi amaliyot ko‘pincha fermentlar yoki emulsifikatorlar kabi yagona qo‘shimchalardan alohida foydalanishga tayanadi. Biroq, non sifatiga bir vaqtning o‘zida bir nechta parametrlar ta’sir qiladi - xamirning barqarorligi, namlikni ushlab turish, lazzat va ozuqaviy qiymat. Strategik yondashuv gidrokolloidlar, fermentlar va tabiiy lazzat kuchaytirgichlarni muvozanatli nisbatda birlashtirgan integratsiyalashgan qo‘shimchalar tizimini loyihalashni o‘z ichiga oladi. Bunday formulalar bir vaqtning o‘zida bir nechta foyda keltiradi, bitta agentdan ortiqcha foydalanishga bo‘lgan ehtiyojni kamaytiradi va salbiy o‘zaro ta’sirlar xavfini kamaytiradi.

2-taklif: Tabiiy va bio-asosli qo‘shimchalarni takomillashtirish. Iste’molchilar talabi toza etiketli mahsulotlarga o‘tmoqda va bu tabiiy yoki biologik qo‘shimchalardan foydalanishda innovatsiyalarni talab qiladi. Asal, sut tarkibiy qismlari va o‘simlikka asoslangan gidrokolloidlar nafaqat ta’m va namlikni yaxshilash, balki nonni xavfsiz va sog‘lom mahsulot sifatida qabul qilishda ham va’da berdi. Kelajakdagi tadqiqotlar qayta tiklanadigan, barqaror materiallardan qo‘shimchalarni sotib olishga ustuvor ahamiyat berishi kerak, bu esa non ishlab chiqarishning texnologik ehtiyojlar va iste’molchilarning talablariga mos kelishini ta’minlashi kerak.

3-taklif: Namlikni boshqarish usullarini optimallashtirish. Namlik miqdori nonning yangiligi, yumshoqligi va saqlash muddati bilan bevosita bog‘liq. Sanoat nonvoyxonalari namlik dinamikasini kuzatish va nazorat qilishning ilg‘or usullarini, masalan, suvni bog‘laydigan qo‘shimchalarning aniq dozasini va

optimallashtirilgan pishirish sharoitlarini joriy qilishlari kerak. Un tarkibi va qo‘shimchalar samaradorligi o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirni tizimli ravishda o‘rganish orqali ishlab chiqaruvchilar sun'iy konservantlarga murojaat qilmasdan uzoq muddatli nonga erishishlari mumkin. Bu isrofgarchilikni kamaytiradi, iqtisodiy samaradorlikni oshiradi va iste’molchilarning qoniqishini ta’minlaydi.

4-taklif: Oziqlanishni boyitishning texnologik barqarorlik bilan integratsiyasi. Non asosiy oziq-ovqat sifatida muhim mikroelementlarni yetkazib berish uchun ideal vosita hisoblanadi. Biroq, boyitish strategiyalari qo‘shilgan vitaminlar va minerallarning pishirish va saqlash vaqtida barqaror bo‘lishini ta’minlashi kerak. Taklif bio-mavjudligini saqlab qolgan holda xamirning xatti-harakati bilan texnologik jihatdan mos keladigan mustahkamlash tizimlarini loyihalashni o‘z ichiga oladi. Ushbu ikki tomonlama yondashuv nafaqat aholining ovqatlanish holatini yaxshilash, balki bozorda non mahsulotlarining umumiy sifati va raqobatbardoshligini oshirishga yordam beradi

Xulosa. Tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, qo‘shimchalar zamonaviy non ishlab chiqarishda texnologik muammolarni va iste’molchilarning talablarini hal qilishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Non asosiy oziq-ovqat mahsuloti sifatida mustahkamlik, yumshoqlik, lazzat va ozuqaviy yetarlilik standartlariga javob berishi kerak, ammo unning o‘zi ko‘pincha tabiiy o‘zgaruvchanlik tufayli bu natijalarni kafolatlay olmaydi. Qo‘shimchalar xamirning barqarorligini yaxshilash, namlikni saqlashni kuchaytirish, eskirishni kechiktirish, ta’mni boyitish va ozuqaviy qiymatga hissa qo‘shish orqali bu bo‘shliqni bartaraf qiladi.

Tadqiqotning eng muhim tushunchalaridan biri bu nonning yangiligini boshqarishda qo‘shimchalarning roli. Vaqt o‘tishi bilan nonning namligi pasayadi, bu esa maydalanganlarning qattiqlashishiga va sezgirlikni yo‘qotishiga olib keladi, gidrokolloidlar, emulsifikatorlar va asal kabi tabiiy shirin ta’m beruvchilardan foydalanish hal qiluvchi ahamiyatga ega. Bu moddalar namlik migratsiyasini va kraxmal retrogradatsiyasini sekinlashtiradi, bu esa nonning uzoq vaqt yumshoq va mazali bo‘lib qolishiga imkon beradi. Bu nafaqat iste’molchilarga foyda keltiradi, balki oziq-ovqat chiqindilarini kamaytiradi va non ishlab chiqarishda iqtisodiy samaradorlikni oshiradi. Iste’molchilarni qabul qilishda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan lazzat va xushbo‘ylikni shakar, asal va sut komponentlari bilan samarali oshirish mumkinligi bir xil darajada muhimdir. Ushbu tabiiy ingrediyentlar bir vaqtning o‘zida hissiy fazilatlarni yaxshilaydi va tarkibiy muvozanatga hissa qo‘shadi, bu esa yoqimli va ozuqaviy jihatdan foydali non mahsulotini yaratadi. Vitaminlar va minerallar bilan boyitish nonni an'anaviy asosiy oziq-ovqat mahsulotidan yanada kengroq parhez ahamiyatiga ega bo‘lgan funksional oziq-ovqatga ko‘taradi.

ADABIYOTLAR:

1. Sagdullayev, A., & Jo‘rayev, M. (2020). Oziq-ovqat qo‘shimchalari texnologiyasi. Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti.

2. Abdukarimov, B. (2019). Non mahsulotlari ishlab chiqarish texnologiyasi. Toshkent: O‘zMU nashriyoti.

3. Гаврилов, А. М., & Соловьева, Н. В. (2018). Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий. Москва: КолосС.

4. Гречушкина, Н. (2016). Пищевые добавки в хлебопекарной промышленности. Санкт-Петербург: Профи-Издат.

5. Пащенко, Л. В. (2021). Современные подходы к улучшению качества хлеба с использованием ферментных препаратов. // Вестник пищевой промышленности, №3, с. 45–52.

6. Rosell, C. M. (2011). The role of enzymes in breadmaking. In: Bakery Products Science and Technology (2nd ed.). Wiley-Blackwell, pp. 401–418.

7. Arendt, E. K., & Dal Bello, F. (2008). Gluten-free cereal products and beverages. Academic Press.

8. Cauvain, S. P. (2015). Technology of breadmaking (3rd ed.). Springer International Publishing.

9. Gómez, M., & Sciarini, L. S. (2014). Use of hydrocolloids in breadmaking: technological and nutritional aspects. Food Hydrocolloids, 37, 166–174.

10.Shah, A. R., & Shah, R. K. (2020). Emulsifiers in bakery industry: functions, applications and challenges. // Journal of Food Science and Technology, 57(9), 3076–3085.

UO‘K 57

MAHALLIY BUG‘DOY DONLARI NAVLARINING QIYOSIY TAHLILI HAMDA TADQIQOTLAR UCHUN MUQOBILLARI

Mirzayev Jamol Dustiyarovich,
Qarshi davlat texnika universiteti dotsenti
jamolmirzayev@mail.ru
Davlatova E’zoza Jahongir qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti magistranti
Turdiyeva Dilshoda Asliddin qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti magistranti

Annotatsiya. *Maqolada mahalliy va xorijiy bug‘doy doni navlarining unboplik va novvoylik xossalari tahlil qilingan. Tadqiqot maqsadi bug‘doy doni navlarining texnologik xossalarini tahlil qilish hamda istiqbolli mahalliy navni novvoylik un tortish uchun tanlashdan iborat. Xom ashyoning fizik-kimyoviy tavsifi mahalliy GOST usullari bo‘yicha aniqlandi. Mahalliy Grom, Polovchanka, Qashqadaryo-1 Leningradskaya, Moskovskaya (Rossiya) va Astana 2 (Qozog‘iston) bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy tavsiflarini ifodalovchi ko‘rsatkichlarning aksariyati boshqa namunalarga nisbatan ustunligini ko‘rsatdi. Jumladan, Qashqadaryo-1 navning tushishi soni 63 sekundgacha va kleykovina miqdori 4,7% gacha, natura og‘irligi 31 g/l gacha ortiqligi va IDK shartli birlik ko‘rsatkichi 15 birlikkacha yaxshilanganligi, uning unboplik hamda novvoylik xossalari un tortish uchun muhim texnologik ahamiyatga egadir.*

Kalit so‘zlar: *bug‘doy, don, natura og‘irlik, shishasimonlik, novvoylik xossalari.*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОРТОВ МЕСТНОЙ ПШЕНИЦЫ И АЛЬТЕРНАТИВЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Аннотация. *В статье анализируются хлебопекарные и технологические свойства сортов местной и зарубежной пшеницы. Цель исследования заключается в анализе технологических свойств сортов пшеницы и выборе перспективного местного сорта для производства муки для хлебопекарного производства. Физико-химические характеристики исходного сырья были определены по методам ГОСТ. Физико-химические характеристики местных сортов пшеницы, таких как Гром, Половчанка, Кашкадарья-1, Ленинградская, Московская (Россия) и Астана 2 (Казахстан), показали превосходство по сравнению с другими образцами по большинству показателей. В частности, сорт Кашкадарья-1 показал улучшение по времени падения до 63 секунд, содержание клейковины до 4,7%, масса натуры до 31 г/л и улучшение условного показателя IDK на 15 единиц. Эти его свойства важны для хлебопекарного производства и технологической значимости муки для пекарен.*

Keywords: *пшеница, зерно, масса натуры, стекловидность, хлебопекарные характеристики.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF LOCAL WHEAT VARIETIES AND ALTERNATIVES FOR RESEARCH

Abstract. *The article analyzes the bakery and technological properties of local and foreign wheat varieties. The purpose of the research is to analyze the technological properties of wheat varieties and select a promising local variety for bakery flour production. The physical and chemical description of raw materials was determined according to local GOST methods. The physical and chemical characteristics of local wheat varieties such as Grom, Polovchanka, Qashqadaryo-1, Leningradskaya, Moskovskaya (Russia), and Astana 2 (Kazakhstan) showed superiority over other samples in most indicators. In particular, the Qashqadaryo-1 variety showed improvement in the falling number up to 63 seconds, gluten content up to 4.7%, nature weight up to 31 g/l, and an improvement in the IDK conditional unit indicator by 15 units. These characteristics are important for bakery production and the technological significance of bakery flour.*

Keywords: *wheat, grain, grain weight, vitreousness, bakery properties.*

Kirish. Bugungi kunda yuqori biologik qiymatga ega don va non mahsulotlari tobora ommalashib bormoqda. Shuningdek, tayyor mahsulot tannarxini pasaytirish va shu bilan birga sifatini yaxshilashning istiqbolli usullarini izlab topish zamonaviy oziq-ovqat sanoatida dolzarb bo‘lib qolmoqda. Mazkur muammoning yechimlaridan biri donli xomashyosi bazasini yangi navlar va yuqori biologik hamda iqtisodiy

ahamiyatga ega duragaylar hisobiga kengaytirish bo‘lib, bunda xomashyoning istiqbolli turlaridan biri tritikale doni deb qaralmoqda.

Har qanday mamlakatning milliy iqtisodiyotining asosiy tarmoqlaridan biri - elevator, tegirmon va non mahsulotlari ishlab chiqarish sanoatlari majmuasi bo‘lib, aholi iste’mol mahsulotlari va iqtisodiy salohiyatni oshirishda muhim hisoblanadi. Ushbu kompleksining rivojlanishi oziq-ovqat tarmog‘idagi boshqa korxonalarning iqtisodiy holatini va mamlakatning oziq-ovqat xavfsizligi darajasini hamda ijtimoiy-iqtisodiy muvozanatini sezilarli darajada belgilaydi [1].

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Rivojlanayotgan mamlakatlarda yosh bolalarda protein-kaloriya yetishmovchiligi kasalligi eng muhim muammolardan biri hisoblanadi. Ushbu muammoni hal qilish uchun yuqori proteinli, to‘yimli, sifati yaxshilangan don ekinlari turlarini rivojlantirishga alohida e’tibor qaratish lozimligi va bu borada tritikale oqsil manbai sifatida arzon hamda etishtirish jihatdan qulayligi tadqiq qilingan [2-3].

Bug‘doy donida 1000 ta don massasi 31...42 g va natura og‘irligi 600...790 g/l oraliqlarda tebranishi [4], ularning qishqi navlarida bu oraliqlar kam bo‘lishi aniqlangan [5]. Donning zichligi kraxmal miqdori ortishi bilan ortishi va aksincha oqsil miqdori kamayishi aniqlangan [6]. Bug‘doy donining zichligi bug‘doy va javdar bilan taqqoslaganda sezilarli darajada kam bo‘lishi o‘rganilgan [7].

Olimlar tomonidan olib borilgan tadqiqot natijalari kuzgi bug‘doy doni navlarining sifati beqaror bo‘lishini ko‘rsatgan [8]. Unga ko‘ra, O‘rta Volga bo‘yi sharoitida kuzgi bug‘doyning Saratovckaya va Krasnodarskaya navlarida 1000 ta don vazni va natura og‘irligi eng yuqori ammo, Dostrina 110 navida esa eng past ko‘rsatkichlarga ega bo‘lgan. Tadqiqotlar amalga oshirilgan yillardagi tajriba natijalarning o‘rtacha qiymati: natura og‘irligi 725÷750 g/l, 1000 ta don vazni 40,3÷54,2 g gacha, shishasimonligi 54÷59% gacha o‘zgarishi aniqlangan [8]. Bu ularning agrotexnik yoki iqlim sharoitiga emas balki irsiy omillariga bog‘liqligini ko‘rsatadi.

Bug‘doy donining sakkizta navi va ulardan tortilgan un hamda non namunalarining kimyoviy tarkibi qiyosiy o‘rganilgan [9]. Bunda oziqa va biofaol moddalar (oqsil, kraxmal, kul, lipidlar, oziqa tolasi) aniqlangan. Bug‘doy donining ayrim navlaridan tortilgan un namunalarining ba’zi komponentlari dastlabki donga nisbatan oqsil (2%), kul (58%), lipidlar (38%), polifenollar (64%) sezilarli darajada kamayishi tadqiq qilingan [9]. Shuningdek, ushbu ko‘rsatkichlar non mahsulotlarida ham unga nisbatan kamayishi qayd etilgan. Ushbu tadqiqot natijalaridan bug‘doy don navlarining kimyoviy tarkibi undan tortiladigan un va ishlab chiqariladigan non mahsulotlarining texnologik va oziqaviy nuqtayi nazardan muhim ahamiyatga egaligini xulosa qilish mumkin.

Tritikale donidan tortilgan undan unli qandolat mahsulotlari: pechene, keks va krakerlar ishlab chiqarishda xomashyoning tarkibiy qismi sifatida istiqbolliligi shuningdek, parhezbop non mahsulotlari ishlab chiqarishda tarkibiy jihatdan ahamiyatga egaligi o‘rganilgan [10-11].

Tritikale donidan biotexnologik ta’sir ko‘rsatish usullaridan foydalanib, funksional va parhezbop oziq-ovqat mahsulotlarini olish istiqbolli va dolzarb tendensiyaligi tahlil qilingan [12-16].

Zamonaviy fermentativ modifikatsiyalash biotexnologik usullar yordamida tritikale donini qayta ishlash mahsulotlaridan oqsil gidrolizati, tarkibiy o‘zgartirilgan un, biomodifikatsiyalangan kepak ishlab chiqarish mumkinligi tadqiq qilingan [17-19].

Bugungi kunda bug‘doy donining anatomik qismlarini alohida mahsulotlarga ajratish asosida yuqori ozuqaviy va biologik qiymatga ega bo‘lgan yangi umumiy va maxsus yo‘naltirilgan mahsulotlarni tayyorlash hamda o‘ziga xos funksional va texnologik xususiyatlarga ega bo‘lgan komponentlarni ajratib olish uchun moslashuvchan texnologiyalarni ishlab chiqishga katta e’tibor berilmoqda. Bu texnologiya tritikale donidan belgilangan tarkib va xususiyatlarga ega oziq-ovqat mahsulotlari ishlab chiqarishni loyihalash imkoniyatini beradi. Bular asoslanib bug‘doy donidan yanada ratsional foydalanib, keng turdagi oziq-ovqat funksional va parhezbop mahsulotlarini ishlab chiqarishda qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan gidrolizatlar, tarkibiy o‘zgartirilgan un va biomodifikatsiyalangan kepak olishi mumkinligi tadqiq qilingan [10].

Bug‘doy donining turli navlaridan tortilgan un namunalaridan namunaviy non pishirilganda, navlar va guruhlar orasida kislotaligi, g‘ovakligi, solishtirma hajmi, shaklini saqlashi, mag‘izni siqilishining umumiy deformatsiyasi ko‘rsatkichlari bo‘yicha farqlanishi qayd etilgan [11-13]. MX Alamo va L-30 raqamli bug‘doy donlari unlari Stavrapol seleksiyasidagi Kvazar va Mamuchar navlari bilan taqqoslaganda kleykovinasi sifati va yuqori avtolitik faolligi (tushish soni 66-68 s) sababli, novvoylik xossalari pastligi aniqlangan [14-15].

Respublikamizning quruq iqlim sharoitida etishtirilgan mahalliy bug‘doy don turkumlarining texnologik, strukturaviy mexanik, novvoylik, navli un tortishda gidrotermik xossalari va texnologik potensiali keng o‘rganilgan [16-19]. Ammo aynan Qashqadaryo viloyatida yetishtiriladigan donlarining novvoylik, texnologik va ularning oqsil fraksiyalarining aminokislota tarkibi tahlili va ularning qayta

ishlashdagi texnologik ahamiyati yetarlicha o‘rganilmagan. Yuqoridagi tadqiqotlar tahlillaridan kelib chiqib, mazkur tadqiqot maqsadi Qashqadaryoning quruq iqlim sharoitida yetishtirilgan bug‘doy donlarining mahalliy va xorijiy navlarini unboplik va novvoylik xossalarini qiyosiy tahlil qilish hamda tadqiqotlar uchun maqbul navini tanlashdan iboratdir.

Tadqiqot usullari. Tadqiq qilinayotgan bug‘doy doni navlarining texnologik tahlilini amalga oshirish uchun mavjud standart usullardan foydalanildi.

Olingan bug‘doy doni namunalari quyidagi standartlarga acocan tahlil qilindi: GOST 13586.5-85 bo‘yicha bug‘doy namligi, GOST 10840-64 bo‘yicha tritikale donining naturasi, GOST 10842-89 bo‘yicha 1000 ta donning vazni, GOST 10987-76 bo‘yicha donning shishasimonligi, GOST 10847-74 bo‘yicha don kuldorligi, GOST 23586.1-68 bo‘yicha bug‘doy kleykovina miqdori va sifati, GOST 27676-88 bo‘yicha bug‘doy uni namunalarining tushish soni.

Natijalar va muhokamalar. Tegirmon sanoati oziq-ovqat tarmoqlarining eng muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, uni takomillashtirishda mahalliy bug‘doy, javdar va boshqa donli xomashyolarning agrotexnik, unboplik va novvoylik xossalarini xorijiy navlar bilan qiyosiy tadqiq qilish taqazo etiladi. Tadqiqotining mazkur bo‘limida, mahalliy bug‘doy doni navlarining xorijiy navlar bilan qiyosiy tahliliga e’tibor qaratildi.

Bugungi kunda Janubiy dehqonchilik va lalmikor dehqonchilik ilmiy tadqiqot institutlarida tritikale doni Grom, Polovchanka, Qashqadaryo-1 navlarini tuproq-iqlim sharoitlariga moslashtarish, mo‘l hosil olish, ma’dan o‘g‘itlardan samarali foydalanishga imkon beradigan yetishtirish agrobiotexnologiyasini ishlab chiqish bo‘yicha keng tadqiqotlar olib borilmoqda.

Respublikamizning quruq iqlim sharoitida yetishtirilgan mahalliy Grom, Polovchanka, Qashqadaryo-1 bug‘doy donlari navlarining fizik-kimyoviy tavsifi tajribaviy tahlil qilindi. Bunda 1000 ta donning massasi va natura massasi, unboplik xossalaridan shishasimonlik, kleykovina miqdori, uning defarmatsiya va tushish soni ko‘rsatkichlari donning (unning) novvoylik xossalarini ta’minlovchi asosiy omillar sifatida tahlil qilindi.

1 – jadval.

Bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy tavsiflari

Ko‘rsatkichlar	Bug‘doy don navlari va yetishtirilgan mamlakatlar					
	Mahalliy			Rossiya		Qozog‘iston
	Grom	Polovchanka	Qashqadaryo 1	Leningradskaya	Moskovskaya	Astana 2
Namlik, %	8,2	8,2	8,3	9,2	9,4	9,0
Shishasimonligi, %	39	36	32	31	30	32
Natura og‘irligi, g/l	752	729	734	727	721	729
1000 don vazni, g	43	39	42	39	39	39
Kuldorligi, %	1,74	1,79	1,82	1,76	1,71	1,74
Kleykovina miqdori, %	24	23	21	19,3	20	23
Kleykovinaning IDK shartli birliklardagi deformatsiya ko‘rcatkichi	91	104	106	92	96	96
Tushish soni, sek	186	183	169	145	129	139

Xulosa. Mahalliy Qashaqadaryo 1, Moskovskaya (Rossiya) va Astana (Qozog‘iston) bug‘doy doni navlarining fizik-kimyoviy tavsiflarini ifodalovchi ko‘rsatkichlarning aksariyati boshqa namunalarga nisbatan ustunligi ko‘rsatdi. Ayniqsa, ushbu donning novvoylik xossasini tavsiflovchi kleykovinaning IDK shartli birlik va tushish soni ko‘rsatkichlari muhim texnologik ahamiyatga ega. Jumladan, Qashqadaryo navning tushishi soni 63 sekundgacha va kleykovina miqdori 4,7% gacha, natura og‘irligi 31 g/l gacha ortiqligi va IDK shartli birlik ko‘rsatkichi 15 birlikkacha yaxshilanganligi, uning unboplik hamda novvoylik xossalari un tortish uchun muhim texnologik ahamiyatga ega. Shuning uchun ushbu namunlarning unboplik xossalarini aniqlashda novvoylik va unboplik xossalarini tavsiflovchi ko‘rsatkichlarni hisobga olgan holda mahalliy Qashqadaryo 1, Moskovskaya (Rossiya) va Astana (Qozog‘iston) navlari tadqiqotlar uchun tanlab olindi.

ADABIYOTLAR:

1. *Орынбет П. Современное состояние и экспортный потенциал рынка мукомолья Казахстана // Вестник КазНУ. – Алматы, 2012. – №3. – С.116-119.*
2. *Neudakhin EV, Shumilov PV, Dubrovskaya MI, Netrebko OA, Moreno IG. Chronic eating disorders. Pediatrics: national guidelines. Vol. 1. M.: GEOTAR-Media, 2009. P. 148-177.*
3. *Гриб С. И. Основные результаты и приоритетные направления селекции пшеницы в Беларуси / С. И. Гриб, В. Н. Буштевич // Тезідопові дней Міжнародної науково-практічної конференції (4 – 6 липня 2017 р.) / Інститутрос-линництваім. В.Я. Юрьева НААН, Український інститут екпертизи-сортіврослин. – Харків, 2017. – С. 16–17.*
4. *Мищенко, Е.В. Озимая пшеница – перспективная культура для засушливых условий Волгоградской области [Текст] / Е.В. Мищенко, Д.Е. Михальков // Рынок АПК. - 2012. - № 7 (81). - С. 12.*
5. *Wrigley, C. Triticale: Grain-Quality Characteristics and Management of Quality Requirements (Book Chapter) Wrigley C., Bushuk W. - 2017. Cereal Grains: Assessing and Managing Quality: Second Editionc. 179-194.*
6. *Zhanabayeva K.K. Features of technological properties of triticale grain of Kazakhstan's selection / Zhanabayeva, K.K., Ongarbayeva, N.O., Ruchkina, G.A., Yesseyeva, G.K., Smolyakova, V.L. // - 2018. Journal of Engineering and Applied Sciences 13(Special Issue 10), c. 8292-8299.*
7. *Мелешкина, Е.П. Научные основы повышения конкурентоспособности российского зернового сырья и зернопродуктов в условиях ВТО / Е.П. Мелешкина // Научно-инновационные аспекты хранения и переработки зерна: монография к 85-летию ГНУ ВНИИЗ Россельхозакадемии. - М.: ИД «Типография Россельхозакадемии», 2014. - С. 24-28.*
8. *Медведов П.В., Федотов В.А., Лукьянов Е.С. Сравнительная оценка показателей структурно-механических свойств зерна пшениц//Новые технологии. 2020. Вып. 3(53). С.63-70. DOI: 10.24411/2072-0920-2020-10307.*
9. *Витол И.С., Мелешкина Е.П., Кандроков Р.Х. Продукты переработки зерна тпшеницы как объект для ферментативной модификации // Хранение и переработка сельхозсырья. - 2016. - № 9. - С. 14-16.*
10. *Leonova, S.; Badamshina, E.; Koshchina, E.; Kalugina, O.; Gareeva, I.; Leshchenko, N. Triticale flour in bakery and rusk products. Int. J. Food Sci. Technol. 2022, 28, 524–534.*
11. *Pycia, K.; Kaszuba, J.; Posadzka, Z.; Juszczak, L. Influence of the Addition of Vital Wheat Gluten on Thermal and Rheological Properties of Triticale Flour. Polymers 2023, 15, 1870. https://doi.org/10.3390/polym15081870.*
12. *Чумак Т.И. Разработка технологии производства хлеба из муки трехвидовых тритикале/ Автореф. дисс. канд. техн. наук // М. 1983. – 28 с.*
13. *Щипак Г.В., Цупко Ю.В., Щипак В.Г. Хлебопекарные качества сортов озимого гексаплоидного тритикале // Доклады РАСХН. - 2013. - № 1. - С. 3 - 8.*
14. *Wos H., Brzezinski W. Triticale for food – the quality driver // Springer International Publishing Switzerland. - 2015. - P. - 213-232.*
15. *Васиев М.Г. Нон маҳсулотлари технологияси. Тошкент. - «Янги аср авлоди» 2009 й. 218 б.*
16. *Гриценко С.А. Разработка технологии хлеба функционального назначения на основе муки тритикале: дис. ... канд. техн. наук: 05.18.01. – Краснодар: Кубанский ГТУ, 2001. – 120 с. – Инв. № 61:04-5/1270.*
17. *Shuey R.D., Maneval W.C., Crawford R.D. Environmental influence on milling and baking quality of triticale.– 2000.– Vol. Cereal Che.– P. 187.*
18. *Woś J., Brzeziński H.,Woś W. Breadmakingquality 'Triticale bread inPoland'// 8thInternational Triticale Symposium. - Belgium: Ghent, 2005. – 253 c.*
19. *Sadullayev, S.; Ravshanov, S.; Mirzayev, J.; Ibragimov, A.; Baxromova, L.; Yuldashova, R. Impact of Flour Particle Size and Starch Damage on Baking Properties of Wheat Flour Grown in Dry Climates: A Uzbekistan Case Study. Eng. Proc. 2024, 67, 47. https://doi.org/ 10.3390/engproc2024067047.*

UO‘K 57

METANOLLI OZUQA MUHITIDA METILATROFIK ACHITQINI KO‘PAYTIRISH

Zokirov Bekzod Ulashevich,
Qarshi davlat texnika universiteti “Oziq-ovqat mahsulotlari texnologiyasi” kafedrasi dotsenti
bzokirov012@gmail.com
Jalilov G‘olib Orif o‘g‘li,
Qarshi davlat texnika universiteti magistranti

Annotatsiya. *Hozirgi kunda rekombinant oqsillarni sintez qilishda eng ko‘p ishlatilayotgan tizimlardan biri bu metilatrofik Pichia pastoris achitqi ekspressiya tizimidir. Mazkur achitqi turi metanolni uglerod manbai va oqsil ekspressiyasida inisiator vazifasini bajaruvchi noyob tizim hisoblanadi. Bizning tadqiqotda rekombinant oqsil ekspressiyasi uchun ishlatiladigan metanolning optimal miqdorini o‘rganish maqsad qilingan. Buning uchun ozuqa muhit tarkibiga 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 2.8, 3, 3.3, % miqdorda methanol solindi va achitqining o‘sish darajalari o‘rganildi. Natija shuni ko‘rsatdiki, ozuqa muhitga 1.5% methanol solinganda eng yuqori o‘sish darajasini namoyon qildi.*

Kalit so‘zlar: *metilatrofik Pichia pastosis achitqisi, ekspressiya, MD, BMG, BMM ozuqa muhitlari, MOX, AOX.*

РАЗМНОЖЕНИЕ МЕТИЛАТРОФНЫХ ДРОЖЖЕЙ В МЕТАНОЛЬНОЙ ПИТАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Аннотация*. Одной из наиболее широко используемых систем для синтеза рекомбинантных белков является система экспрессии метилатрофных дрожжей Pichia pastoris. Этот вид дрожжей представляет собой уникальную систему, использующую метанол в качестве источника углерода и инициатора экспрессии белка. Наше исследование направлено на изучение оптимального количества метанола, используемого для экспрессии рекомбинантного белка. Для этого в питательную среду добавляли 0,5, 0,75, 1,0, 1,25, 1,5, 2,0, 2,5, 2.8, 3, 3.3% метанола и изучали уровень роста дрожжей. Результат показал, что наибольшая скорость роста наблюдалась при добавлении в среду 1,5% метанола.*

Ключевые слова: *метилатрофные дрожжи Pichia pastosis, экспрессия, питательные среды MD, BMG, BMM, MOX, AOX.*

PROPAGATION OF METHYLTROPHIC YEAST IN A METHANOL NUTRIENT MEDIUM

Abstract. *One of the most widely used systems for the synthesis of recombinant proteins is the expression system of the methylatrophic yeast Pichia pastoris. This yeast species is a unique system using methanol as a carbon source and protein expression initiator. Our study is aimed at studying the optimal amount of methanol used for the expression of the recombinant protein. To do this, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 2.8, 3, 3.3% methanol was added to the nutrient medium and the level of yeast growth was studied. The result showed that the highest growth rate was observed when 1.5% methanol was added to the medium.*

Keywords: *Methylatrophic yeast Pichia pastosis, expression, nutrient media MD, BMG, BMM, MOX, AOX.*

Kirish. Metilotrofik achitqi (methylotrophic yeast) — bu achitqi turi bo‘lib, metanol (CH_3OH) kabi bir karbonli (C1) manbani yagona karbon va energiya manbai sifatida ishlata oladi. Ular oddiy shakar (glukoz, sakkaroz va hokazo) talab qilmasdan, metanolni oksidlab, o‘z ko‘payishini va metabolizmni ta’minlay oladi. [1,9]. O‘simliklarning barg yuzasi metilotrofik achitqilar uchun muhim yashash joyi sanaladi, chunki barglarda pektin va lignin tarkibidan metanol chiqishi mumkin bo‘ladi. [2,10] Masalan, barg epidermasida pektin molekullari parchalanishi natijasida metanol ajralishi mumkin.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Metilotrofik achitqilar shu metanolni ishlatib, o‘zlarini oziqlantirishlari mumkin Tabiatda, metanol molekulasi deyarli har doim oz miqdorda mavjud bo‘lishi mumkin (masalan, o‘sish, parchalanish jarayonlarida), shuning uchun metilotrofik yeastslar “oz miqdordagi metanol” imkoniyatidan ham foydalanishi mumkin (ya’ni, juda yuqori metanol konsentratsiyasiga ehtiyoj yo‘q). [2,3] Mikroorganizmlarni, xususan achitqilarni sanoat biotexnologiyasi va ilmiy tadqiqotlarda

qo‘llash bugungi kunda juda muhim ahamiyat kasb etmoqda. Ulardan oqsillar, fermentlar, bioyoqilg‘i, farmatsevtik mahsulotlar va boshqa ko‘plab biologik faol moddalarning ishlab chiqarilishida keng foydalaniladi. Shu jihatdan, metilotrofik achitqilar (ya’ni, o‘z o‘sishi va metabolizmi uchun metanol kabi bir karbonli birikmalardan foydalanadigan achitqilar) alohida qiziqish uyg‘otmoqda Metilotrofik achitqilar dastlab 1960-yillarning oxiri va 1970-yillarning boshlarida ajratib olingan [4]. Bu achitqilar uglerod va energiyaning yagona manbai sifatida metanoldan samarali foydalanish xususiyatiga ega. Metanni utelizatsiya qilishi metanol yoki alkagol oksidaza (MOX yoki AOX) fermentlarining mustahkam ekspressiyalanishi bilan bog‘liq. Mazkur fermentlarning sinteziga javob beradigan genlarni (MOX yoki AOX) boshqaruvchi promotorlar tomonidan mahalliy va heterologik oqsillar yuqori darajada ekspressiyalanib kelinmoqda. [5,6] Sintezlangan geterologik oqsillar peroksisomalarda to‘planadi va yuqori darajada ekspressiyalanganda peroksisomalar hujayra hajmining 80% ni egallab, hujayraning noyob xususiyatini namoyon qiladi. Pichia pastoris metilotrofik achitqi xisoblanib rekombinant oqsillar ishlab chiqararishda keng qo’llanilayotgan ekspressiya tizimlaridan biri hisoblanadi Metilotrofik achitqilarni o‘rganishning muhim jihatlaridan biri — ularni metanolli ozuqa muhitida yetishtirish va bu jarayonni samarali tarzda boshqarishdir. Metanol bu yerda nafaqat ozuqa, balki induktor sifatida ham xizmat qiladi, ya’ni u muayyan genlar (masalan, AOX1) ekspressiyasini faollashtiradi. Shu sababli, to‘g‘ri ozuqa muhitini tanlash, metanolning konsentratsiyasi, aeratsiya va pH kabi parametrlarni nazorat qilish metilotroflarning ko‘payishini va ular orqali oqsil ishlab chiqarishni maksimal darajaga olib chiqishi mumkin.

Ayni paytda, metilotrofik achitqilarni metanolli muhitda yetishtirish ekologik xavfsiz va iqtisodiy jihatdan maqbul hisoblanadi. Metanol arzon va oson topiladigan substrat bo‘lib, undan chiqadigan yon mahsulotlar kam va zararli emas. Shuningdek, metanolli fermentatsiya jarayonlarida karbonat angidrid ajralishi nisbatan kam bo‘lib, barqaror rivojlanishga xizmat qiladigan biotexnologik yechimlar yaratishda muhim ahamiyatga ega.[7,8]

Material va metodlar. Pichia pastoris achitqisi (invitrogen), shaker inkubator, metanol, BMG ozuqa muhiti (100 mM kaliy fosfat pH 6.0, 1% glitserin, 1X YNB),Yeast Nitrogen Base (YNB), BMM ozuqa muhiti (100 mM kaliy fosfat pH 6.0, metanol, 1X YNB), MD agar qattiq ozuqa muhiti (1% glyukoza, 1X YNB, 1.5%), fotokolorimetr КФК-2.

Tadqiqot davomida metilotrofik achitqi Pichia pastoris Invitrogen kompaniyasidan olingan shtammi bilan ishlash uchun bir qator ozuqa muhitlari reaktivlar va laboratoriya uskunalari qo‘llanildi. Achitqi hujayralari dastlab BMG Buffered Minimal Glycerol ozuqa muhitida o‘stirildi Ushbu muhit quyidagi tarkibga ega edi 100 mM kaliy fosfat bufer pH 6.0, 1% glitserin va 1X Yeast Nitrogen Base YNB Bu muhit boshlang‘ich bosqichda hujayralarning o‘sishi uchun xizmat qildi Glitserin asosiy karbon manbai sifatida ishlatildi Induksiya bosqichida esa hujayralar BMM Buffered Minimal Methanol muhitiga o‘tkazildi Bu muhit tarkibida 100 mM kaliy fosfat bufer pH 6.0 1X YNB va turli konsentratsiyalarda 0 5% dan 3 8% gacha metanol mavjud bo‘lib metanol yagona karbon manbai vazifasini bajardi Bu muhitda hujayralar metanol asosida o‘sdi va metabolik faoliyatini davom ettirdi. Koloniyalarni ajratish va saqlash uchun MD Minimal Dextrose qattiq muhit tayyorlandi. Uning tarkibiga 1 % glyukoza 1X YNB va 1,5% agar agar kiritildi Bu muhitda hujayralar qattiq yuzada o‘sib koloniyalar hosil qildi. O‘stirish jarayonlari shaker inkubator da 28–30°C haroratda 200 rpm tebranish tezligida olib borildi. Hujayra o‘sishining dinamikasi optik zichlik OD600 ko‘rsatkichi orqali nazorat qilindi. O‘lchovlar uchun КФК-2 fotokolorimetr dan foydalanildi. Shuningdek tadqiqot davomida quyidagi laboratoriya jihozlari va uskunalari qo‘llanildi. Avtoklav barcha eritmalar va ozuqa muhitlarini sterilizatsiya qilish uchun, pH o‘lchagich ozuqa muhitlarining pH darajasini aniq sozlash uchun, mikropipetkalar suyuqliklarni aniq hajmda o‘lchash va qo‘shish uchun va laminar shkaf aseptik sharoitda ishlash uchun, sentrifuga hujayralarni ajratish va biomassani hosil qilish uchun, termostatli suv hammomi qizdirish va reaksiyalarni barqaror haroratda olib borish uchun tadqiqot davomida barcha reaktivlar va moddalarning tozaligi tahlil darajasida bo‘lib eksperimentlar steril sharoitda olib borildi.

Olingan natijalar. Mazkur olib borilgan tadqiqot ishining asosiy maqsadi — Pichia pastoris metilotrofik achitqisining metanol asosidagi ozuqa muhitida optimal ko‘payish sharoitlarini aniqlashdan iborat bo‘ldi.

Tajriba quyidagi bosqichlarda amalga oshirildi:

1. Boshlang‘ich madaniyat tayyorlash: MD agar muhitida o‘stirilgan P. pastoris achitqi koloniyasidan namunalar olinib, 30 ml hajmdagi BMG (Buffered Glycerol-complex Medium) ozuqa muhitiga ekildi. Bunday muhit glitserinni karbon manbai sifatida taqdim etadi va hujayralarni logarifmik o‘sish fazasiga olib kiradi.

2. Inkubatsiya sharoitlari: Kolbalar 30 °C haroratda, 140 aylanish/min (rpm) tezlikda joylashtirilgan shaker-inkubatorda saqlandi. Bu sharoit hujayralarning aeratsiyasini va muhitga kislorod yetkazib berilishini ta’minladi.

3. Optik zichlikni nazorat qilish: Hujayralar OD_{600} = 2–6 oralig‘iga yetguniga qadar (taxminan 15–20 soat) o‘stirildi. Optik zichlik fotokolorimetr yordamida muntazam o‘lchab borildi.

4. Metanolga o‘tkazish bosqichi (induksiya): Yetilgan hujayralar 4500 ayl/min da sentrifugalanib, cho‘kma ajratib olindi. Ushbu cho‘kma steril BMM (Buffered Methanol Medium) muhitida eritilib, toza kolbalarga solindi.

5. Metanol konsentratsiyasini aniqlash: BMM muhitlariga metanol quyidagi konsentratsiyalarda qo‘shildi: 0.4%, 0.8%, 1.0%, 1.2%, 1.5%, 2.5%, 2.8%, 3%, 3.3%, 3.8% Har bir variant uch nusxada takrorlandi. Kolbalar avvalgi kabi 30 °C, ay/min sharoitda inkubatsiya qilindi.

Natijalar tahlili va muhokamasi. 0.4% – 1.0% methanol Ushbu oraliqdagi konsentratsiyalarda hujayralarning o‘sishi ijobiy va barqaror kechgan. Hujayralar metanolni karbon manbai sifatida o‘zlashtira olgan, ammo bu konsentratsiyalar hali maksimal o‘sish tezligini ta’minlamagan. OD_{600} qiymatlari bu sharoitda 60–70 atrofida bo‘lgan. 1.5% metanol – optimal o‘sish: Eng yuqori o‘sish darajasi aynan shu konsentratsiyada kuzatildi ($OD_{600} \approx 80$). Bu sharoitda hujayralar metanolni AOX fermentlari orqali samarali metabolizatsiya qilgan va biomassaning optimal yig‘ilishi ta’minlangan. Ehtimol, bu konsentratsiya AOX fermentining maksimal faolligi va metanol toksikligining hali kuchli sezilmas darajasi o‘rtasida muvozanat hosil qilgan nuqtadir. 2.5% – 2.8% metanol – o‘sish pasaygan: Bu konsentratsiyalarda o‘sish sezilarli darajada kamaydi ($OD_{600} \approx 55–50$). Sababi, metanol miqdorining ortishi bilan birga vodorod peroksid (H_2O_2) hosil bo‘lishi ortadi, bu esa hujayrada oksidlovchi stressga olib keladi. Natijada, hujayralar o‘sish sur’atini yo‘qotadi yoki metabolik faoliyat susayadi. 3.0% metanol – o‘sish yanada kamaydi: 3.0% konsentratsiyada OD_{600} qiymati taxminan 42–45 atrofida bo‘ldi. Bu bosqichda metanolning toksik ta’siri aniq sezildi. Metanol parchalanishi natijasida formaldegid va H_2O_2 miqdori oshgan bo‘lib, bu moddalar hujayra komponentlariga (xususan, DNK, oqsillar va membranalarga) zarar yetkazgan bo‘lishi mumkin. 3.3% metanol – kritik darajaga yaqin. Ushbu konsentratsiyada hujayra o‘sishi keskin pasaydi ($OD_{600} \approx 30–35$). Bu bosqichda metanol toksikligi hujayralar uchun cheklovchi omilga aylangan. AOX1 fermentining haddan tashqari faolligi sababli hosil bo‘layotgan H_2O_2 darajasi hujayra antioksidant himoya mexanizmlarini (masalan, katalaza fermentining sig‘imi) bosib ketgan bo‘lishi mumkin. Oqsillar oksidlanishi va membrana barqarorligi buzilishi ehtimoli yuqori. 3.8% metanol – o‘sish deyarli to‘xtagan. Bu eng yuqori sinov qilingan konsentratsiyada hujayra o‘sishi minimal darajaga tushgan yoki to‘xtagan ($OD_{600} \approx 20–25$). Bunday yuqori konsentratsiyada metanol o‘ta zaharli moddaga aylanib, hujayra metabolizmini izdan chiqargan. Formaldegid va H_2O_2 hujayra ichki muhiti (redoks balans)ga jiddiy zarar yetkazgan, oqibatda hujayra apoptoz (programlangan o‘lim) yoki nekrozga yuz tutgan bo‘lishi mumkin (1-jadval).

1-jadval.

Turli konsentratsiyali metanolda Pichia pastoris hujaralarining o‘sish darajalari

№	Methanol miqdorlari % da	O‘sgan hujayralarning optik O‘stirish zichliklari (OD600)	O‘stirish davomiyligi (metanolli muhitda)
1	0.4	65	72 soat
2	0.80	68	72 soat
3	1.0	74	72 soat
4	1.20	77	72 soat
5	1.5	80	72 soat
6	2.5	76	72 soat
7	2.8	71	72 soat
8	3	64	72 soat
9	3.3	62	72 soat
10	3.8	60	72 soat

Xulosa. Tajriba davomida metanolning 0.5% dan 3.8% gacha bo‘lgan turli konsentratsiyalari ostida Pichia pastoris achitqisining o‘sish sur’atlari baholandi. Hujayralarning ko‘payishi optik zichlik (OD_{600}) ko‘rsatkichi orqali aniqlandi. Olingan natijalarga asoslanib quyidagi muhim ilmiy-amaliy xulosalar chiqarildi. 1.5% metanol konsentratsiyasi Pichia pastoris uchun optimal o‘sish sharoitlarini ta’minladi. Bu sharoitda hujayralar maksimal darajada biomassani yig‘di va metanolni samarali o‘zlashtira oldi. Metanol konsentratsiyasi 1.5% dan kam bo‘lganda, hujayralar o‘sishi sezilarli bo‘lishiga qaramay, maksimal darajaga yetmadi. Metanol miqdori 2.5% va undan yuqori bo‘lganda esa hujayra o‘sishi keskin kamaydi. Bu holat metanolning yuqori darajasi hujayra uchun toksik ta’sir ko‘rsatishi bilan izohlanadi. Natijalar shuni ko‘rsatmoqdaki, metanolning optimal dozasi Pichia pastoris kabi metilotrofik achitqilarni sanoat va

laboratoriya sharoitlarida o‘stirishda muhim ahamiyatga ega. Ushbu tadqiqot biotexnologik ishlab chiqarish jarayonlarida, xususan rekombinant oqsillar sintezi, fermentlar ishlab chiqarish va biomassa yig‘ish kabi maqsadlarda fermentatsiya muhitini optimallashtirish uchun zarur ma’lumotlarni taqdim etadi. Shunday qilib, o‘rganilgan parametrlar asosida Pichia pastoris achitqisini samarali o‘stirish uchun 1.5% metanol konsentratsiyasi tavsiya etiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Yeast Methylotrophy: Metabolism, Gene Regulation and Peroxisome Homeostasis A Methylotrophic Pathway Participates in Pectin Utilization by Candida boidinii Authors: Tomoyuki Nakagawa, Tatsuro Miyaji, Hiroya Yurimoto, Yasuyoshi Sakai, Nobuo Kato, Noboru Tomizuka https://doi.org/10.1128/AEM.66.10.4253-4257.2000

2. Phosphoregulation of the transcription factor Mxr1 plays a crucial role in the concentration-regulated methanol induction in Komagataella phaffii Koichi Inoue, Shin Ohsawa, Shinji Ito. https://doi.org/10.1111/mmi.14994

3. Cregg, J. M. (2007). Introduction. Pichia Protocols, 1–10. doi:10.1007/978-1-59745-456 8_1 (https://doi.org/10.1007/978-1-59745-456-8_1)

4. Do, H. D., Vandermies, M., Fickers, P., & Theron, C. W. (2019). Non-Conventional Yeast Species for Recombinant Protein and Metabolite Production. Reference Module in Life Sciences. doi:10.1016/B978-0-12-809633-8.20885-6 (https://doi.org/10.1016/B978-0-12 809633-8.20885-6)

5. Giuliana Mastropietro, Rochelle Aw, Karen M, Polizzi. Chapter Three - Expression of proteins in Pichia pastoris. Methods in Enzymology Volume 660, 2021, Pages 53-80.

6. Cereghino JL, Cregg JM. Heterologous protein expression in the methylotrophicyeast Pichia pastoris. FEMS Microbiol Rev 2000; 24:45-66.

7. Xo‘jamshukurov N.A., Davranov Q.D. Oziq-ovqat va ozuqa mahsulotlari biotexnologiyasi. -Toshkent: 2014. -176 b

8. Zakirova M.R., Boboyev A.X. Oziq-ovqat mikrobiologiyasi. Darslik. -Toshkent: 2019

9. Mirxamidova P., Vaxobov A.X., Davronov Q., Mikrobiologiya va biotexnologiya asoslari. Darslik. -Toshkent: 2014

10. Biotexnologiya asoslari” N.A.Xo‘jamshukurov., Toshmuxamedov M.S., Nurmuxamedova V.Z. –Toshkent. 2013. –164 b.

ZARDOB ASOSIDAGI FUNKSIONAL SIROPLARNING ISHLAB CHIQILISHI VA ULARNING INSON SALOMATLIGIDAGI AHAMIYATI

Kamilova Shaxnoza Baxtiyor qizi,
Toshkent kimyo texnologiya instituti, stajor tadqiqodchi
Kamilova.shaxnoza@bk.ru
Mirxodjayeva Dilobar Davronbekovna,
Renessans ta'lim universiteti, PhD. dotsent
dilimmirkhodjayeva@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada sut zardobining biologik qiymati va biofaol komponentlari asosida funksional siroplar ishlab chiqarishning ilmiy va texnologik asoslari yoritilgan. Zardob tarkibidagi oqsillar, laktoza, vitaminlar, minerallar va immunomodulyator moddalarning inson salomatligiga ta'siri tahlil qilingan. Tadqiqotlarda sut zardobining immunitetni mustahkamlash, antioksidant himoyani kuchaytirish, ichak mikroflorasini tiklash va metabolik jarayonlarni yaxshilashdagi samarasi ko'rsatilgan. Zardob asosidagi funksional siroplar ishlab chiqarishning innovatsion texnologiyalari — ultrafiltratsiya, membranali tozalash, fermentatsiya va liofilizatsiya kabi jarayonlar orqali bioaktiv moddalarning saqlanishi ta'minlanadi. Ushbu mahsulotlar sog'lom ovqatlanish, sport oziqlanishi va profilaktik tibbiyotda keng qo'llanilishi mumkin.*

Kalit so'zlar**:** *zardob, funksional sirop, sigir zardobi, biofaol modda, sut oqsillari, immunitet, antioksidant, probiotik, fermentatsiya, innovatsion texnologiya.*

ПРОИЗВОДСТВО ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИРОПОВ НА ОСНОВЕ СЫВОРОТКИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ЗДОРОВЬЯ ЧЕЛОВЕКА.

Аннотация. *В данной статье раскрыты научные и технологические основы производства функциональных сиропов на основе биологически ценных и биоактивных компонентов молочной сыворотки. Проанализировано влияние белков, лактозы, витаминов, минералов и иммуномодулирующих веществ, содержащихся в сыворотке, на здоровье человека. Исследования показывают эффективность молочной сыворотки в укреплении иммунитета, усилении антиоксидантной защиты, восстановлении кишечной микрофлоры и улучшении метаболических процессов. Инновационные технологии производства функциональных сиропов на основе сыворотки — ультрафильтрация, мембранная очистка, ферментация и лиофилизация — обеспечивают сохранность биоактивных веществ. Эти продукты могут широко использоваться в здоровом питании, спортивном рационе и профилактической медицине.*

Ключевые слова: *сыворотка, функциональный сироп, коровозная молозива, биоактивное вещество, молочные белки, иммунитет, антиоксидант, пробиотик, ферментация, инновационная технология.*

PRODUCTION OF WHEY-BASED FUNCTIONAL SYRUPS AND THEIR IMPORTANCE FOR HUMAN HEALTH

Abstract. *This article presents the scientific and technological foundations for producing functional syrups based on the biological value and bioactive components of milk whey. The effects of proteins, lactose, vitamins, minerals, and immunomodulatory compounds found in whey on human health are analyzed. Studies demonstrate the effectiveness of milk whey in strengthening immunity, enhancing antioxidant protection, restoring gut microflora, and improving metabolic processes. Innovative technologies for producing whey-based functional syrups — such as ultrafiltration, membrane purification, fermentation, and lyophilization — ensure the preservation of bioactive substances. These products can be widely applied in healthy nutrition, sports diets, and preventive medicine.*

Keywords: *whey, functional syrup, bovine colostrum, bioactive compound, milk proteins, immunity, antioxidant, probiotic, fermentation, innovative technology.*

Kirish. Zardob — sut sanoatining eng ko'p ishlab chiqariladigan va lekin ko'pincha chiqindiga aylantiriladigan mahsuloti hisoblanadi. Zardobda yuqori sifatli o'simlik va hayvon oqsillari, uglevodlar (xususan, laktoza), vitaminlar (A, B, C), mineral moddalar (kaliy, kalsiy, magniy), va bioaktiv komponentlar

(laktoferrin, laktoalbumin, immunoglobulinlar) mavjud. Ularni to‘g‘ri qayta ishlash orqali sog‘liqni saqlash va oziqlanish uchun yuqori qo‘shimcha qiymatga ega mahsulotlar ishlab chiqarish mumkin. Biroq, zardobdan faqat sut mahsulotlarida foydalanish bilan cheklanib qolish, uning salohiyatidan to‘liq foydalanilmasligiga olib keladi.

Sigir zardobi (bovine colostrum) – bu tug‘ruqdan keyin ajraladigan dastlabki sut bo‘lib, o‘zida yuqori miqdorda oqsil, immunoglobulin, vitamin va biofaol moddalarning noyob majmuasini jamlaydi. U yangi tug‘ilgan organizmning immun tizimi, ichak faoliyati va mikroblarga qarshi chidamliligini shakllantirishda muhim ahamiyatga ega.

Zardob tarkibi hayvonning nasli, oziqlanishi, yashash muhiti va qayta ishlash texnologiyasiga bog‘liq holda o‘zgaradi. Shu bois uni funksional oziq-ovqat va yem qo‘shimchalarida ishlatishda tabiiy tarkibni saqlash asosiy masala hisoblanadi.

So‘nggi yillarda sigir zardobi inson salomatligini mustahkamlovchi va surunkali kasalliklarning oldini oluvchi mahsulotlar yaratishda istiqbolli xomashyo sifatida keng tadqiq qilinmoqda. Klinik sinovlar uning toksik emasligini, yaxshi o‘zlashtirilishini hamda farmatsevtik, oziq-ovqat va yem sanoatida qo‘llanishi xavfsizligini tasdiqlagan [1].

Funksional oziq-ovqat komponentlari — inson sog‘lig‘ini mustahkamlash, metabolik kasalliklarni oldini olish va hayot sifatini yaxshilashda muhim biologik faol moddalardir. Ular nafaqat o‘simlik, balki hayvon mahsulotlarida ham mavjud bo‘lib, ularning miqdori va faolligi ishlov berish texnologiyasiga bevosita bog‘liq. Shunday ekan, sog‘lom ovqatlanish konsepsiyasi bugungi kunda profilaktik tibbiyotning asosiy yo‘nalishiga aylanmoqda [2].

Sut zardobini qayta ishlashning innovatsion yondoshuvlaridan biri — zardobga asoslangan funksional siroplarni ishlab chiqarishdir. Ushbu mahsulotlar ozuqaviy moddalarga boy bo‘lib, inson salomatligini yaxshilashda va profilaktik maqsadlarda qo‘llanilishi mumkin. Funksional oziq-ovqatlar kontseptsiyasi sog‘liqni yaxshilash, kasalliklarni oldini olish va jismoniy holatni yaxshilashga qaratilgan mahsulotlarni o‘z ichiga oladi. Zardobni qayta ishlashda mavjud texnologiyalar orqali, uning tarkibidagi yuqori sifatli oqsillar, uglevodlar va mikroelementlar o‘zining to‘liq biofaolligiga erishadi.

Zardobdan tayyorlangan siroplarning immunomodulyator, antioksidant, probiotik, va prebiotik xususiyatlarga ega bo‘lishi mumkin. Bu siroplar, ayniqsa, bolalar oziq-ovqati, sport ichimliklari, antioxidant terapiyasi va boshqa funktsional dasturlarda keng qo‘llanilishi mumkin. Zardobning probiotik xususiyatlari inson ichak mikrobiyotasini yaxshilash, antioksidant xususiyatlari esa, hujayralarni erkin radikallardan himoya qilishda muhim rol o‘ynaydi.

Zardobni qayta ishlash va undan funksional siroplar ishlab chiqarish jarayonlari jahon miqyosida tobora ommalashmoqda. Evropa Ittifoqi, AQSh, Yaponiya kabi mamlakatlarda bu sohada tadqiqotlar olib borilmoqda va ilg‘or texnologiyalar ishlab chiqilmoqda. Shu bilan birga, O‘zbekistonda zardobning ishlab chiqarish hajmlari yildan-yilga ortib borayotgani va zardobdan to‘g‘ri foydalanishning jahon tajribasiga asoslangan ilmiy tadqiqotlar ortib borishi muhimdir.

Zardobning qayta ishlanishi va undan funktsional siroplar ishlab chiqarish texnologiyasi innovatsion yondashuv sifatida nafaqat ekologik jihatdan foydali, balki iqtisodiy jihatdan ham samarali bo‘lishi mumkin. Bu, o‘z navbatida, sut sanoatining chiqindilarini kamaytirish, mahsulotning ozuqaviy qiymatini oshirish va yangi, raqobatbardosh bozorlarni yaratishga imkon beradi.

Zardobdan tayyorlangan funksional siroplar, shuningdek, nutrasevtik ichimliklar sifatida inson salomatligini yaxshilashda samarali vosita bo‘lishi mumkin. Buning uchun zardobni ultrafiltratsiya, membranali texnologiyalar, fermentatsiya jarayonlari va biotexnologik qayta ishlash usullaridan foydalanish zarur. Zardobning tarkibidagi moddalarning sog‘liqni yaxshilashdagi o‘rni va samaradorligini tushunish, bu sohada olib borilayotgan ilmiy tadqiqotlar va yangi texnologiyalarni amaliyotga joriy qilishni taqozo etadi.

Bu maqolada zardobga asoslangan funksional siroplarning ishlab chiqarish texnologiyasi, ularning biofaolligi, antioksidant va probiotik xususiyatlari va oziqaviy qiymati tahlil etiladi. Shuningdek, zardobning qayta ishlanishi va undan tayyorlangan siroplarning sog‘liqni saqlash va oziqlanishdagi ahamiyati, bu texnologiyalarni sanoatda qo‘llash imkoniyatlari va amaliyotdagi tadbiklari ham ko‘rib chiqiladi.

Adabiyotlar sharhi. So’ngi yillarda sut zardobdan oziq-ovqat qo’shimchalari ishlab chiqarish bo’yicha nazariy va amaliy tadqiqotlar olib borilmoqda, jumladan:

Zardob — tabiiy “bioaktiv konsentrat” bo‘lib, uni inson uchun xavfsiz shaklda saqlab qolish uchun texnologik jarayonlarni to‘g‘ri tanlash juda muhim. Har bir ishlov berish bosqichi (issiqlik bilan ishlov berish, quritish, saqlash) biologik komponentlarning (immunoglobulinlar, fermentlar, vitaminlar) faoliyatini kamaytirishi yoki saqlab qolishi mumkin. Shu sababli, optimal texnologik yechimlar (masalan, past haroratda liofilizatsiya) zardob sifatini maksimal darajada saqlaydi [3].

Sigir zardobi (bovine colostrum) tarkibidagi biologik faol oqsillar, immun modulyatorlar, fermentlar va o‘sish omillari oshqozon-ichak tizimi faoliyatiga ijobiy ta’sir ko‘rsatishi aniqlangan. 22 ta klinik sinov natijalariga ko‘ra, zardob qo‘shimchalari asosan diareya chastotasini kamaytirgan va najas chiqarish sonini normallashtirgan. Biroq, diareya davomiyligi va qorin og‘rig‘i kabi boshqa simptomlarda sezilarli o‘zgarish kuzatilmagan.

Natijalar zardobning ichak shilliq qavatini tiklash, mikroflorani barqarorlashtirish hamda yallig‘lanish reaksiyalarini kamaytirishdagi potensial ahamiyatini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, mavjud tadqiqotlar hajmi kichik va metodologik farqlar mavjudligi sababli, natijalar ehtiyotkorlik bilan baholanishi kerak [4].

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, 12 haftalik sigir zardobi bilan boyitilgan sut iste’moli qarilik yoshidagi insonlarda yallig‘lanish jarayonlarini pasaytiradi, qon zardobida CRP, IL-6 va TNF-α kabi yallig‘lanish mediatorlarining darajasini kamaytiradi. Bu esa immun tizim faoliyatining yaxshilanishiga, hujayra darajasida oksidlovchi stressning kamayishiga va metabolik muvozanatning tiklanishiga yordam beradi.

Metabolomik tahlil natijalari sigir zardobi tarkibidagi bioaktiv peptidlar va o‘sish omillarining metionin va fosfolipid almashinuvi orqali hujayra energiya tizimini rag‘batlantirishi mumkinligini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, DNK himoyasi va antioksidant fermentlar faolligidagi o‘zgarishlar qisqa muddatli bo‘lgani sababli statistik ahamiyatga ega bo‘lmagan.

Tadqiqot qarilik davrida immunitetni qo‘llab-quvvatlash va yallig‘lanish bilan bog‘liq surunkali holatlarni kamaytirishda sigir zardobi asosidagi funksional sut mahsulotlarining istiqbolli ekanini ilmiy jihatdan asoslaydi. Shu bilan birga, mualliflar uzoq muddatli intervensiyalar, katta namuna hajmi va turli yosh guruhlarida qo‘shimcha tadqiqotlar o‘tkazish zarurligini ta’kidlaydilar [5].

Zardob asosidagi funksional mahsulotlar ishlab chiqishda dorivor o‘simliklardan ajratilgan biologik faol moddalar (antioksidantlar, flavonoidlar, fenolik birikmalar, vitaminlar) bilan boyitish orqali inson organizmining tonusini oshirish, asab tizimi faoliyatini qo‘llab-quvvatlash, va tashqi muhitning salbiy ta’sirlariga bardoshliligini kuchaytirish mumkin [6].

Zardobning biologik qiymati undagi oqsil fraksiyalari (β-laktoglobulin, α-laktalbumin, serum albumin) va laktoza miqdori bilan belgilanadi. Ushbu moddalarning immunitetni mustahkamlash, oksidlanish jarayonlarini kamaytirish va metabolik faoliyatni yaxshilashdagi roli muhimdir. Shu bois, zardob asosidagi funksional ichimliklar, siroplar va konsentratlar keng tadqiq qilinmoqda. Sut zardobi mikroblarga qarshi, antioksidant va detoksikatsion xususiyatlarga ega bo‘lib, biotexnologik sintez hamda fermentatsiya jarayonlarida qo‘llaniladi. Zardob asosidagi siroplar esa o‘zining yoqimli ta’mi, to‘yimliligi va yuqori biologik qiymati bilan ajralib turadi. Bunday siroplar ishlab chiqarish texnologiyasi xomashyoni tayyorlash, pasterizatsiya, biofaol moddalarning saqlanishini ta’minlash, aromatik va pektinli qo‘shimchalar bilan boyitish hamda qadoqlash bosqichlarini o‘z ichiga oladi. Tadqiqotlar ularning flavonoidlar, gidroksikorik kislotalar va minerallarga boyligini, ya’ni tabiiy antioksidantlik xususiyatini tasdiqlaydi [7].

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotning metodologik asosini sut zardobidan biologik faol moddalarga boy funksional siroplar ishlab chiqarishning texnologik jarayonlarini o‘rganish tashkil etdi. Ish jarayonida ilmiy-tajriba, fizik-kimyoviy, mikrobiologik va organoleptik baholash usullaridan foydalanildi.

1. Xomashyo tanlovi va tayyorlanishi.

Sut zardobi tabiiy sigir sutidan pishloq ishlab chiqarish jarayonida ajratib olindi. Zardob dastlab 37–40°C haroratda pasterizatsiya qilindi va mexanik tozalash orqali noorganik aralashmalardan tozalandi.

2. Texnologik jarayonlar.

- **Ultrafiltratsiya** — zardob tarkibidagi oqsillarni to‘liq ajratib olish va mikrobiologik tozalash uchun 10 kDa pora o‘lchamli membranalar orqali o‘tkazildi.
- **Fermentatsiya** — Lactobacillus acidophilus va Bifidobacterium bifidum shtammlari yordamida olib borildi. Fermentatsiya 35–37°C haroratda 12–18 soat davom etdi.
- **Konsentratsiya va bug‘latish** — vakuum qurilmasida 60°C dan oshmagan haroratda 40–45% quruq modda miqdorigacha bug‘latildi.
- **Boyitish bosqichi** — mevali ekstraktlar (olma, limon, malina) va pektinli komponentlar qo‘shilib, mahsulotning funksional va sensor xususiyatlari yaxshilandi.

3. Analitik tahlillar.

- **Oqsil miqdori** — Kjeldal usulida;
- **Laktoza va quruq modda** — refraktometrik usulda;
- **Antioksidant faollik** — DPPH (2,2-difenil-1-pikrilgidrazil) testi orqali;
- **Probiotik faollik** — koloniya hosil qiluvchi birliklar (CFU/g) hisobida aniqlangan.

4. Baholash mezonlari.

Mahsulotlar organoleptik (ta’m, rang, hid, tiniqlik), fizik-kimyoviy va biologik faol ko‘rsatkichlar bo‘yicha baholandi. Tajribalar 3 martadan takrorlanib, statistik ishonchlilik tahlili ($P<0,05$) bilan o‘tkazildi.

Natijalar va muhokama. Tadqiqotlar natijasida aniqlanishicha, sut zardobidan tayyorlangan funksional siroplar yuqori biologik qiymatni saqlab qoladi hamda foydali mikroorganizmlar faoliyatini rag‘batlantiradi.

1. Oqsil va biofaol moddalarning saqlanish darajasi.

Ultrafiltratsiya jarayonida oqsilning 90–92% gacha, laktozaning esa 75–80% gacha saqlanishi ta’minlandi. Bu ko‘rsatkichlar fermentatsiya jarayonida deyarli o‘zgarmadi, bu esa texnologiyaning nozik parametrlar bilan boshqarilganligini ko‘rsatadi.

2. Fermentatsiya samaradorligi.

Fermentatsiya natijasida pH darajasi 6,3 dan 4,7 gacha pasaydi, bu esa sut kislotasi hosil bo‘lishi va probiotik bakteriyalar faoliyati kuchayganini bildiradi. Yakuniy mahsulotdagi tirik bakteriyalar miqdori 10^8 CFU/g atrofida bo‘lib, bu funksional ichimliklar uchun yuqori ko‘rsatkich hisoblanadi.

3. Antioksidant faollik.

DPPH testi asosida aniqlanishicha, fermentatsiyadan o‘tgan zardob siropining antioksidant faolligi dastlabki holatga nisbatan 35–40% ga oshdi. Bu ko‘rsatkich sirop tarkibidagi polifenollar va gidroksikorik kislotalarning saqlanib qolganligini tasdiqlaydi.

4. Organoleptik ko‘rsatkichlar.

Siropning ta’mi yoqimli, o‘ziga xos nordon-shirin, rangi och sarg‘ish, tiniqligi esa yuqori darajada baholandi. Meva qo‘shimchalari bilan boyitilgan namunalar iste’molchilar tomonidan afzal ko‘rildi.

5. Sanoat amaliyoti uchun ahamiyati.

Tajriba natijalari shuni ko‘rsatdiki, bu texnologiya laboratoriya sharoitida muvaffaqiyatli sinovdan o‘tdi va sanoat miqyosiga joriy etish uchun texnologik moslamalarni oson sozlash imkonini beradi. Zardobning qayta ishlanishi ekologik chiqindilarni kamaytiradi, bu esa chiqindisiz texnologiya tamoyiliga mos keladi.

Xulosa va takliflar.

Xulosa:

1. Sut zardobi asosida ishlab chiqilgan funksional siroplar yuqori biologik qiymatga ega, ularning tarkibida oqsillar, laktoza, minerallar va antioksidant moddalarning katta qismi saqlanadi.
2. Ultrafiltratsiya va fermentatsiya jarayonlari zardobning biofaolligini oshirib, uning immunomodulyator xususiyatlarini mustahkamlaydi.
3. Fermentatsiyalangan zardob siroplari probiotik faollikka ega bo‘lib, ichak mikroflorasini tiklashda foydalidir.
4. Ushbu texnologiya chiqindisiz ishlab chiqarish tamoyiliga asoslangan bo‘lib, sut sanoatida ekologik muammolarni kamaytiradi.

Takliflar:

1. O‘zbekiston oziq-ovqat sanoatida sut zardobini qayta ishlash asosida funksional siroplar ishlab chiqarish liniyalarini tashkil etish.
2. Zardob asosidagi siroplarni sportchilar, bolalar va parhez iste’molchilari uchun maxsus formulalar bilan ishlab chiqish.
3. Mahalliy xomashyo asosida ishlab chiqilayotgan siroplarni eksportga yo‘naltirilgan sog‘lom oziq-ovqat mahsulotlari sifatida sertifikatlash.
4. Keyingi tadqiqotlarda zardob siroplarining antioksidant, detoksikatsion va immunomodulyator ta’sirini klinik sinovlar asosida o‘rganish.
5. Fermentatsiya jarayonida mahalliy probiotik shtammlardan foydalanish orqali mahsulotning milliy xususiyatlarini shakllantirish.

ADABIYOTLAR:

1. Mehra, R., Garhwal, R., Sangwan, K., Guiné, R. P. F., Lemos, E. T., Buttar, H. S., Visen, P. K. S., Kumar, N., Bhardwaj, A., & Kumar, H. (2022). Insights into the Research Trends on Bovine Colostrum: Beneficial Health Perspectives with Special Reference to Manufacturing of Functional Foods and Feed Supplements. Nutrients, 14(3), 659. https://doi.org/10.3390/nu14030659

2. Abuajah, C. I., Ogbonna, A. C., & Osuji, C. (2014). Functional components and medicinal properties of food: A review. Journal of Food Science and Technology - Mysore, 52(5), 2522–2531. https://doi.org/10.1007/s13197-014-1396-5

3. *Kaplan, M., Arslan, A., Duman, H., Karyelioğlu, M., Baydemir, B., Günar, B. B., Alkan, M., Bayraktar, A., Tosun, H. İ., Ertürk, M., Eskici, G., Duar, R. M., Henrick, B. M., Frese, S. A., & Karav, S. (2022). Production of Bovine Colostrum for Human Consumption to Improve Health. Frontiers in pharmacology, 12, 796824. https://doi.org/10.3389/fphar.2021.796824*

4. *Hajihashemi, P., Haghighatdoost, F., Kassaian, N. et al. Therapeutics effects of bovine colostrum applications on gastrointestinal diseases: a systematic review. Syst Rev* ***13****, 76 (2024). https://doi.org/10.1186/s13643-024-02489-1*

5. *Ooi, T. C., Ahmad, A., Rajab, N. F., & Sharif, R. (2023). The Effects of 12 Weeks Colostrum Milk Supplementation on the Expression Levels of Pro-Inflammatory Mediators and Metabolic Changes among Older Adults: Findings from the Biomarkers and Untargeted Metabolomic Analysis. Nutrients, 15(14), 3184. https://doi.org/10.3390/nu15143184*

6. *Лукин Андрей Андреевич. Разработка технологии функционального напитка на основе молочной сыворотки с использованием биологически активных веществ лекарственных растений Сибири : дис. канд. техн. наук : 05.18.04 / ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет». — 2019. — 127 с.*

7. *Брыкалов Анатолий Валерьевич, Пилипенко Надежда Юрьевна Разработка технологии напитков на основе молочной сыворотки, обогащенных фитокомпонентами // Научный журнал КубГАУ. 2014. №98. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/razrabotka-tehnologii-napitkov-na-osnove-molochnoy-syvorotki-obogaschennyh-fitokomponentami (дата обращения: 26.10.2025).*

UDC 678.7: 678.74

EFFECT OF NANO-CALCIUM CARBONATE ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF PVC COMPOSITES

Khakberdiev Elshod Olmosovich,
senior researcher
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
Norkobilov Abbos Abdumurod ugli,
intern researcher
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
Bozorboeva Guluzra Ahadbek qizi,
laboratory assistant
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
Normuradov Nurbek Fayzullo ugli,
junior researcher
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
Berdinazarov Kodirbek Nuridin ugli,
senior researcher
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
Ashurov Nigmat Rustamovich,
head of the laboratory
Institute of Polymer Chemistry and Physics,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Tashkent 100125, 7B Abdulla Qodiriy Street
profhaqberdiyev@gmail.com

Abstract. *This study explores nanosized calcium carbonate ($CaCO_3$) synthesized by in situ precipitation and its impact on the mechanical properties of PVC composites. Nano-$CaCO_3$ (600–900 nm) was added at 5, 10, and 15 wt.%. SEM images showed partial agglomeration. Adding 10 wt.% nano-$CaCO_3$ improved stiffness by 15% (511→586 MPa) and elongation to 131%, while tensile strength slightly dropped by 16%. At 15 wt.%, stiffness decreased and ductility declined. Overall, 10 wt.% nano-$CaCO_3$ achieved optimal strength–flexibility balance for PVC matrices.*

Keywords: *nano-$CaCO_3$, PVC composites, mechanical properties, tensile strength, elastic modulus, nanofillers, morphology, dispersion, reinforcement, flexibility*

NANO-KALSIY KARBONATNING PVX KOMPOZITLARINING MEXANIK XUSUSIYATLARIGA TA’SIRI

Annotatsiya. *Ushbu tadqiqotda cho‘ktirish usuli bilan sintez qilingan nanokalsiy karbonat ($CaCO_3$) ning PVX kompozitlarining mexanik xususiyatlariga ta’siri o‘rganildi. 600–900 nm o‘lchamdagi nano-$CaCO_3$ 5, 10 va 15 mass.% miqdorda qo‘shildi. SEM tasvirlari qisman aglomeratsiyani ko‘rsatdi. 10 mass.% nano-$CaCO_3$ Yung modulini 15% ga oshirib (511→586 MPa), deformatsiyani 131% gacha ko‘tardi, lekin mustahkamlik 16% ga kamaydi. 15 mass.% da esa Yung modulini va deformatsiya pasaydi. 10 mass.% nano-$CaCO_3$ kiritilishi optimal tarkib deb baholandi .*

Kalit so‘zlar: *nano-$CaCO_3$, PVX kompozitlar, mexanik xususiyatlar, cho‘zilishdagi mustahkamlik, elastiklik moduli, nanoto‘ldiruvchilar, morfologiya, dispersiya, mustahkamlash, egiluvchanlik.*

ВЛИЯНИЕ НАНО-КАРБОНАТА КАЛЬЦИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПВХ-КОМПОЗИТОВ

Аннотация. *В данном исследовании изучено влияние наноразмерного карбоната кальция ($CaCO_3$), синтезированного методом осаждения in situ, на механические свойства композитов ПВХ. Частицы $CaCO_3$ (600–900 нм) вводились в количестве 5, 10 и 15 мас.%. SEM показал частичную агломерацию. Добавление 10 мас.% $CaCO_3$ увеличило модуль упругости на 15% (с 511 до 586 МПа) и удлинение до 131%, при этом прочность снизилась на 16%. При 15 мас.% твердость и пластичность уменьшились. Оптимальное соотношение — 10 мас.% $CaCO_3$.*

Ключевые слова: *нано-$CaCO_3$, композиты ПВХ, механические свойства, прочность при растяжении, модуль упругости, нанонаполнители, морфология, дисперсия, упрочнение, гибкость*

Introduction. In modern polymer industries, thermoplastics such as polyvinyl chloride (PVC), polyethylene (PE), and polypropylene (PP) are widely used owing to their low cost, recyclability, and versatile applications across various fields. However, their mechanical properties—such as stiffness and modulus, tensile strength - are sometimes insufficient for advanced engineering purposes. Therefore, to enhance the performance characteristics of these materials, the incorporation of fillers and nanofillers into plastic and elastomer matrices has become a common and effective approach.

Nano-calcium carbonate (nano-$CaCO_3$) is an environmentally friendly, inexpensive, and abundant inorganic filler. Due to its high specific surface area and strong interfacial interactions with the polymer matrix, nano-$CaCO_3$ can achieve finer dispersion than micron-sized fillers. This, in turn, improve significantly key mechanical properties such as impact strength and stiffness of polymer composites.

Efficient dispersion of nano-$CaCO_3$ within a polymer matrix can substantially improve the mechanical performance. For instance, incorporating nano-$CaCO_3$ into a high-density polyethylene (HDPE) matrix increases the Young's modulus by approximately 17%, although it may slightly reduce the elongation at break [1–3]. Similarly, studies on PP/$CaCO_3$ nanocomposites have demonstrated enhancements of about 7.8% in impact strength and 9.3% in Young's modulus, accompanied by a more uniform filler distribution [4]. In microcellular PP nanocomposites, the addition of nano-$CaCO_3$ also improves the crystallization behavior, mechanical performance, and pore structure, with the best results observed at a loading of around 6 wt.% [5].

Recent studies have further shown that surface modification of nano-$CaCO_3$—such as with pimelic acid—can enhance interfacial adhesion and mechanical properties, emphasizing surface modification as a promising route for improving PP-based nanocomposites [6]. In the case of natural rubber/SBR matrices, introducing nano-$CaCO_3$ through different dispersion techniques (e.g., using W410 solution) has been reported to achieve optimal mechanical performance at a concentration of approximately 3.52 wt.% [7].

Nano-$CaCO_3$ is an abundant and relatively low-cost raw material that can be synthesized under local conditions, thereby reducing dependence on imported fillers. Reinforcement of polymer composites with nano-$CaCO_3$ not only decreases production costs but also enables the fabrication of competitive, durable, and affordable materials. Consequently, this approach contributes to improved manufacturing efficiency and resource sustainability in practical industrial applications.

Materials and Methods. Materials. Polyvinyl chloride (PVC, grade C-70) was used as the polymer matrix. Analytical-grade reagents, including sodium carbonate (Na_2CO_3), calcium chloride ($CaCl_2$), hydrochloric acid (HCl), sodium hydroxide (NaOH), and citric acid, were obtained from Sigma-Aldrich (Germany). Nano-calcium carbonate (nano-$CaCO_3$) was synthesized in the laboratory, and the particles were in size between 600 and 900 nm.

Synthesis of nano-$CaCO_3$. Nano-sized calcium carbonate was prepared by in situ precipitation method. A 0.1 M $CaCl_2$ solution (100 mL) and 0.1 M Na_2CO_3 solution (100 mL) were prepared in of deionized water. Citric acid was added to the $CaCl_2$ solution at a concentration of 15 mol%, and stirred thoroughly. Subsequently, the Na_2CO_3 solution was added dropwise to the $CaCl_2$/citric acid mixture at a rate of 2 mL/min. During the synthesis process, the pH value was maintained at 9.5 using NaOH. To minimize agglomeration, the magnetic stirrer speed was set to 700 rpm. After completion of the Na_2CO_3 addition, stirring was continued for 1 hour.

The resulting suspension was left to stand at room temperature for 12–24 hours to control particle growth and promote crystallization. The obtained nanoparticles were separated by centrifugation at 5000 rpm for 10 minutes, washed twice with deionized water and once with ethanol, and then dried in an oven (without vacuum) at 60 °C for 12–18 hours.

Preparation of nano-$CaCO_3$/PVC nanocomposites. The components were melt-blended using a Brabender Plastograph (Germany) at 180 °C. Initially, PVC was plasticized with dioctyl phthalate (DOP), equivalent to 25 wt% relative to PVC mass. The mixture was blended until complete melting was achieved, followed by the addition of nano-$CaCO_3$ at target concentrations. Mixing was continued for 8 minutes to ensure uniform dispersion of the nanoparticles.

The blends were then molded into test specimens for mechanical characterization using a Mercator 1971 (Poland) injection molding machine operating at 180 °C. The nano-$CaCO_3$ content in PVC was varied at 5 wt%, 10 wt%, and 15 wt% to produce a series of nanocomposites.

Morphological analysis (SEM). The surface morphology of the nanocomposites was examined by scanning electron microscope (SEM, model JSM-IT210, JEOL, Japan). The accelerating voltage (EHT – Extra High Tension) was maintained within the range of 5–15 kV, and the working distance (WD) was 10.8 mm. SEM micrographs were acquired at various magnifications and analyzed using InTouch Scope software.

Mechanical analysis. Mechanical properties of the samples were measured on a Shimadzu AG-X PLUS universal testing machine (Japan) according to ASTM D638 standards. The tensile modulus (E) was determined within the elastic deformation range up to 0.3% strain at a crosshead speed of 1 mm/min. Subsequently, yield stress (σ) and elongation at yield (ε) were measured under a loading rate of 20 mm/min.

Results and Discussion. *Scanning electron microscopy (SEM) Analysis.* Scanning Electron Microscopy (SEM) provides high-resolution imaging of sample surfaces by scanning them with a focused beam of electrons, allowing detailed observation of particle morphology, including size, shape, and distribution within the polymer matrix. The obtained micrographs offered valuable insights into the dispersion of nano-$CaCO_3$ particles and the interfacial interaction between the filler and the PVC matrix, which play a crucial role in determining the overall performance of the nanocomposites.

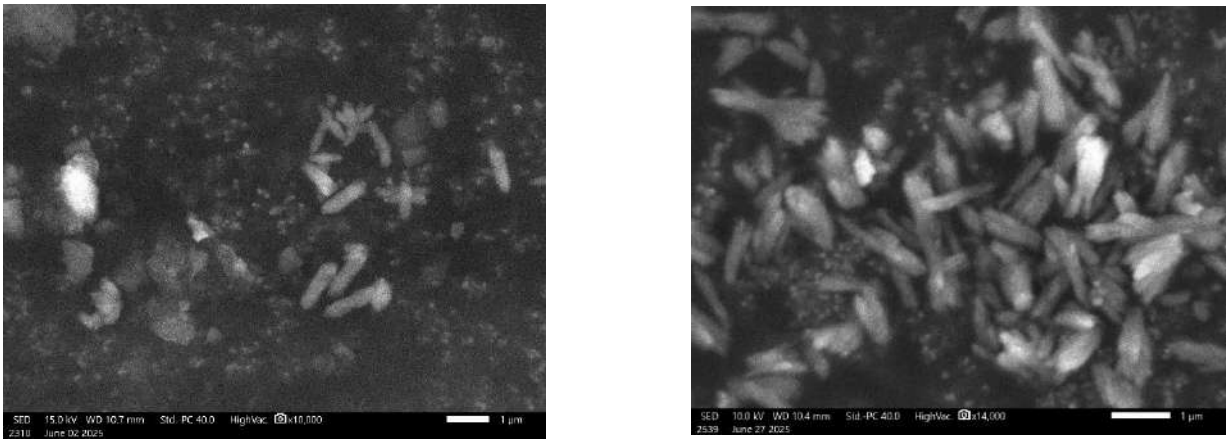


Figure 1. SEM micrographs of nano-$CaCO_3$ particles synthesized under laboratory conditions.

The nano-$CaCO_3$ particles synthesized under laboratory conditions showed a size distribution within the range of 600–900 nm, with heterogeneous and irregular morphologies. In some regions, partial agglomeration of particles was observed, which could potentially hinder the uniform dispersion in the polymer matrix.

The particle size and polymorphic form of nano-$CaCO_3$ are the key factors which determine its potential applications. Obviously, calcium carbonate crystallizes into three anhydrous polymorphic forms: calcite**,** aragonite**,** and vaterite. Calcite, which belongs to the trigonal crystal system with a rhombohedral structure, is the most thermodynamically stable form. Aragonite, an orthorhombic crystal, typically exhibits needle-like or rod-shaped morphologies, while vaterite, a hexagonal polymorph, forms concentric, flower-like spherical or ellipsoidal aggregates [8].

The incorporation of calcium carbonate into polyvinyl chloride (PVC) as a reinforcing filler and the subsequent nanocomposites were fabricated to evaluate the effect of particle size on the mechanical behavior of the obtained materials. The analysis focuses on the relationship between nano-$CaCO_3$ content and the mechanical properties of the PVC matrix. As shown in Figure 2 and Table 1, the composites containing 5 wt%, 10 wt%, and 15 wt% nano-$CaCO_3$ demonstrate notable variations in mechanical stress parameters, indicating the direct impact of filler concentration on the tensile performance of the nanocomposites.

Table 1.

Mechanical characteristics of PVC/nano-$CaCO_3$ composites

№	Composition	E, [MPa]	σ, [MPa]	ε, [%]
1	PVC100	511±76	29,9±2,1	125±12
2	PVC /$CaCO_3$ 95/5	504±81	27,2±1,6	128±8
3	PVC/$CaCO_3$ 90/10	586±38	25,2±2,0	131±4
4	PVC /$CaCO_3$ 85/15	545±56	23,9±0,9	122±6

As shown in Table 1 and Figure 2, increasing nano-$CaCO_3$ content significantly affects the mechanical properties of PVC. For neat poly(vinyl chloride) (PVC), the elastic modulus was E = 511 ± 76 MPa**,** tensile strength σ = 29.9 ± 2.1 MPa**,** and elongation at break ε = 125 ± 12 %**.** These values indicate that a pure PVC exhibits relatively high elasticity with moderate tensile strength.

For PVC/$CaCO_3$ (95/5) composite, the elastic modulus decreased slightly to E = 504 ± 81 MPa (a ~1.4 % reduction compared to neat PVC), and the tensile strength dropped to σ = 27.2 ± 1.6 MPa (approximately 9 % lower), while the elongation at break increased to ε = 128 ± 8 %**,** suggesting that the incorporation of 5 wt.% $CaCO_3$ slightly reduced the material's strength but improved its ductility.

For the PVC/$CaCO_3$ (90/10) composite, the elastic modulus increased to E = 586 ± 38 MPa, representing about a 15 % enhancement relative to neat PVC. However, the tensile strength decreased to σ = 25.2 ± 2.0 MPa (a ~16 % reduction). The elongation at break reached ε = 131 ± 4 %**,** the highest among tested compositions.

Thus, the addition of 10 wt.% $CaCO_3$ substantially increased stiffness but decreased tensile strength, while slightly increased ductility.

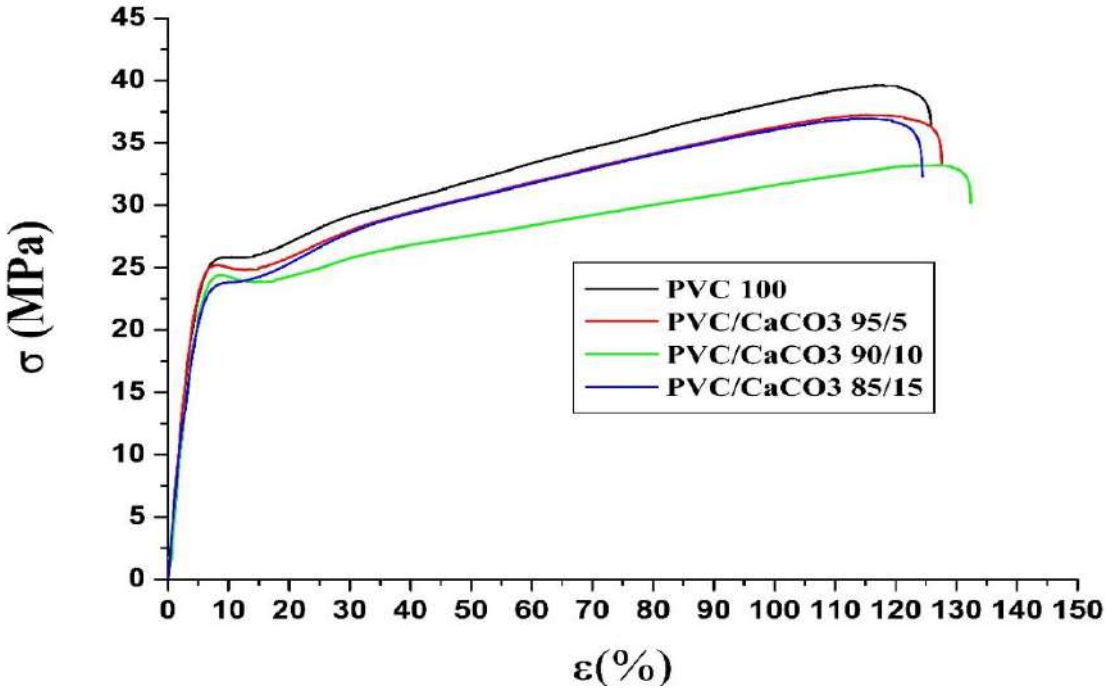


Figure 2. Tensile stress–strain behavior of PVC/nano-$CaCO_3$ composites

In the PVC/$CaCO_3$ (85/15) composite, the elastic modulus was E = 545 ± 56 MPa**,** slightly lower than the 10 wt.% formulation yet still above neat PVC. The tensile strength declined to σ = 23.9 ± 0.9 MPa (~20 % lower than pure PVC), and elongation at break dropped to ε = 122 ± 6 %**,** approaching the value of neat PVC. Therefore, increasing the filler content to 15 wt.% enhanced stiffness to a limited extent but significantly reduced both strength and elongation.

Conclusions. The synthesized nano-$CaCO_3$ particles, sizes in the 600–900 nm range, showed heterogeneous morphology with partial agglomeration. When incorporated into PVC at varying loadings (5, 10, and 15 wt.%), these nanoparticles of the filler considerably affected the mechanical performance of the composites. Pure PVC neat exhibited an elastic modulus (E) of 511 ± 76 MPa, tensile strength (σ) of 29.9 ± 2.1 MPa, and elongation at break (ε) of 125 ± 12%. With 5 wt.% nano-$CaCO_3$, E decreased slightly to 504 ± 81 MPa and σ dropped by ~9%, while ε increased to 128 ± 8%, indicating improved flexibility. At 10 wt.%,

E increased sharply to 586 ± 38 MPa (≈ +15%), showing maximum stiffness, though σ declined to 25.2 ± 2.0 MPa (≈ –16%), and ε reached its peak (131 ± 4%). Further increase to 15 wt.% led to E = 545 ± 56 MPa and σ = 23.9 ± 0.9 MPa (≈ –20%), with ε = 122 ± 6%.

Thus, the optimal mechanical balance of the composite was achieved at 10 wt.% nano-$CaCO_3$, where stiffness improved by ≈15% without severe loss of ductility. These results confirm that proper nanoparticle dispersion and controlled filler content are critical to interfacial adhesion and load transfer efficiency in PVC/$CaCO_3$ nanocomposites.

Acknowledgements. This research was carried out in 2025–2026 at the Laboratory of Nanostructured Composite Polymer Materials, Institute of Polymer Science and Physics, within the framework of the scientific project "Functional, including Nanostructured Polymer Composite Materials."

The authors express their sincere gratitude to the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan and the Institute of Polymer Chemistry for their continuous support and valuable contributions to the successful completion of this study.

REFERENCES:

1. Zapata, P. A., Palza, H., Díaz, B., Armijo, A., Sepúlveda, F., Ortiz, J. A., Oyarzún, C. Effect of CaCO3 nanoparticles on the mechanical and photo-degradation properties of LDPE. Molecules, 2018, 24(1), 126.

2. Sepet, H., Aydemir, B., & Tarakcioglu, N. Evaluation of mechanical and thermal properties and creep behavior of micro-and nano-CaCO3 particle-filled HDPE nano-and microcomposites produced in large scale. Polymer Bulletin, 2020, 77(7), 3677-3695.

3. Sepet, H., Tarakcioglu, N., & Misra, R. D. K. Determination of the mechanical, thermal and physical properties of nano-CaCO3 filled high-density polyethylene nanocomposites produced in an industrial scale. Journal of composite materials, 2016, 50(24), 3445-3456.

4. Hernández, Y., Lozano, T., Morales-Cepeda, A. B., Navarro-Pardo, F., Angeles, M. E., Morales-Zamudio, L., ... & Rodríguez, F. Stearic acid as interface modifier and lubricant agent of the system: Polypropylene/calcium carbonate nanoparticles. Polymer Engineering & Science, 2019, 59(s2), E279-E285.

5. Mao, H., He, B., Guo, W., Hua, L., & Yang, Q. Effects of nano-CaCO3 content on the crystallization, mechanical properties, and cell structure of PP nanocomposites in microcellular injection molding. Polymers, 2018, 10(10), 1160.

6. Mahmood, N. Q., & Hikmat, M.. The effect of calcium carbonate-nanoparticle on the mechanical and thermal properties of polymers utilizing different types of mixing and surface pre-treatment: A review paper. Engineering and Technology Journal, 2023, 41(12), 1497-1515.

7. Damircheli, M., & MajidiRad, A. The influence of the dispersion method on the morphological, curing, and mechanical properties of NR/SBR reinforced with nano-calcium carbonate. Polymers, 2023, 15(13), 2963.

8. De Leeuw, N. H., & Parker, S. C. Surface structure and morphology of calcium carbonate polymorphs calcite, aragonite, and vaterite: an atomistic approach. The Journal of Physical Chemistry B, 1998, 102(16), 2914-2922.

УДК 544.424

ВЛИЯНИЕ ПРИРОДЫ РАСТВОРИТЕЛЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ НА КИНЕТИКУ АЛЬДЕР-ЕНОВОЙ РЕАКЦИИ 4-ФЕНИЛ-1,2,4-ТРИАЗОЛИН-3,5-ДИОНА С 2-КАРЕНОМ

Телманова Дилафруз Зафар кизи,
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
telmanova.2023@mail.ru
Рузиев Илёс Хакимович,
Институт биохимии Самаркандского государственного университета им. Ш. Рашидова
r-ilyos@samdu.uz

Аннотация. *В работе методом УФ-спектрофотометрии изучена кинетика Альдер-еновой реакции 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона (ФТД) с 2-кареном в интервале температур 10–40 °C в ряду растворителей (бензол, 1,4-диоксан, ацетонитрил, 1,2-дихлорэтан). Рассчитаны константы скорости второго порядка и параметры активации (энтальпия ΔH≠ и энтропия ΔS≠). Установлено, что скорость реакции не коррелирует с полярностью растворителя, но увеличивается в средах, способных к донорству водородных связей (1,2-дихлорэтан). Полученные высокие отрицательные значения энтропии активации (от -139 до -176 Дж·моль⁻¹·K⁻¹) и низкие значения энтальпии активации (19–39 кДж·моль⁻¹) характерны для согласованного перициклического механизма. Результаты свидетельствуют о том, что реакция протекает через циклическое переходное состояние без образования заряженных интермедиатов. Проведён сравнительный анализ с литературными данными по родственным реакциям циклоприсоединения.*

Ключевые слова: *Альдер-еновая реакция, кинетика, 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-дион, 2-карен, параметры активации, растворитель, перициклические реакции, механизм реакции.*

INFLUENCE OF SOLVENT NATURE AND TEMPERATURE ON THE KINETICS OF THE ALDER-ENE REACTION OF 4-PHENYL-1,2,4-TRIAZOLINE-3,5-DIONE WITH 2-CARENE

Abstract. *The kinetics of the Alder-ene reaction of 4-phenyl-1,2,4-triazoline-3,5-dione (PTD) with 2-carene was studied by UV spectrophotometry in the temperature range of 10–40 °C in a series of solvents (benzene, 1,4-dioxane, acetonitrile, 1,2-dichloroethane). The second-order rate constants and activation parameters (enthalpy ΔH≠ and entropy ΔS≠) were calculated. It was found that the reaction rate does not correlate with solvent polarity but increases in media capable of hydrogen bond donation (1,2-dichloroethane). The obtained high negative values of activation entropy (from -139 to -176 J·mol⁻¹·K⁻¹) and low values of activation enthalpy (19–39 kJ·mol⁻¹) are characteristic of a concerted pericyclic mechanism. The results indicate that the reaction proceeds through a cyclic transition state without the formation of charged intermediates. A comparative analysis with literature data on related cycloaddition reactions was carried out.*

Keywords: *Alder-ene reaction, kinetics, 4-phenyl-1,2,4-triazoline-3,5-dione, 2-carene, activation parameters, solvent, pericyclic reactions, reaction mechanism.*

ERITUVCHINING TABIATI VA HARORATNING 4-FENIL-1,2,4-TRIAZOLIN-3,5-DIONNING 2-KAREN BILAN ALDER-EN REAKSIYASI KINETIKASIGA TA’SIRI

Annotatsiya. *Ishlarda UV-spektrofotometriya usuli yordamida 4-fenil-1,2,4-triazolin-3,5-dion (FTD) ning 2-karen bilan Alder-en reaksiyasi kinetikasi 10–40 °C harorat oralig'ida bir qator erituvchilarda (benzin, 1,4-dioksan, atsetonitril, 1,2-dixloretan) o‘rganildi. Ikkinchi tartibli tezlik konstantalari va aktivlash parametrlari (entalpiya ΔH≠ va entropiya ΔS≠) hisoblab chiqildi. Reaksiya tezligi erituvchining qutbliligi bilan bog'liq emas, lekin vodorod bog'ini donorlik qila oladigan muhitlarda (1,2-dixloretan) ortishi aniqlandi. Olingan aktivlash entropiyasining yuqori manfiy qiymatlari (-139 dan -176 J·mol⁻¹·K⁻¹ gacha) va aktivlash entalpiyasining past qiymatlari (19–39 kJ·mol⁻¹) muvofiqlashtirilgan peritsiklik mexanizmga xos xususiyatdir. Natijalar shuni ko'rsatadiki, reaksiya zaryadlangan oraliq mahsulotlar hosil bo'lmagan holda siklik o'tish holati orqali boradi. Tegishli siklik qo'shilish reaksiyalari bo'yicha adabiyotlar bilan qiyosiy tahlil olib borildi.*

Kalit so‘zlar: *Alder-en reaksiyasi, kinetika, 4-fenil-1,2,4-triazolin-3,5-dion, 2-karen, aktivlash parametrlari, erituvchi, peritsiklik reaksiyalar, reaksiya mexanizmi.*

Введение. Альдер-еновые реакции представляют собой важный класс перициклических реакций, в которых происходит перенос водорода с сопряжённым сдвигом π-системы, приводящий к образованию новых связей C–C и C–H (схема 1). Эти реакции широко применяются в органическом синтезе для построения сложных молекул с высокой стерео- и региоспецифичностью.

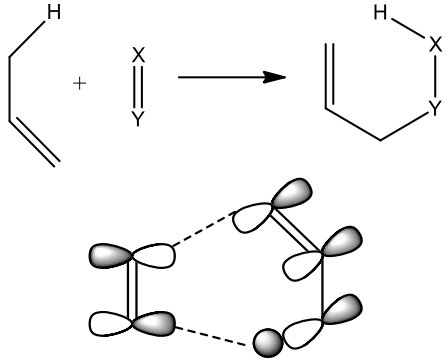


Схема 1. Альдер-еновая реакция, X=Y: C=C, C≡C, C=O, C=N, N=N, N=O, S=O

В данном обзоре рассматриваются механизмы, кинетика, стереохимия, каталитические варианты Альдер-еновых реакций, а также их применение в синтезе природных соединений и фармацевтических препаратов.

В отличие от хорошо изученных енофилов с C=C-связью, данные о реакционной способности и механизме реакций с участием енофилов типа ФТД остаются фрагментарными. В литературе дискутируются два возможных механизма: согласованный (через циклическое переходное состояние) и ступенчатый (с образованием интермедиата типа азиридиний имида) [3, 4]. Кинетические исследования, в частности изучение влияния температуры и природы растворителя, являются ключевым инструментом для разрешения этого вопроса. Сравнение параметров активации (ΔH≠ и ΔS≠) с данными для других перициклических реакций позволяет сделать вывод о степени упорядоченности переходного состояния.

На сегодняшний день Альдер-еновая реакция на основе триазолиндионов является эффективным методом сшивки различных полимеров в мягких условиях (схема 2).

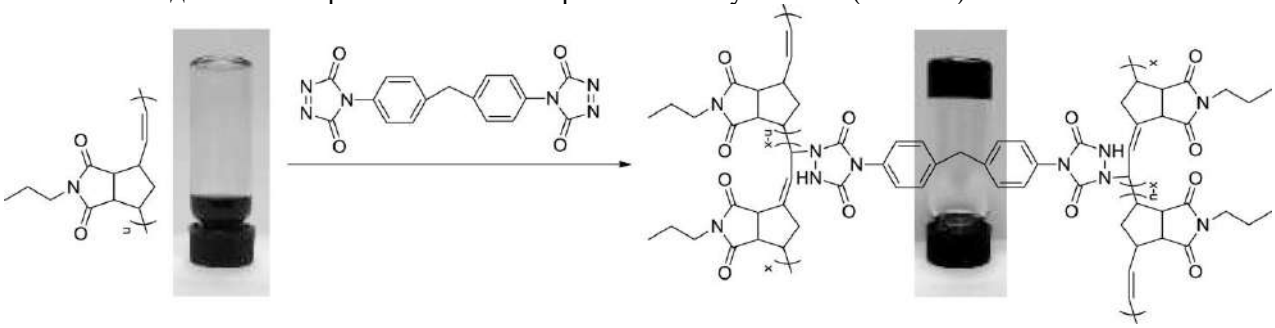


Схема 2. Синтез полимера с помощью Альдер-еновой реакции с использованием бистриазолиндиона

Целью настоящей работы было изучение кинетики реакции ФТД с природным монотерпеном – 2-кареном – в ряду растворителей с различной полярностью и донорной способностью по отношению к водородной связи. Научная новизна исследования заключается в (впервые) систематическом определении параметров активации данной реакции и установлении ее механизма на основе кинетических данных. В рамках работы были поставлены следующие задачи: 1) определить константы скорости реакции в выбранных растворителях при четырех температурах; 2) рассчитать энтальпию и энтропию активации; 3) проанализировать влияние природы растворителя на скорость и параметры активации; 4) на основании кинетических данных сделать вывод о механизме реакции.

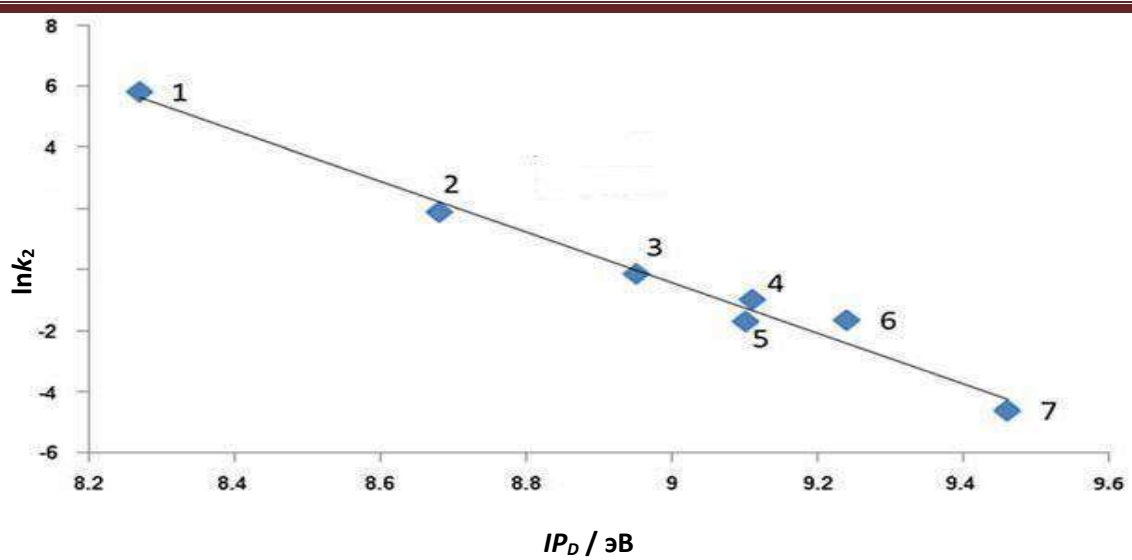


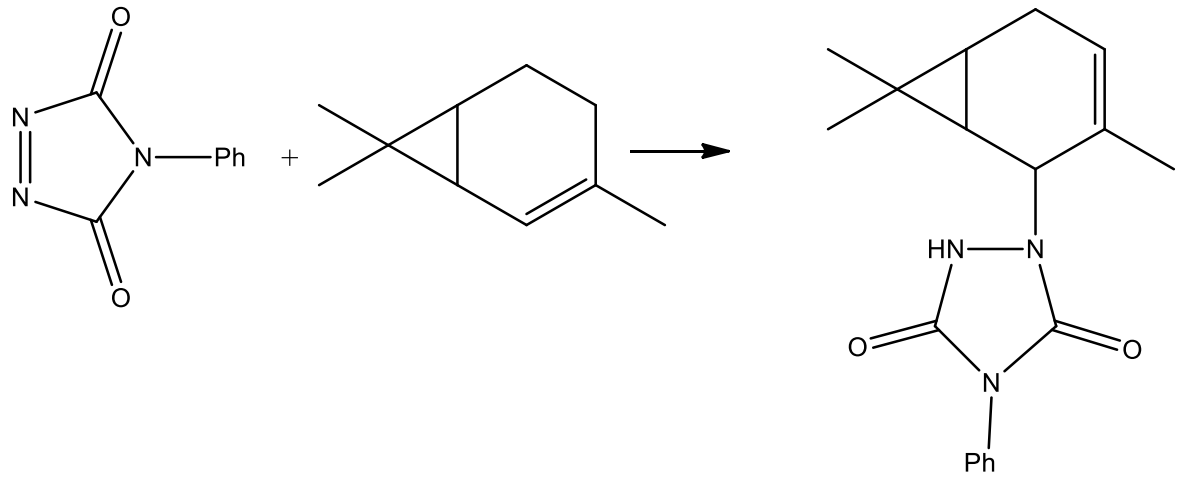
Рисунок 1. Зависимость констант скорости Альдер-еновых реакций 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона с нециклическими алкенами от их потенциалов ионизации (R=0.990). Алкены: 1. 2,3-Диметилбутен-2 (8.27 эВ); 2. 2-Метилбутен-2 (8.68 эВ); 3. Цис-гексен-3 (8.95 эВ); 4. Цис-бутен-2 (9.11 эВ); 5. Транс-бутен-2 (9.10 эВ); 6. 2-Метилпропен (9.24 эВ); 7. Гексен-1 (9.46 эВ) [28].

Реагенты и растворители. 4-Фенил-1,2,4-триазолин-3,5-дион (Sigma-Aldrich, 97%) очищали сублимацией при 100 °C и давлении 100 Па. Чистоту ФТД контролировали спектрофотометрически по известным значениям молярного коэффициента экстинкции [5]. 2-Карен (Sigma-Aldrich, 97%) и 1,2-дихлорэтан (хч) использовали без дополнительной очистки. Растворители (бензол, 1,4-диоксан, ацетонитрил) очищали по стандартным методикам [6]. Бензол, образующий с водой азеотропную смесь, предварительно кипятили с насадкой Дина-Старка для удаления основной массы воды, а затем перегоняли над прокаленным $CaCl_2$ и натриевой проволокой. 1,4-Диоксан, содержащий примеси перекисей и воды, кипятили с обратным холодильником над металлическим натрием с последующей перегонкой в атмосфере аргона. Ацетонитрил последовательно перегоняли над P_2O_5 (0.5% масс.) для удаления следов воды, а затем над безводным K_2CO_3 для нейтрализации следов кислот.

Кинетические измерения. Кинетику реакции ФТД с 2-кареном изучали спектрофотометрически на приборе SILab u-Violet DB в кюветах с термостатированием (±0.1 °C). Реакцию проводили в условиях псевдопервого порядка при 10-кратном избытке 2-карена. Начальная концентрация ФТД составляла ~10^{-4} М. Изменение концентрации ФТД регистрировали по уменьшению оптической плотности в области 530–550 нм, где 2-карен и продукт реакции не поглощают. Константы скорости псевдопервого порядка (k_1) определяли как тангенс угла наклона линейных зависимостей $\ln(A_0/A)$ от времени. Константы скорости второго порядка (k_2) рассчитывали по формуле $k_2 = k_1 / [\text{2-карен}]_0$. Относительная погрешность определения констант скорости не превышала 5%. Стабильность ФТД в исследуемых растворителях в отсутствие 2-карена была подтверждена контрольными экспериментами при 40 °C в течение 4 часов.

Результаты и обсуждение. Значения констант скорости реакции ФТД с 2-кареном в изученных растворителях при различных температурах представлены в Таблице 1. Во всех случаях наблюдалась строгая линейность зависимостей $\ln(A_0/A)$ от времени, что подтверждает первый порядок реакции по ФТД в условиях избытка 2-карена и отсутствие побочных процессов.

Значения энтропии активации реакции 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона с 2-кареном (таблица III.2) очень близки к значениям энтропии активации других Альдер-еновых реакций [36], а также реакций Дильса-Альдера [37] и других типов циклоприсоединения [38, 39].



1 **2** **3**

Схема 3. Альдер-еновая реакция 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона (1) с 2-кареном (2).

Таблица 1.

Значения констант скорости реакции **1**+**2**→**3** при разных температурах в ряду растворителей[a]

Растворитель	k_2, л·моль$^{-1}$·с$^{-1}$			
	T=283.15 K	*T*=293.15 K	*T*=303.15 K	*T*=313.15 K
Бензол	$1.34\cdot10^{-1}$	$2.38\cdot10^{-1}$	$3.89\cdot10^{-1}$	$5.76\cdot10^{-1}$
1,2-Дихлорэтан	1.07	1.39	1.93	2.58
1,4-Диоксан	$2.25\cdot10^{-2}$	$4.38\cdot10^{-2}$	$7.44\cdot10^{-2}$	$1.21\cdot10^{-1}$
Ацетонитрил	$1.20\cdot10^{-1}$	$1.72\cdot10^{-1}$	$2.96\cdot10^{-1}$	$4.32\cdot10^{-1}$

[a]*Относительная погрешность определения констант скорости не превышает 5%.*

Как видно из таблицы, реакция протекает с наибольшей скоростью в 1,2-дихлорэтане. Наименьшая скорость наблюдается в 1,4-диоксане. Важно отметить, что ацетонитрил, обладающий наибольшей полярностью (диэлектрическая проницаемость ε ≈ 37), не является средой с максимальной скоростью реакции. Это указывает на то, что полярность растворителя не является определяющим фактором.

По температурным зависимостям констант скорости в координатах уравнения Эйринга были рассчитаны параметры активации (Таблица 2). Линейность графиков Эйринга ($R^2 > 0.99$) во всех случаях свидетельствует о применимости модели переходного состояния в изученном температурном интервале.

Таблица 2.

Значения энтальпии ($\Delta H^{\neq}$) и энтропии ($\Delta S^{\neq}$) активации реакции **1**+**2**→**3** в ряду растворителей

Растворитель	$\Delta H^{\neq}$, кДж·моль$^{-1}$	$\Delta S^{\neq}$, Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$
Бензол	33±3	-143±10
1,2-Дихлорэтан	19±2	-176±7
1,4-Диоксан	39±2	-139±7
Ацетонитрил	30±4	-157±13

Влияние растворителя и механизм реакции. Полученные данные позволяют сделать важные выводы о механизме реакции. Отсутствие корреляции скорости реакции с полярностью растворителя является веским аргументом против ступенчатого механизма с образованием заряженных или сильно полярных интермедиатов (например, цвиттер-ионов). Такой механизм должен был бы приводить к значительному ускорению реакции в полярных средах, чего не наблюдается. Например, константа скорости в ацетонитриле (ε=37) ниже, чем в 1,2-дихлорэтане (ε=10).

Высокие отрицательные значения энтропии активации во всех растворителях типичны для согласованных перициклических реакций, которые требуют высокой упорядоченности молекул в переходном состоянии [7]. Низкие значения энтальпии активации компенсируют этот энтропийный барьер, делая реакцию термодинамически возможной при комнатной температуре. Полученные значения ΔS≠ хорошо согласуются с данными для реакций Дильса-Альдера [8] и других Альдер-еновых реакций [9], что подтверждает их общий перициклический характер.

Наблюдаемое ускорение реакции в 1,2-дихлорэтане, который является донором водородных связей, можно объяснить специфической сольватацией. Атомы хлора в молекуле растворителя могут образовывать водородные связи с карбонильными группами ФТД в переходном состоянии, стабилизируя его и снижая энергию активации (что и отражается в самом низком значении $\Delta H^{\neq}$ для 1,2-дихлорэтана). Аналогичный эффект наблюдается и в других реакциях циклоприсоединения с участием карбонилсодержащих диенофилов и енофилов [10]. В то же время, 1,4-диоксан, являясь акцептором водородных связей, не способен эффективно стабилизировать переходное состояние, что объясняет самую низкую скорость реакции в этой среде.

Совокупность полученных данных – независимость скорости от полярности, высокие отрицательные значения $\Delta S^{\neq}$ и эффект сольватации донорами Н-связей – убедительно свидетельствует в пользу согласованного механизма исследуемой Альдер-еновой реакции (Схема 1). Образование промежуточного азиридиний имида в данном случае маловероятно, так как оно должно было бы сопровождаться существенно иными кинетическими параметрами и сильным влиянием полярности растворителя.

Выводы.

1. Впервые проведено систематическое кинетическое исследование Альдер-еновой реакции 4-фенил-1,2,4-триазолин-3,5-диона с 2-кареном в интервале температур 10–40 °C в ряду растворителей.
2. Рассчитаны параметры активации реакции: энтальпия (19–39 кДж·моль$^{-1}$) и энтропия (-139 ... -176 Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$). Значения энтропии активации характерны для реакций, протекающих через упорядоченное циклическое переходное состояние и хорошо согласуются с литературными данными для других перициклических процессов.
3. Установлено, что скорость реакции не зависит от полярности растворителя, но увеличивается в средах, способных к специфической сольватации (1,2-дихлорэтан) за счет стабилизации переходного состояния водородными связями. Напротив, в 1,4-диоксане, акцепторе водородных связей, наблюдается наименьшая скорость.
4. Совокупность кинетических данных (независимость от полярности, высокие отрицательные $\Delta S^{\neq}$, специфическое влияние доноров Н-связей) однозначно указывает на то, что реакция протекает по согласованному синхронному механизму, без образования заряженных интермедиатов. Обсуждение ступенчатого механизма с образованием азиридиний имида в рамках данной реакции не находит кинетического подтверждения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Kolb H.C., Finn M.G., Sharpless K.B. Click Chemistry: Diverse Chemical Function from a Few Good Reactions // Angew. Chem. Int. Ed. 2001. V. 40. P. 2004–2021.*
2. *Hyatt J.A. // J. Org. Chem. 1983. V. 48. P. 129–131.*
3. *Mock W.L. // J. Am. Chem. Soc. 1975. V. 97. P. 3666–3674.*
4. *Hook J.D. // J. Org. Chem. 1988. V. 53. P. 3937–3939.*
5. *Mustafin A.G., et al. // Russ. J. Phys. Chem. A. 2019. V. 93. P. 234–240.*
6. *Гордон А., Форд Р. Спутник химика. – М.: Мир, 1976.*
7. *Sauer J., Sustmann R. // Angew. Chem. Int. Ed. 1980. V. 19. P. 779–807.*
8. *Sustmann R., Sicking W., Huisgen R. // J. Am. Chem. Soc. 2003. V. 125. P. 14425–14434.*
9. *Snider B.B., et al. // J. Org. Chem. 2006. V. 71. P. 8400–8406.*
10. *Cornils B., et al. (Eds.) Aqueous-Phase Organometallic Catalysis. – Wiley-VCH, 1998.*

2030 UZBEKISTAN RESEARCH ONLINE
uzjournals.edu.uz

doi® digital object identifier

Google scholar

ROAD DIRECTORY OF OPEN ACCESS SCHOLARLY RESOURCES

ADVANCED SCIENCES INDEX

"SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY"

The journal was composed in the Editorial and Publishing Department of Bukhara State University.

Editorial address:
Bukhara, 200117
Bukhara State University, main building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing Department.
https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted 29.10.2025 y. Paper format 60x84,1/8. Printed in express printing method. Conditional printing plate – 35,30. Circulation 70. Order № 30. Price is negotiable.

Published in the printing house "BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish Bukhari street, 190 B-house