

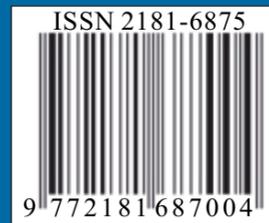


BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

2(1)/2026



2(1)/2026

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2026, № 2, fevral

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), dotsent

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Jamilova Bashorat Sattorovna, filologiya fanlari doktori, professor

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor

Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

O'rinoza Bozorgul Zokirovna, tarix fanlari doktori, dotsent

SERIYA: ANIQ VA TABIIY FANLAR

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
Jalolov O.I., Yusupova F.Q.	Mathcad dasturida interpolyatsiya usullari	3
Azamov S.S. Kobilov Kh.M.,	Optimal quadrature formulas in the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ of periodic functions	8
Ro'zmetova Y.U.	Matematik funksiyalarning turlari va ularning amaliy qo'llanilishi	19
Halimov S.S., Safarova D.S.	Ba'zi kasr tartibli hosilalar va ularning tatbiqlari	24
Djumabaev G.Kh., Eshimbetov M.R.	Determinant concept in Max-plus algebra	33
Boltayev A.A., Avliyoqulov D.Q., Mirzoyeva S.O.	Pseudogiperbolik integro-differensial tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masala	39
Asqaraliyeva M.A.	Buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masala haqida	45
Jalolov O.I., Fayzullayeva N.V.	Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishda ketma-ket differensiallash metodining algoritmi	53
Xayatov X.U., Qayimova M.B.	Python dasturlash tilida simvolik hisoblashlarning matematik asoslari va amaliy tatbiqi	58
Yusufzoda X.Y.	Gilbert fazosida optimal interpolyatsion formulalarning umumiy ko'rinishi	63
Имомназаров Х.Х., Бахрамов Р.Х.	Потенциалы двойного слоя для уравнения, возникающего в двухфазной среде	71
Шадиметов Х.М., Хаятов Х.У.	Построение оптимальной весовой квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций	75
Gadaev S.A., Samandarov T.N., Rahmanov U.M.	Analogue of Kishi's theorem for logarithmic potentials	82
Каландаров А. А.	Связанная динамическая задача нелинейной термоупругости для ортотропного параллелепипеда	89
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Kholdorov O.N.	Testing spacetime around black holes in dark matter halo by quasiperiodic oscillations	99
Имомназаров Х.Х., Давлатов Ж.Э.	Моделирование нелинейных волн в модели возникающей холодной плазмы	104
Nosirov M.U., Sulaymonov M.M., Butanov X.T., Nurmetov J.R., Bobojonov K.A., Raximov X.Y.	Grafenda elektrostatik potentsiallar asimmetriyasining elektron to'lqin paketlari dinamikasiga ta'siri	112

Fayzullayeva M.L., Eshbo'riyev R.	Zarafshon vohasi suv va tuproqlarining xavfsizlik masalalari va radioekologik monitoringi	118
Maxmanov U.K., Tursunqulov E.A., Ramazonov A.X., Baxriyev N.N.	C ₇₀ /benzol/siklogeksan ternar tizimlarning barqarorlik xususiyatlari tadqiqi	122
Maxmanov U.K., Aslonov B.A., Shodiyeva D.S.	Suvning turli hajm ulushlarida uch komponentli C ₇₀ /benzol/suv eritmalarining optik va o'lcham xususiyatlarining o'zgarishi	128
Abraeva S.T.	Si(111) sirtida yuqori doza ion implantatsiyasi natijasida plazmon energiyasi kamayishining nazariy tahlili	134
Mamatkarimov O.O., Quchqarov B.H., Abdulxayev A.A.	Metall–dielektrik–yarimo'tkazgich tuzilmalarida interfeys holatlarining kinetik jarayonlari va elektrfizik xususiyatlari	139
Saidjanova M.Sh.	TbAlO ₃ ning qutblanish optik spektrlari	145
Dadamirzayev M.G'., Qosimova M.O., Maxmudov A.S.	Bir qatlamli MoS ₂ elektr o'tkazuvchanligining yo'rug'lik ta'sirida o'zgarishi	150
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Mirzaev J.D., Suvanov F.U., Abdukhalilova M.A.	Impact of small and damaged starch granules in wheat flour on the hardening of bakery products during storage	156
Artiqov A., Baxramova L.A., Shakarova Sh.U.	Sut mahsulotlari xavfsizligini ta'minlashda pasterizatsiya jarayoniga tizimli fikrlash asosida yondashuv (plastinkali pasterizator misolida)	164
ИНФОРМАТИКА *** INFORMATICS *** ИНФОРМАТИКА		
Xusenov M.Z., Istamov B.B.	Universitet axborot tizimlarini integratsiyalashda kutubxona modulining arxitektura va funksional yechimlari	169
Qurbonov G'.G'., Iskandarov J.Sh.	Raqamli kriptografiyaning zamonaviy rivojlanish bosqichlari	176
Jumayev J., Nematova M.F., Fathiddinov S.L.	Massivlarni tartiblash usullarining Python dasturlash tilidagi talqini	180
ТЕХНИКА *** TECHNIQUE *** ТЕХНИКА		
Рузимуродов Ж.Т., Эшмаматов С.К., Рахматов М.А.	Перспективы использования концентрированной солнечной тепловой энергии в Узбекистане	185

MATHCAD DASTURIDA INTERPOLYATSIYA USULLARI

Jalolov Ozodjon Isomidinovich,
Buxoro davlat universiteti dotsenti, f.-m.f.n.
o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz
Yusupova Feruza Qahramon qizi,
Buxoro davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada Mathcad dasturiy muhitida interpolyatsiya usullarini qo‘llash masalalari yoritilgan. Interpolyatsiyaning chiziqli, Lagrange va splayn usullarining nazariy asoslari hamda Mathcad muhitida amalga oshirish mexanizmlari ko‘rib chiqilgan. Har bir usulning matematik modeli, dasturiy funksiyalari va grafik ko‘rinishdagi natijalari tahlil qilingan. Interpolyatsiya usullarining aniqligi, hisoblash murakkabligi va amaliy qo‘llanilish imkoniyatlari o‘zaro taqqoslangan. Tadqiqot natijalari Mathcad dasturidan muhandislik hisob-kitoblari, ma’lumotlarni tahlil qilish va modellashtirishda samarali foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: Mathcad dasturi, interpolyatsiya usullari, chiziqli interpolyatsiya, Lagrange interpolyatsiyasi, kubik splayn, sonli usullar, matematik modellashtirish, muhandislik hisob-kitoblari, grafik vizualizatsiya, ma’lumotlar tahlili.

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОГРАММЕ MATHCAD

Аннотация. В данной статье рассматриваются методы интерполяции в программной среде Mathcad. Приведены теоретические основы линейной, лагранжевой и сплайн-интерполяции, а также особенности их реализации в Mathcad. Описаны математические модели, встроенные функции и графическая визуализация результатов интерполяции. Выполнено сравнение методов по точности, вычислительной сложности и практической эффективности. Полученные результаты показывают, что Mathcad является удобным и эффективным инструментом для решения инженерных и научных задач, связанных с анализом и интерполяцией данных.

Ключевые слова: Mathcad, методы интерполяции, линейная интерполяция, интерполяция Лагранжа, кубический сплайн, численные методы, математическое моделирование, инженерные расчёты, графическая визуализация, анализ данных.

INTERPOLATION METHODS IN MATHCAD SOFTWARE

Abstract. This article discusses interpolation methods implemented in the Mathcad software environment. The theoretical foundations of linear, Lagrange, and spline interpolation methods are presented, along with their practical implementation using Mathcad functions. Mathematical models, computational procedures, and graphical visualization of interpolation results are analyzed. The methods are compared in terms of accuracy, computational complexity, and applicability. The study demonstrates that Mathcad is an effective tool for data analysis, numerical modeling, and engineering calculations involving interpolation problems.

Keywords: Mathcad, interpolation methods, linear interpolation, Lagrange interpolation, cubic spline, numerical methods, mathematical modeling, engineering calculations, graphical visualization, data analysis.

Kirish. Hozirgi kunda ilmiy-texnik masalalarni yechishda sonli usullar va matematik tizimlarning ahamiyati tobora ortib bormoqda. Real jarayonlarni matematik modellashtirish, tajriba natijalarini tahlil qilish va oraliq qiymatlarni aniqlashda interpolyatsiya usullari muhim o‘rin egallaydi. Ko‘p hollarda fizik jarayonlar, iqtisodiy ko‘rsatkichlar yoki muhandislik tajribalari natijasida olingan funksional bog‘lanishlar analitik formula (formula ko‘rinishida) emas, balki diskret nuqtalar to‘plami — jadval ko‘rinishida beriladi.

Masalan, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari $[a, b]$ kesmadagi chekli sondagi x_0, x_1, \dots, x_n nuqtalarda (tugunlarda) ma’lum bo‘lsin: $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Amaliyotda ko‘pincha ushbu tugun nuqtalar orasidagi biror x nuqtada funksiyaning qiymatini topish talab etiladi. Bu jarayon interpolyatsiyalash deb ataladi.

Interpolyatsiyaning asosiy g'oyasi shundan iboratki, berilgan $f(x)$ funksiya o'rniga hisoblash uchun qulayroq bo'lgan, lekin tugun nuqtalarida berilgan funksiya bilan ustma-ust tushadigan boshqa bir $\phi(x)$ funksiya (odatda ko'phad) olinadi. Agar $\phi(x)$ funksiya n -darajali algebraik ko'phad bo'lsa, bu interpolatsion ko'phad deyiladi[1,2].

Interpolatsiya masalalarini samarali va qulay yechish uchun Mathcad dasturi muhandislik hisob-kitoblarda keng foydalaniladigan zamonaviy matematik muhitlardan biri hisoblanadi. Ushbu dastur matematik ifodalarni tabiiy shaklda kiritish, grafiklar qurish va natijalarni vizual tarzda tahlil qilish imkonini beradi. Mathcad muhiti foydalanuvchidan chuqur dasturlash bilimlarini talab qilmasdan, murakkab sonli hisoblashlarni tez va aniq bajarishga yordam beradi.

Mathcad tizimi matematik hisob-kitoblarni bajarish, grafiklarni qurish, hamda murakkab matematik modellashtirish jarayonlarini avtomatlashtirish imkonini beruvchi muhandislik yo'nalishidagi universal dasturiy muhitdir. Dastur foydalanuvchiga formulasimon yozuvda hisoblashlar olib borish, funksiyalarni ifodalash, grafiklar chizish, va sonli hamda analitik yechimlarni ko'rish imkoniyatini beradi.

Masalaning qo'yilishi. Funksiyalarni yaqinlashtirish odatda ko'rinishi murakkab bo'lgan funksiyani, unga yaqin va tuzilishi soddaroq bo'lgan funksiyaga almashtirish g'oyasiga asoslangan. Funksiyalarni yaqinlashtirishning eng sodda va keng qo'llaniladigan qismi funksiyalarni interpolatsiyalash masalasini ko'rib chiqamiz. Funksiyamiz oshkor yoki jadval ko'rinishda berilishi mumkin. Funksiyalarni interpolatsiyalash deganda funksiyani jadvalda berilmagan qiymatlarida hisolash tushiniladi. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ qiymatlari ma'lum bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning shunday $P(x)$ ko'phad bilan almashtirish kerakki natijada $[a,b]$ oraliqda $f(x) \approx P(x)$ o'rinli bo'lsin, aynan tugun nuqtalarda bu funksiyalar bir xil qiymat qabul qiladi, ya'ni $f(x_i) = P(x_i)$, ($i=0..n$).

Faraz qilamiz, $a \leq x \leq b$ kesmada $x_k, k=0,1,\dots,n$ (tugun nuqtalar) berilgan nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari ma'lum bo'lsin. Funksiyani ko'phad bilan interpolatsiyalash masalasi, berilgan $x_k, k=0,1,\dots,n$ tugun nuqtalarda qiymati $f(x)$ funksiya qiymatiga teng bo'lgan n -tartibli

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

ko'phadni topishdan iborat.

Bu masala har qanday uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun yagona yechimga ega. Haqiqatdan ham, a_0, a_1, \dots, a_n koefitsientlarni aniqlash uchun

$$a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n = f(x_i), i=0,1,2,\dots,n \quad (2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga egamiz.

Bu sistemaning determinanti $x_i, i=0,1,\dots,n$ nuqtalar turlicha bo'lganda noldan farqlidir.

$$L_n(x_i) = f(x_i), i=0,1,\dots,n \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiradigan $L_n(x)$ ko'phad $x_i, i=0,1,\dots,n$ nuqtalar bo'yicha qurilgan $f(x)$ funksiyaning interpolatsion ko'phadi deb aytiladi[3,6].

Interpolatsiya masalasini Mathcad tizimida ko'rib chiqamiz. Mathcadning asosiy afzalliklaridan biri shundaki, u foydalanuvchi tomonidan kiritilgan matematik ifodalarni real matematik shaklda aks ettiradi va bu orqali algoritmlarni aniq tushunish, xatoliklarni kamaytirish imkonini beradi. Interpolatsiya masalalarini yechishda Mathcad quyidagi imkoniyatlarga ega:

1. Ma'lumotlar to'plami asosida interpolatsion funksiyalarni qurish;
2. Polinomial, chiziqli, va splayn interpolatsiyalarni avtomatik amalga oshirish;
3. Grafik asosida interpolatsiya aniqligini tahlil qilish;
4. Interpolatsiya jarayonida hosil bo'lgan funksiya qiymatlarini sonli va analitik tarzda ko'rish.

Mathcadda interpolatsiya modellari «Interpolation and Prediction Functions» bo'limida joylashgan bo'lib, ular ma'lumotlar tahlili, signal qayta ishlash, muhandislik modellari va statistik bashoratlarda qo'llaniladi. Dasturda interpolatsiya ikki bosqichda amalga oshiriladi:

- Birinchi bosqichda spline yoki polinom koefitsientlari hisoblanadi (masalan, lspline, cspline funksiyalari yordamida).
- Ikkinchi bosqichda interp funksiyasi orqali oraliq qiymatlar topiladi.

Mathcadning afzalligi shundaki, u matematik ifodalarni tabiiy shaklda (masalan, matn va formulalar aralash) yozishga imkon beradi, bu ilmiy tadqiqotlarda qulaylik yaratadi. Biroq, katta ma'lumotlar to'plamlari uchun hisoblash tezligi cheklangan bo'lishi mumkin.

Asosiy natija. Mathcadda interpolyatsiya uchun quyidagi asosiy funksiyalar qo'llaniladi:

1. linterp (vx, vy, x) – chiziqli interpolyatsiya.
2. cspline (vx, vy) – kubik spline koeffitsientlarini hosil qilish.
3. pspline (vx, vy) – parabolik spline koeffitsientlarini hosil qilish.
4. interp (vs, vx, vy, x) – umumiy interpolyatsiya (spline yoki Lagrange).

Chiziqli interpolatsiya eng oddiy, lekin ko'plab amaliy masalalarda samarali natija beruvchi usullardan biridir. Uning matematik modeli quyidagicha ifodalanadi:

$$f(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

bu yerda (x_i, y_i) va (x_{i+1}, y_{i+1}) – ma'lum nuqtalar, x – interpolyatsiya qilinadigan nuqta.

Mathcad tizimida linterp(vx,vy,x) funksiyasini quyidagi jadval ko'rinishda berilgan funksiya uchun qo'llab ko'ramiz.

1-jadval. Funksiyaning jadval ko'rinishi.

x	4	4,03	4,08
y	4,42	4,89	5,38

Mathcad tizimida x,y massivlarni yaratamiz va linterp(vx,vy,x) funksiyasini chaqiramiz:

$$x := \begin{pmatrix} 4 \\ 4.03 \\ 4.08 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 4.42 \\ 4.89 \\ 4.08 \end{pmatrix}$$

$$z := \text{linterp}(x, y, 4.007) \quad z = 4.53$$

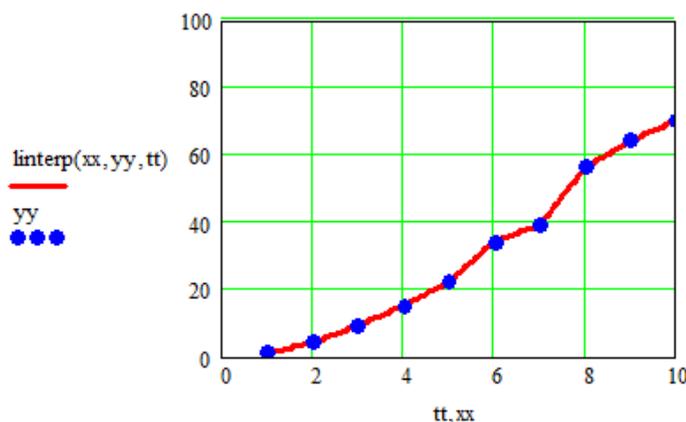
MathCAD tizimida interpolyatsiyani grafik ko'rinishini hosil qilish uchun Grafik panelidan ekranga "X-Y plot" buyrug'ini chaqiramiz va funksiyaning noma'lum qiymati argumenti qiymati o'rniga indekslangan qiymatni beramiz.

Agar ko'proq massiv qiymatlari bo'lsa, indekslangan o'zgaruvchi kichikroq qadam bilan olingan bo'lsa, silliq chiziq olinadi. Misol uchun, linterp funksiyasidan quyidagi foydalanishni ko'rib chiqamiz[4,5].

$$xx := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10)^T$$

$$yy := (1 \ 4 \ 9 \ 15 \ 22 \ 34 \ 39 \ 56 \ 64 \ 70)^T$$

$$tt := 1, 1.01.. 10$$



1-rasm. Funksiya interpolyatsiyasi grafigi

Shunday qilib, agar siz indekslangan o'zgaruvchini argument sifatida qabul qilsangiz, interpolatsiya funksiyasini yaratishingiz mumkin:

$$z(x1):=\text{interp}(x,y,x1).$$

Lagranj interpolatsiyasi yuqori aniqlikka ega bo'lgan usul bo'lib, funksiya qiymatlarini n ta nuqtada bilgan holda ularni birlashtiruvchi n-1 darajali polinomni topishga asoslanadi.

Lagranj interpolatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{(j \neq k)} (x - x_j)}{\prod_{(j \neq k)} (x_k - x_j)} \cdot f(x_k) \quad (4)$$

Mathcad muhitida bajarilishi:

1. Ma'lumotlar kiritiladi:

$$x := [0, 1, 2, 3]$$

$$y := [1, 2, 0, 5]$$

2. Lagrange funksiyasi chaqiriladi:

$$y := \text{interp}(vx, vy, vx, vy, x)$$

3. Natija grafikda tekshiriladi:

$$\text{plot}(x, y, 'o', X, P(X), '-')$$

Ilmiy tadqiqotning ko'pgina amaliy qo'llanilishida tajriba nuqtalarini sinq chiziq bilan emas, balki silliq egri chiziq bilan bog'lash maqsadga muvofiqdir. Ushbu maqsadlar uchun kubik splaynlar yoki kubik parabolalarning segmentlari yordamida interpolatsiya qilish eng mos keladi. Splayn interpolatsiyasi — bu yuqori aniqlikdagi interpolatsiya usuli bo'lib, funksiya har bir oraliqda kubik polinom orqali ifodalanadi va oraliq nuqtalarda 1- va 2-hosilalari uzluksiz bo'ladi.

Kubik splayn interpolatsiyasi tenglamasi quyidagicha:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

- $\text{interp}(s,x,y,t)$ — kubik splinelar bilan x va y vektor ma'lumotlariga yaqinlashuvchi funksiya;
- s — cspline, pspline yoki lspline qo'shimcha funktsiyalaridan biri tomonidan ishlab chiqarilgan ikkinchi tartibli hosilalarning vektori;
- x — Elementlari o'sish tartibida joylashtirilgan haqiqiy argument ma'lumotlarining vektori;
- y — bir xil o'lchamdagi haqiqiy ma'lumotlar qiymatlari vektori;
- t — interpolatsiya funksiyasi hisoblangan argumentning qiymati.

Mathcad da spline interpolatsiyasi chiziqli interpolatsiyaga qaraganda ancha murakkab amalga oshiriladi. Shunday qilib, interp funksiyasidan foydalanish uchun siz birinchi navbatda uning argumentlaridan birinchisini - s vektor o'zgaruvchisini aniqlashingiz kerak. Bu bir xil argumentlarning (x, y) uchta o'rnatilgan funktsiyalaridan biri yordamida amalga oshiriladi:

- $\text{lspline}(x,y)$ — chiziqli spline koeffitsienti qiymatlari vektori;
- $\text{pspline}(x,y)$ — kvadratik spline koeffitsienti qiymatlari vektori;
- $\text{cspline}(x,y)$ — kubik spline koeffitsienti qiymatlari vektori.

cspline funksiyasidan foydalangan holda spline interpolatsiyasiga misol:

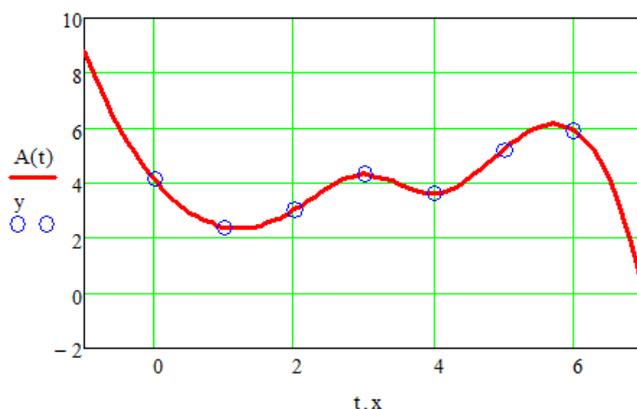
$$x := (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T \quad y := (4.1 \ 2.4 \ 3 \ 4.3 \ 3.6 \ 5.2 \ 5.9)^T$$

$$s := \text{cspline}(x, y)$$

$$A(t) := \text{interp}(s, x, y, t)$$

$$t := -1, -0.9..7$$

Spline interpolatsiyasining natijasi 2-rasmda ko'rsatilgan.



2-rasm. Spline interpolatsiyasi

Quyida uch xil interpolatsiya usuli taqqoslab ko'rsatilgan:

Chiziqli – oddiy, tez va barqaror, lekin aniqligi past.

Lagrange – yuqori aniqlikda, ammo hisoblash murakkab.

Splayn – silliq, aniqligi yuqori va amaliy jihatdan eng samarali.

Mathcad dasturida interpolatsiya usullari ma'lumotlarni tahlil qilish va vizualizatsiya qilishda muhim vosita hisoblanadi. Chiziqli interpolatsiya oddiy masalalarda samarali bo'lsa, kubik spline va Lagrange usullari murakkab va silliq funksiyalarni modellashtirishda afzalroqdir. Har bir usulning o'ziga xos afzalliklari va cheklovlari mavjud bo'lib, ularni to'g'ri tanlash masalaning xususiyatlariga bog'liq[4,5].

Xulosa. Mathcad dasturida interpolatsiya usullarini qo'llash ma'lumotlar asosida funksiyalarni aniqlash va ularni tahlil qilish jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi. Ushbu maqolada chiziqli, Lagrange va kubik splayn interpolatsiya usullarining nazariy va amaliy jihatlari ko'rib chiqildi hamda ularning Mathcad muhitida bajarilishi amaliy misollar orqali yoritildi.

Chiziqli interpolatsiya hisoblash jihatidan eng oddiy va tezkor usul bo'lib, kam sonli ma'lumotlar bilan ishlashda samarali natija beradi. Lagrange interpolatsiyasi yuqori aniqlikka ega bo'lsada, nuqtalar soni oshishi bilan hisoblash murakkablashadi va Runge hodisasi yuzaga kelishi mumkin. Kubik splayn interpolatsiyasi esa silliqlik va aniqlikni ta'minlab, ko'pgina amaliy masalalar uchun eng maqbul usul ekanligi aniqlandi.

Olib borilgan tahlillar shuni ko'rsatadiki, interpolatsiya usulini tanlash masalaning fizik mohiyati, ma'lumotlar soni va aniqlik talablariga bevosita bog'liq. Mathcad dasturi esa ushbu usullarni qulay interfeys va kuchli vizualizatsiya vositalari orqali samarali qo'llash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalari muhandislik hisob-kitoblari, ilmiy tadqiqotlarda interpolatsiya usullaridan foydalanishda amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1. Исроилов М.И. *Ҳисоблаш методлари. Тошкент, Ўқитувчи, 1-қисм, 2003.*
2. Самарский А.А. *Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.*
3. Burden R. L., Faires J. D. *Numerical Analysis. — Boston: Cengage Learning, 2011.*
4. Imomova Sh.M., Xayatov X.U., Jalolov O.I., Djabborova N.N. *Kompyuterli matematik tizimlar. Vuxoro, 2023, 220 b.*
5. Макаров Е. *Инженерные расчёты в MATHCAD 14.- СПб. : Питер, 2007. -592 с.*
6. Очков В.Ф. *Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. - 368 с.*

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN THE SPACE $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ OF PERIODIC FUNCTIONS

Azamov Siroj Sobirovich,
Docent of Tashkent State Transport University, PhD
Kobilov Khojiakbar Mukhammadjon ugli,
PhD student at Tashkent International University
khoji1997@mail.ru

Abstract. This paper is devoted to the process of finding the upper bound for the absolute error of the optimal quadrature formula in the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ of real-valued, periodic functions. For this, the extremal function of the quadrature formula is used. In addition, it is shown that the norm of the error functional for the optimal quadrature formula constructed in the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ is less than the value of the norm of the error functional for the optimal quadrature formula in the Sobolev space $\tilde{L}_2^{(m)}$.

Key words: optimal quadrature formula, optimal coefficients, error of quadrature formula, Hilbert space, error functional, Fourier transform.

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Данная статья посвящена процессу $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ нахождения верхней границы абсолютной погрешности оптимальной квадратурной формулы в пространстве вещественнозначных периодических функций. Для этого используется экстремальная функция квадратурной формулы. Кроме того, показано, что норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы, построенной в данном пространстве, меньше значения нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы, построенной в пространстве Соболева.

Ключевые слова: оптимальная квадратурная формула, оптимальные коэффициенты, погрешность квадратурной формулы, пространство Гильберта, функционал погрешности, преобразование Фурье.

$W_2^{(m,m-1,m-2)}$ DAVRIY FUNKSIALAR FAZOSIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

Annotatsiya. Mazkur maqola $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ haqiqiy qiymatli davriy funksiyalar fazosida optimal kvadratura formulasining mutlaq xatoligi uchun yuqori chegarani topish jarayoniga bag'ishlangan. Buning uchun kvadratura formulasining ekstremal funksiyasidan foydalaniladi. Bundan tashqari, ko'rsatiladiki, ushbu fazoda qurilgan optimal kvadratura formulasining xatolik funksionali normasi Sobolev fazosida qurilgan optimal kvadratura formulasining xatolik funksionali normasi qiymatidan kichikdir.

Kalit so'zlar: optimal kvadratura formulasi, optimal koeffitsiyentlar, kvadratura formulasining xatoligi, Hilbert fazosi, xatolik funksionali, Furiye o'zgartirishi.

Introduction. Numerical calculation of integrals of the highly oscillating integrals is one of the more critical problems on numerical analysis because such integrals are widely used in science and technology. The following types of the Fourier integrals are also examples of strongly oscillating integrals for sufficiently large ω :

$$I(\omega, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cdot \varphi(x) dx \quad (1)$$

It is known that the Fourier transforms are very important tools and they are used widely, in particular, in the problems of Computed Tomography (see, for instance [9]). Since in practice we have finite discrete values of a function, we have to approximately calculate the Fourier transforms. Therefore, one has to consider the problem of approximate calculation of the integral with the weight function $\exp(2\pi i \omega x)$. Initially, a formula for the numerical integration of the strongly oscillatory functions one of the non standard numerical integration methods was given by Filon [19].

Subsequently for integrals with different types of highly oscillating functions many special effective methods such as the Filon-type method, Clenshaw-Curtis-Filon type method, modified Clenshaw-Curtis method, Levin type methods, generalized quadrature rule, and Gauss-Laguerre quadrature are developed (see [2, 14, 21, 26] for full details, for instance, [13, 24] and references therein).

Recently, in the works [6, 7, 8, 25] authors constructed optimal quadrature formulas for numerical calculation of Fourier integrals in the Sobolev space $L_2^{(m)}$ and in the Hilber space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$, and these formulas were applied to approximate reconstruction of Computed Tomography images. Compared with the optimal quadrature formulas in non-periodic case constructed in [6], the approximation formula for the periodic case constructed in the works [7, 17, 18] is much simpler, therefore it is easy to implement and it costs less computation even though both provide similar performances.

In various Hilbert and Banach spaces of periodic and non-periodic functions, optimal quadrature formulas have been constructed by many researchers for integral (1) with $\omega = 0$. The results for this case can be found, for instance, in the books [12, 23, 22] and the literature in them. In particular, some recent results on optimal quadrature and interpolation formulas are obtained in the works [1, 3, 5, 15].

In the work [16, pp. 119–142] weighted optimal quadrature and cubature formulas in the Sobolev space of periodic functions were constructed. In particular, one can get from these results the optimal quadrature formulas for numerical calculation of the integral (1). For example, the practical use of these formulas which were constructed in the Hilbert spaces of non-periodic functions created difficulties in computational work.

Therefore, construction of new optimal quadrature formulas, which are simple in implementation, in various Hilbert spaces of periodic functions is very important. We note that we have constructed the optimal quadrature formula in the case $m = 2$ for integral (1) with $\omega = 0$ in the paper [10]. In the present work we get the results for $m \geq 3$.

Here, we solve the problem of construction of optimal quadrature formula in the Hilbert space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ of periodic functions. In the book [23], the optimal quadrature formulas were constructed in the general case in the space of periodic functions, and it was proved that the coefficients of the formulas have the form $\overset{\circ}{C}_k = h$. Nevertheless the estimation of the error for the optimal formulas was not given. The main goal of the present work is to find the sharp upper bound for the error of the optimal quadrature formula constructed in the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ of periodic, real-valued functions.

We consider the Hilbert space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$, $m \geq 3$ of non-periodic, real-valued functions $\varphi(x), 0 \leq x \leq 1$, that $(m - 2)$ nd order derivative is absolute continuous and m th order derivative (in the generalized sense) are square integrable, with the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(m,m-1,m-2)}} = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \psi^{(m)}(x) + 2\varphi^{(m-1)}(x) \psi^{(m-1)}(x) + \varphi^{(m-2)}(x) \psi^{(m-2)}(x) \right) dx \quad (2)$$

where $\varphi, \psi \in W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$, and the corresponding norm of the function φ is defined as follows

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)}} = \left(\int_0^1 \left((\varphi^{(m)}(x))^2 + 2(\varphi^{(m-1)}(x))^2 + (\varphi^{(m-2)}(x))^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let us denote by $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ the subspace of the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ consisting of real-valued, 1-periodic functions $\varphi(x)$, $x \in (0,1]$.

In the present paper, we consider the Hilbert space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ of 1-periodic, real-valued functions. Notice that every element of the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ satisfies the following condition of 1-periodicity

$$\varphi(x + \beta) = \varphi(x), \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \quad \text{and } \beta \in \mathbb{Z}$$

We consider a quadrature formula of the following form

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(x_k) \tag{3}$$

where $\varphi \in W_2^{(m,m-1,m-2)}$, C_k are the coefficients of the quadrature formula and N is the number of nodes, $h = 1/N$ and x_k ($0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq 1$) are nodes. Since quadrature formula of the form (1) with equidistant nodes is optimal for the periodic functions class, we choose the nodes as $x_k = hk$ (see [23]).

The error of the quadrature formula (1) is given as follows

$$\begin{aligned} (\ell, \varphi) &= \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk) = \\ &= \int_0^1 \left[\left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk) \right) * \phi_0(x) \right] \cdot \varphi(x) dx, \end{aligned} \tag{4}$$

where $h = \frac{1}{N}$, $\varepsilon_{(0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $(0,1]$, δ is the Dirac delta-function, $\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta)$, $*$ is the convolution operation and

$$\ell(x) = \left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk) \right) * \phi_0(x) \tag{5}$$

and it is the periodic error functional of the quadrature formula (1).

The error (2) of the quadrature formula (1) is a linear functional in $W_2^{(m,m-1,m-2)*}$. It should be noted that $W_2^{(m,m-1,m-2)*}$ is the conjugate space to the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ and the conjugate space consists of all periodic functionals which are orthogonal to the unity [22], i.e.,

$$(\ell, 1) = 0 \tag{6}$$

This condition means the exactness of the quadrature formula (1) for any constant and it can be written as follows

$$\sum_{k=1}^N C_k = 1 \tag{7}$$

The absolute value of the error (2) is estimated by the Cauchy-Schwarz inequality as follows

$$|(\ell, \psi_\ell)| \leq \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)}}$$

where

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}} = \sup_{\|\varphi\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)}}=1} |(\ell, \varphi)| \quad (8)$$

is the norm of the error functional (3).

The problem of constructing an optimal quadrature formula of the form (1) is as follows.

Problem 1. Find the coefficients C_k that give the minimum value to the quantity $\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}$, and calculate the following

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}^0 = \inf_{C_k} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}.$$

We note that the coefficients C_k which are the solution for Problem 1 are called the optimal coefficients and the quadrature formula (1) with these coefficients is said to be the optimal quadrature formula in the sense of Sard [11].

Further, in the next sections we solve Problem 1.

The rest of the paper is organized as follows. Section 2 is devoted to calculation the norm of the error functional and to obtain the system of linear equations for optimal coefficients which give the minimum value to the norm of the error function. In section 3 this system is solved and explicit expressions for the coefficients of the optimal quadrature formula (1) are found. Finally, in Section 4 we calculate the quantity of the norm of the error functional (3) that is the sharp upper bound for the error of the optimal quadrature formula (1).

The norm for the error functional of the quadrature formula.

To calculate the norm (5), we use the extremal function ψ_ℓ for the error functional ℓ (see [22]) that satisfies the following equality:

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}} \cdot \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)}} \quad (9)$$

Since $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ is the Hilbert space by the Riesz theorem for the error functional ℓ for any φ from $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ there exists an element $\psi_\ell \in W_2^{(m,m-1,m-2)}$ that satisfies the equality

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,m-1,m-2)}} \quad (10)$$

where $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{W_2^{(m,m-1,m-2)}}$ is the inner product of the functions ψ_ℓ and φ defined by the

formula (4). In addition, the equality $\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}} = \|\psi_\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)}}$ is fulfilled. So, taking into account equality (9), we derive

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}^2 \quad (11)$$

Integrating by parts the right-hand side of (10), keeping in mind periodicity of functions φ , for ψ_ℓ we have

$$\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x) = (-1)^m \ell(x) \quad (12)$$

Further, we give the main results of this work.

Lemma 1. The solution of equation (12) is the extremal function ψ_ℓ of the error functional ℓ and it is expressed as

$$\psi_\ell(x) = d_0 - \sum_{k=1}^N C_k G_m(x - hk) \quad (13)$$

where d_0 is a constant and

$$G_m(x) = (-1)^m \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta x}}{(2\pi\beta)^{2m} - 2(2\pi\beta)^{2m-2} + (2\pi\beta)^{2m-4}} \quad (14)$$

Proof. The idea of the proof is as follows. For this, we use equation (10). Integrating by parts its right-hand side, and taking into account that φ and ψ are 1-periodic functions, we obtain the following

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 (\psi^{(2m)}(x) - 2\psi^{(2m-2)}(x) + \psi^{(2m-4)}(x)) \varphi(x) dx \quad (15)$$

From equality (15) we get the differential equation (12). We use the Fourier transform to find a periodic solution of the differential equation (12). To do this, we use the following properties of the Fourier transforms

$$\begin{aligned} F[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{2\pi i p x} dx, \\ F^{-1}[\varphi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) e^{-2\pi i p x} dp, \\ F[\varphi^{(\alpha)}] &= (-2\pi i p)^\alpha F[\varphi], \quad (\alpha \in \mathbb{N}), \\ F[\varphi * g] &= F[\varphi] \cdot F[g], \\ F[\varphi \cdot g] &= F[\varphi] * F[g], \\ F[\phi_0(x)] &= \phi_0(p), \\ F^{-1}[F[\varphi(x)]] &= \varphi(x), \end{aligned}$$

where $\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta)$.

Applying the Fourier transform to both sides of equation (12) we get

$$F[\psi_\ell^{(2m)} - 2\psi_\ell^{(2m-2)} + \psi_\ell^{(2m-4)}] = (-1)^m F[\ell].$$

Since, the Fourier transform is a linear operator, we have

$$\begin{aligned} &((2\pi i p)^{2m} - 2(2\pi i p)^{2m-2} + (2\pi i p)^{2m-4}) F[\psi_\ell] = \\ &= (-1)^m F\left[\left(\varepsilon_{(0,1]}(x) - \sum_{k=1}^N C_k \delta(x - hk)\right) * \phi_0(x)\right] \end{aligned}$$

or

$$((2\pi i p)^m - (2\pi i p)^{m-2})^2 F[\psi_\ell] = (-1)^m \left(F[\varepsilon_{(0,1]}(x)] - \sum_{k=1}^N C_k e^{2\pi i p h k} \right) \cdot \phi_0(p). \quad (16)$$

Consequently, we can divide both sides of equation (16) by $((2\pi i p)^m - (2\pi i p)^{m-2})^2$. This division is not uniquely defined. From equation (16) the function $F[\psi_\ell]$ is defined up to the term of the form $\delta(p)$. Taking into account the above said and the properties of the delta-function, we get

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m \left[d_0 \delta(p) + \frac{F[\varepsilon_{(0,1]}(x)] - \sum_{k=1}^N C_k e^{2\pi i p h k}}{((2\pi i p)^m - (2\pi i p)^{m-2})^2} \cdot \sum_{\beta \neq 0} \delta(p - \beta) \right].$$

Using the property $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$ of the delta-function, we have the following

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m \left[d_0 \delta(p) + F[\varepsilon_{(0,1]}(x)] \cdot \sum_{\beta \neq 0} \frac{\delta(p-\beta)}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{2\pi i p h k} \delta(p-\beta)}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \right].$$

Now, applying the inverse Fourier transform to both sides of equation (29) and using some properties of Fourier transform, after some calculations we have

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) &= d_0 + \varepsilon_{(0,1]}(x) * \left((-1)^m \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta x}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \right) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^N C_k \left((-1)^m \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta (x-hk)}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \right) = \\ &= d_0 + \varepsilon_{(0,1]}(x) * G_m(x) - \sum_{k=1}^N C_k G_m(x-hk) = \\ &= d_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{(0,1]}(y) G_m(x-y) dy - \sum_{k=1}^N C_k G_m(x-hk) = \\ &= d_0 + \int_0^1 G_m(x-y) dy - \sum_{k=1}^N C_k G_m(x-hk) = \\ &= d_0 - \sum_{k=1}^N C_k G_m(x-hk). \end{aligned}$$

where $G_m(x)$ is defined by equality (14) and it is easy to show that

$$\int_0^1 G_m(x-y) dy = 0$$

And thus, Lemma 1 is completely proved.

Simplifying the error functional of the form (3), we can rewrite it in the following form

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{(0,1]}(x) * \delta(x-\beta) - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-hk) * \delta(x-\beta) = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-\beta-hk). \end{aligned}$$

The square of the norm for ℓ of the quadrature formula (1) is expressed in terms of the bilinear form of the coefficients C_k . Indeed, since the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}$ is the Hilbert space, then using equalities (11) and (13) for the square of norm (5) we have

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}^2 &= (\ell, \psi_\ell) = \int_0^1 \ell(x) \psi_\ell(x) dx = \\ &= \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x-hk-\beta) \right) \left(d_0 - \sum_{k'=1}^N C_{k'} G_m(x-hk') \right) dx \end{aligned}$$

Simplifying the right-hand side of the above equality and taking into account the condition (6) we obtain the following analytical expression

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)*}}^2 = (-1)^m \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N C_k C_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta (hk-hk')}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \tag{18}$$

Now, we apply the method of Lagrange unknown multipliers to solve Problem1. For this, consider the following function

$$L(C, d_0) = \|\ell\|_{W_2^{(m, m-1, m-2)^*}} - 2(-1)^m d_0(\ell, 1)$$

where $C = (C_1, C_2, \dots, C_N)$

Equating all partial derivatives of the function $L(C, d_0)$ by C_k and d_0 we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial C_k} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{\partial L}{\partial d_0} &= 0 \end{aligned}$$

They give the following system of linear equations with respect to $C_k, k = \overline{1, N}$ and d_0 :

$$\sum_{k'=1}^N C_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta h(k-k')}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} = d_0, \quad k = 1, \dots, N \quad (19)$$

$$\sum_{k'=1}^N C_{k'} = 1 \quad (20)$$

The last system is a system Wiener-Hopf type. The solution of the system (19)–(20)

gives the minimum to the square of the norm (18) for the error functional (3) in certain values of C_k

$= \overset{\circ}{C}_k, k = \overline{1, N}$ and $\overset{\circ}{d}_0$ are called the optimal coefficients, and $\overset{\circ}{d}_0$ is a stationary point for the function $L(C, d_0)$.

Its solvability follows from the general theory of the Lagrange multipliers. But, as shown in calculations, the matrix of the system (19) and (20) coincides with the matrix of the system considered in the work [16, p. 127] in the construction of optimal cubature

formulas in the Sobolev space $\tilde{L}_2^{(m)}$ of periodic functions, and it was proved the uniqueness of the set of the optimal coefficients. Hence follows that the system (19) and (20) has a unique solution.

The optimal coefficients of the quadrature formula.

In this section, we show how to find the optimal coefficients of the quadrature formula.

Let, we seek the solution of the system (19)–(20) in the form

$$C_k = C(h), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

where $C(h)$ is an unknown function of h .

Putting (21) into (20), and taking into account that the quadrature formulas with equal coefficients are optimal in the space of periodic functions (see [23] for full details), we obtain $C(h) = h$. Now, figuring on the system has a unique solution, putting the value of $C(h)$ into equation (19), we find d_0 :

$$\sum_{k'=1}^N h \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta h(k-k')}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} = d_0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Since the infinite series in (19) is convergent, we can rewrite the last system as follows

$$d_0 = h \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta h k}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \sum_{k'=1}^N e^{2\pi i \beta h k'}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

It is known that

$$\sum_{k'=1}^N e^{2\pi i \beta h k'} = \frac{e^{2\pi i \beta h} (1 - e^{2\pi i \beta h})}{1 - e^{2\pi i \beta h}} = \begin{cases} 0, & \beta \neq \gamma N, \\ N, & \beta = \gamma N, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (23)$$

Taking into account (23), we rewrite equation (22) as follows

$$d_0 = h \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \gamma N h k}}{((2\pi i \gamma N)^m - (2\pi i \gamma N)^{m-2})^2} \cdot N.$$

From the last equation and the well-known equality $e^{-2\pi i \gamma N h k} = 1$, and $(k = 1, 2, \dots, N, \gamma \in \mathbb{Z})$ we have

$$\begin{aligned} d_0 &= (-1)^m \left(\sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{((2\pi \gamma N)^m - i^2 (2\pi \gamma N)^{m-2})^2} \right) = \\ &= (-1)^m \cdot 2 \left(\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{((2\pi \gamma N)^m + (2\pi \gamma N)^{m-2})^2} \right) \end{aligned} \tag{24}$$

Now we calculate the following infinite series to find d_0

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{((2\pi \gamma N)^m + (2\pi \gamma N)^{m-2})^2} &= 2 \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2m} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{2m-4} \left(\gamma - \frac{hi}{2\pi} \right)^2 \left(\gamma + \frac{hi}{2\pi} \right)^2} = \\ &= \left(\frac{h}{2\pi} \right)^{2m} \cdot (S_1 - S_2 + S_3), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\text{where } S_1 = 2 \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{hi}{2\pi} \right)^{2k-2m} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{2k}};$$

$$S_2 = \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{hi}{2\pi} \right)^{2-2m} \cdot 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\gamma - \frac{hi}{2\pi} \right) \left(\gamma + \frac{hi}{2\pi} \right)} \text{ and}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{hi}{2\pi} \right)^{2-2m} \cdot 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\gamma^2 + \left(\frac{hi}{2\pi} \right)^2}{\left(\gamma - \frac{hi}{2\pi} \right)^2 \left(\gamma + \frac{hi}{2\pi} \right)^2} \text{ for } m \geq 3$$

The problem of calculating the above infinite series came to the problem of calculating S_1 , S_2 and S_3 .

Firstly, we calculate S_1 . To do this, we use the following Riemann zeta function

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

The value of the Riemann zeta function is equal to the following (see [20, p. 57])

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m+1} (2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m} \text{ for } m = 1, 2, \dots,$$

where B_{2m} is Bernoulli number.

From the last equality we obtain the following

$$S_1 = 2 \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{hi}{2\pi} \right)^{2k-2m} \zeta(2k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^{2k-2m} \frac{(-1)^{m+1} (2\pi)^{2m}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Now, we use the following equality to calculate S_2 and S_3 .

Based on the method of residue theory [%]

$$f(\gamma) = \frac{1}{\left(\gamma - \frac{hi}{2\pi}\right)\left(\gamma + \frac{hi}{2\pi}\right)}; \quad 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} f(\gamma) + f(0) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(\gamma)$$

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(\gamma) = -\sum_{z_1, z_2} Res(\pi \cot(\pi z) f(z)), \quad z_1 = \frac{hi}{2\pi}, \quad z_2 = -\frac{hi}{2\pi}.$$

Simplifying using the method of residue theory, we can write:

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(\gamma) = \frac{2\pi^2}{h} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h - 1}, \quad f(0) = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2$$

$$2\sum_{\gamma=1}^{\infty} f(\gamma) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f(\gamma) - f(0) = \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h - 1} - 1\right).$$

Thus, we obtain

$$S_2 = \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^{2-2m} \cdot 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\gamma - \frac{hi}{2\pi}\right)\left(\gamma + \frac{hi}{2\pi}\right)} =$$

$$= \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^{2-2m} \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h - 1} - 1\right)$$

Applying the same method, we calculate S_3 and obtain the result below.

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^{2-2m} \cdot 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\gamma^2 + \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^2}{\left(\gamma - \frac{hi}{2\pi}\right)^2 \left(\gamma + \frac{hi}{2\pi}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{hi}{2\pi}\right)^{2-2m} \cdot \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^h}{(e^h - 1)^2}\right)$$

According to equalities (25) and (26),

$$d_0 = (-1)^m \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \cdot (S_1 - S_2 + S_3) = \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k}\right) -$$

$$- \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{e^h + 1}{e^h - 1} - 1\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^h}{(e^h - 1)^2}\right) \quad (27)$$

Thereby, we have found (C_k, d_0) which the solution of the system (19) and (20).

Now, in the next section, using this solution, we give the main theorem of our work.

Calculation of the norm for the error functional of the optimal quadrature formula (1)

The following theorem is valid for the error functional norm of the optimal quadrature formula.

Theorem 1. The norm of the error functional (3) for the optimal quadrature formula (1) has the form

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)^*}}^2 = (-1)^{m+1} \left(\sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \right) - \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{e^h+1}{e^h-1} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^h}{(e^h-1)^2} \right) \right)$$

where B_{2k} are Bernoulli numbers

Proof. We use equations (18) and (19) and then we have

$$\begin{aligned} \|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)^*}}^2 &= (-1)^m \sum_{k=1}^N \sum_{k'=1}^N C_k C_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta (hk-hk')}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} = \\ &= \sum_{k=1}^N C_k \left[\sum_{k'=1}^N C_{k'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{e^{-2\pi i \beta (hk-hk')}}{((2\pi i \beta)^m - (2\pi i \beta)^{m-2})^2} \right] \end{aligned}$$

Hence, taking into account (19) for the square of $\|\ell\|$, we obtain the following

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)^*}}^2 = (-1)^m \sum_{k=1}^N C_k \cdot d_0$$

Hence, taking into account equalities (20) and (27), we obtain

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,m-1,m-2)^*}}^2 = (-1)^{m+1} \left(\sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) \left(\frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \right) - \frac{2m-3}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{e^h+1}{e^h-1} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{e^h}{(e^h-1)^2} \right) \right)$$

Thus, Theorem 1 is completely proved.

Conclusion. In the present paper, the optimal quadrature formula in the sense of Sard is constructed in the space $W_2^{(m,m-1,m-2)}(0,1]$ of periodic, real-valued functions for approximation of the Fourier integrals (1) with $\omega = 0$. Here, we found analytical forms for coefficients of the constructed optimal quadrature formula. In addition, we calculated the norm of the error functional for the optimal quadrature formula and obtained that this norm is less than the norm of the error functional for the optimal quadrature formula in the space $\tilde{L}_2^{(m)}$ of periodic, real valued functions.

REFERENCES:

1. Baboş A., Acu A. M. *Note on Corrected Optimal Quadrature Formulas in the Sense Nikolski, Applied Mathematics and Information Sciences an International Journal*, 2015. vol. 9, no. 3, pp. 1231–1238.
2. Iserles A., Nørsett S. P. *Efcient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives, Proc. R. Soc. A*, 2005. vol. 461, pp. 1383–1399.
3. Boltaev A. K., Shadimetov Kh. M., Nuraliev F. A. *The extremal function of interpolation formulas in $W(2,0)$ 2 space, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki*, 2021. vol. 36, no. 3, pp. 123–132.
4. Burden A. M., Faires J. D., Burden R. L. *Numerical analysis, 10th edition. Boston, Massachusetts: Cengage Learning*, 2016.
5. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. *Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space, Applied Mathematics and Computation*, 2015. vol. 259, pp. 637–653.
6. Hayotov A. R., Jeon S., Lee C-O., Shadimetov Kh. M. *Optimal quadrature formulas for non-periodic functions in Sobolev space and its application to CT image reconstruction, Filomat*, 2021. vol. 35, no. 12, pp. 4177–4195.
7. Hayotov A. R., Jeon S., Shadimetov Kh. M. *Application of optimal quadrature formulas for reconstruction of CT images, Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021.vol. 388, pp. 113313.223 ISSN 2079-6641 Hayotov A. R. Khayriev U. N.

8. Hayotov A. R., Babaev S. S. *Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in $W(m, m-1)_2$ space*, AIP Conference Proceedings, 2021. vol. 2365, pp. 020021.
9. Hayotov A. R., Jeon S., Lee Ch.-O. *On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L(21)$* , Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020. vol. 372, pp. 112713.
10. Hayotov A. R., Khayriev U. N. *Construction of an optimal quadrature formula in the Hilbert space of periodic functions*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022.
11. Sard A. *Best approximate integration formulas; best approximation formulas*, Amer. J. Math., 1949. vol. 71, pp. 80–91.
12. Demidenko G. V., Vaskevich V. L. *Selected Works of S. L. Sobolev*. New York: Springer, 2006. 603 pp.
13. Milovanović G. V., Stanić M. P. *Numerical Integration of Highly Oscillating Functions / Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions*. Berlin, Springer, 2014, pp. 613–649.
14. Milovanović G. V. *Numerical calculation of integrals involving oscillatory and singular kernels and some applications of quadratures*, Comp. Math. Applic, 1998. vol. 36, no. 8, pp. 19–39.
15. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K., Parovik R. I. *Construction of optimal interpolation formula exact for trigonometric functions by Sobolev's method*, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki, 2022. vol. 38, no. 1, pp. 131–146.
16. Shadimetov Kh. M. *Optimal lattice quadrature and cubature formulas in Sobolev spaces*. Tashkent: Fan, 2019 (In Russian).
17. Shadimetov Kh. M. *Weighted optimal quadrature formulas in a periodic Sobolev space*, Uzbek Math. Journal, 1998. no. 2, pp. 76–86.
18. Shadimetov Kh. M. *Weighted optimal cubature formulas in the periodic Sobolev space*, Siberian Journal of Computational Mathematics, 1999. no. 2, pp. 185–196.
19. Filon L. N. G. *On a quadrature formula for trigonometric integrals*, Proc. Roy. Soc., 1928. vol. 49, pp. 38–47.
20. Temme N. M. *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. New York: A Wiley-Interscience, 1996. 374 pp.
21. Bakhvalov N. S., Vasil'eva L. G. *Evaluation of the integrals of oscillating functions by interpolation at nodes of Gaussian quadratures*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1968. vol. 8, pp. 241–249 (In Russian).
22. Sobolev S. L., Vaskevich V. L. *The Theory of Cubature Formulas*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1997.
23. Nikolskii S. M. *Quadrature formulas*. Moscow: Nauka, 1988 (In Russian).
24. Olver S. *Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals*, PhD dissertation: University of Cambridge, 2008.
25. Babaev S. S., Hayotov A. R., Khayriev U. N. *On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $W_2(1, 0)$* , Uzbek Mathematical Journal, 2020. no. 2, pp. 23–36.
26. Xu Z. Milovanović G. V., Xiang S. *Efficient computation of highly oscillatory integrals with Henkel kernel*, Appl. Math. Comp., 2015. vol. 261, pp. 312–322. 224

MATEMATIK FUNKSIYALARNING TURLARI VA ULARNING AMALIY QO‘LLANILISHI

*Ro‘zmetova Yulduz Ulug‘bekovna,
Osiyo xalqaro universiti magistranti
dostonjumaniyozov5@gmail.com*

***Annotatsiya.** Matematik funksiyalar real hayotdagi jarayonlarni ifodalash, tahlil qilish va ularga ilmiy yondashuv asosida baho berishda eng muhim nazariy-amaliy vositalardan biri hisoblanadi. Ushbu tadqiqotda chiziqli, kvadratik va eksponentsial funksiyalarning xususiyatlari, ularning grafik ko‘rinishi hamda turli sohalaridagi amaliy qo‘llanilishi o‘rganildi. Grafik tahlillar shuni ko‘rsatdiki, chiziqli funksiyalar barqaror va bir tekis o‘zgarishlarni ifodalashda, kvadratik funksiyalar parabolik jarayonlar va optimallashtirish masalalarida, eksponentsial funksiyalar esa tez va keskin o‘zgaruvchan tizimlarni modellashtirishda yuqori samaradorlikka ega. Tahlil natijalari funksiyalarning iqtisodiyotda talab – taklif va daromad jarayonlarini, fizika va muhandislikda harakat, energiya va texnik tizimlarni, axborot texnologiyalarida esa ma‘lumotlar tahlili va algoritmik jarayonlarni tushuntirishda muhim rol o‘ynashini tasdiqladi. Tadqiqot funksiyalarning nazariy ahamiyati bilan birga ularning kundalik hayot, ta‘lim jarayoni va ilmiy tadqiqotlar uchun amaliy qiymatini ham asoslab beradi.*

***Kalit so‘zlar:** matematik funksiyalar, chiziqli funksiya, kvadratik funksiya, eksponentsial funksiya, grafik tahlil, modellashtirish, iqtisodiyot, talab – taklif, fizika, muhandislik, energiya jarayonlari, axborot texnologiyalari, amaliy qo‘llanilish.*

ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

***Аннотация.** Математические функции являются одним из важнейших теоретических и практических инструментов для представления, анализа и оценки реальных процессов на основе научного подхода. В данном исследовании рассматриваются свойства линейных, квадратичных и экспоненциальных функций, их графическое представление и практическое применение в различных областях. Графический анализ показал, что линейные функции весьма эффективны для представления стабильных и равномерных изменений, квадратичные функции для параболических процессов и задач оптимизации, а экспоненциальные функции для моделирования быстро и резко изменяющихся систем. Результаты анализа подтвердили, что функции играют важную роль в объяснении процессов спроса и предложения и доходов в экономике, движения, энергетики и технических систем в физике и технике, а также анализа данных и алгоритмических процессов в информационных технологиях. Исследование обосновывает теоретическую значимость функций, а также их практическую ценность для повседневной жизни, образовательного процесса и научных исследований.*

***Ключевые слова:** математические функции, линейная функция, квадратичная функция, показательная функция, графический анализ, моделирование, экономика, спрос и предложение, физика, инженерия, энергетические процессы, информационные технологии, практическое применение.*

TYPES OF MATHEMATICAL FUNCTIONS AND THEIR PRACTICAL APPLICATIONS

***Abstract.** Mathematical functions are one of the most important theoretical and practical tools for representing, analyzing and evaluating real-life processes based on a scientific approach. This study examines the properties of linear, quadratic and exponential functions, their graphical representation and practical application in various fields. Graphical analysis has shown that linear functions are highly effective in representing stable and uniform changes, quadratic functions in parabolic processes and optimization problems, and exponential functions in modeling rapidly and sharply changing systems. The results of the analysis confirmed that functions play an important role in explaining supply and demand and income processes in economics, motion, energy and technical systems in physics and engineering, and data analysis and algorithmic processes in information technology. The study substantiates the theoretical significance of functions as well as their practical value for everyday life, the educational process and scientific research.*

Key words: *mathematical functions, linear function, quadratic function, exponential function, graphical analysis, modelling, economics, supply and demand, physics, engineering, energy processes, information technology, practical applications.*

Kirish. Funksiya bitta o'zgaruvchining qiymati boshqasiga aniq va tartibli tarzda bog'liq bo'lganda yuzaga keladigan matematik munosabatdir. Har bir kirish qiymatiga yagona chiqish qiymati mos kelishi funksiyaning asosiy mohiyatini tashkil etadi. Ushbu tushuncha matematikaning markaziy kategoriyalaridan biri bo'lib, algebra, matematik analiz, geometriya, ehtimollar nazariyasi, statistika kabi ko'plab bo'limlarda muhim nazariy poydevor vazifasini bajaradi. Zamonaviy ilm-fan rivoji shuni ko'rsatadiki, funksiya faqat matematik simvolik tushuncha emas, balki real hayotdagi jarayonlarni tushuntirish va modellashtirish imkonini beruvchi kuchli ilmiy vositadir (OpenStax, 2016; Stewart, 2016).

Funksiya tushunchasi fanga kirib kelishi bilan matematik tafakkur yanada tizimli, mantiqiy va aniq shakl kasb etdi. Chunki ko'plab tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni aynan o'zgaruvchilar orasidagi munosabat sifatida ifodalash mumkin bo'ldi. Masalan, masofaning vaqtga bog'liqligi, tezlikning o'zgarishi, haroratning vaqt davomida pasayib yoki ortib borishi, iqtisodiy ko'rsatkichlarning yosh, vaqt yoki ishlab chiqarish hajmiga bog'liqligi kabi jarayonlar funksional munosabat asosida tushuntiriladi. Shu bilan birga, funksiya real hodisalarni matematik model sifatida ifodalash imkonini beradi, bu esa ilmiy tahlilni aniqroq, xolisroq va natijador qiladi (Ross, 2014).

Ta'lim tizimida ham funksiyaning o'rni juda muhim. Funksiya mavzusini o'rganish o'quvchilarda mantiqiy fikrlash, muammolarni matematik tilga ko'chirish, grafiklarni tahlil qilish va natijadan ilmiy xulosa chiqarish ko'nikmalarini rivojlantiradi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, funksional fikrlashni yaxshi egallagan o'quvchilar matematika va tabiiy fanlar bo'yicha yuqori natijalarga erishadi, ularning tahliliy tafakkuri ham kengayadi (Carlson et al., 2002; OECD, 2019). Shu sababli zamonaviy ta'lim tizimida funksiya nafaqat muayyan mavzu sifatida, balki o'quvchilarning ilmiy dunyoqarashini shakllantiruvchi asosiy konsepsiya sifatida qaraladi.

Funksiya kundalik hayotda ham ko'plab jarayonlarning izohini beradi. Masalan, kundalik havo haroratining kecha-kunduz davomida o'zgarishi, inson yurak urishi tezligining jismoniy faoliyatga bog'liqligi, telefon batareyasining foydalanish vaqtiga nisbatan kamayib borishi, avtomobilning masofa va tezlik bilan bog'liq harakati – bularning barchasi funksional munosabat misollaridir. Bu jarayonlarni funksiya orqali tushunish insonlarga vaqtni to'g'ri rejalashtirish, resurslardan oqilona foydalanish va ongli qaror qabul qilish imkonini beradi (Khan Academy, n.d.).

Funksiya iqtisodiyot fanida ham muhim analitik vosita sifatida qo'llaniladi. Talab va taklif munosabatlari, narxning ishlab chiqarish hajmiga bog'liqligi, xarajat va foyda ko'rsatkichlari, iqtisodiy o'sish dinamikasi bularning barchasi funksional bog'lanish yordamida tahlil qilinadi. Shuningdek, iqtisodiy prognozlash, bozor tendensiyalarini aniqlash va boshqaruv qarorlarini asoslash ham funksiyalar orqali amalga oshiriladi (Mankiw, 2019; Varian, 2014).

Fizika va muhandislik sohalarida esa funksiyalar tabiat qonuniyatlarini ifodalashning asosiy vositasi hisoblanadi. Harakat, kuch, tezlanish, energiya almashinuvi, elektr toki, issiqlik o'tkazuvchanligi kabi jarayonlar funksional bog'lanishlar yordamida matematik jihatdan ifodalanadi. Muhandislikda konstruksiyalar mustahkamligini aniqlash, mexanik tizimlar barqarorligini baholash va energiya tizimlari samaradorligini hisoblash ham funksiyalarga tayangan holda amalga oshiriladi (Tipler & Mosca, 2007).

Axborot texnologiyalari va sun'iy intellekt rivojida ham funksiyaning o'rni beqiyosdir. Dasturlash tillarida funksiyalar kodni tartibga soladi, murakkab jarayonlarni boshqaradi, takrorlanadigan amallarni samarali tashkil etadi. Ma'lumotlar ilmida esa funksiyalar katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlash, tahlil qilish, tasniflash va bashoratlash jarayonida asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi (Lay et al., 2016).

Shu sababli funksiya tushunchasini chuqur o'rganish nafaqat matematika fanini puxta egallash, balki ilm-fan, texnologiya, iqtisodiyot va kundalik hayotdagi jarayonlarni ongli ravishda tushunish va boshqarishda ham muhim ahamiyat kasb etadi. Funksiya bugungi kunda zamonaviy ilmiy tafakkurning ajralmas tarkibiy qismi sifatida qiymat kasb etadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotda matematik funksiyalar turlari va ularning amaliy qo'llanilishi kontseptual-analitik yondashuv asosida o'rganildi. Funksiyalarni solishtirish, grafik tahlil qilish va matematik modellashtirish metodlari qo'llanildi. OpenStax (2016), Stewart (2016), Mankiw (2019), Varian (2014), Tipler & Mosca (2007) kabi ishonchli akademik manbalar asos qilib olindi.

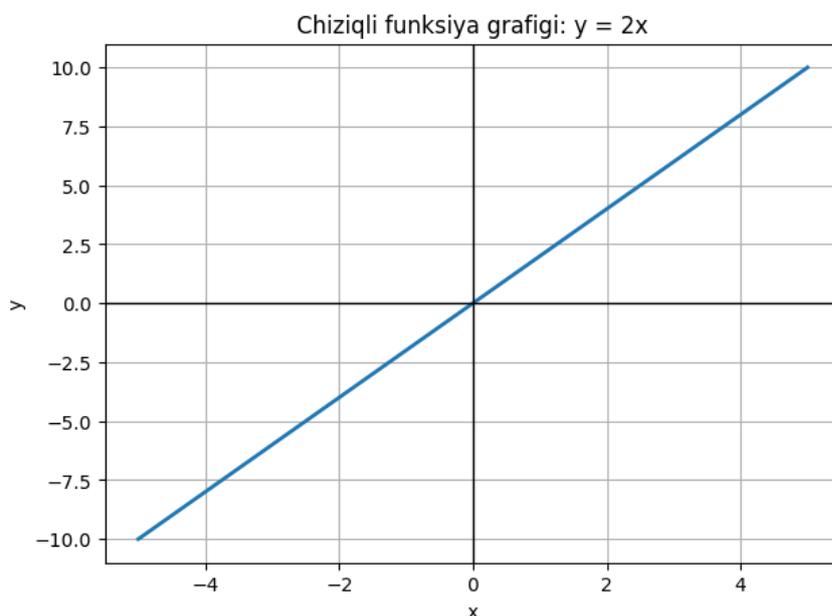
1. Chiziqli funksiya

Chiziqli funksiyalar o'sish va kamayish jarayonlarini oddiy, tushunarli va aniq matematik model orqali ifodalaydi. Ular qo'llanilganda qiymatlarning o'zgarishi barqaror, to'g'ri chiziqli va izchil bo'ladi. Tadqiqot metodologiyasida quyidagi umumiy matematik modeldan foydalanildi:

$$y = ax + b$$

Bu yerda: a – o‘zgarish tezligini bildiruvchi koeffitsiyent, b – boshlang‘ich qiymat yoki kesishish nuqtasi, x – mustaqil o‘zgaruvchi, y – unga bog‘liq natija qiymati

Bu model yordamida iqtisodiyotda xarajat–daromad, fizikada bir xil tezlanishda harakat va kundalik hayotdagi oddiy o‘zgarishlar baholandi.



1-rasm. Chiziqli funksiya grafigi ($y = 2x$)

Grafikdan ko‘rinib turibdiki, qiymat o‘zgarishi to‘g‘ri chiziqli va barqaror xarakterga ega.

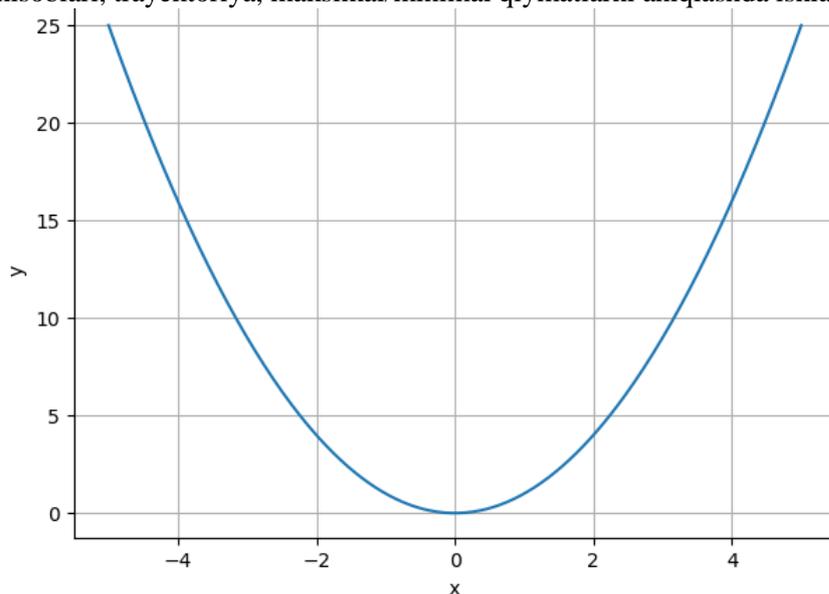
2. Kvadratik funksiya

Kvadratik funksiyalar egri chiziqli, parabolik xarakterga ega bo‘lgan jarayonlarni ifodalaydi va ko‘pincha tezlashuvchi yoki sekinlashuvchi o‘zgarishlarni tasvirlashda ishlatiladi. Tadqiqot metodologiyasida quyidagi umumiy matematik model qo‘llanildi:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Agar $a > 0$ bo‘lsa, parabola yuqoriga qarab, $a < 0$ bo‘lsa pastga qarab ochiladi. Kvadratik funksiyaning eng muhim xususiyatlaridan biri uning maksimal yoki minimal nuqtaga ega bo‘lishi bo‘lib, bu nuqta jarayonni optimallashtirish imkonini beradi.

U muhandislik hisoblari, trayektoriya, maksimal/minimal qiymatlarni aniqlashda ishlatiladi.



2-rasm. Kvadratik funksiya grafigi ($y = x^2$)

Grafik parabolaning maksimal va minimal nuqtalar orqali jarayonlarni optimallashtirish imkonini berishini ko'rsatadi.

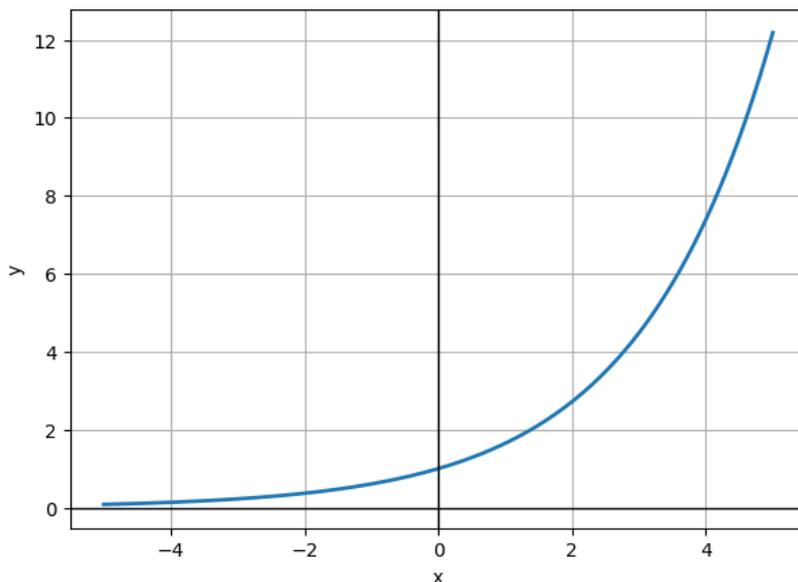
3. Eksponentsial funksiya

Eksponentsial funksiyalar juda tez o'suvchi yoki kamayuvchi jarayonlarni ifodalashda ishlatiladi va real hayotdagi ko'plab dinamik tizimlarni matematik modellashtirish uchun asosiy vosita hisoblanadi. Tadqiqot metodologiyasida quyidagi umumiy model qo'llanildi:

$$y = ae^{kx}$$

Agar $k > 0$ bo'lsa, funksiya keskin o'suvchi, $k < 0$ bo'lsa tez kamayuvchi bo'ladi. Grafikdan ko'rinib turibdiki, dastlab sekin o'sish kuzatiladi, keyin esa qiymatlar keskin ortadi.

Ushbu model aholi soni o'sishi, iqtisodiyotda foizli daromadlar, epidemiologiyada kasallik tarqalish tezligi, radioaktiv parchalanish va biologik jarayonlarni tahlil qilishda qo'llanildi. Natijalar eksponentsial funksiyalar tezkor o'zgaradigan tizimlarni tushuntirish va bashoratlashda eng mos matematik vosita ekanini ko'rsatdi.



3-rasm. Eksponentsial funksiya grafigi ($y = e^{\frac{x}{2}}$) Grafik o'sishning tezlashuvchi xarakterga ega ekanini vizual ko'rsatadi

Natijalar va ularning muhokamasi. Tadqiqot natijalari uchta asosiy funkcionallik modeli chiziqli, kvadratik va eksponentsial funksiyalar real jarayonlarni ifodalashda turli darajada samarali vosita ekanini ko'rsatdi. Grafik tahlillar funksiyalarning xususiyatlarini aniq namoyon qilib, ularning qo'llanilish sohasini ilmiy asoslash imkonini berdi.

Birinchidan, chiziqli funksiya grafigi ($y = 2x$) natijalari qiymatlarning bir tekis va barqaror o'zgarishini vizual tarzda ko'rsatdi. Grafikdagi to'g'ri chiziqli o'sish iqtisodiyotda xarajat-daromad dinamikasi, fizikada bir xil tezlikda harakat va kundalik hayotdagi oddiy o'zgarishlarni tahlil qilish uchun mos model ekanini tasdiqlaydi. Natijalar chiziqli funksiyalar orqali prognozlash soddaligi va tushunarligi yuqori ekanini ko'rsatdi.

Ikkinchidan, kvadratik funksiya grafigi ($y = x^2$) natijasida egri chiziqli o'sish tendensiyasi aniq kuzatildi. Grafik markaziy simmetriyaga ega bo'lib, qiymatlarning past nuqtadan boshlab tezlashuvchi ko'rinishda oshishini ko'rsatadi. Bu esa kvadratik funksiyalarning parabolik jarayonlarni ifodalash, maksimal yoki minimal qiymatlarni aniqlash, muhandislik va fizik hisob-kitoblarda optimallashtirish imkoniyatini berishini tasdiqlaydi. Ushbu natija kvadratik funksiyaning real tizimlarni modellashtirishda yuqori analitik quvvatga ega ekanini ko'rsatdi.

Uchinchidan, eksponentsial funksiya grafigi ($y = e^{\frac{x}{2}}$) juda tezlashuvchi o'sish xarakterini namoyish etdi. Grafikning dastlab sekin, keyinchalik keskin ko'tarilishi eksponentsial jarayonlarning tez va keskin o'zgarishlarga mos model ekanini isbotlaydi. Bu turdagi funksiyalar aholi soni o'sishi, epidemiya tarqalishi, iqtisodiy foizlar va radioaktiv parchalanish kabi tez o'zgaruvchan tizimlarni tahlil qilishda ayniqsa samarali ekanini ko'rsatdi.

Umuman olganda, grafik tahlillar shuni ko'rsatdiki:

1. Chiziqli funksiyalar - barqaror va izchil jarayonlar uchun eng mos model

2. Kvadratlik funksiyalar - egri chiziqli va optimallashtirish talab qilinadigan jarayonlar uchun samarali vosita

3. Eksponentsial funksiyalar - tez va keskin o'zgarishlarni tushuntirishda eng qulay matematik model

Natijalar funksiyalarning nazariy ahamiyati bilan bir qatorda ularning amaliy qo'llanilishi ham keng va muhim ekanini tasdiqladi. Funksiyalar yordamida jarayonlarni aniq modellashtirish, ilmiy tahlil qilish va ishonchli bashoratlar berish imkoniyati kuchayadi (OpenStax, 2016; Stewart, 2016; Mankiw, 2019; Varian, 2014; Tipler & Mosca, 2007).

Xulosalar. Tadqiqot natijalari matematik funksiyalar zamonaviy fan, texnologiya va kundalik hayotda muhim analitik vosita ekanini yaqqol ko'rsatdi. O'rganilgan grafiklar va matematik modellar asosida aniqlanishicha, chiziqli, kvadratlik va eksponentsial funksiyalar turli jarayonlarni ifodalashda o'ziga xos imkoniyatlarga ega. Chiziqli funksiyalar barqaror va bir tekis o'zgarishlarni tahlil qilishda, kvadratlik funksiyalar egri chiziqli jarayonlar, optimallashtirish va maksimal–minimal qiymatlarni aniqlashda, eksponentsial funksiyalar esa tez va keskin o'zgaruvchi tizimlarni modellashtirishda yuqori samaradorlik ko'rsatadi.

Funksiyalar yordamida iqtisodiyotdagi talab–taklif jarayonlari, fizik harakat qonunlari, muhandislik hisoblari, axborot texnologiyalaridagi algoritmik jarayonlar, demografik va epidemiologik o'zgarishlar aniq va ilmiy asosda tushuntiriladi. Bu esa funksiyalarning nafaqat nazariy matematik tushuncha, balki real hayotda qaror qabul qilish, bashoratlash va tizimlarni boshqarishda muhim ilmiy asos ekanini tasdiqlaydi.

Umuman olganda, funksiyalarni chuqur o'rganish ilmiy tafakkurni rivojlantiradi, talabalarda tahliliy fikrlashni shakllantiradi, amaliy sohalarida esa aniq modellashtirish va ishonchli natijalarga erishish imkonini yaratadi. Shu sababli matematik funksiyalarni o'qitish, o'rganish va ilmiy-tadqiqotlarda faol qo'llash dolzarb va zarur hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). *Applying covariational reasoning to functions*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. <https://www.jstor.org/stable/4149958>
2. Hall, G., & Horowitz, P. (2015). *The Art of Electronics (3rd ed.)*. Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org>
3. Khan Academy. (n.d.). *Functions and their applications*. <https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions>
4. Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and Its Applications (5th ed.)*. Pearson. <https://www.pearson.com>
5. Mankiw, N. G. (2019). *Principles of Economics (9th ed.)*. Cengage Learning. <https://www.cengage.com>
6. OpenStax. (2016). *Precalculus*. Rice University. <https://openstax.org/details/books/prec calculus>
7. Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models (11th ed.)*. Academic Press. <https://www.elsevier.com/books/introduction-to-probability-models>
8. Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals (8th ed.)*. Cengage Learning. <https://www.cengage.com>
9. Tipler, P. A., & Mosca, G. (2007). *Physics for Scientists and Engineers (6th ed.)*. W. H. Freeman. <https://www.macmillanlearning.com>
10. Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach (9th ed.)*. W. W. Norton. <https://www.norton.com>
11. Weisstein, E. W. (2020). *Function*. *MathWorld* — Wolfram Research. <https://mathworld.wolfram.com/Function.html>

BA‘ZI KASR TARTIBLI HOSILALAR VA ULARNING TATBIQLARI

Halimov Sunnat Safarovich,

Buxoro davlat texnika universiteti akademik litsey

“Aniq fanlar” kafedrası mudiri,

matematika fani bosh o‘qituvchisi

halimovsunnat432@gmail.com

Safarova Dilnura Sunnatovna,

Buxoro davlat texnika universiteti

akademik litsey talabasi

Annotatsiya. Ushbu maqolada kasr tartibli differensial hisobning asosiy tushunchalari, ularning matematik nazariyasi va amaliyotdagi tadbirlari keng yoritilgan. Riemann – Liouville, Caputo va boshqa kasr tartibli hosila va integralning eng ko‘p qo‘llaniladigan ta‘riflari tahlil qilinib, ularning o‘zaro bog‘liqligi, matematik xususiyatlari va farqlari batafsil ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, kasr tartibli differensial tenglamalar yordamida modellashtiriladigan anomaliiy diffuziya, viskoelastik materiallarning mexanik xatti-harakatlari, neyron tarmoqlar dinamikasi kabi turli sohalaridagi fizik, muhandislik va biologik jarayonlar misollari keltirilgan. Maqolada Kasr tartibli hisobning nazariyasi va amaliyoti o‘rtasidagi bog‘liqlik, uning kelajakda yangicha modellashtirish va tizimlarni tahlil qilishda tutadigan o‘rni va istiqbollari xulosa qilinadi.

Kalit so‘zlar: Riemann – Liouville kasr tartibli integral, Riemann –Liouville kasr tartibli hosila, Caputo kasr tartibli hosila, kasr tartibli differensial tenglama, Mittag-Leffler funksiyasi, Laplas integral almashtirishi

О НЕКОТОРЫХ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

Аннотация. В данной статье подробно освещены основные понятия дифференциального исчисления дробного порядка, их математическая теория и практическое применение. Проанализированы наиболее часто используемые определения Римана-Лиувилля, Капуто и других дробных производных и интегралов, подробно рассмотрены их взаимосвязи, математические свойства и различия. Также приведены примеры физических, инженерных и биологических процессов в различных областях, таких как аномальная диффузия, механическое поведение вязкоупругих материалов, динамика нейронных сетей, моделируемые с помощью дифференциальных уравнений дробного порядка. В статье делается вывод о взаимосвязи между теорией и практикой дробного исчисления, его роли и перспективах в будущем в новом моделировании и анализе систем.

Ключевые слова: функция Миттага-Леффлера, дробный интеграл Римана-Лиувилля, дробная производная Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто, дробное дифференциальное уравнение, интегральное преобразование Лапласа.

SOME FRACTIONAL DERIVATIVES AND THEIR APPLICATIONS

Abstract This article provides a comprehensive overview of the fundamental concepts of fractional differential calculus, its mathematical theory, and its practical applications. The most widely used definitions of fractional derivatives and integrals, such as those of Riemann – Liouville and Caputo, are analyzed in detail, with a thorough examination of their interrelationships, mathematical properties, and distinctions. Furthermore, examples are presented from various fields – including physics, engineering, and biology – of processes modeled using fractional differential equations, such as anomalous diffusion, mechanical behavior of viscoelastic materials, neural network dynamics, pharmacokinetics, and epidemiological processes. The article concludes by summarizing the connection between the theory and practice of fractional calculus and highlighting its future role and prospects in innovative modeling and systems analysis.

Keywords: Riemann-Liouville fractional integral, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, fractional differential equation, Mittag-Leffler function, Laplace integral transform.

Kirish. Zamonaviy fan va texnologiyaning jadal rivojlanishi bilan bir qatorda, tabiat va texnologik jarayonlarni matematik modellashtirishda yangicha yondashuvar talab qilinmoqda. An'anaviy differensial

hisob butun tartibli hosilalar asosida qurilgan bo‘lib, ko‘pgina fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarni muvaffaqiyatli tasvirlaydi. Biroq, tabiatda uchraydigan bir qator murakkab hodisalar – viskoelastik materiallarning deformatsiyasi, biologik to‘qimalarda diffuziya, geologik jarayonlar, moliya bozoridagi o‘zgarishlar va boshqalar – klassik differensial tenglamalar yordamida to‘liq ifodalab bo‘lmaydigan xususiyatlarga ega. Aynan shunday murakkab jarayonlarni modellashtirishda kasr tartibli differensial hisob (fractional calculus) yangicha imkoniyatlar yaratadi. Kasr tartibli hosilalar tushunchasi differensiallash va integrallash amallarini butun sondan ixtiyoriy haqiqiy yoki hatto kompleks songa kengaytirishga asoslangan. Bu g‘oya tarixan 300 yildan ortiq vaqt davomida rivojlanib kelgan bo‘lsada, uning amaliy qo‘llanilishi so‘nggi 30-40 yil ichida sezilarli darajada oshdi.

Kasr tartibli differensial tenglamalar asosiy afzalliklaridan biri shundaki, ular xotira effekti (memory effect) va global bog‘liqlik (nonlocality) xususiyatlarini o‘zida mujassam etadi. Boshqacha qilib aytganda, tizimning joriy holati nafaqat yaqin o‘tmishdagi, balki uzoqroq vaqt oralig‘idagi holatlarga bog‘liq bo‘ladi. Bu xususiyat ko‘pgina real jarayonlarning tabiatiga mos keladi – masalan, materiallarning charchashi, yurak-qon tomir tizimidagi pulsatsiya, iqlim o‘zgarishlari va boshqalar. Ushbu maqolada kasr tartibli hosilalarning asosiy ta‘riflari (Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov), ularning matematik xossalari, amaliyotda qo‘llanilish sohalari va ba‘zi muhim misollar ko‘rib chiqiladi. Maqolaning asosiy magsadi – kasr tartibli differensial hisobning nazariy asoslari va uning turli fan sohaslaridagi ahamiyatini yoritish, shuningdek, ushbu sohaning kelajakdagi rivojlanish istiqbollarini belgilashdir.

Kasr tartibli hisobning zamonaviy qo‘llanilish sohalari orasida quyidagilarni alohida ta’kidlash mumkin:

- Materialshunoslikda: polimerlar, kompozit materiallar, qotishmalarning mexanik xossalari o‘rganish

- Biologiya va tibbiyotda: qon aylanishi modellari, dori-darmonlar farmakokinetikasi, hujayra o‘sishi
- Qurilish muhandisligida: tuproq mexanikasi, seismik tebranishlar tahlili
- Energetikada: batareyalarning zaryadlanishi va zaryadsizlanishi jarayonlari
- Moliyaviy matematikada: bozor risklarini baholash, aktivlar narxlarini prognozlash
- Boshqaruv nazariyasida: robototexnika, aviakosmik tizimlar, sun‘iy intellekt

Kasr tartibli differensial tenglamalar biologiyada:

- ✓ Tumor o‘sishi modellari
- ✓ Dori farmakokinetikasi
- ✓ Nerv impulslarining tarqalishi

Klassik differensial hisobda hosila faqat butun tartibli bo‘ladi ($n = 1, 2, 3, \dots$). Biroq, tabiatda uchraydigan ko‘plab jarayonlar aniqlanishida kasr tartibli hosilalar muhim ahamiyatga ega. Kasr tartibli differensial hisob -- bu hosila va integral tushunchalarini butun sondan ixtiyoriy haqiqiy yoki kompleks songa kengaytirishga qaratilgan matematik analizning bir bo‘limi.

Asosiy qism. Abel integral tenglamasi. Ushbu

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

ko‘rinishdagi integral tenglama *birinchi tur Abel integral tenglamasi* deyiladi [5].

(1) tenglamani yechish. Bu tenglamada x ni t bilan, t ni s bilan almashtirib, so‘ngra tenglamaning har ikki tomonini $(x-t)^{-\alpha}$ ifodaga ko‘paytiramiz va t bo‘yicha a dan x gacha integrallaymiz:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Dirixle formulasiga ko‘ra integrallash tartibini almashtirib,

$$\int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} \quad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Tenglikning chap tomonidagi ichki integralda $t = s + \tau(x-s)$ almashtirish bajarsak,

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha} (t-s)^{\alpha-1} dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

tenglik kelib chiqadi. U holda (2) ga asosan

$$\int_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (3)$$

Bu tenglikning har ikki tomonini differensiallab, Abel integral tenglamasining yechimini hosil qilamiz:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (4)$$

Shunday qilib, agar (1) tenglamaning yechimi mavjud bo'lsa, u (4) ko'rinishda ifodalanar ekan. Bu formulani hosil qilish jarayonidan kelib chiqadiki, agar yechim mavjud bo'lsa, u yagona.

Shu usulda ko'rsatish mumkinki, ushbu

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (5)$$

integral tenglamaning yechimi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha} \quad (6)$$

formula bilan aniqlanadi.

Kasr tartibli integrallar. Matematik analiz kursidan ma'lumki, n - karrali integral uchun quyidagi formula o'rinni:

$$\int_a^{x_0} dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{x_0} (x_0-t)^{n-1} \varphi(t) dt, \quad n \in N. \quad (7)$$

$(n-1)! = \Gamma(n)$ ekanligini e'tiborga olib, (7) tenglikning o'ng tomonini n ning kasr qiymatlari uchun ham aniqlash mumkin. (7) tenglikka mos ravishda kasr tartibli integrallarni quyidagi tartibda aniqlaymiz.

Ta'rif 1. $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ ($a < b < +\infty$) bo'lsin. Ushbu

$$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (8)$$

$$D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$

ko'rinishdagi ifodalar $\varphi(x)$ funksiyaning α (kasr) tartibli (Riman-Liuvill ma'nosida) integrallari deyiladi [5].

$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x)$ va $D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqning deyarli barcha nuqtalarida aniqlangan bo'lib, $L_1(a, b)$ sinfga tegishli bo'ladi. Bu ta'rifga asosan (1) va (5) Abel integral tenglamalarini

$$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = f(x), \quad D_{bx}^{-\alpha} \varphi(x) = f(x) \quad (10)$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Agar $0 < \alpha_1, \alpha_2 < +\infty$ bo'lsa, deyarli hamma $x \in (a, b)$ uchun

$$D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f(x) = D_{ax}^{-\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_2} f(x) = D_{ax}^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x) \quad (11)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} D_{ax}^{-\alpha_2} \int_a^x (x-s)^{\alpha_1-1} f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x \left[\int_a^t (t-s)^{\alpha_1-1} f(s) ds \right] (x-t)^{\alpha_2-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1} (t-s)^{\alpha_1-1} dt. \end{aligned}$$

Oxirgi ichki integralda $t = s + (x-s)\tau$ almashtirish bajarish natijasida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1} (t-s)^{\alpha_1-1} ds &= (x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 \tau^{\alpha_1-1} (1-\tau)^{\alpha_2-1} d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} (x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

Bu esa (11) tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatadi.

Ta‘rif sifatida

$$D_{ax}^0 f(x) = f(x) \tag{12}$$

deb hisoblaymiz.

Kasr tartibli hosilalar.

Ta‘rif 2. [1]-[5] $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin.

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{13}$$

$$D_{xb}^\alpha \varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{14}$$

ko‘rinishdagi ifodalar $\varphi(x)$ funksiyaning α (kasr) tartibli (Liuvill ma‘nosidagi) hosilalari deyiladi.

Bu ta‘rifga asosan (1) va (5) Abel integral tenglamalari yechimlarini beruvchi (4) va (6) tengliklarni mos ravishda

$$\varphi(x) = D_{ax}^\alpha f(x), \quad \varphi(x) = D_{xb}^\alpha f(x) \tag{15}$$

ko‘rinishida yozish mumkin.

(13) va (14) kasr tartibli hosilalar mavjudligining yetarli sharti quyidagicha.

Lemma 1. Agar $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada absolyut uzluksiz bo‘lsa, $[a, b]$ kesmaning deyarli barcha nuqtalarida $\varphi(x)$ funksiyaning kasr tartibli hosilalari mavjud bo‘lib, quyidagi formulalar o‘rinli bo‘ladi:

$$\begin{aligned} D_{ax}^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\varphi(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{\varphi'(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \\ D_{xb}^\alpha \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\varphi(b)}{(b-x)^\alpha} - \int_x^b \frac{\varphi'(t) dt}{(t-x)^\alpha} \right], \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Endi $\alpha \geq 1$ bo'lib, $[\alpha]$ - uning butun qismi, $\{\alpha\}$ - esa kasr qismi bo'lsin. Agar α - butun son bo'lsa, α tartibli hosilalar sifatida oddiy hosilalarni olamiz:

$$D_{ax}^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad D_{xb}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Agar α - butun son bo'lmasa, α tartibli hosilalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{ax}^{\{\alpha\}} \varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D_{ax}^{\{\alpha\}-1} \varphi(x),$$

$$D_{xb}^\alpha \varphi(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{xb}^{\{\alpha\}} \varphi(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D_{xb}^{\{\alpha\}-1} \varphi(x).$$

Demak, umumiy xolda, $\alpha \geq 1$ bo'lganda

$$D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{ax}^{\alpha-n} \varphi(x), \quad n = [\alpha] + 1, \quad (16)$$

$$D_{xb}^\alpha \varphi(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{xb}^{\alpha-n} \varphi(x), \quad n = [\alpha] + 1. \quad (17)$$

Odatda α ($\alpha > 0$) kasr tartibli integrallar ko'rinishida ifodalanuvchi funksiyalar sinfini $D_{ax}^{-\alpha}(L_p)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$D_{ax}^{-\alpha}(L_p) = \left\{ f(x) : f(x) = D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x), \varphi(x) \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty \right\}.$$

Quyidagi teorema o'rinni.

Teorema 1. $\alpha > 0$ bo'lsin. U holda

$$D_{ax}^\alpha D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x), \quad D_{xb}^\alpha D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x) \quad (18)$$

tengliklar barcha $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ funksiyalar uchun,

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \varphi(x), \quad D_{xb}^{-\alpha} D_{xb}^\alpha \varphi(x) = \varphi(x) \quad (19)$$

tengliklar esa mos ravishda barcha $\varphi(x) \in D_{ax}^{-\alpha}(L_1)$, $\varphi(x) \in D_{xb}^{-\alpha}(L_1)$ funksiyalar uchun bajariladi.

Agar oxirgi shartlar o'rniga $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ bo'lsa, (19) tengliklar umuman olganda noto'g'ri bo'ladi va, masalan, birinchisi quyidagi formula bilan almashadi [5]

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^\beta \varphi(x) = D_{ax}^{\beta-\alpha} \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \varphi_{n-\beta}^{(n-k-1)}(a),$$

bu yerda $\alpha > \beta$, $n = [\beta] + 1$, $\varphi_{n-\beta}(x) = D_{ax}^{\beta-n} \varphi(x)$. Xususiyl holda $\alpha = \beta$ bo'lsa,

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^\alpha \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a), \quad (20)$$

bu yerda $n = [\alpha] + 1$, $\varphi_{n-\alpha}(x) = D_{ax}^{\alpha-n} \varphi(x)$.

Demak, Abel integral tenglamalarini va ularning yechimlarini ifodalovchi (10) va (15) tengliklar bilan aniqlangan $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarni mos ravishda (15) va (10) tengliklarga qo'yish uchun yuqoridagi teorema shartlari bajarilishi zarur ekan.

Ushbu

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad (x > 0, \alpha > 0) \quad (21)$$

tenglama ikkinchi tur Abel integral tenglamasi deyiladi. Ushbu (22) integral tenglamaning yechimi quyidagicha ifodalanadi [5] :

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha \left[\lambda(x-t)^\alpha \right] f(t) dt, \tag{22}$$

Odatda bu formula Xille – Tamarkin formulasi deb ataladi.

a. **Kasr tartibli hosilalarning tadbiqlariga oid misollar.**

$[a, b]$ kesmada berilgan $f(x)$ funksiya uchun quyidagi formulalar [1]-[7]

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} \tag{23}$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{24}$$

Riman-Liuvillning α tartibli kasr hosilasini ifodalaydi va bu hosilalar mos ravishda chap tomonli (23) ga va o'ng tomonli (24) ga deb aytiladi.

Belgilab qo'yamiz kasr integrallar aniqlangan $\alpha > 0$ har qanday tartibi uchun, kasrli hosilalar esa hozircha faqat $0 < \alpha < 1$ tartibi uchun $\alpha \geq 1$ tartibining kasrli hosilalarini aniqlashdan oldin, kasrli hosilalarning mavjudligining oddiy yetarli belgisini beramiz.

Misol 1. Agar $f(x) \in AC([a, b])$ bo'lsa unda $f(x)$ funksiyani deyarli hamma yerda $(D_{a+}^\alpha f)(x)$ va $(D_{b-}^\alpha f)(x)$, $0 < \alpha < 1$, va shu bilan birga $(D_{a+}^\alpha f)(x) \in L_1(a, b)$ va $(D_{b-}^\alpha f)(x) \in L_1(a, b)$ hosilalarga ega bo'ladi va ularni quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right] \tag{25}$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^\alpha} + \int_x^b \frac{f'(t) dt}{(t-x)^\alpha} \right] \tag{26}$$

Isbot. (25) va (26) formulalar lemma 1 ning natijasidan hosil bo'ladi. $D_{a+}^\alpha f \in L_1(a, b)$

$\int_a^b |(D_{a+}^\alpha f)(x)| dx$ integralga aylanadi. Bizda bor

$$\begin{aligned} \int_a^b |(D_{a+}^\alpha f)(x)| dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left| \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^b dx \int_a^x \frac{|f'(t)| dt}{(x-t)^\alpha} \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \right. \\ &\left. + \int_a^b |f'(t)| dt \int_t^b \frac{dx}{(x-t)^\alpha} \right] = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} [|f(a)|(b-a)^{1-\alpha} + \int_a^b |f'(t)| (b-t)^{1-\alpha} dt] \end{aligned}$$

$f'(t)$ va $(b-t)^{1-\alpha}$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda ajralmas, $|f'(t)| \geq 0$, $(b-t)^{1-\alpha}$ uchun haqli ravishda $0 \leq (b-t)^{1-\alpha} \leq (b-a)^{1-\alpha}$, shuning uchun o'rtacha qiymat teoremasi bo'yicha bunday M son mavjud va $0 \leq M \leq (b-a)^{1-\alpha}$, $\int_a^b |f'(t)|(b-t)^{1-\alpha} dt = M \int_a^b |f'(t)| dt$. Bizda bor

$$\int_a^b |(D_{a+}^\alpha f)(x)| dx = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} [|f(a)|(b-a)^{1-\alpha} + M \int_a^b |f'(t)| dt] < \infty,$$

chunki $f(x) \in AC([a, b])$ anglatadi $f'(x) \in L_1(a, b)$ $\int_a^b |f'(t)| dt < \infty$

bo'lishini. Lemma isbotlandi.

Biz $\alpha \geq 1$ tartibning kasrli hosilalariga o'tamiz. Biz quyidagilardan foydalanamiz: $[\alpha] - \alpha$ ning butun qismi, $\{\alpha\} - \alpha$ ning kasr qismi. Ta'rif bo'yicha $0 \leq \alpha < 1$ va $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Agar α -butun son bo'lsa α ning kasr tartibli hosilasi oddiy farqlashni anglatadi:

$$D_{a+}^\alpha = \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad D_{b-}^\alpha = \left(-\frac{d}{dx} \right)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Agar α -nbutun son bo'lsa D_{a+}^α va D_{b-}^α larni quyidagicha aniqlaymiz

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} (D_{a+}^{\{\alpha\}} f)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]-1} (I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f)(x),$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]} (D_{b-}^{\{\alpha\}} f)(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} (I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f)(x)$$

Ta'rif $f(x)$, $x \in [a, b]$ uchun

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{27}$$

$$(D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{28}$$

$n = [\alpha] + 1, \alpha > 0, (27)$ va (28) formulalar mos ravishda.

Riman-Liuvilling α kasr tartibli o'ng va chap hosilasi deb nomlanadi.

(27) va (28) hosilalarning mavjudligi uchun yetarli shart shundan iboratki $\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$ integral $AC^{[\alpha]}([a, b])$ sinfga tegishli. Ushbu shartni qanoatlantirish uchun

$$f(x) \in AC^{[\alpha]}([a, b]) \tag{29}$$

Misol 2. $\alpha \geq 0$ va $f(x) \in AC^n([a, b]), n = [\alpha] + 1$. U holda $D_{a+}^\alpha f$ deyarli hamma joyda mavjud bo'lib, ularni quyidagicha ifodalash mumkin

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{30}$$

Isbot. $f(x) \in AC^n$, keyin (30) quyidagicha isbotlaymiz.

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \\ &\quad \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} (t-y)^{n-1}(y) dy \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \\ &\quad \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy \right]. \end{aligned}$$

Biz $\int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt$ integralni hisoblaymiz, $t = a + \tau(x-a)$ almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} \int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt &= (x-a)^{n+k-\alpha} \int_0^1 \tau^k (1-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau = \\ &= (x-a)^{n+k-\alpha} B(k+1, n-\alpha) = (x-a)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \end{aligned}$$

$\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy$ integralga avval biz Dirixle formulasini qo'llaymiz va keyin $t=y+\tau(x-y)$ almashtirish yordamida ichki integralni hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} &\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy = \\ &= \int_a^x \varphi(y) dy \int_y^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-y)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y) (x-y)^{2n-\alpha-1} dy \end{aligned}$$

Shuning uchun $(D_{a+}^\alpha f)(x)$ uchun bizda bo'ladi

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y) \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} dy \right] \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+k-\alpha} &= (n+k-\alpha)(n+k-\alpha-1)\dots(k-\alpha+1)(x-a)^{k-\alpha} = \\ &= (k-\alpha+1)_n (x-a)^{k-\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha+n+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} &= \frac{\Gamma(2n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-y)^{n-\alpha-1}, \end{aligned}$$

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^{k-\alpha} \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y) (x-y)^{n-\alpha-1} dy.$$

$$\dots\dots\dots c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \text{ va } \varphi(y) = f^{(n)}(y)$$

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(x-y)^{\alpha-n+1}} dy = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(x-y)^{\alpha-n+1}} dy. \end{aligned}$$

isbotlandi.

Misol 3. $\varphi(t) \in L_1(a, b)$. Abelning bir xil bo'lmagan $I_{a+}^\alpha f = 0$ integral tenglamasi va har qanday $\alpha > 0$ uchun shunchaki arzimayechim $\varphi(x) \equiv 0$ (deyarli hamma joyda) bor.

Isbot. $m = [\alpha]$ belgilaymiz, avvalambor $\alpha \neq 1, 2, \dots, I_{a+}^\alpha f$ ni m marta differensiallab $I_{a+}^{\alpha-m} f$ ni olamiz. Bu yerda $0 < \alpha - m < 1$ ga asosan $\varphi \equiv 0$ bo'ladi. Agar $\alpha = m$ bo'lsa $I_{a+}^\alpha f = 0$ ni m marta differensiallab $\varphi = 0$ degan xulosaga kelamiz.

Quyidagi misolni ko'ramiz. $f(x) = (x - \alpha)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$ funksiyaning kasr hosilasini topaylik. $D_{a+}^{\alpha} (x - \alpha)^{-\mu} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (t - \alpha)^{-\mu} (x - t)^{-\alpha} dt$, $t = a + \tau(x - a)$ almashtirish bajarib quyidagini olamiz

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (x - a)^{1-\alpha-\mu} \int_0^1 \tau^{-\mu} (1 - \tau)^{-\alpha} d\tau = \\ &= \frac{(1-\alpha-\mu)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(2-\alpha-\mu)} (x - a)^{-\alpha-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha-\mu)} (x - a)^{-\alpha-\mu} \end{aligned}$$

Shunday qilib, $D_{a+}^{\alpha} (x - \alpha)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\alpha-\mu)} (x - a)^{-\alpha-\mu} f(x) = (x - \alpha)^{-\mu}$, $0 < \mu < 1$ funksiyaning kasr integrali ko'rinishga ega $I_{a+}^{\alpha} (x - \alpha)^{-\mu} = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+\alpha-\mu)} (x - a)^{\alpha-\mu}$. Bu sohadagi ko'plab tadqiqotlar Riman-Liuvill kasr tartibli differensial tenglama

$$(I_{a+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (31)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (32)$$

(bu yerda $n = [\Re(\alpha)] + 1$; $x > a$, $(n - 1 < \alpha \leq n)$)

Chiziqli bo'lmagan α ($\Re(\alpha) > 0$) kast tartibli differensial tenglamalar

$R = (-\infty; \infty)$ haqiqiy oqning $[a, b]$ intervalida

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x)] \quad (\Re(\alpha) > 0, x > a) \quad (33)$$

shaklida bo'ladi. $I^{\alpha} = D^{-\alpha}$ ni anglash qiyin emas.

Riman-Livel kasr tartibli differensial tenglamani yechishda quyidagi formulalardan foydalanamiz, bu formulalar (31) formula asosida kelib chiqqan.

$$I_{0+}^{\alpha} (C) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \quad \alpha > 0, \quad I_{0+}^{\alpha} (x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha} \quad n > -1, \alpha > 0$$

$$I_{0+}^{\alpha} (e^{kx}) = \frac{e^{kx}}{k^{\alpha}} \quad k > 0, \alpha > 0, \quad I_{0+}^{\alpha} (\sin kx) = k^{\alpha} \sin(kx - \alpha \frac{\pi}{2}) \quad \alpha > 0$$

$$I_{0+}^{\alpha} (\cos kx) = k^{\alpha} \cos(kx - \alpha \frac{\pi}{2}) \quad \alpha > 0.$$

Ba'zan misollarni yechishda Mettag-Lefler funksiyaning Laplas almashtirishiga ehtiyoj tug'iladi. O'ranning laplas almashirish qoidasiga muvofiq,

$$\begin{cases} (f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) \\ L\{f * g\} = F(s)G(s) \end{cases}$$

$$L\{(I_{a+}^{\alpha} y)(x)\} = L\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \{x^{\alpha-1} * y(x)\}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\{x^{\alpha-1}\}$$

$$L\{y(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} \cdot Y(s) = s^{-\alpha} \cdot Y(s)$$

$$L\{(I_{a+}^{\alpha} y)(x)\} = s^{-\alpha} \cdot Y(s)$$

Endi ba'zi kasr tartibli differensial tenglamalarga doir formulalarni keltiramiz, ularning barchasi (32) formula asosida hisoblanadi, kelib chiqadi.

$${}^{RL}D_x^{\alpha} (C) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha > 0; \quad {}^{RL}D_x^{\alpha} (x^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}, \quad \alpha > 0;$$

$${}^{-RL}D_x^{\alpha} (e^{kx}) = k^{\alpha} e^{kx} \quad k > 0; \quad {}^{-RL}D_x^{\alpha} (\sin kx) = k^{\alpha} \sin(kx + \alpha \frac{\pi}{2}), \quad \alpha > 0;$$

$${}^{-RL}D_x^{\alpha} (\cos kx) = k^{\alpha} \cos(kx + \alpha \frac{\pi}{2}), \quad \alpha > 0.$$

Differensial tenglamalar yechishning usullaridan beri bu laplas almashtirish usulidir.

Misol 4. $L\{D_{0+}^{\alpha} y(x)\} = s^{\alpha} Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_{0+}^{\alpha-k-1} (y)(0)$.

Isbot.

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

formuladan kelib chiqadi.

Demak:

$$L\{D_{0+}^{\alpha}f(x)\} = L\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}y)(x)\right\} = s^n \cdot s^{-(n-\alpha)}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (D_{0+}^{\alpha-n}y)(0) = s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k (D_{0+}^{\alpha-k-1}y)(0). \quad (37)$$

isbotlandi.

Bu yerda $n - 1 < \alpha \leq n$ bo'ladi.

$\alpha = \frac{1}{2}$ bo'lgani uchun $0 < \frac{1}{2} < 1$ demak $n = 1$

$$L\left\{D_{0+}^{\frac{1}{2}}y(x)\right\} + aL\{y(x)\} = 0 \Rightarrow s^{\frac{1}{2}}Y(s) - \sum_{k=0}^{1-1} s^k D_{0+}^{\alpha-k-1}(0) + aL\{y(x)\} = 0,$$

$$s^{\frac{1}{2}}Y(s) - s^0 D_{0+}^{-\frac{1}{2}}(0) + aY(s) = 0$$

bu yerda $Y(s) = L\{y(x)\}$,

$$s^{\frac{1}{2}}Y(s) - C + aY(s) = 0, \quad (s^{\frac{1}{2}} + a)Y(s) = C, \quad Y(s) = \frac{C}{s^{\frac{1}{2}} + a}.$$

Bu yerda y ni topish uchun teskari laplas almashtirish qo'llaymiz va (1.5) dan foydalanamiz:

$$L\{x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}, \quad L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}\right\} = x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha}).$$

Bu yerda $\frac{C}{s^{\frac{1}{2}+a}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}$ ayniyatdan $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta, \alpha = \frac{1}{2}, \lambda = -a$

$$y(x) = C \cdot \{Y(s)\} = C \cdot x^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\left(-a \cdot x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Xulosa. Kasr tartibli hosilalar va integrallar ta'riflari, xossa hamda teoremlari keltirilgan. Kasr tartibli hosilalar va integrallarning misol va masalalarga tadbirlari haqida tushunchalar berilgan. Kasr tartibli differensial hisob turli sohalarida: Anomal diffuziya jarayonlarini tavsiflash, Murakkab materiallarning xatti-harakatini modellashtirish, Iqtisodiy va ijtimoiy tizimlarni o'rganish, Signal va tasvir qayta ishlashda samarali qo'llanilmoqda. Ushbu sohaning rivojlanishi tabiatdagi noaniqliklar va murakkab bog'liqliklarni yanada aniqroq aks ettirish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993
2. I. Podlubny "Fractional differential equations". Akademik Press, Sandiego – 1999.
3. Hilfer R. "Threefold introduction to fractional derivatives". – 2007.
4. Umarov S.R., Shinaliyev K.M., Botirxon X. Turmetov. "A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations" – 2012.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., "Theory and Applications of Fractional Differential equations". Elsevier, Amsterdam – 2006.
6. Luchko Yu. "Operational method in fractional calculus", University of Berlin.
7. Lorenzi A. Sinestrari E., "An inverse problem in theory of materials with memory," *Nonlinear Anal. TMA*, 12, 1988, 411-423.

DETERMINANT CONCEPT IN MAX-PLUS ALGEBRA

Djumabaev Gulomjon Khalillaevich,
Associate Professor, Department of
“Algebra and Mathematical Analysis”
Chirchik State Pedagogical University
djumabaev.gx@gmail.com

Eshimbetov Muzaffar Reyimbaevich,
Associate Professor, Department of
“Algebra and Mathematical Analysis”
Chirchik State Pedagogical University
mr.eshimbetov@gmail.com

Abstract. This work investigated matrices and determinant concepts within the framework of max-plus algebra. Max-plus algebra was considered as an idempotent semiring in which the classical addition and multiplication operations were replaced by the maximum and addition operations, respectively. This algebraic structure played an important role in modeling and analyzing discrete event dynamic systems. The study presented the fundamental notions of max-plus algebra, including max-plus matrices, matrix operations, identity and singular elements, as well as their structural properties. Furthermore, analogues of the classical determinant in the max-plus setting were examined. The definition of the max-plus determinant, the conditions for its existence, and its role in characterizing regular and singular matrices were discussed. The obtained results were shown to be relevant to applications in optimization, graph theory, scheduling, and discrete-time system analysis, and contributed to a deeper understanding of mathematical models based on max-plus algebra.

Keywords: Max-plus algebra, idempotent semiring, max-plus matrices, max-plus determinant, singularity, permutation, discrete event system, minor.

ПОНЯТИЕ ДЕТЕРМИНАНТА В МАКС-ПЛЮС АЛГЕБРЕ

Аннотация. В данной работе были исследованы матрицы и понятие детерминанта в рамках мах-плюс алгебры. Мах-плюс алгебра рассматривалась как идемпотентное полукольцо, в котором классические операции сложения и умножения заменяются операциями максимума и сложения соответственно. Данная алгебраическая структура играет важную роль в моделировании и анализе дискретных динамических систем событий. В работе представлены основные понятия мах-плюс алгебры, включая мах-плюс матрицы, матричные операции, единичные и сингулярные элементы, а также их структурные свойства. Кроме того, были рассмотрены аналоги классического детерминанта в мах-плюс контексте. Обсуждаются определение мах-плюс детерминанта, условия его существования и его роль в характеристике регулярных и сингулярных матриц. Полученные результаты показали свою применимость в задачах оптимизации, теории графов, планирования и анализа дискретных систем во времени и способствуют более глубокому пониманию математических моделей, основанных на мах-плюс алгебре.

Ключевые слова: мах-плюс алгебра, идемпотентное полукольцо, мах-плюс матрицы, мах-плюс детерминант, сингулярность, перестановка, дискретная событийная система, минор.

MAX-PLUS ALGEBRADA DETERMINANT TUSHUNCHASI

Annotatsiya. Mazkur ishda max-plus algebra doirasida matritsalar va determinant tushunchalari tadqiq etildi. Max-plus algebra klassik qo'shish va ko'paytirish amallari mos ravishda maksimum va qo'shish amallari bilan almashtirilgan idempotent yarimhalqa sifatida qaraldi. Ushbu algebraik tuzilma diskret hodisali dinamik tizimlarni modellashtirish va tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega. Ishda max-plus algebraning asosiy tushunchalari, jumladan max-plus matritsalar, matritsaviy amallar, birlik va singulyar elementlar hamda ularning strukturaviy xossalari bayon etildi. Shuningdek, klassik determinantning max-plus muhitidagi analoglari ko'rib chiqildi. Max-plus determinantning ta'rifi, uning mavjudlik shartlari hamda muntazam va singulyar matritsalarini tavsiflashdagi o'rni muhokama qilindi. Olingan natijalar optimallashtirish masalalari, graflar nazariyasi, rejalashtirish va diskret vaqtli tizimlarni

tahlil qilishda qo'llanilishi mumkinligi bilan ahamiyatli bo'lib, max-plus algebra asosidagi matematik modellarni chuqurroq tushunishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: max-plus algebra, idempotent yarim halqa, max-plus matrilsalar, max-plus determinant, singulyarlik, o'rniga qo'yish, diskret hodisali sistema, minor.

Introduction. Max-Plus Linear (MPL) systems are a class of discrete-event dynamic systems (DEDS) based on the Max-Plus algebra, an algebraic structure that uses maximisation and addition as its binary operations. MPL systems are employed to model processes with features of synchronization but without concurrency, and as such are widely used for applications in transportation networks [1, 2], biological systems [3, 4] and manufacturing [7, 8]. In MPL models, the states correspond to time instances related to discrete events.

Max-plus algebra has been studied in research papers and books from the early 1960's. Perhaps the first paper was that of R. A. Cuninghame-Green [5] in 1960, followed by [10, 11, 12, 13] and numerous other articles. Independently, a number of pioneering articles were published, e.g. by B. Giffler, M. Gondran and M. Minoux. Intensive development of max-algebra has followed since 1985 in the works of M. Akian, R. Bapat, R. E. Burkard, G. Cohen, B. De Schutter, P. van den Driessche, S. Gaubert, M. Gavalec, R. Goverde, J. Gunawardena, B. Heidergott, M. Joswig, R. Katz, G. Litvinov, J. -J. Loiseau, G. -J. Olsder, J. Pl'avka, J. -P. Quadrat, I. Singer, S. Sergeev, E. Wagneur, K. Zimmermann, U. Zimmermann and many others. Note that idempotency of addition makes max-algebra part of idempotent mathematics [9, 17, 18].

Preliminary notions. The max-plus algebra is an algebraic structure consisting of real numbers where the standard operations of addition and multiplication are replaced by the operation of taking a maximum and the operation of standard addition, respectively. More precisely, let \mathbb{R}_{\max} denote the set $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, let " \oplus " be a binary operator on \mathbb{R}_{\max} with $x \oplus y = \max\{x, y\}$ and let " \odot " be a binary operator on \mathbb{R}_{\max} with $x \odot y = x + y$. The algebraic structure $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \odot)$ is called a max-plus semi-field or simply a max-plus algebra. In max-plus algebra: $\varepsilon = -\infty$ is the additive identity: $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$ for each $x \in \mathbb{R}_{\max}$ and $e = 0$ is the multiplicative identity: $x \odot e = e \odot x = x$ for all $x \in \mathbb{R}_{\max}$ [14], [15].

Definition 1. Let $n \in \mathbb{R}$. The n^{th} max-plus algebraic power of $x \in \mathbb{R}$ is denoted by $x^{\odot n}$ and corresponds to nx in conventional algebra, i.e.,

$$nx = \underbrace{x \odot x \odot \dots \odot x}_{n \text{ times}} = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ times}}.$$

In general, we define it as follows:

1. if $x \neq \varepsilon$, then $x^{\odot 0} = e = 0$;
2. if $\alpha \in \mathbb{R}$, then $x^{\odot \alpha} = \alpha x$;
3. if $k > 0$, then $\varepsilon^{\odot k} = \varepsilon$;
4. if $k \leq 0$, then $\varepsilon^{\odot k}$ is not defined.

Definition 2. The max-plus algebraic division operation is defined as follows:

$$\text{if } x, y \in \mathbb{R}_{\max} \text{ and } y \neq \varepsilon, \text{ then } \frac{x}{y} = x \odot y^{\odot -1} = x \odot (-y).$$

If y is equal to ε then the max-plus algebraic division is not defined [16].

Let the set \mathbb{R}_{\max} be given, and consider its Cartesian product \mathbb{R}_{\max}^n .

Obviously, for each element $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ we have $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, where $x_i \in \mathbb{R}_{\max}$, $i = 1, 2, \dots, n$. The elements $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ are called max-plus vectors.

Now, in the Cartesian product \mathbb{R}_{\max}^n we define the following two rules:

1. for an arbitrary couple of vectors $x, y \in \mathbb{R}_{\max}^n$ their sum $x \oplus y$ is

$$x \oplus y = x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_n \oplus y_n ;$$

2. multiplication $\lambda \odot x$ of a vector $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ by a scalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ is

$$\lambda \odot x = \lambda \odot x_1, \lambda \odot x_2, \dots, \lambda \odot x_n .$$

It is known that \mathbb{R}_{\max}^n is an idempotent linear space.

Now, we will discuss about matrices over \mathbb{R}_{\max} . For $m, n \in \mathbb{N}$ a set of all $m \times n$ matrices over \mathbb{R}_{\max} is denoted by $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$. The number of rows in such a matrix is m and the number of columns is n . As in conventional algebra we write a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ as follows:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

The entry in the i row and j column of A is denoted by a_{ij} .

Definition 3.

1. For $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ define their sum $A \oplus B$ by

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

2. For $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times k}$ and $B \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times n}$ define their product $A \odot B$ by

$$c_{il} = \bigoplus_{j=1}^k a_{ij} \odot b_{jl}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, n;$$

3. Multiplication $\alpha \odot A$ of a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ by a scalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ is defined by

$$\alpha \odot a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

4. The transpose A^T of a matrix A is defined as in conventional algebra

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

5. Let \mathcal{E} denote the max-plus zero matrix, whose all entries are ε ;

6. The $n \times n$ max-plus identity matrix E is defined as

$$e_{ij} = \begin{cases} e, & \text{if } i = j, \\ \varepsilon, & \text{if } i \neq j; \end{cases}$$

7. For a square matrix and positive integer k , the k power of A is denoted by $A^{\odot k}$ is defined by

$$A^{\odot k} = \underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_{k \text{ times}},$$

for $k = 0$ we take $A^{\odot 0} = E$.

Example 1. Find $A \oplus B$, $3 \odot A$ and $A \odot B$ for the matrices given below:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 5 & -1 \\ 3 & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solution. According to first and third parts of 1.2.1 Definition

$$\begin{aligned}
 A \oplus B &= \begin{pmatrix} 2 \oplus \varepsilon & 3 \oplus 5 & \varepsilon \oplus -1 \\ 1 \oplus 3 & \varepsilon \oplus \varepsilon & 0 \oplus -2 \\ 2 \oplus \varepsilon & -1 \oplus -4 & 3 \oplus 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & \varepsilon & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \\
 3 \odot A &= \begin{pmatrix} 2 \odot 3 & 3 \odot 3 & \varepsilon \odot 3 \\ 1 \odot 3 & \varepsilon \odot 3 & 0 \odot 3 \\ 2 \odot 3 & -1 \odot 3 & 3 \odot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \\
 A \odot B &= \begin{pmatrix} \varepsilon \oplus 6 \oplus \varepsilon & 7 \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & 1 \oplus 1 \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & 6 \oplus \varepsilon \oplus -4 & 0 \oplus \varepsilon \oplus 7 \\ \varepsilon \oplus 2 \oplus \varepsilon & 7 \oplus \varepsilon \oplus -1 & 1 \oplus -3 \oplus 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ \varepsilon & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Definition 4. The (tropical) permanent or determinant of a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ is defined as

$$\text{per } A = \bigoplus_{\sigma \in S_n} \bigodot_{i=1}^n a_{i\sigma i} = \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma 1} + a_{2\sigma 2} + \dots + a_{n\sigma n}, \quad (1)$$

where S_n denotes the set of all the permutations over $1, 2, \dots, n$.

Definition 5. Let A be a $n \times n$ matrix. The ij minor of A , denoted as M_{ij} , is the determinant of the $(n-1) \times (n-1)$ matrix which results from deleting the i row and the j column of A .

Theorem 1. Let A be a $n \times n$ matrix, where $n \geq 2$ and suppose the determinant of an $(n-1) \times (n-1)$ has been defined. Then for some fixed index i row and j column we have the following equality

$$\text{per } A = \bigoplus_{j=1}^n a_{ij} \odot \text{per } M_{ij} = \bigoplus_{i=1}^n a_{ij} \odot \text{per } M_{ij}, \quad (2)$$

The first formula consists of expanding the determinant along the i row and the second expands the determinant along the j column.

Proof. We will prove the formula for $n = 3$. In this case

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\
 &\quad \left. \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Assume that $i = 1$. By Definition of determinant

$$\begin{aligned}
 \text{per } A &= \bigoplus_{\sigma \in S_3} a_{1\sigma 1} \odot a_{2\sigma 2} \odot a_{3\sigma 3} = a_{11} \odot a_{22} \odot a_{33} \oplus \\
 &\quad \oplus a_{11} \odot a_{23} \odot a_{32} \oplus a_{12} \odot a_{21} \odot a_{33} \oplus a_{12} \odot a_{23} \odot a_{31} \oplus \\
 &\quad \oplus a_{13} \odot a_{21} \odot a_{32} \oplus a_{13} \odot a_{22} \odot a_{31} = a_{11} \odot a_{22} \odot a_{33} \oplus a_{23} \odot a_{32} \oplus \\
 &\quad \oplus a_{12} \odot a_{21} \odot a_{33} \oplus a_{23} \odot a_{31} \oplus a_{13} \odot a_{21} \odot a_{32} \oplus a_{22} \odot a_{31} = \\
 &= a_{11} \odot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \oplus a_{12} \odot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \oplus a_{13} \odot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{1j} \odot \text{per } M_{1j}
 \end{aligned}$$

So, $\text{per } A = \bigoplus_{j=1}^3 a_{1j} \odot \text{per } M_{1j}$. Since $i = 1$ is arbitrary, we have the following equality

$$\text{per } A = \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \odot \text{per } M_{ij}.$$

Similarly, the second formula can also be proved.

We stop by proving the theorem for the case $n = 3$, since in the general case it can be proved using the method of induction.

Definition 6. A matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ is called (tropically) singular if $A = \varepsilon \in \mathbb{R}_{\max}^{1 \times 1}$ or if there exist at least two different permutations that reach the maximum in $\text{per } A$, i.e.

$$\text{per } A = \sum_{i=1}^n a_{i\sigma i} = \sum_{i=1}^n a_{i\tau i},$$

for some $\sigma, \tau \in S_n$, $\sigma \neq \tau$. Otherwise, A is called (tropically) nonsingular.

Definition 7. The tropical rank of a matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ is the largest integer r such that A has a nonsingular $r \times r$ minor and is denoted by $r_{tr} A$.

Example 2. Check the singularity of the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. Let us look at the following two different permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

By formula (1)

$$\text{per } A = a_{1\sigma 1} + a_{2\sigma 2} + a_{3\sigma 3} + a_{4\sigma 4} = a_{1\tau 1} + a_{2\tau 2} + a_{3\tau 3} + a_{4\tau 4}$$

is the maximum and $\text{per } A = 3$. So, the matrix A is singular.

In this example $r_{tr} A = 2$, because the minor $M = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ of matrix A is nonsingular.

REFERENCES:

1. Akian M., Bapat R. and Gaubert S. *Max-plus algebras, Chapter 25 in the Handbook of Linear Algebra*, Hogben L., Bruualdi R., Greenbaum A. and Mathias R. (editors), *Discrete Mathematics and Its Applications*. 2007. Chapman and Hall.
2. Baccelli F., Cohen G., Olsder G., and Quadrat J. *Synchronization and Linearity*. 1992. New York: John Wiley and Sons.
3. Brackley C. A., Broomhead D. S., Romano M. C., and Thiel M. *A max-plus model of ribosome dynamics during mRNA translation*, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 303, pp. 128–140, 2012.
4. Comet J. -P. *Application of max-plus algebra to biological sequence comparisons*, *Theoretical computer science*, Vol. 293, no. 1, pp. 189–217, 2003.
5. Cuninghame-Green R. *Minimax Algebra, ser. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 1979. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
6. Eshimbetov M., Eshimbetov J., Abduraimov Y. *On solution of systems of max-plus linear equations*, *Bul. Ins. Math.*, Vol. 8, No 2, pp. 24–35 (2025).

7. Heidergott B., Olsder G., and Van der Woude J. *Max-plus at Work*. 2006. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
8. Heidergott B., Olsder G., and Van der Woude J. *Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications*. Princeton University Press, 2014
9. Eshimbetov M. R., Eshimbetov J. R., Ashurova N. A. "On the solution of a system max-plus linear equations in three variables" *Acta NUUz Exact sciences №2/2.1*, 2025, pp. 42-50.
10. Gaubert S. *Methods and applications of (max; +) linear algebra*. ST ACS 1997. *Lecture Notes in Computer Science 500*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 261–282.
11. Gondran M. and Minoux M. *Linear algebra in dioids: A survey of recent results*. *Annals of Discrete Mathematics*. 1984. Vol. 19, pp. 147–164.
12. Gunawardena J. *Idempotency*. 1998. Cambridge: Publ. of the Newton Institute, Cambridge University Press (Online publication date: May 2010).
13. Olsder G. J. and Roos C. *Cramer and Cayley-Hamilton in the max-algebra*. *Linear Algebra and its Applications*. 1998. Vol. 101, pp. 87–108.
14. Sennosuke W., Akiko F., Etsuo S., Iwao S. *A walk on max-plus algebra*. *Linear Algebra and its Applications*. 2020. Vol. 598, pp. 29–48.
15. Schutter B. De, Van den Boom T. *Max-plus algebra and max-plus linear discrete event systems: An introduction*, *Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08)*, May 2008 Göteborg, Sweden, pp. 36–42.
16. Yonggu K., Hyun-Hee Sh. *An overview of max-plus linear systems*. *Honam Math. J.* 2011. Vol. 33, Issue 1, pp. 93–113.
17. Zaitov A. A. *On a metric on the space of idempotent probability measures*. *Applied General Topology*. 2020. Vol. 16, Issue 1, pp. 35–51.
18. Zarichnyi M. *Spaces and mappings of idempotent measures*. *Izvestiya: Math.*, 2010. Vol. 74, Issue 3, pp. 45–64.

PSEVDOGIPERBOLIK INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN
BOSHLANG‘ICH-CHEGARAVIY MASALA

Boltayev Asliddin Askar o‘g‘li,
Buxoro davlat universiteti dotsenti
asliddinboltayev@mail.ru
Avliyoqulov Dilshodbek Qosimjon o‘g‘li,
Buxoro davlat universiteti magistranti
avliyoqulovdilshod58@gmail.com
Mirzoyeva Surayyo Oybek qizi,
Buxoro davlat universiteti tayanch doktoranti
asliddinboltayev6@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda bir o‘lchamli psevdogiperbolik integro-differensial tenglama uchun periodik chegaraviy shartli boshlang‘ich-chegaraviy masala tadqiq qilinadi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligini ko‘rsatishda Furiye usulidan foydalaniladi. Noma‘lum funktsiyaning Furiye koeffitsiyentlariga nisbatan integral tenglamalar olinib, ular yordamida apprior baholar olinadi. Masala yechimining mavjud va yagona bo‘lishi uchun berilganlarga yetarlicha silliqlik shartlari olinadi.

Kalit so‘zlar: psevdogiperbolik tenglama, integrodifferensial tenglama, boshlang‘ich-chegaraviy masala, spektral masala, Furiye usuli, mavjudlik, yagonalik.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDOHYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. In this paper, an initial-boundary value problem with periodic boundary conditions for a one-dimensional pseudohyperbolic integro-differential equation is investigated. The Fourier method is employed to establish the existence and uniqueness of the solution. Integral equations for the Fourier coefficients of the unknown function are derived, which are used to obtain a priori estimates. Sufficient smoothness conditions on the given data are imposed to ensure the existence and uniqueness of the solution.

Keywords: Pseudohyperbolic equation, integro-differential equation, initial-boundary value problem, spectral problem, Fourier method, existence, uniqueness.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В данной работе исследуется начально-краевая задача с периодическими граничными условиями для одномерного псевдогиперболического интегродифференциального уравнения. Для доказательства существования и единственности решения используется метод Фурье. Для коэффициентов Фурье неизвестной функции получены интегральные уравнения, с помощью которых выводятся априорные оценки. Для существования и единственности решения задачи установлены достаточные условия гладкости на заданные данные.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, спектральная задача, метод Фурье, существование, единственность.

Masalaning kelib chiqishi va qo‘yilishi. Fizika, kimyo va muhandislikdagi matematik modellar ko‘pincha xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi [1, 2]. Uzluksiz muhitlar, xususan, tor, sterjen, gaz, membrana tebranishlariga oid masalalar hamda elektromagnit tebranishlar masalalari giperbolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi. Psevdogiperbolik differensial yoki integro-differensial tenglamalar tibbiyot, biologiya, foydali qazilmalarni qidirish, seysmologiya, sanoatda sifat nazorati kabi turli hodisalarni modellashtirishda uchraydi [3,4].

Molekulyar dinamika simulyatsiyalarida suyuqliklar, kristallar yoki aralashmalarning xossalari hisoblash uchun odatda periodik chegaraviy shartlardan foydalaniladi. Periodik chegaraviy shartlar tabiatdagi ko‘plab muhim amaliy masalalardan kelib chiqadi. Ko‘rish mumkinki, [5-7] ishlarda periodik chegaraviy shartli diffuziya masalasi uchun yechimning mavjudligi, yagonaligi va berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi isbotlangan hamda ushbu masalaning sonli yechimlari ishlab chiqilgan. Xuddi shu kabi [8] ishda Moore-

Gibson-Thompson model tenglamasi uchun periodik chegaraviy shartli masala tadqiq qilingan va yechimning global mavjudligi hamda yagonaligi isbotlangan.

Ushbu tadqiqot davomida psevdogiperbolik integro-differensial tenglama uchun keltilgan boshlang'ich-chegaraviy masalaning yagona yechiluvchanligi keltiriladi. Keltirilgan funksiyalarga sillqlik sinflari olingan.

Quyida bir o'lchamli

$$u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} + \int_0^t g(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau = 0, \quad (1)$$

psevdogiperbolik integro-differensial tenglamani quyidagi

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_x(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

boshlang'ich va

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) \quad (3)$$

periodik (davriy) chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraylik. Bu yerda $g(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – oldindan berilgan funksiyalar. Odatda (1)-(3) dan $u(x, t)$ funksiyani aniqlash masalasiga to'g'ri masala deyiladi.

(1)-(3) masala chiziqli ekanligini ko'rishimiz mumkin. Shu sababli, uning yechimini Furye usuli yordamida topamiz. Yechimni

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad T \neq 0, \quad U \neq 0 \quad (6)$$

ko'rinishida qidiramiz. (6) belgilashdan foydalanib, (1)-(3) masala uchun ushbu

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (8)$$

$$X(0) = X(l), \quad X'(0) = X'(l) \quad (9)$$

spektral masalaga ega bo'lamiz. [9] dan ko'rish mumkinki, spektral masalaning $\lambda_k = \frac{2\pi k}{l}$ masalaning xos soniga (xos qiymatiga) mos xos funksiyalar sistemasi

$$(1, X_{1n}, X_{2n}) = (1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots) \quad (10)$$

ko'rinishida bo'ladi. Ushbu sistema λ_k larga nisbatan $L^2(0, l)$ da bazis tashkil qiladi.

(1)-(3) boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimi quyidagi

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k} \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} \sin \lambda_k x \quad (11)$$

qator ko'rinishida bo'ladi, bunda

$$u_{10} = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l u(x, t) dx,$$

$$u_{1k}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad u_{2k} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Yuqoridagi munosabatlardan va (1)-(3) masaladan foydalanib, $u(x, t)$ yechimning $u_{10}(t)$, $u_{1k}(t)$ va $u_{2k}(t)$ Furye koeffitsiyentlariga nisbatan masalalarga ega bo'lamiz. Birinchi navbatda $u_{10}(t)$ ga nisbatan

$$u_{10}''(t) = 0 \quad (12)$$

$$u_{10}(0) = \varphi_{10}, \quad u_{10}'(0) = \psi_{10} \quad (13)$$

munosabatni hosil qilamiz, bunda

$$\varphi_{10} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx.$$

(1)-(3) ni ikkala tomonini $\frac{2}{l} \cos(\lambda_k x)$ ga ko'paytirib, $[0, l]$ da integrallaymiz va

$$u_{1k}''(t) + \lambda_k^2 u_{1k}'(t) + \lambda_k^2 u_{1k}(t) - \lambda_k^2 \int_0^t u_{1k}(\tau) g(t, \tau) d\tau = 0, \quad (14)$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k} =: \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos(\lambda_k x) dx, \quad (15)$$

$$u'_{1k}(0) = \psi_{1k} =: \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos(\lambda_k x) dx \quad (16)$$

Koshi masalasini hosil qilamiz. Xuddi yuqoridagi kabi ish tutib, $\frac{2}{l} \sin(\lambda_k x)$ dan foydalanib,

$$u''_{2k}(t) + \lambda_k^2 u'_{2k}(t) + \lambda_k^2 u_{2k}(t) - \lambda_k^2 \int_0^t u_{2k}(\tau) g(t-\tau) d\tau = 0, \quad (17)$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k} =: \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_k x) dx, \quad (18)$$

$$u'_{2k}(0) = \psi_{2k} =: \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin(\lambda_k x) dx \quad (19)$$

Koshi masalasini olamiz.

(12)-(13), (14)-(16) va (17)-(19) Koshi masalalariga mos ekvivalent integral tenglamalarni olishimiz zarur. Buning uchun avvalo (12)-(13) Koshi masalasini yechimi:

$$u_{10}(t) = \psi_{10}t + \varphi_{10} \quad (20)$$

ko'rinishida topiladi.

Endi (15)-(17) va (18)-(20) masalarning mos ekvivalent integral tenglamalarni aniqlashimiz zarur. Sodda hisoblashlardan foydalanib, u_{jk} noma'lumlarga nisbatan

$$u_{jk} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} [v_{1k}e^{v_{2k}t} - v_{2k}e^{v_{1k}t}] \varphi_{jk} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} [e^{v_{1k}t} - e^{v_{2k}t}] \psi_{jk} +$$

$$+ \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} \int_0^t \int_0^\tau [e^{v_{1k}(t-\tau)} - e^{v_{2k}(t-\tau)}] g(\tau-s) u_{jk}(s) ds d\tau \quad (21)$$

integral tenglamani hosil qilamiz, bunda

$$v_{1k}^2 = \frac{-\lambda_k^2 + \sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}}{2}, \quad v_{2k}^2 = \frac{-\lambda_k^2 - \sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}}{2}.$$

$u'_{jk}(t)$ ga nisbatan integral tenglama hosil qilishimiz zarur. Shu sababli, (21) tenglikdan hosila olamiz

va

$$u'_{jk}(t) = \frac{v_{1k}v_{2k}}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} [e^{v_{2k}t} - e^{v_{1k}t}] \varphi_{jk} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} [v_{1k}e^{v_{1k}t} - v_{2k}e^{v_{2k}t}] \psi_{jk} +$$

$$+ \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} \int_0^t \int_0^\tau [v_{1k}e^{v_{1k}(t-\tau)} - v_{2k}e^{v_{2k}(t-\tau)}] g(\tau-s) u_{jk}(s) ds d\tau \quad (22)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Endi $u''_{jk}(t)$ uchun baho olishimizda zarur bo'lganligi sababli unga nisbatan tenglik olishimiz zarur.

Buning uchun (22) munosabatdan foydalanib,

$$u''_{jk}(t) = \frac{v_{1k}v_{2k}}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} (v_{2k}e^{v_{2k}t} - v_{1k}e^{v_{1k}t}) \varphi_{jk} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} (v_{1k}^2 e^{v_{1k}t} - v_{2k}^2 e^{v_{2k}t}) \psi_{jk} + \lambda_k^2 \int_0^t g(t-s) u_{jk}(s) ds +$$

$$+ \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\lambda_k^4 - 4\lambda_k^2}} \int_0^t \int_0^\tau (v_{1k}^2 e^{v_{1k}(t-\tau)} - v_{2k}^2 e^{v_{2k}(t-\tau)}) g(\tau - s) u_{jk}(s) ds d\tau \quad (23)$$

munosabatni hosil qilamiz.

Bizga ma'lumki, (1)-(3) masalaning klassik yechimi (11) ko'rinishida bo'lishi uchun bu funksional qator tekis yaqinlashuvchi bo'lishi, bundan tashqari u odatiy ma'noda (1)-(3) ni qanoatlantirishi zarur. Shu sababli birinchi navbatda (11) tenglikdan foydalanib, tenglamada qatnashgan barcha hosilalari bilan birga uzluksizligini ta'minlashimiz zarur. Buning uchun (21) tenglikdan foydalanib, $u_{jk}(t)$ ga nisbatan ushbu

$$|u_{jk}| \leq 4|\varphi_{jk}| + \frac{2}{\lambda_k^2} |\psi_{jk}| + 2\|g\|_{C[0,T]} \int_0^t (t-s) |U_{jk}(s)| ds, \quad j = 1,2$$

bahoni hosil qilib, olingan tengsizlikka Granoll integral tengsizligini qo'llab,

$$|u_{jk}(t)| \leq 4 \left(|\varphi_{jk}| + \frac{1}{\lambda_k^2} |\psi_{jk}| \right) e^{\|g\|_{C[0,T]} T^2}, \quad j = 1,2 \quad (24)$$

munosabatni hosil qilamiz.

Shuningdek, $u_{10}(t)$ va $u'_{10}(t)$ lar uchun

$$|u_{10}(t)| = |\psi_{10}t + \varphi_{10}| \leq |\psi_{10}|t + |\varphi_{10}|, \quad |u'_{10}(t)| = |\psi_{10}| \quad (25)$$

tengsizlikni olamiz.

(22) tenglikka (24) ni qo'llab,

$$|u'_{jk}(t)| \leq 4(|\varphi_{jk}| + |\psi_{jk}|) + 4\lambda_k^2 \|g\|_{C[0,T]} \left(|\varphi_{jk}| + \frac{1}{\lambda_k^2} |\psi_{jk}| \right) \exp\{\|g\|_{C[0,T]} T^2\}, \quad j = 1,2 \quad (26)$$

bahoga ega bo'lamiz. Xuddi shu kabi hisoblashlarni (23) tenglikka qo'llash natijasida $|u''_{jk}(t)|$ uchun

$$|u''_{jk}(t)| \leq 4\lambda_k^2 |\varphi_{jk}| + 8\lambda_k^2 |\psi_{jk}| + (1 + 4\lambda_k^2 T) \lambda_k^2 T \|g\| \left[4|\varphi_{jk}| + \frac{2}{\lambda_k^2} |\psi_{jk}| \right] \exp\{\|g\|_{C[0,T]} T^2\}, \quad j = 1,2 \quad (27)$$

apprior bahoni hosil qilamiz. (27)-(32) munosabatlardan foydalanib ushbu muhim lemmani keltiramiz.

1-lemma. Ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ va $t \in [0, T]$ lar uchun

$$|u_{10}(t)| \leq \alpha_0 (|\varphi_{10}| + |\psi_{10}|), \quad |u'_{10}(t)| \leq |\varphi_{10}|$$

$$|u_{jk}(t)| \leq \alpha_1 \left(|\varphi_{jk}| + \frac{1}{k^2} |\psi_{jk}| \right),$$

$$|u'_{jk}(t)| \leq \alpha_2 (k^2 |\varphi_{jk}| + |\psi_{jk}|),$$

$$|u''_{jk}(t)| \leq \alpha_3 (k^4 |\varphi_{jk}| + k^2 |\psi_{jk}|)$$

tengsizliklar o'rinli, bu yerda $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ lar $\|g\|_{C[0,T]}$ va T ga bog'liq musbat sonlar.

(11) qator ko'rinishida qidirayotgan yechimdan formal ravishda hosilalar olamiz va

$$u_{tt} = \sum_{k=0}^{\infty} u''_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u''_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \quad (28)$$

$$u_{xxx} = \sum_{k=0}^{\infty} -\lambda_k^2 u_{1k}(t) \cos \lambda_k x - \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \quad (29)$$

$$u_{xxxt} = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 u'_{1k}(t) \cos \lambda_k x - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u'_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (30)$$

qatorlarni hosil qilamiz.

1-lemma va (28)-(30) tengliklardan ko'rishimiz mumkinki, ixtiyoriy $x \in [0, l]$ hamda $t \in [0, T]$ larda ushbu qatorlarning eng tez o'suvchisi (30) qator hisoblanadi. Ushbu funksional qatorni ham sonli qator bilan majarantalashimiz mumkin:

$$S = \alpha_0(|\varphi_{10}| + |\psi_{10}|) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} [k^4|\varphi_{1k}| + k^4|\varphi_{2k}| + k^2|\psi_{1k}| + k^2|\psi_{2k}|], \quad (31)$$

bu yerda $\alpha = \max_{0 \leq i \leq 3} \alpha_i$. (36) sonli qator uzoqlashuvchi sonli qatordir. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarga yetarlicha silliqlik talabini bundan tashqari ba'zi shartlarni qo'yaylik:

I. $\varphi(x) \in C^5[0, l]$;

II. $\varphi(0) = \varphi(l), \varphi'(0) = \varphi'(l), \varphi''(0) = \varphi''(l),$
 $\varphi'''(0) = \varphi'''(l), \varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(l)$;

III. $\psi(x) \in C^3[0, l]$;

IV. $\psi(0) = \psi(l), \psi'(0) = \psi'(l), \psi''(0) = \psi''(l)$.

Agar I-IV shartlar o'rinli bo'lsa,

$$\varphi_{1k} = -\frac{1}{\lambda_k^5} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi^V(x) \sin(\lambda_k x) dx := -\frac{1}{\lambda_k^5} \varphi_{2k}^{(5)},$$

$$\varphi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^5} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi^V(x) \cos(\lambda_k x) dx := \frac{1}{\lambda_k^5} \varphi_{1k}^{(5)},$$

$$\psi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^3} \frac{2}{l} \int_0^l \psi'''(x) \sin(\lambda_k x) dx := \frac{1}{\lambda_k^3} \psi_{2k}^{(3)},$$

$$\psi_{2k} = -\frac{1}{\lambda_k^3} \frac{2}{l} \int_0^l \psi'''(x) \cos(\lambda_k x) dx := -\frac{1}{\lambda_k^3} \psi_{1k}^{(3)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bessel tengsizligidan foydalanadigan bo'lsak:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{jk}^{(5)}|^2 \leq \|\varphi^V(x)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_{1k}^{(3)}|^2 \leq \|\psi'''(x)\|_{L_2[0,l]}^2$$

bahoni hosil qilamiz. I-IV shartlar o'rinli bo'lsa, (31) sonli qator uchun quyidagicha baho

$$S \leq C (\|\varphi^V(x)\|_{L_2[0,l]}^2 + \|\psi'''(x)\|_{L_2[0,l]}^2)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar I-IV shartlarni qanoatlantirsa, u holda (31) sonli qatorni yaqinlashuvchi qilish mumkin. Veyersstrass alomatidan foydalanadigan bo'lsak, (36) sonli qator yaqinlashuvchi va bundan esa (11), (28)-(30) funksional qatorlar tekis yaqinlashuvchiligi hamda yagona uzluksiz funksiyaga yaqinlashishi kelib chiqadi.

1-teorema. Faraz qilaylik, I-IV shartlar qanoatlantirilsin, bundan tashqari $g(t) \in C[0, T]$ bo'lsin. U holda (1)-(3) boshlang'ich-chegaraviy masalaning $C_{x,t}^{2,2}((0, l) \times (0, T)) \cap C_{x,t}^{1,1}([0, l] \times [0, T])$ funksional sinfdan aniqlangan yagona klassik yechimi mavjud.

Izoh: (1)-(3) masalaning klassik yechimi (11) tenglik orqali aniqlanadi, bu yerda u_{10}, u_{1k}, u_{2k} koeffitsiyentlar mos ravishda (20) va (21) tengliklar orqali aniqlangan.

ADABIYOTLAR:

1. Andrews L.C., *Special Functions for Engineers and Mathematicians* // Macmillan Co., New York, NY, USA, 1985.
2. Aris R., *Mathematical Modelling Techniques* // Dover Publications Inc., New York, USA, 1994.
3. Zhou L., Tang B., *Dynamic thermoelastic behavior of metal thin film under transient laser heating mater* // *Sci. Eng.*, 2006, 428, pp. 284-289.
4. Benjamin B., Mahony J., *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems* // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1972, 272(1220), pp. 47-78.
5. Baglan I., *Determination of a coefficient in a quasilinear parabolic equation with periodic boundary condition* // *Inverse Probl. Sci. and Eng.*, 2014, 23, pp. 884-900.

6. Canca F., *Inverse Coefficient Problem of the Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Overdetermination Conditions // Abstract and Applied Analysis, 2013, 5, pp. 1-7.*
7. Canca F., *The inverse coefficient problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // Jour. In equal. and Appl., 2013, 1, pp. 9.*
8. Durdiev D.K., Boltaev A.A., *Global solvability of an inverse problem for a Moore-Gibson-Thompson equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions // Eurasian journal of mathematical and computer applications, 2024, 12(2), pp. 35-49.*
9. Budak B.M., Samarskii A.A., Tikhonov A.N., *Collection of Problems on Mathematical Physics // Nauka, Moscow, 1979.*

BUZILISH CHIZIG'IDA UZILISHGA EGA BO'LGAN IKKINCHI TUR PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

*Asqaraliyeva Muxtasar Azizjon qizi,
Qo'qon davlat universiteti o'qituvchisi
asqaraliyevamuxtasar@gmail.com*

Annotsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tur buzilish chizig'iga ega bo'lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal C_p masala yechimining bir qiymatli yechilishi ayrim shartlar asosida isbotlangan va parabolik va giperbolik sohalar tomonidan $y = 0$ buzilish chizig'ida berilgan funksiyalar orasidagi funksional bog'lanishlar olingan hamda C_p masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: parabolik-giperbolik, funksional, nolokal, buzilish chizig'i.

К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ПАРАБОЛИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА С РАЗГРАНИЧЕНИЕМ НА ЛИНИИ РАЗЛОМА

Аннотация. В данной статье доказано однозначное решение нелокальной C_p задачи для параболично-гиперболического уравнения с разломом второго порядка при определённых условиях, $y = 0$ получены функциональные связи между функциями, заданными параболической и гиперболической областями на разломе, и доказаны единственность и существование C_p решения задачи.

Ключевые слова: параболически-гиперболический, функциональный, нелокальный, линия разлома.

ON THE BOUNDARY PROBLEM FOR A SECOND-TYPE PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH A DISTINCTION ON THE FAILURE LINE

Abstract. In this article, the single-valued solution of a nonlocal C_p problem for a parabolic-hyperbolic equation with a second-order fault line is proved under certain conditions, and $y = 0$ functional connections between the functions given by the parabolic and hyperbolic domains on the fault line are obtained, and the uniqueness and existence of the solution C_p of the problem are proven.

Keywords: parabolic-hyperbolic, functional, nonlocal, line of discontinuity.

Kirish. Aralash tipdagi differensial tenglamalar ko'plab muhim: gaz dinamikasi nazariyasi, magnitli gidrodinamika, elektronlarning tarqalish nazariyasi, sirtlarning cheksiz kichik egilishlari nazariyalari va yer osti suvlari darajasini bashorat qilish kabi amaliy masalalarni yechishda qo'llanilishi tufayli, o'tgan asrning 50-yillaridan boshlab jadal suratda rivojlanayotgan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Matematik fizika tenglamalar nazariyasining muhim masalalaridan biri nostandart chegaraviy shartli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechilishini o'rganishdir. Shu sababli, ikkinchi turdagi aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni qo'yilishi va ularni o'rganish ilmiy tadqiqotning ustuvor yo'nalishlaridan biri bo'lib hisoblanadi.

Buzilish chizig'iga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar yechish hozirgi paytda xususiy hosilali differensial tenglamalardagi asosiy rivojlangan yo'nalishlardan biridir. Buning sabablaridan bir tomoni bu tenglamalarni amaliyotga qo'llanilishi bo'lsa, ikkinchi tomondan esa nazariy jihatdan bu tenglamalarga qo'yilgan masalalarni yechilishidir.

Manba va usullar. Chegaraviy masalalar yechimining bir qiymatli yechilishini isbotlashda ikkinchi turdagi Volterra va Fredgolm integral tenglamalari nazariyasidan, oddiy differensial tenglamalarni yechish

usullaridan, R_2 sinfdagi umumlashgan yechim xossalaridan, maxsus funksiyalar xossalaridan, kasr tartibli integro-differentsial operatorlarning xossalaridan foydalaniladi.

Bog‘liq adabiyotlar yoki muammoning o‘rganilganlik darajasi. Chet el, MDH va respublikamiz olimlari tomonidan chop etilgan va chop etilayotgan ilmiy maqolalarga nazar solsak, unda asosan bu tenglamalar uchun Triкоми, Gellerstedt, Bitsadze, nolokal masalalar o‘rganilgan bo‘lib, bundan tashqari bu tenglamalar uchun yangi korrekt bo‘lgan masalalar qo‘yilmoqda va o‘rganilmoqda. Bular haqidagi to‘liq ma‘lumotni A.V Bitsadze, M.S.Saloxitdinov tomonidan chiqarilgan monografiyalarning adabiyotlar ro‘yxatidan topish mumkin. Bizga ma‘lumki, buzilish chizig‘ida uzilishga ega bo‘lgan ikkinchi tur parabolik - giperbolik tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalarni taxlil etish kamroq o‘rganilgan. Shuning uchun ushbu maqolada buzilish chizig‘ida uzilishga ega bo‘lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal va parallel xarakteristikalarda Bitsadze – Samarskiy sharti bilan qo‘yilgan masalalarni bir qiymatli yechilishi o‘rganilgan.

Natija va topilmalar. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$O = \begin{cases} xu_{xx} + \alpha_0 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & x > 0, \quad y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda

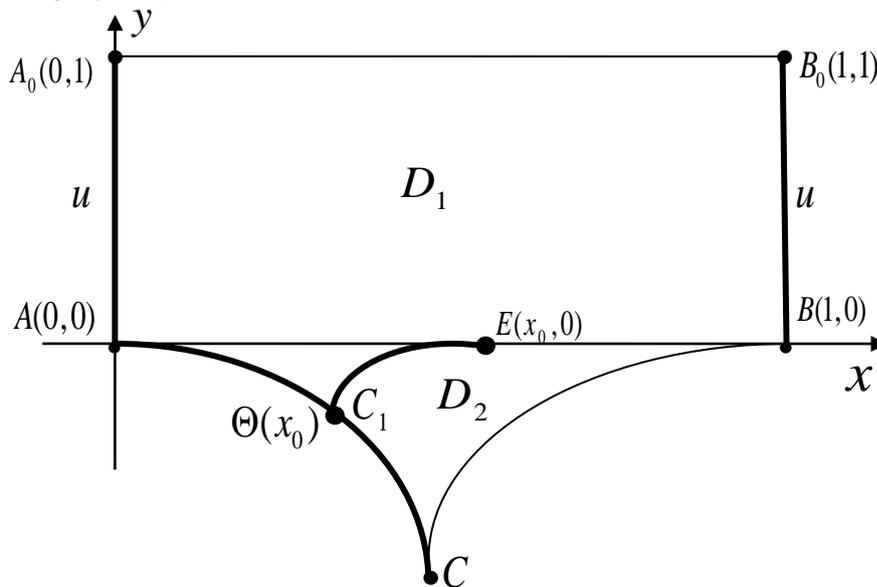
$$0 < \alpha_0 < 1 + 2\beta < 1, \quad 2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad 0 < m < 1. \quad (2)$$

Quyida (1) ko‘rinishdagi ikkinchi tur buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun C_p masala yechimining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

(1) tenglama uchun C_p masalasini qo‘yilishi

D orqali $x > 0, y > 0$ bo‘lganda $x=0, x=1, y=1$ mos ravishda to‘g‘ri chiziqalarda yotgan AA_0, BB_0, A_0B_0 kesmalar va $x > 0, y < 0$ bo‘lganda esa (1) tenglamaning

$AB: y=0, 0 < x < 1, AC: x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, BC: x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz (**1-chizma**).



1-chizma.

Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$J = \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\},$$

$$D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup J,$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} u(x, y) = \tau^\pm(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y \rightarrow \pm 0} u_y(x, y) = \nu^\pm(x), \quad (x, 0) \in J \quad (3)$$

$$2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0, \quad (4)$$

$$\Theta(x) = \left(\frac{x}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}(1+x) \right)^{\frac{2}{2-m}} \right), \quad (5)$$

bu yerda $\Theta(x)$ – (1) tenglamani $E(x, 0) \in J$ nuqtasidan chiquvchi EC_1 xarakteristikasi bilan AC xarakteristikasi kesishish nuqtalarining koordinatalari.

C_p masala Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$;

2) $u(x, y) \in C_{x,y}^{2,1}(D_1)$ bo‘lib, D_1 sohada (2.1) tenglamani qanoatlantirsin;

3) $u(x, y) \in R_2$ bo‘lib, D_2 sohada (1) tenglamani umumlashgan yechimi bo‘lsin;

4) $u(x, y)$ - funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u|_{AA_0} = \varphi_1(y), \quad u|_{BB_0} = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (6)$$

$$D_{0x}^{-\beta} \frac{d}{dx} u[\Theta(x)] = a(x)u(x, 0) + b(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (7)$$

5) $u_y \in C(D_1 \cup J) \cap C(D_2 \cup J)$ bo‘lib, J buzilish chizig‘ida quyidagi

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -0} u(x, y) &= p_1(x) \lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) + q_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \\ \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) &= p_2(x) \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) + q_2(x), \quad (x, 0) \in J, \end{aligned} \quad (8)$$

ulash sharti bajarilsin, bu yerda $\varphi_1(y), \varphi_2(y), a(x), b(x), p_j(x), q_j(x) (j=1,2)$ berilgan funksiyalar bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

$$\varphi_j(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \quad (j=1,2), \quad (9)$$

$$a(x) \in C^1(\bar{J}), \quad b(x) \in C^1(0,1], \quad (10)$$

$$p_2(x) < 0, \quad \forall x \in \bar{J}, \quad a(x)p_1(x) \geq 0, \quad \forall (x, 0) \in \bar{J}, \quad (11)$$

$$p_j(x), q_j(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J), \quad (j=1,2), \quad (12)$$

$b(x)$ funksiya $x \rightarrow 0$ da $-\beta$ darajadan kichik cheksizlikka intiladi, $x \rightarrow 1$ da esa chegaralangan.

$D_{0x}^\alpha [\cdot]$ - α kasr tartibli integro-differensial operator bo‘lib, $\Theta(x)$ – (5) formula orqali aniqlanadi (1-chizma).

Parabolik soha tomonidan $y = 0$ buzilish chizig‘ida olingan $\tau^+(x)$ va $\nu^+(x)$ funksiyalar orasidagi funksional bog‘lanish

D_1 sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$xU_{xx} + \alpha_0 U_x - U_y = 0, \quad 0 < \alpha_0 < 1. \quad (13)$$

(2), (3) va (6) shartlarga hamda parabolik tipdagi tenglamaning xossalari ko‘ra (13) tenglamaga $y \rightarrow +0$ limitga o‘tamiz va quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$x \tau^{+''}(x) + \alpha_0 \tau^{+'}(x) = v^+(x), \quad (x, 0) \in J, \quad (14)$$

$$\tau^+(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad \tau^+(1) = \varphi_2(0). \quad (15)$$

Endi (14) va (15) masalani yechishga kirishamiz. Buning uchun (14) differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

Ushbu

$$x \tau^{+''}(x) + \alpha_0 \tau^{+'}(x) = 0 \quad (16)$$

bir jinsli differensial tenglamani umumiy yechimini izlaymiz:

(16) tenglamaga $z(x) = \tau^{+'}(x)$ belgilash kiritib, uni quyidagi

$$xz' + \alpha_0 z = 0 \quad (17)$$

ko'rinishda yozib olamiz va yechamiz:

$$x \frac{dz}{dx} = -\alpha_0 z$$

$$\frac{dz}{z} = -\alpha_0 \frac{dx}{x}$$

ikkala tomonini integrallab

$$\ln|z| = -\alpha_0 \ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1 x^{-\alpha_0}|$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$z = C_1 x^{-\alpha_0}$$

ni olamiz. Belgilashga ko'ra esa

$$\tau^{+'}(x) = C_1 x^{-\alpha_0}$$

yoki

$$\tau^+(x) = \frac{C_1 x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} + C_2 \quad (18)$$

ni hosil qilamiz. (18) formula (16) tenglamaning umumiy yechimidir.

Endi o'zgarishni variatsiyalash usulidan foydalanib, (14) tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun (18) ifodani ushbu

$$\tau^+(x) = \frac{C_1(x) x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} + C_2(x) \quad (19)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(19) ni (14) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \frac{C_1'(x) x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x) x^{1-\alpha_0} = v^+(x), \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} C_1'(x) = x^{\alpha_0-1} v^+(x), \\ C_2'(x) = -\frac{v^+(x)}{1-\alpha_0}. \end{cases}$$

Bundan esa, noma'lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni quyidagicha topamiz:

$$\begin{cases} C_1(x) = \int_0^x t^{\alpha_0-1} v^+(t) dt + C_3, \\ C_2(x) = -\frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^x v^+(t) dt + C_4 \end{cases} \quad (20)$$

(20) ni (19) ga qo'yib, (14) tenglamaning umumiy yechimini olamiz:

$$\tau^+(x) = \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \int_0^x t^{\alpha_0-1} v^+(t) dt + \frac{C_3 x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} + C_4 - \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^x v^+(t) dt \quad (21)$$

Endi noma'lum C_3 va C_4 o'zgarmlarni topish uchun (21) umumiy yechimga (15) shartni qanoatlantiramiz:

$$\tau^+(0) = C_4 = 0,$$

$$\tau^+(1) = \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^1 t^{\alpha_0-1} v^+(t) dt + \frac{C_3}{1-\alpha_0} - \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^1 v^+(t) dt = \varphi_2(0).$$

Bundan, noma'lum C_3 va C_4 o'zgarmlarni ushbu

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ C_3 = \int_0^1 v^+(t) dt - \int_0^1 t^{\alpha_0-1} v^+(t) dt + (1-\alpha_0)\varphi_2(0) \end{cases} \quad (22)$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

(22) ni (21) ga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \tau^+(x) &= \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \int_0^x t^{\alpha_0-1} v^+(t) dt + \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \int_0^1 \left(1-t^{\alpha_0-1}\right) v^+(t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^x v^+(t) dt + x^{1-\alpha_0} \varphi_2(0) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^x \left(x^{1-\alpha_0} t^{\alpha_0-1} + x^{1-\alpha_0} - t^{\alpha_0-1} x^{1-\alpha_0} - 1\right) v^+(t) dt + \\ &\quad + \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \int_0^1 \left(1-t^{\alpha_0-1}\right) v^+(t) dt + x^{1-\alpha_0} \varphi_2(0) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha_0} \int_0^x (x^{1-\alpha_0} - 1) v^+(t) dt + \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \int_0^1 \left(1-t^{\alpha_0-1}\right) v^+(t) dt + x^{1-\alpha_0} \varphi_2(0). \end{aligned}$$

Shunday qilib, (14) (15) masalaning yechimi quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\tau^+(x) = \int_0^1 G(x,t) v^+(t) dt + x^{1-\alpha_0} \varphi_2(0), \quad (x, 0) \in \bar{J}, \quad (23)$$

bu yerda

$$G(x,t) = \frac{1}{1-\alpha_0} \begin{cases} x^{1-\alpha_0} (1-t^{\alpha_0-1}), & 0 \leq x \leq t, \\ x^{1-\alpha_0} - 1, & t \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

(24) formula bilan aniqlangan $G(x, t)$ funksiya bir jinsli (14), (15) masalasining Grin funksiyasi bo‘ladi [18].

Demak, (23) formulaga D_1 parabolik sohadan J buzilish chizig‘ida olingan $\tau^+(x)$ va $\nu^+(x)$ funksiyalar orasidagi birinchi funksional bog‘lanish.

Giperbolik sohasi tomonidan $y = 0$ buzilish chizig‘ida olingan $\tau^-(x)$ va $\nu^-(x)$ funksiyalar orasidagi funksional bog‘lanish

D_2 sohada

$$u_{xx} - (-y)^m u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in D_2, \quad 0 < m < 1 \quad (25)$$

tenglamaning $u(x, 0) = \tau^-(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $u_y(x, 0) = \nu^-(x)$, $0 < x < 1$, shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidan foydalanamiz.

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} T(\zeta) d\zeta + \int_\xi^\eta (\eta - \zeta)^{-\beta} (\zeta - \xi)^{-\beta} N(\zeta) d\zeta \quad (*)$$

ga $\xi = 0$, $\eta = x$ qo‘yib va (5) dan foydalanib, hamda

bir necha hisob-kitoblardan so‘ng quyidagini hosil qilamiz:

$$u[\Theta(x)] = u\left[\frac{x}{2}; -\left(\frac{2-m}{4}(1+x)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right] = \int_0^x (x-t)^{-\beta} t^{-\beta} N(t) dt, \quad 0 < -\beta < \frac{1}{2}, \quad (26)$$

bu yerda $N(t)$ funksiya topiladi.

(26) tenglikni x bo‘yicha differensiallab, so‘ngra

$$D_{ax}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \text{ formulani qo‘lab, quyidagini olamiz:}$$

$$\frac{d}{dx} u[\Theta(x)] = -\beta \int_0^x (x-t)^{-\beta-1} t^{-\beta} N(t) dt = \Gamma(1-\beta) D_{0x}^\beta x^{-\beta} N(x). \quad (27)$$

(26) ni (7) ga qo‘yib, (3), (*) hamda

$$D_{0x}^{-\beta} D_{0x}^\beta x^{-\beta} N(x) = x^{-\beta} N(x) \quad (28)$$

ni hisobga olib,

$$x^{-\beta} \left[\frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(x) - \gamma_2 \nu^-(x) \right] = a(x) \tau(x) + b(x),$$

yoki

$$\gamma_2 \nu^-(x) = \frac{1}{2 \cos \pi \beta} T(x) - a(x) x^\beta \tau^-(x) - x^\beta b(x) \quad (29)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau^-(x). \quad (30)$$

Demak, (29) formulaga D_2 giperbolik sohadan J buzilish chizig‘ida olingan $\tau^-(x)$ va $\nu^-(x)$ funksiyalar orasidagi ikkinchi funksional bog‘lanish.

C_p masala yechimining yagonaligi

(3) belgilashga ko'ra (8) shartni quyidagicha yozab olamiz:

$$\begin{aligned}\tau^-(x) &= p_1(x)\tau^+(x) + q_1(x), & (x, 0) \in \bar{J}, \\ \nu^-(x) &= p_2(x)\nu^+(x) + q_2(x), & (x, 0) \in J.\end{aligned}\tag{31}$$

(31) ifodani (29) tenglikka qo'yib, ushbu

$$\begin{aligned}\gamma_2 \left[p_2(x)\nu^+(x) + q_2(x) \right] &= \frac{1}{2\cos\pi\beta} T(x) - \\ &- a(x)x^\beta \left[p_1(x)\tau^+(x) + q_1(x) \right] - x^\beta b(x),\end{aligned}$$

bundan

$$\begin{aligned}\gamma_2 p_2(x)\nu^+(x) &= -a(x)x^\beta p_1(x)\tau^+(x) + \\ &+ \frac{1}{2\cos\pi\beta} T(x) - a(x)x^\beta q_1(x) - \gamma_2 q_2(x) - x^\beta b(x),\end{aligned}\tag{32}$$

funksional bog'lanishni hosil qilamiz.

Xulosa. O'tgan asrning elliginchi yillaridan boshlab ikkinchi tur elliptiko-giperbolik, parabolik-giperbolik va parabolo-elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan lokal va nolokal masalalarni yechishga bo'lgan qiziqish yanada ortdi. Bunga sabab bu tenglamalarni ko'pgina fizik, mexanik va biologik jarayonlarni o'rganishda qo'llanishidir. Xulosa sifatida shuni aytish mumkinki, maqolada R_2 sinfdagi ikkinchi tur buzilish chizig'iga ega bo'lgan giperbolik tipdagi tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasining umumlashgan yechimi topilgan, buzilish chizig'iga ega bo'lgan parabolik tipdagi tenglama uchun birinchi chegaraviy masala yechilgan, nolokal masalalar yechimining bir qiymatli yechilishi uchun zarur bo'lgan funktsional bog'lanishlar olingan, buzilish chizig'ida uzilishga ega bo'lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun quyilgan nolokal masala yechimining yagonaligi va mavjudligini isbotlangan.

ADABIYOTLAR:

1. Gellerstedt S. *Quelques problèmes mixtes pour equation* $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$. // *Arxiv F.M. A.o.F.* 26A 1938 v.3.p.1-32.
2. Islomov B., Ochilova N.K. *O kraevoy zadache dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskogo tipa s dviyuma liniyami i razlichnymi poriyadkami vyrozhdeniya*. // «*Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal*». 2005. №3. S.43-51.
3. Islomov B.I., Abdullayev A.A. *On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition*. // *Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*. 2018. 9 (3). Pp. 307-318.
4. Salohiddinov M. *Integral tenglamalar*. T.: "O'qituvchi". 2007. 256 b.
5. Urinov A.K., Okboev A.B. *Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind*. // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. 41(9). Pp. 1886-1897.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М. Наука. 1966. Т. 2. 295 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М.: Наука. 1965. Т. 1. 296 с.
8. Бицадзе А.В. *"Некоторые классы уравнений в частных производных"* Москва: Наука 1981. 448 с.
9. Джурраев Н. // *Изв. АН УзССР. серия физ-мат наук*. 1989. №2 С.19-23.
10. Джурраев Т.Д. *"Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов"* Ташкент: Фан. 1979. 240 с.
11. Жумоев Б. *Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области*. // «*Uzbekskiy matematicheskiy zhurnal*». 2012. № 1. С. 38-46.
12. Ивашкина Г.А. *O zadachax tipa Biцадзе-Samarского dlya uravneniya* $u_{xx} + \operatorname{sgn} y |y|^m u_{yy} = 0, 0 < m < 1$. // «*Дифференциальные уравнения*». 1981. 17(6). С. 1078-1089.

13. Исамухамедов С.С // сб. трудов: "Вырождающиеся дифференциальные уравнения и обратные задачи." Ташкент. "Фан". 1986. С.98-113.

14. Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Меж. конф. молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». Россия. Нальчик. 2011. С. 122-125.

15. Исламов Н.Б. Аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа с характеристическим вырождением. // «Узбекский математический журнал». 2014. № 4. С. 63-74.

16. Исламов Н.Б. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения эллипτικο-гиперболического типа второго рода. // «Узбекский математический журнал». 2012. № 4. С. 38-50.

17. Исламов Б., Акбарова С. Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // Тез. докл. всесоюз. конф. "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление". Ашхабад. 1990. С.65-66.

18. Исламов Б.И., Мадрахимова З.С. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором.

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISHDA KETMA-KET DIFFERENSIALLASH METODINING ALGORITMI

Jalolov Ozodjon Isomidinovich,
 Buxoro davlat universiteti dotsenti, f.-m.f.n.
 o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz
Fayzullayeva Nilufar Vahobjon qizi,
 Buxoro davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Hozirgi kunda juda ko'p masalarning matematik modelini qurganimizda, u differensial tenglamaga keladi. Albatta matematikaga bilamizki har doim ham differensial tenglamalarni analitik usulda yechib bo'lmaydi. Analitik usulda yechib bo'lmaydigan differensial tenglamalarni taqribiy metodlardan foydalanib yechishga to'g'ri keladi. Hozirgi vaqtda matematik masalalarni yechish uchun bir nechta matematik tizimlar yaratilgan. Ushbu dasturlardan ham foydalanib differensial tenglamalarni taqribiy yechish mumkin. Bu dasturlarda dasturlash imkoniyatlari ham mavjud bo'lib, unda qo'yilgan masalani algoritmini yozish mumkin. Differensial tenglamalarni taqribiy yechishning bir qancha usullari mavjud. Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning ketma-ket differensiallash metodi hamda uning Maple dasturida algoritmi keltirilgan. Ushbu algoritmdan foydalanib ixtiyoriy oddiy differensial tenglamani taqribiy yechish mumkin.

Kalit so'zlar: differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, umumiy va xususiy yechimlar, Koshi masalasi, maxsus yechim, ketma-ket differensiallash.

АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В настоящее время, когда мы строим математическую модель многих задач, все сводится к дифференциальному уравнению. Конечно, из математики мы знаем, что не всегда удаётся решить дифференциальные уравнения аналитически. Дифференциальные уравнения, которые не могут быть решены аналитически, следует решать приближёнными методами. В настоящее время создано несколько математических систем для решения математических задач. При помощи этих программ можно приближённо решать дифференциальные уравнения. Эти программы также имеют возможности программирования, где можно написать алгоритм для данной задачи. Существует несколько способов аппроксимации решения дифференциальных уравнений. В данной статье представлен метод последовательного дифференцирования приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений и его алгоритм в программе Maple. С помощью этого алгоритма можно приближённо решить произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, общее и частное решения, задача Коши, специальное решение, последовательное дифференцирование.

ALGORITHM OF THE METHOD OF SEQUENTIAL DIFFERENTIATION FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. Nowadays, when we build a mathematical model of many problems, everything comes down to a differential equation. Of course, we know from mathematics that it is not always possible to solve differential equations analytically. Differential equations that cannot be solved analytically should be solved by approximate methods. Currently, several mathematical systems have been created for solving mathematical problems. Using these programs, you can approximately solve differential equations. These programs also have programming capabilities where you can write an algorithm for a given task. There are several ways to approximate the solution of differential equations. This article presents a method of successive differentiation of an approximate solution of ordinary differential equations and its algorithm in the Maple program. Using this algorithm, one can approximately solve an arbitrary ordinary differential equation.

Keywords: differential equation, order of a differential equation, general and particular solutions, Cauchy problem, special solution, successive differentiation.

Kirish. Differensial tenglamalar tabiatdagi ko‘plab jarayonlarni – mexanik harakat, issiqlik almashinuvi, elektr zanjirlari, biologik populyatsiyalar o‘sishi, iqtisodiy dinamik jarayonlar kabi holatlarni matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Ammo ko‘pchilik real jarayonlarni ifodalovchi differensial tenglamalar analitik tarzda (ya’ni, aniq formulali) yechimga ega emas. Shu sababli ularni sonli usullar bilan yechish zarur bo‘ladi. Ko‘plab differensial tenglamalarning analitik (aniq) yechimi mavjud emas yoki ularni qo‘l bilan yechish murakkabdir. Shu sababli amaliy hisoblashlarda sonli (taqribiy) metodlardan foydalanish zarur bo‘ladi. Bunday metodlar yordamida differensial tenglamalarning yechimi oraliqda ma’lum qadam h bilan ketma-ket hisoblab chiqiladi va natijada yechimning taqribiy qiymatlari olinadi. Matematika va uning tadbirlarining muhim masalalari x ni emas, balki uning biror noma’lum $y(x)$ funksiyasini topish masalasi qo‘yilgan va tarkibida x , $y(x)$ shu bilan birga uning $y'(x)$, $y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ hosilalarini o‘z ichiga olgan murakkab tenglamalarni yechishga keltiriladi [1].

Masalan, $y' + 2y - x^3 = 0$, $y'' = ax$, $y''' + y = 0$.

1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi x ni, noma’lum $y(x)$ funksiyani va uning n tartibli hosilasiga qadar hosilalarini bog‘lovchi tenglamaga n – tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

Yuqorida yozilgan tenglamalar, mos ravishda, birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli differensial tenglamalardir. n – tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinish quyidagicha.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

2-ta’rif. (1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida n marta differensiallanuvchi har qanday $y = f(x)$ funksiyaga (1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi.

Masalan, $y = e^{-x}$ funksiya $y' + y = 0$ differensial tenglama yechimi bo‘lib, u tenglamaning cheksiz ko‘p yechimlaridan biridir. Har qanday $y = c \cdot e^{-x}$ funksiya ham, bu yerda, c – ixtiyoriy o‘zgarmas son, tenglamani qanoatlantiradi. Ushbu differensial tenglama yechilganda, uning yechimi $y = c \cdot e^{-x}$ ko‘rinishdan o‘zgacha bo‘lishi mumkin emas. Shu ma’noda, $y = c \cdot e^{-x}$ funksiya uning umumiy yechimi deyiladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o‘zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to‘plami yagona ixtiyoriy c o‘zgarmasga bog‘liq deyiladi [1,3].

O‘zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi. $y''' = 0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin:

$$y''' = c_1, y'' = c_1x + c_2, y' = c_1x^2/2 + c_2x + c_3,$$

bu yerda, c_1 , c_2 va c_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lib, ularning har qanday qiymatlarida $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$ umumiy yechim bo‘lib hisoblanadi. $y''' = 0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq va har birining aniq qiymatlarida xususiy yechim hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi misollardan differensial tenglama umumiy yechimida o‘zgarmaslar soni tenglamaning tartibiga teng ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechim o‘zgarmaslarining aniq qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Masalaning qo‘yilishi. Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo‘yilishiga qarab, umumiy yechimi yoki xususiy yechimi topiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy

$$F(x; y; y') = 0 \quad (2)$$

yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y' = f(x; y) \quad (3)$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Ushbu tenglama ham, odatda, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ulardan biror – bir xususiy yechimni ajratib olish qo‘shimcha shartni talab etadi. Ko‘p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo‘yiladi.

Koshi masalasi

$$y' = f(x; y) \tag{4}$$

differensial tenglamaning

$$y|_{x=x_0} = y_0 \tag{5}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat[5].

(4), (5) masala yechimining mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremdan aniqlanadi.

1-teorema. Agar $f(x; y)$ funksiya $(x_0; y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va $\partial f / \partial y$ – uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lsa, u holda $(x_0; y_0)$ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofda $y' = f(x; y)$ differensial tenglama uchun $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang'ich shartli Koshi masalasi yechimi mavjud va yagonadir.

Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

Agar boshlang'ich $(x_0; y_0)$ nuqtaning berilishi (2) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechim xususiy yechim deyiladi.

Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to'plamiga uning umumiy yechimi deyiladi. Odatda, umumiy yechim oshkor $y = \phi(x, c)$ yoki oshkormas $\phi(x, y, c) = 0$ ko'rinishda yoziladi. c o'zgarmas $(x_0; y_0)$ boshlang'ich shart asosida $y_0 = \phi(x_0; c)$ tenglamadan topiladi.

3-ta'rif. Tenglamaning umumiy integrali (yoki yechimi) deb, c o'zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\phi(x, y, c) = 0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik shartlari (1-teoremdagi) yuqorida ko'rilgan $y' = -y$ tenglama uchun xOy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y = c \cdot e^{-x}$ formuladan iborat bo'lib, har qanday boshlang'ich $y|_{x=x_0} = y_0$ shart mos c o'zgarmas tanlanganda qanoatlantiriladi. c o'zgarmas $y_0 = c \cdot e^{-x_0}$ tenglamadan topiladi: $c = y_0 \cdot e^{x_0}$.

Differensial tenglamani shartlarsiz yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi. (2) differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta'minlaydigan muhim shartlardan biri $\partial f / \partial y$ xususiy hosilaning uzluksizligidir. Ba'zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasligi va ular orqali birorta ham integral chiziq o'tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o'tishi mumkin. Bunday nuqtalar differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig'i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo'lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari deb yuritiladi.

$$y' = f(x) \tag{6}$$

ko'rinishga tenglamani oddiy integrallash yo'li bilan yechiladi. Natijada, $y = \int f(x)dx$. Agar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan biri $F(x)$ bo'lsa, u holda umumiy yechim $y = F(x) + c$ ko'rinishda yoziladi.

$$y' = p(x)q(y) \tag{7}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deb yuritiladi.

(7) tenglamani yechish uchun noma'lum y funksiyaning qaralayotgan o'zgarish sohasida $q(y) \neq 0$ shart bajariladi deb, (7) tenglamani

1. $dy/q(y) = p(x)dx$
 2. shaklda yozamiz va ikkala qismini integrallab,
- $$\int dy/q(y) = \int p(x)dx$$

3. tenglikni olamiz. Agar $Q(y)$ funksiya $1/q(y)$ funksiyaning, $P(x)$ esa $p(x)$ ning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, (7) tenglamaning umumiy integrali:

4.
$$Q(y) = P(x) + c$$

5. ko'rinishdan iborat bo'ladi [5,6].

Tadbiqiy masalalarda juda ko'p oddiy differensial tenglamalar uchraydi bunday tenglamalarni hamma vaqt analitik ko'rinishda yechib bo'lmaydi. Masalan: $\frac{du}{dx} = x + x^2 + u^2$ tenglamaning umumiy yechimini elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Bunday masalalarni taqribiy yechishga to'g'ri keladi.

Ketma-ket differensiallash usuli.

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi Koshi masalasi berilgan bo'lsa $y(x)$ yechim x_0 nuqta atrofida darajali qator ko'rinishda izlanadi.

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x-x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (4)$$

Masalan: $y'' = xyy'$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$ boshlang'ich masala yechimini darajali qator ko'rinishda topamiz.

$y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ larni topib (4) formulaga qo'yib funksiyani ko'rinishini topamiz.

1) $y'' = 0 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 0$ 2) $y''' = yy' + xyy'' + x(y')^2 = 1$

yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.
$$y = 1 + x + \frac{x^3}{3!}$$

(4)-formulada qancha ko'p hadlar aniqlansa natija yechimga yaqinlashadi.

Asosiy natija. Ketma-ket differensiallash metodida qancha ko'p hadlar aniqlansa natija yechimga yaqinlashadi. Bu masalani qo'lda hisoblash qiyinchiliklarga olib kelishi mumkin. Shuning uchun bu metodni Maple dasturi yordamida algoritmini tuzamiz [2-4].

Diffdarajali :=

```
proc (f::anything, x::name, y::name, y1::name, x0::numeric, y0::numeric, y01::numeric, n::integer)
local p, der, i, j, s; m0 || 1 := y01; m0 || 2 := subs(x = x0, y = y0, y1 = y01, f); der := subs(y1 = m1, f);
p := y0+m0 || 1*(x-x0)+(1/2)*m0 || 2*(x-x0)^2;
for i from 3 to n do s := 0;
for j to i-2 do s := s+(diff(der, m || j))*m || (j+1) end do;
der := diff(der, x)+(diff(der, y))*m || 1+s; m0 || i :=
eval(der, {seq(m || k = m0 || k, k = 1 .. i-1), x = x0, y = y0});
p := p+m0 || i*(x-x0)^i/factorial(i)
end do
end proc
```

$s := \text{Diffdarajali}(x + y(x), x, y, y1, 0, 1, 2, 10);$

$$1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{1680}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{120960}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10}$$

restart : dsolve({diff(y(x), x\$2) = x + y(x), y(0) = 1, D(y)(0) = 2}, y(x));

$$y(x) = -e^{-x} + 2e^x - x$$

$$T(x) := 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{1680}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{120960}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10};$$

$$x \rightarrow 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{1680}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{120960}x^9 + \frac{1}{3628800}x^{10}$$

T(1.0);

4.068684139

y(x) := -e^{-x} + 2e^x - x;

$$x \rightarrow -e^{-x} + 2e^x - x$$

y(1.0);

4.068684215

1-chizma. Maple dasturida natijalar tahlili

Maple dasturida oddiy differensial tenglamalarni ketma-ket differensiallashtirish usuli bilan taqribiy yechish uchun yaratilgan algoritmnı aniq misollarda qo'llab natijalarni tahlil qilamiz.

Yuqorida $\{y'' = x + y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ oddiy differensial tenglama yaratilgan algoritm orqali yechib natijalar solishtirib ko'rilgan. Natijalarda ko'rinadiki $n=10$ ta qadamda 10^{-6} aniqlik beryapti. Ushbu algoritm orqali ixtiyoriy 2-tartibli oddiy differensial tenglamani taqribiy yechish mumkin.

Xulosa. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish metodlari murakkab analitik yechim mavjud bo'lmagan holatlarda samarali qo'llaniladi. Ushbu metodlar yordamida differensial tenglamalarni modellashtirish fizika, mexanika va iqtisodiyotdagi masalalarni sonli yechish imkonini beradi. Ushbu maqolada oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishda ketma-ket differensiallashtirish usuli uchun Maple tizimida dastur tuzilgan. Ushbu metodning Maple tizimidagi dasturiy realizatsiyasi differensial tenglamalarni avtomatik yechish, turli xatoliklarni solishtirish va natijalarni tahlil qilish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Исроилов М.И. *Ҳисоблаш методлари*. – Тошкент, Ўқитувчи, 2-қисм, 2008. 320 б.
2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. *Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Matlab, Maple (Самоучитель)*. – М.: ИТ Пресс, 2006. – 496 с.
3. Абдухамидов А.У., Худойназаров С. *Ҳисоблаш усулларида амалиёт ва лаборатория машғулоти*. – Тошкент: Ўқитувчи, 1995. – 240 б.
4. Матросов А. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
5. Самарский А.А. *Введение в численные методы*. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
6. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.

PYTHON DASTURLASH TILIDA SIMVOLIK HISOBLASHLARNING MATEMATIK ASOSLARI VA AMALIY TATBIQI

Xayatov Xurshidjon Usmanovich,
Buxoro davlat universiteti o'qituvchisi
wera00@mail.ru, x.u.xayatov@buxdu.uz
Qayimova Munisaxon Baxtiyor qizi,
Buxoro davlat universiteti magistranti

Annotatsiya. Maqolada simvolik hisoblashlarning matematik asoslari, kompyuter algebrasi tizimlari nazariyasi va Python dasturlash tilida SymPy kutubxonasi yordamida ilmiy hisoblashlarni amalga oshirish metodologiyasi taqdim etilgan. Tadqiqot doirasida differensial va integral hisoblash algoritmlari, algebraik tenglamalarni yechish usullari, chiziqli algebra amallari va ularning dasturiy implementatsiyasi tahlil qilingan. Har bir nazariy konsepsiya aniq kod namunalari va ularning bajarilish natijalari bilan ko'rsatilgan. Tadqiqot natijalari simvolik hisoblashlarning sonli usullarga nisbatan aniqlik va samaradorlik jihatidan ustunliklarini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: simvolik hisoblashlar, kompyuter algebrasi, SymPy, matematik modellashtirish, aniq yechimlar, Python.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

Аннотация. В статье представлены математические основы символьных вычислений, теория систем компьютерной алгебры и методология выполнения научных вычислений на языке программирования Python с использованием библиотеки SymPy. В рамках исследования проанализированы алгоритмы дифференциального и интегрального исчисления, методы решения алгебраических уравнений, операции линейной алгебры и их программная реализация. Каждая теоретическая концепция подтверждена конкретными примерами кода и результатами их выполнения. Результаты исследования демонстрируют преимущества символьных вычислений по сравнению с численными методами с точки зрения точности и эффективности.

Ключевые слова: символьные вычисления, компьютерная алгебра, SymPy, математическое моделирование, точные решения, Python.

MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND PRACTICAL APPLICATION OF SYMBOLIC COMPUTATION IN PYTHON PROGRAMMING

Abstract. The article presents the mathematical foundations of symbolic computation, the theory of computer algebra systems, and a methodology for performing scientific calculations using the SymPy library in the Python programming language. Within the scope of the research, algorithms for differential and integral calculus, methods for solving algebraic equations, linear algebra operations, and their software implementations are analyzed. Each theoretical concept is illustrated with specific code examples and their execution results. The findings of the study demonstrate the advantages of symbolic computation over numerical methods in terms of accuracy and efficiency.

Keywords: symbolic computation, computer algebra, SymPy, mathematical modeling, exact solutions, Python.

Kirish. Zamonaviy ilmiy tadqiqotlar va muhandislik amaliyotida matematik masalalarni kompyuter yordamida yechish muhim o'rin tutadi. Hisoblash usullari ikkita asosiy turkumga bo'linadi: sonli (numerical) va simvolik (symbolic) hisoblashlar. Sonli usullarda barcha hisoblashlar haqiqiy sonlarda amalga oshiriladi va natijalar taqribiy qiymatlardan iborat bo'ladi. Simvolik hisoblashlarda esa matematik ifodalar algebraik shaklda saqlanadi va ishlov beriladi, bu esa aniq natijalar olish imkonini beradi [1,2].

Simvolik hisoblashlarning asosiy afzalliklari:

1. Aniq natijalar: yaxlitlash xatolari yo'q, chunki barcha hisoblashlar ratsional sonlar va algebraik ifodalar ustida amalga oshiriladi;
2. Parametrik yechimlar: noma'lum parametrlar bo'yicha umumiy yechimlar olish imkoniyati;

3. Matematik transformatsiyalar: ifodalarni avtomatik soddalashtirib berish, yoyish va faktorizatsiya qilish;

4. Verifikatsiya: matematik natijalarni analitik shaklda tekshirish imkoniyati.

Python dasturlash tilida simvolik hisoblashlar uchun **sympy** kutubxonasi keng qo'llaniladi. **sympy** - bu to'liq bepul va ochiq kodli kompyuter algebrasi tizimi (Computer Algebra Systems - CAS) bo'lib, u 2006-yildan boshlab faol rivojlantirilmoqda [3]. Ushbu maqola **sympy** kutubxonasining matematik asoslarini va amaliy tadbirlarini o'rganishga bag'ishlangan.

Simvolik hisoblashlar. **sympy** kutubxonasi quyidagi asosiy matematik tuzilmalar bilan ishlaydi:

Z - butun sonlar;

Q - ratsional sonlar;

R - haqiqiy sonlar;

C - kompleks sonlar;

Q[x] - ratsional koeffitsientli ko'phadlar.

SymPy kutubxonasidagi asosiy modullar quyidagilar:

sympy.core: ifodalar, belgilashlar (Symbol), almashtirish (subs)

sympy.simplify: soddalashtirish va transformatsiyalar

sympy.calculus: hosila, integral, limit, qatorlar va h.k.

sympy.solvers: algebraik/differensial tenglamalar yechimi

sympy.matrices: simvolik matritsalar, determinant va h.k.

sympy.polys: polinomlar, GCD, faktor va h.k.

sympy.utilities.lambdify: simvolik ifodani tezkor sonli funksiyaga aylantirish

sympy kutubxonasida barcha matematik ifodalar daraxt strukturasi saqlanadi. Har bir ifoda asosiy sinfdan meros olgan obyekt hisoblanadi. Quyida **sympy** kutubxonasidan foydalanishga namuna:

```
import sympy as sym
from sympy.abc import x, y, z
print("sympy versiyasi: {sym.__version__}")
a, b, c = symbols('a b c')
t = sym.symbols('t', real=True, positive=True)
n = sym.symbols('n', integer=True)
print("a turi: {type(a)}")
print("a klassi: {a.__class__.__bases__}")
```

Naija quyidagicha:

SymPy versiyasi: 1.14.0

a turi: <class 'sympy.core.symbol.Symbol'>

a klassi: (<class 'sympy.core.expr.AtomicExpr'>, <class 'sympy.logic.boolalg.Boolean'>)

Differensial hisoblashning simvolik algoritmlari. $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi quyidagicha aniqlanadi:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ko'pchilik foydalanuvchilar **diff(x**2, x)** buyrug'ini berganda, kompyuter buni jadvaldan qidirib topadi deb o'ylashadi. Aslida bunday emas, Simvolik Hisoblash Tizimlari (CAS) **Abstrakt Sintaktik Daraxt (Abstract Syntax Tree - AST)** va **Rekursiv Tahlil** usulidan foydalanadi.

sympy da hosilalarni hisoblash uchun **diff()** funksiyasidan foydalanamiz[4]:

```
from sympy import *
x = symbols('x')
f1 = x**3 + 2*x**2 - 5*x + 1
df1 = diff(f1, x)
f1 # Birinchi tartibli hosila
```

Naija quyidagicha:

$$x^3 + 2x^2 - 5x + 1$$

Integral hisoblashning simvolik metodlari. **sympy** integrallarni hisoblashda Risch algoritmi va uning kengaytmalaridan foydalanadi. Ushbu algoritim berilgan funksiyaning elementar funksiyalar orqali integrali mavjudligini aniqlaydi va mavjud bo'lsa, uni topadi [5,6].

```
from sympy import *
x = symbols('x')
```

```
int1 = integrate(x**2, x)
```

```
int1
```

Naija quyidagicha:

$$\frac{x^3}{3}$$

```
int3 = integrate(x*exp(x), x)
```

```
int3
```

Naija quyidagicha:

$$(x - 1) e^x$$

```
int3 = integrate(exp(-x**2), (x, -oo, oo))
```

```
int3
```

Naija quyidagicha:

$$\sqrt{\pi}$$

Algebraik tenglamalarni yechish algoritmlari. n-darajali kompleks koeffitsientli har bir ko'phad kompleks sonlar to'plamida kamida bitta ildizga ega va jami n ta ildizga ega.

Simvolik algebra tenglamalarni yechish deganda, noma'lumni sonli qiymatini topish emas, balki uning aniq **analitik ifodasini (closed-form expression)** topish tushuniladi. SymPy bu jarayonda tenglama turiga qarab turli strategiyalarni qo'llaydi[7].

Polinom tenglamalarni yechish.

```
from sympy import *
```

```
x = symbols('x')
```

```
# Kvadrat tenglama: x2 - 5x + 6 = 0
```

```
eq1 = x**2 - 5*x + 6
```

```
sol1 = solve(eq1, x)
```

```
eq1
```

Naija quyidagicha:

$$x^2 - 5x + 6$$

```
print(f"Tenglama: {eq1} = 0")
```

```
print(f"Yechimlar: {sol1}")
```

```
print(f"Tekshirish: x=2: {eq1.subs(x, 2)}")
```

```
print(f"Tekshirish: x=3: {eq1.subs(x, 3)}")
```

Natija quyidagicha:

```
Tenglama: x**2 - 5*x + 6 = 0
```

```
Yechimlar: [2, 3]
```

```
Tekshirish: x=2: 0
```

```
Tekshirish: x=3: 0
```

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish (sympy kutubxonasi orqali hisoblash)

```
import sympy as sp
```

```
x, y = sp.symbols('x y')
```

```
eq1 = sp.Eq(2*x + 3*y, 13)
```

```
eq2 = sp.Eq(5*x - y, 9)
```

```
sol = sp.solve((eq1, eq2), (x, y))
```

```
print(sol)
```

```
print("x =", sol[x], " y =", sol[y])
```

Natija quyidagicha:

```
{x: 40/17, y: 47/17}
```

```
x = 40/17 y = 47/17
```

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish (numpy kutubxonasi orqali hisoblash)

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([[2, 3],[5, -1]], dtype=float)
```

```
b = np.array([13, 9], dtype=float)
```

```
x = np.linalg.solve(A, b)
```

```
print("x =", x[0], "y =", x[1])
```

Natija quyidagicha:

$x = 2.3529411764705883$ $y = 2.7647058823529416$

Nochiziqli tenglamalar sistemasi (sympy kutubxonasi orqali hisoblash)

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
eq1 = sp.Eq(x**2 + y**2, 25)
eq2 = sp.Eq(x - y, 1)
sol = sp.solve((eq1, eq2), (x, y), dict=True)
print(sol)
```

Natija quyidagicha:

```
[[{x: -3, y: -4}, {x: 4, y: 3}]
```

Differensial tenglamalarni simvolik yechish. Differensial tenglamalarni simvolik yechish — bu berilgan $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ko‘rinishidagi bog‘lanishdan noma’lum $y(x)$ funksiyasini analitik ko‘rinishda ajratib olish jarayonidir. *sympy* bu jarayonda **tasniflash (classification)** va **evristik qidiruv** algoritmlarini qo‘llaydi[5-8].

Tasniflash Algoritmi

*sympy*da *dsolve* funksiyasi chaqirilganda, u darhol yechishga kirishmaydi. Avvalo, tenglamani quyidagi sinflarga ajratib oladi:

- ✓ O‘zgaruvchilari ajraladigan (Separable).
- ✓ Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.
- ✓ Bernulli tenglamalari.
- ✓ Rikkati tenglamalari.
- ✓ Yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar.

Tizim *classify_ode* funksiyasi orqali tenglamaga mos keluvchi barcha yechish usullarini aniqlaydi va eng samaralisini tanlaydi.

Integrallovchi Ko‘paytuvchi va Lie Guruhi Metodi

Murakkab tenglamalar uchun *sympy* **Lie guruhlari (Lie Groups)** nazariyasiga asoslangan simmetriya usullarini qo‘llaydi. Bu usul tenglamaning simmetriyasini topish orqali uning tartibini pasaytirish yoki uni integrallovchi ko‘paytuvchi yordamida to‘liq differensialga keltirish imkonini beradi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglama

Fizikada eng ko‘p uchraydigan holat — ikkinchi tartibli differensial tenglamalardir (masalan, Nyutonning ikkinchi qonuni).

Kod misoli (Erkin tebranishlar):

```
from sympy import symbols, Function, dsolve, Eq
t = symbols('t')
x = Function('x')(t)
omega = symbols('omega', positive=True)
diff_eq = Eq(x.diff(t, t) + omega**2 * x, 0)
sol = dsolve(diff_eq, x) # Analitik yechimni topish
sol
```

Natija quyidagicha:

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

1-tartibli oddiy differensial tenglama

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
y = sp.Function('y')
ode = sp.Eq(sp.diff(y(x), x) - y(x), sp.exp(x))
sol = sp.dsolve(ode)
sol
```

Natija quyidagicha:

$$y(x) = (C_1 + x) e^x$$

Boshlang‘ich shart (ICS) bilan

$$y'(x) - y(x) = e^x, \quad y(0) = 1$$

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
y = sp.Function('y')
```

```
ode = sp.Eq(sp.diff(y(x), x) - y(x), sp.exp(x))
sol_ics = sp.dsolve(ode, ics={y(0): 1})
sol_ics
```

Natija quyidagicha:

$$y(x) = (x + 1) e^x$$

2-tartibli oddiy differensial tenglama (garmonik tebranih)

$$y''(x) + y(x) = 0$$

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
y = sp.Function('y')
ode = sp.Eq(sp.diff(y(x), x, 2) + y(x), 0)
sol = sp.dsolve(ode)
sol
```

Natija quyidagicha:

$$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

2-tartibli oddiy differensial tenglama, boshlang'ich shartlari

```
import sympy as sp
x = sp.Symbol('x')
y = sp.Function('y')
ode = sp.Eq(sp.diff(y(x), x, 2) + y(x), 0)
sol_ics = sp.dsolve(ode, ics={y(0): 0, sp.diff(y(x), x).subs(x, 0): 1})
sol_ics
```

Natija quyidagicha:

$$y(x) = \sin(x)$$

Xulosa. Ushbu maqolada Python dasturlash tilida simvolik hisoblashlarni amalga oshirishning matematik asoslari va ularning amaliy qo'llanilishi batafsil yoritildi. Tatqiqot davomida kompyuter algebra tizimlarining nazariy tamoyillari tahlil qilinib, SymPy kutubxonasi yordamida differensial va integral hisoblashlar, algebraik tenglamalarni yechish hamda chiziqli algebra amallarini dasturiy jihatdan bajarish usullari ko'rib chiqildi. Keltirilgan kod namunalari simvolik hisoblashlarning yuqori aniqlikda natija berishini va murakkab matematik masalalarni soddalashtirilgan shaklda yechish imkonini berishini ko'rsatdi. Olingan natijalar simvolik hisoblashlar sonli usullarga nisbatan aniqlik, universallik va ilmiy tatqiqotlarda qo'llash qulayligi jihatidan ustun ekanligini tasdiqlaydi. Mazkur yondashuv matematik modellashtirish, ilmiy hisoblashlar va ta'lim jarayonida samarali vosita sifatida foydalanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Geddes K.O., Czapor S.R., Labahn G. *Algorithms for Computer Algebra*. Springer Science & Business Media, 1992. 585 p.
2. Gathen J., Gerhard J. *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, 2013. 808 p.
3. Meurer A., Smith C.P., Paprocki M., et al. *SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science*. 2017. Vol. 3. P. e103. DOI: 10.7717/peerj-cs.103
4. Bronstein M. *Symbolic Integration I: Transcendental Functions*. Springer, 2005. 325 p.
5. Grabmeier J., Kaltofen E., Weispfenning V. *Computer Algebra Handbook: Foundations, Applications, Systems*. Springer, 2003. 637 p.
6. Wester M.J. *Computer Algebra Systems: A Practical Guide*. John Wiley & Sons, 1999. 436 p.
7. Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computation*. Academic Press, 1993. 267 p.
8. Kaltofen E. *Polynomial Factorization // Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation*. Springer, 1982. P. 95-113.

GILBERT FAZOSIDA OPTIMAL INTERPOLYATSION FORMULALARNING
UMUMIY KO‘RINISHI

*Yusufzoda Xiromon Yunus qizi,
Buxoro davlat universiteti amaliy matematika
mutaxassisligi 2-bosqich magistranti
xiromony@gmail.com*

***Annotatsiya.** Mazkur maqolada Gilbert fazosida interpolatsion formulalarning umumiy ko‘rinishi tadqiq etilib, xususan Nyuton, Lagrange va splayn interpolatsion usullarining nazariy asoslari va ularning o‘zaro bog‘liqligi tahlil qilingan. Interpolatsion jarayonlarda aproksimatsiya aniqligini baholash masalalari ko‘rib chiqilib, Gilbert fazosining ichki ko‘paytmasi va normasi asosida xatolik funksionalining tuzilishi o‘rganilgan.*

Nyuton va Lagrange interpolatsion formulalarining matematik xossalari, ularning umumiy ko‘rinishi hamda funksiyalarni yaqinlashtirishdagi imkoniyatlari tahlil qilinib, splayn interpolatsiyasining uzluksizlik va silliqlik xossalari ta‘minlashdagi ustun jihatlari ko‘rsatib berilgan. Shuningdek, ushbu interpolatsion usullar uchun xatolik baholari keltirilib, ularning sonli hisoblashlardagi aniqligi va barqarorligi muhokama qilingan. Olingan natijalar sonli analiz va hisoblash matematikasi masalalarida, xususan, funksiyalarni yuqori aniqlikda aproksimatsiyalash, amaliy modellashtirish va muhandislik hisoblarida samarali interpolatsion usullarni tanlash va qo‘llash uchun muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

***Kalit so‘zlar:** Gilbert fazosi, ichki ko‘paytma, norma, optimal interpolatsion formulalar, Nyuton interpolatsiyasi, Lagrange interpolatsiyasi, playn interpolatsiyasi, aproksimatsiya xatoligi, sonli analiz, hisoblash algoritmlari.*

GENERAL VIEW OF OPTIMAL INTERPOLATION FORMULAS IN GILBERT SPACE

***Abstract.** This article investigates the general form of interpolation formulas in Hilbert space, focusing in particular on the theoretical foundations of Newton, Lagrange, and spline interpolation methods and their interrelations. Issues related to evaluating approximation accuracy in interpolation processes are analyzed, and the structure of the error functional is studied based on the inner product and norm of Hilbert space.*

The mathematical properties of Newton and Lagrange interpolation formulas, their general forms, and their capabilities in function approximation are examined, while the advantages of spline interpolation in ensuring continuity and smoothness are demonstrated. Furthermore, error estimates for these interpolation methods are provided, and their accuracy and stability in numerical computations are discussed.

The obtained results are of significant theoretical and practical importance for numerical analysis and computational mathematics, particularly for high-precision function approximation, applied modeling, and engineering calculations, providing guidance for selecting and implementing effective interpolation methods.

***Keywords:** Hilbert space, inner product, norm, optimal interpolation formulas, Newton interpolation, Lagrange interpolation, spline interpolation, approximation error, numerical analysis, computational algorithms.*

ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА ФОРМУЛЫ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В
ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛБЕРТА

***Аннотация.** В данной статье исследуется общий вид интерполяционных формул в гильбертовом пространстве, с особым вниманием к теоретическим основам методов интерполяции Ньютона, Лагранжа и сплайнов, а также их взаимосвязям. Рассматриваются вопросы оценки точности аппроксимации в интерполяционных процессах, исследуется структура функционала ошибки на основе внутреннего произведения и нормы гильбертового пространства.*

Анализируются математические свойства интерполяционных формул Ньютона и Лагранжа, их общий вид и возможности при приближении функций, а также демонстрируются преимущества сплайн-интерполяции в обеспечении непрерывности и гладкости. Кроме того, приводятся оценки

погрешности этих методов интерполяции, и обсуждаются их точность и устойчивость при численных вычислениях.

Полученные результаты имеют значительное теоретическое и практическое значение для численного анализа и вычислительной математики, в частности, для высокоточной аппроксимации функций, прикладного моделирования и инженерных расчётов, обеспечивая рекомендации по выбору и применению эффективных интерполяционных методов.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, внутреннее произведение, норма, оптимальные интерполяционные формулы, интерполяция Ньютона, интерполяция Лагранжа, сплайн-интерполяция, погрешность аппроксимации, численный анализ, вычислительные алгоритмы.

Kirish. Interpolatsiya masalalari sonli analiz va hisoblash matematikasining eng muhim va amaliy jihatdan keng qo'llaniladigan yo'nalishlaridan biridir. Turli nazariy va amaliy masalalarda, xususan funksiyalarni yaqinlashtirish, differensial tenglamalarni yechish, matematik modellashtirish, muhandislik hisoblari va kompyuter grafikasi sohalarida interpolatsion usullar muhim vosita sifatida ishlatiladi. Interpolatsion formulalarning samaradorligi ularning xatoligi va hisoblash jarayonidagi barqarorligi bilan belgilanadi. Shu sababli optimal interpolatsiya formulalarini yaratish masalasi nafaqat nazariy qiziqish uyg'otadi, balki amaliy hisoblash masalalarida yuqori aniqlik va ishonchlilikni ta'minlash nuqtai nazaridan ham katta ahamiyatga ega.

Mazkur maqolada Gilbert fazosida hosilali optimal interpolatsion formulalarning umumiy ko'rinishi har tomonlama tadqiq etiladi. Gilbert fazosi ichki ko'paytma va normaga ega bo'lgan chiziqli fazo bo'lib, unda interpolatsion jarayonlarni tahlil qilish imkoniyati keng. Ushbu yondashuv interpolatsiya xatoliklarini minimallashtirish, xatolik funksionalining strukturaviy xossalarini aniqlash va optimal interpolatsion formulalarni ishlab chiqish imkonini beradi. Gilbert fazosi doirasida hosilali interpolatsion formulalarni qurish masalasi matematik jihatdan qat'iy nazariy asosga ega bo'lib, funksional analiz va sonli usullar nazariyasining muhim bo'lagi hisoblanadi.

Maqolada, shuningdek, klassik interpolatsion usullar – Nyuton va Lagrange formulalari hamda splayn interpolatsiyasi yoritiladi. Nyuton va Lagrange interpolatsion formulalari matematik jihatdan sodda va aniq ifodalangan bo'lib, turli funksiyalar sinflarini yaqinlashtirishda keng qo'llaniladi. Splayn interpolatsiyasi esa interpolatsiya jarayonida funksiyaning uzluksizlik va silliqlik xossalarini saqlab qoladi, bu esa murakkab va amaliy masalalarda yuqori aniqlikni ta'minlashga xizmat qiladi. Ushbu usullar o'zaro taqqoslanib, ularning sonli hisoblashlardagi barqarorligi va xatolik darajasi batafsil tahlil qilinadi.

Kirish qismida interpolatsion formulalarning nazariy va amaliy ahamiyati, shuningdek, ularni sonli hisoblash masalalarida qo'llash imkoniyatlari asosiy e'tibor bilan ko'rsatib beriladi. Tadqiqot natijalari sonli analiz, hisoblash matematikasi, amaliy modellashtirish va muhandislik hisoblarida yuqori aniqlikdagi interpolatsion usullarni yaratishda muhim ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo'ladi. Shu bilan birga, maqola keyingi ilmiy izlanishlar va yangi samarali sonli algoritmlarni ishlab chiqishda mustahkam nazariy asos sifatida xizmat qiladi.

Nyutonning 1687-yilda chop etilgan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* asarida berilgan interpolatsion yondashuvlari nazariy va amaliy masalalarda muhim o'rin egallagan.

Umuman olganda, interpolatsiya masalasi quyidagicha ifodalanadi:

$$(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$$

kabi chekli sondagi nuqtalar berilgan bo'lsin. Shunday $\phi(x)$ funksiyani topish kerakki, unda quyidagi shart bajarilsin:

$$\phi(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$$

Agar $\phi(x)$ algebraik ko'phad bo'lsa, bu polinom interpolatsiyasi; agar trigonometrik funksiyalar kombinatsiyasi bo'lsa, trigonometric interpolatsiya; agar funksiya bo'lakma-bo'lak polinomlar bilan ifodalansa, splayn interpolatsiya deyiladi. Mazkur sinflarning o'ziga xos afzallik va kamchiliklari mavjud bo'lib, ular turli amaliy masalalarda qo'llaniladi.

Klassik interpolatsiya usullari ko'pincha algebraik ko'phadlarga tayanadi. Ko'phadlar soddaligi va differensiallashtirish osonligi sababli yaxshi vosita hisoblanadi, biroq ular funksiyaning xossalari-masalan silliq, keskin o'zgaruvchanlik yoki chekka nuqtalardagi tebranishlar (Runge effekti) bilan bog'liq muammolarga ham egadir. Shu sababli interpolatsiya nazariyasi faqat polinomlar bilan chegaralanmaydi; ratsional funksiyalar, splaynlar, orthogonal ko'phadlar va og'irlik funksiyalari asosida qurilgan maxsus interpolatsion sxemalar ham keng o'rganiladi.

Interpolyatsiya masalasi nafaqat amaliy hisoblashlar, balki matematik tahlilning nazariy asoslarini ham o'rganishga imkon beradi. Bu masala berilgan nuqtalardan o'tuvchi funksiyani qurish va funksiyaning ma'lum xossalarini saqlagan holda uni yaqinlashtirish bilan bog'liq. Shu nuqtai nazardan, interpolyatsiya ikki asosiy jihatni o'z ichiga oladi:

1. Aniqlik sharti: Interpolyatsion funksiya berilgan nuqtalarda aniq qiymatlarni qabul qiladi.

2. Yaqinlashtirish sifati: Nuqtalar oralig'idagi qiymatlar original funksiyaga imkon qadar yaqin bo'lishi kerak.

Bu shartlar matematikada optimallik tushunchasiga oli keladi. Ideal interpolyatsion formula nuqtalarda to'g'ri qiymatlarni beradi va ular orasidagi xatolik minimal bo'ladi.

Interpolatsiya – bu berilgan diskret nuqtalar to'plami orqali funksiyani yaqinlashtirish usuli bo'lib, funksiyaning noma'lum qiymatlarini topish uchun ishlatiladi. Bu usul sonli analizning muhim qismi hisoblanib, turli sohalarida, masalan, fizika, muhandislik, iqtisodiyot, kompyuter grafikasi va sun'iy intellektda keng qo'llaniladi. Sonli hisoblashda interpolyatsiya – bu chekli ayirmalardan foydalangan holda ma'lum funksiya nuqtalarining diskret to'plamida yangi funksiya nuqtalarini qurish usuli[1].

Matematik jihatdan interpolatsiya quyidagicha ifodalanadi: Agar $(x_0, y_0), (x_1, x_2), \dots, (x_n, y_n)$ kabi berilgan nuqtalar bo'lsa, interpolatsiya ushbu nuqtalardan o'tuvchi funksiyani topishdan iborat.

Interpolatsiya natijasida quriladigan funksiya odatda ko'phad shaklida bo'ladi va interpolatsion ko'phad deb ataladi. Agar funksiya n ta nuqtadan o'tsa, u holda u n -darajali interpolatsion ko'phad bilan ifodalanadi.

Interpolyatsion ko'phad umumiy ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Bu ko'phadning koeffitsientlari a_i lar berilgan nuqtalar yordamida aniqlanadi.

Klassik nazariyada eng ko'p ishlatiladigan interpolyatsion formulalar quyidagilardir:

1. Nyuton interpolyatsiyasi;
2. Lagranj interpolyatsiyasi;
3. Splayn interpolyatsiyasi;
4. Trigonometrik interpolyatsiya;

Nyuton va Lagranj interpolyatsion ko'phadlari klassik interpolyatsiya usullari hisoblanadi

Nyuton va Lagrange interpolatsiyasi – berilgan diskret nuqtalar asosida funksiyaning noma'lum qiymatlarini aniqlashga imkon beruvchi asosiy sonli analiz vositalaridan biridir. Nyutonning bo'linmali farqlar usuli va Lagrange ko'phadlari yordamida har bir diskret nuqtada funksiyaning yaqinlashgan qiymatlarini hisoblash mumkin, bu esa hisoblash jarayonlarini yanada samarali va aniq bajarishga yordam beradi.

Ushbu usullar ayniqsa eksperimental ma'lumotlar bilan ishlashda katta ahamiyatga ega. Masalan, ilmiy tajribalar yoki texnik nazorat jarayonida olingan diskret ma'lumotlar asosida funksiyalarni yaxshilash va tahlil qilish uchun ular samarali vosita hisoblanadi. Shu tariqa, Nyuton va Lagrange formulalari nafaqat matematik aniqlikni oshiradi, balki real tizimlarda natijalarni prognoz qilish va modellashtirish imkonini beradi [2].

Nyuton interpolatsion ko'phadi bo'linma farqlar (divided differences) yordamida quriladi va berilgan diskret nuqtalar to'plami asosida funksiyaning noma'lum qiymatlarini yaqinlashtirish uchun xizmat qiladi. Ushbu usulning eng katta afzalligi shundaki, yangi nuqtalar qo'shilganda mavjud hisob-kitoblarni to'liq qayta bajarishga ehtiyoj qolmaydi, bu esa hisoblash jarayonlarini sezilarli darajada samarali qiladi.

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 f(x_0, x_1, x_2)$$

bu yerda:

• $f(x_0), f(x_1), \dots$ -berilgan nuqtalardagi funksiya qiymatlari

• $\Delta f(x_0, x_1), \Delta^2 f(x_0, x_1, x_2), \dots$ -bo'linmalar farqi

• $P_n(x)$ -Nyuton interpolyatsion ko'phadi

• Har bir keyingi bo'linmalar farqlari oldingi qiymatlarni asoslab beruvchi ifodalar sifatida ishlatiladi, bu usul hisoblashda samaradorligini oshiradi.

Bo'linmalari farqlar yordamida interpolyatsion ko'phadlar quriladi. Bo'linmalari farqlarini hisoblashning umumiy formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3)$$

$$\Delta^2 f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\Delta f(x_1, x_2) - \Delta f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \quad (4)$$

Va shunday davom etadi. Bu formulalar, har bir keying farqni oldingi farqlar asosida hisoblashni ta'minlaydi.

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funksiya uchun $y_i = f(x_i)$ qiymatlar berilgan va interpolatsiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan bo'lsin, ya'ni

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 1, 2, 3, \dots, h \quad (5)$$

Argumentning mos qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan mos qiymatlar oladigan ko'phad tuzish kerak bo'lsin va bu ko'phad quyidagicha ko'rinishga ega bo'lsin:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}) \quad (6)$$

Bu n -tartibli ko'phad. Interpolatsiya masalasining shartiga ko'ra $P(x)$ ko'phad x_1, x_2, \dots, x_n tugunlarida $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$ qiymatlarni qabul qiladi. $x = x_0$ deb tasavvur qilsak, formuladan $y_0 = P_n(x_0) = a_0$ ya'ni $a_0 = y_0$. So'ng x ga x_1 va x_2 larning qiymatlari berilib, ketma-ket quyidagilarga ega bo'lamiz:[3]

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \text{ya'ni} \quad y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 a_2$$

yoki $y_2 - 2y_1 + y_0 = 2h^2 a_2$ bundan $a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$

Bu jarayonni davom ettirib $x = x_n$ uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan a_1, a_2, \dots, a_n koeffitsientlarining qiymatlarini formulaga qo'yamiz:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_{n-1})$$

ko'rinishida bo'ladi.[4] Bu formula $\frac{x - x_0}{h} = q$, ya'ni $x_0 + hq = x$ belgilash kiritilsa, u holda:

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 2$$

Natijada Nyutonning 1-interpolatsiyasion formulasiga ega bo'lamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Lagranj interpolatsion ko'phadi – berilgan diskret nuqtalar to'plami asosida funktsiyani yaqinlashtirish uchun ishlatiladigan eng keng tarqalgan interpolatsiya usullaridan biridir. Bu usulda har bir nuqtaning funksiyadagi hissasi alohida ko'rib chiqiladi, va shu orqali umumiy interpolatsion ko'phad quriladi. Lagranj interpolatsiyasi intuitiv va tushunarli bo'lib, har bir nuqtaning funksiya qiymatiga qo'shadigan hissasi aniq ko'rinadi, shuning uchun nazariy tahlil va dasturiy hisoblashlarda keng qo'llaniladi [2].

Agar funksiya quyidagi $x + 1$ ta nuqtada berilgan bo'lsa:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$$

U holda Lagranj interpolatsion ko'phadi quyidagi ko'rinishga ega:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$

Lagranj ko'phadini quyidagicha tushuntirish ham mumkin. Har bir $L_i(x)$ ko'phad $x = x_i$ da 1 ga teng bo'ladi, boshqa barcha x_j esa 0 ga aylanadi. Shunday qilib, har bir y_i qiymatga mos ravishda o'z ulushini qo'shadi, ammo boshqa nuqtalarda ta'sir qilmaydi.

Lagranj interpolatsion ko'phadi oson tuziladi, chunki har bir nuqtadagi qiymatni o'z ichiga oladi va cheklangan ko'phadlar uchun samarali hisoblanadi ammo nuqtalar soni oshganda hisoblash

murakkablashadi. Bu usul ko‘pincha funksiyaning qiymatlarini aniqlash yoki hisoblash uchun foydalaniladi [5].

Lagranj interpolatsion ko‘phadining tahliliy yondashuvlarini ko‘rib chiqsak.

1. Uniklik. Lagranj interpolatsion ko‘phadi yagona bo‘lib, istalgan $n+1$ ta farqli x_i nuqtalar to‘plami uchun faqat bitta interpolatsion ko‘phad kerak bo‘ladi. Bu ko‘phadlar uchun unikal interpolatsiya teoremasi bilan ifodalanadi.

2. Xatolik analizi. Interpolatsiyaning xatosi Teylor qatori va Lagranj qoldiq had formulasi yordamida hisoblanadi:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \xi \in [x_0, x_n] \quad (11)$$

Agar $f(x)$ yetarlicha silliq bo‘lsa, interpolatsion xatolik juda kichik bo‘ladi.

Agar n oshsa, ba’zida interpolatsiyaning xatosi oshishi mumkin.[6](Runge fenomeni)

Barycentric(Og‘irlik) Lagranj interpolatsiyasi:

$$P_n(x) = \frac{\sum_i^n \frac{\omega_i y_i}{x - x_i}}{\sum_i^n \frac{\omega_i}{x - x_i}}$$

Ba’zida butun interpolatsion ko‘phadni hisoblash o‘rniga, bo‘laklarga ajratilgan interpolatsiyani amalga oshiramiz. Bu holda splayn interpolatsiyasini ham birgalikda ishlatishimiz mumkin. Bu orada splayn haqida ma’lumot berish joiz. Splayn uzluksiz bo‘laklarga bo‘lingan funksiya bo‘lib, uning har bir qismi(segmenti) chegaraviy nuqtalardan tuzilgan oddiy funksiya hisoblanadi. Ko‘p hollarda splayn silliqlovchi fuksiya bo‘lib, fragmentlar sifatida qo‘llaniladi. [7] Bu usul kata n qiymatlari uchun barqarorlikni yaxshilaydi va Runge fenomenini kamaytirib beradi.

Agar tugunlar teng taqsimlangan bo‘lsa, Lagranj interpolatsiyasi Runge fenomeni tufayli tebranishlarni keltirib chiqarishi mumkin. Bu muammoni esa hal qilish uchun Chebyshev tugunlaridan foydalaniladi:

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Chebyshev tugunlari ishlatilganda interpolatsiya xatoligi kamayadi.

Lagranj ko‘phadining o‘zgarishi funksiyaning ma’lum nuqtalardagi qiymatlariga bog‘liq hisoblanadi. Agar funksiyaning ma’lum nuqtalardagi qiymatlari o‘zgarsa, Lagranj ko‘phadi ham o‘zgaradi. Buning sababi shundaki, Lagranj ko‘phadi funksiyaning ma’lum nuqtalaridagi qiymatlarini hisobga olgan holda tuzib chiqiladi:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) Q_{nj}(x)$$

bu yerda,

$$Q_{nj}(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Agar $f(x_j)$ qiymatlari o‘zgarsa, $L_n(x)$ ham o‘zgaradi.

So‘nggi yillarda Lagranj interpolatsiyasi sohasida bir qator yangiliklar va takomillashtirishlar amalga oshirilgan bo‘lib, ushbu yangiliklar asosan hisoblash samaradorligini oshirish va interpolatsiya xatoliklarini kamaytirishga qaratilgan

Lagranj interpolatsiyasi, eng soda va tushunarli interpolatsiya usuli bo‘lib, u berilgan nuqtalar orqali o‘tuvchi yagona ko‘phadni quradi. Lagranj interpolatsiyasining klassik formulasi yaxshi tushunarli bo‘lsada, barycentric formula, bo‘laklarga ajratilgan usul va Chebyshev tugunlari hisoblash samaradorligini oshirish maqsadida foydalaniladi. Agar tez va barqaror interpolatsiya talab qilinsa, barycentric usul yoki Chebyshev tugunlarini qo‘llash tavsiya etiladi.

Eksperimental yoki statistik ma’lumotlarga asoslangan funksiyalarni analiz qilishda interpolatsiya va yaqinlashtirish usullariga ehtiyoj katta. Shunday usullardan biri-splayn interpolatsiyasi hisoblanib, funksiyalarni silliq va yuqori aniqlikda ifodalash imkonini beruvchi samarali metod hisoblanadi.

Splayn interpolatsiyasi bu ingiz tilidan olingan bo‘lib- tekislikning berilgan nuqtalaridan o‘tuvchi silliq egriliklarni o‘tkazish uchun ishlatiladigan egiluvchan chizg‘ichni bildiradi. Biz splayn so‘ziga

qandaydir aniq texnik ma'no bermaymiz. Splayn- bu bo'laklarga ajratilgan polinomlar yordamida funksiyani yaqinlashtirish usuli hisoblanib, har bir bo'lak o'zining uchinchi (yoki yuqoriroq) darajali polinomi bilan ifodalanadi.

Aynan kubik splaynlar eng ko'p qo'llanilib kelinmoqda, chunki ular silliqlikni (1- va 2- tartibli hosilalar uzluksizligi) va aniqlikni ta'minlaydi. Bu usul oddiy interpolatsiya metodlaridagi muhim kamchilik -yuqori darajali polinomlar orqali ifodalangan interpolatsion funksiya barqaror emasligi muammosini bartaraf etadi.

Splaynlar yordamida biz nuqtalar orasida silliq egri chiziq chizish mumkin bo'ladi. Bu, ayniqsa, grafik chizish, texnik tasvirlar, modellashtirish va signallarni qayta ishlashda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Splayn funksiyalar qism intervallarda ma'lum bir uzluksizlik shartlari bilan bog'langan ko'phadlar bo'laklaridan tashkil topgan. Faraz qilaylik, $N + 1$ ta x_0, x_1, \dots, x_N nuqtalar aniqlangan bo'lsin va ular $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ shartlarni qanoatlantirsin. Bu nuqtalar tugun nuqtalar deyiladi. Faraz qilaylik, yana $k \leq 0$ butun son oldindan aniqlangan bo'lsin.

k darajali x_1, x_2, \dots, x_N tugun nuqtalarga ega bo'lgan S splayn funksiya bu :

(i) har bir $[x_{i-1}, x_i]$ intervalda, s bu k darajali ko'phad,

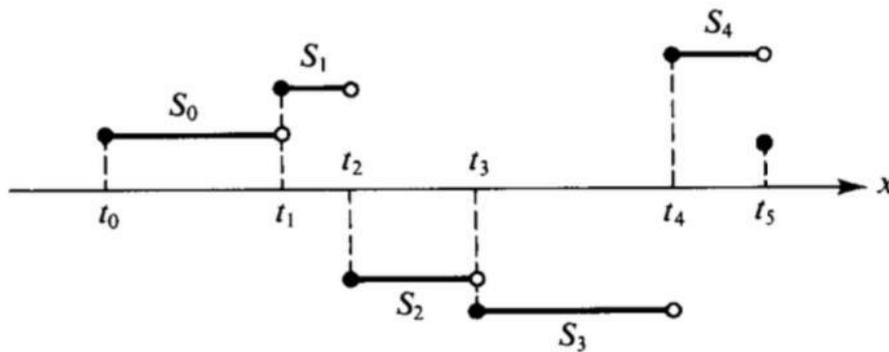
(ii) $[x_0, x_N]$ intervalda S funksiya $(k - 1)$ -tartibli hosilaga ega.

Bu yerdan, S bu $k - 1$ -tartibligacha barcha xosilalari uzluksiz bo'lgan darajasi k dan oshmagan uzluksiz bo'lakli ko'phad.

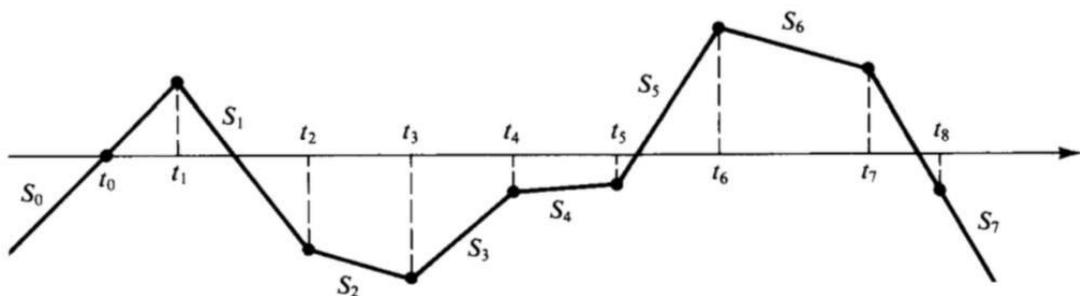
0-darajali splayn bu bo'lakli konstantalar. 0-darajali splayn quyidagi ko'rinishda bo'lishi mumkin

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1; x \in [x_0, x_1) \\ s_2(x) = a_2; x \in [x_1, x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ s_N(x) = a_N; x \in [x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

$[x_{i-1}, x_i)$ intervallar bir-biri bilan kesilmaydi va shuning uchun tugun nuqtalarda bunday funksiyani aniqlashda ikki ma'noqlik yuz bermaydi. Olti tugun nuqtali 0-darajali tipik splayn 1.1-rasmda berilgan



Rasm 1.2 da to'qqiz nuqtali 1-darajali splayn funksiya ko'rsatilgan.



bunday funksiya quyidagi ko‘rinishda oshkor qilib aniqlanishi mumkin

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1); x \in [x_0, x_1), \\ s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2); x \in [x_1, x_2), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_N(x) = a_N + b_n(x - x_N); x \in [x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

bu quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

- a) Har bir $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, segmentda $s(x)$ funksiya birinchi darajali ko‘phad;
- b) $s(x)$ funksiya $[x_0, x_N]$ da uzluksiz;
- c) b shartlar bilan birinchi darajali $s(x)$ splayn to‘la aniqlanadi. $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$

belgilashlar kiritamiz.

Dastlab interpolyatsiya shartlaridan

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= a_i + b_i(x_i - x_i) = f_i \\ s_1(x_0) &= a_1 + b_1(x_0 - x_1) = f_0 \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Tengliklarga ega bo‘lamiz. Bu yerdan quyidagini olamiz

$$a_i = f_i, i = 1, 2, \dots, N$$

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad *$$

Uzluksizlik sharti b) dan quyidagi

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1$$

yoki

$$a_i + b_i(x_i - x_i) = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N - 1$$

larni olamiz. Bundan

$$b_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad *$$

Shunday qilib, birinchi darajali splayn (*) va (**) tengliklar bilan to‘la aniqlandi.

Xulosa. Nyuton va Lagranj interpolyatsiya usullari diskret nuqtalar to‘plami asosida funksiyalarni yaqinlashtirishning klassik va fundamental yondashuvlari hisoblanadi. Ushbu usullar berilgan tugun nuqtalaridan o‘tuvchi yagona interpolyatsion ko‘phadni qurishga asoslanadi hamda matematik tahlil va hisoblash amaliyotida keng qo‘llaniladi. Shunga qaramay, ularning hisoblash algoritmlari va amaliy samaradorligi o‘rtasida muhim farqlar mavjud.

Lagranj interpolyatsiyasi nazariy jihatdan sodda va aniq formulaga ega bo‘lib, tugunlar to‘plami o‘zgaras bo‘lgan holatlarda qulay hisoblanadi. Biroq yangi tugun nuqtalari kiritilganda interpolyatsion ko‘phadni to‘liq qayta hisoblash zarurati uning hisoblash murakkabligini oshiradi. Nyuton interpolyatsiyasi esa bo‘linma farqlarga asoslangan rekursiv tuzilishga ega bo‘lib, mavjud hisob-kitoblarni saqlagan holda interpolyatsiyani bosqichma-bosqich kengaytirish imkonini beradi. Shu sababli ushbu yondashuv hisoblash vaqtini qisqartiradi va dinamik ma’lumotlar bilan ishlashda yuqori samaradorlikni ta’minlaydi.

Interpolyatsiya nuqtalari sonining ortishi yuqori darajali ko‘phadlardan foydalanilganda tebranishlarning kuchayishiga, ya’ni Runge hodisasiga olib kelishi mumkin. Bunday holatlarda Chebyshev tugunlarini qo‘llash yoki splayn interpolyatsiyasidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Splayn interpolyatsiyasi past darajali bo‘lakli ko‘phadlar yordamida funksiyaning silliqligini ta’minlaydi hamda katta hajmdagi ma’lumotlar uchun barqaror va aniqligi yuqori natijalarni beradi.

Xulosa qilib aytganda, Nyuton va Lagranj interpolyatsiya formulalari XVII–XVIII asrlarda ishlab chiqilgan bo‘lishiga qaramay, ularning optimallashtirilgan shakllari, jumladan barysentrik Lagranj interpolyatsiyasi, zamonaviy hisoblash texnologiyalarida ham dolzarbligini saqlab qolmoqda. Amaliy nuqtai nazardan qaralganda, Nyuton interpolyatsiyasi moslashuvchanligi va hisoblash samaradorligi bilan ajralib tursa, splayn interpolyatsiyasi katta va murakkab ma’lumotlar to‘plami bilan ishlashda eng maqbul va ishonchli usullardan biri sifatida qaraladi.

ADABIYOTLAR:

1. Cheney, E.W. *Introduction to Approximation Theory*, 2nd Edition, AMS Chelsea Publishing, 1982.
2. Burden, R.L., Faires, J.D. *Numerical Analysis*, 10th Edition, Brooks/Cole, 2015.
3. Isroilov, M.I. *Hisoblash metodlari (II qism)*. Darslik. Toshkent-2025. 290-328- betlar.
4. Xamdamov, Y.(2020). Система моделирования разрешения и совершенствования непрерывного образования // Архив Научных Публикаций JSPI.
5. Burdenen R.L and Faires J.D-Numerical Analysis,2010
6. Alfio Quaerteroni, Riccardo Sacco and Fausto Saleri -Numerical Mathematics, 2000.
7. Зайниддинов Х.Н. Сплайны в задачах цифровой обработки сигналов // Ташкентский университет информационных технологий – // Фан ва технология, 2015, 208 стр.

ПОТЕНЦИАЛЫ ДВОЙНОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

Имомназаров Холматжон Худайназарович,
Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН
imom@otzg.sssc.ru

Бахрамов Рустам Хамрабаевич,
Национальный университет
Узбекистана имени Мирзо Улугбека
bahratov88_r@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена краевая задача для переопределённой стационарной системы двухскоростной гидродинамики. Получены формулы для решения рассмотренных краевых задач. Показано влияние кинетических и физических параметров на решение стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

Ключевые слова: двухжидкостная среда, несжимаемая жидкость, переопределённая система, уравнение Пуассона, неоднородная задача, преобразование Фурье, классическое решение.

IKKI FAZALI MUHITDA YUZAGA KELADIGAN TENGLAMA UCHUN IKKI QATLAMLI POTENSIALLAR

Annotatsiya. Maqolada ikki tezlikli gidrodinamikaning qayta aniqlangan statsionar tizimi uchun chegaraviy masala ko'rib chiqilgan. Ko'rib chiqilgan chegaraviy masalalarni yechish uchun formulalar olindi. Kinetik va fizik parametrlarning bitta bosimli ikki tezlikli gidrodinamika tenglamalarining statsionar tizimi yechimiga ta'siri ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: ikki tezlikli gidrodinamika, siqilmaydigan suyuqlik, qayta aniqlangan sistema, Puasson tenglamasi, bir jinsli bo'lmagan masala, Fure akslantirish, klassik yechim.

DOUBLE-LAYER POTENTIALS FOR THE EQUATION ARISING IN A TWO-PHASE MEDIUM

Abstract. A boundary value problem for an overdetermined stationary system of two-velocity hydrodynamics is considered. Formulas for solving the considered boundary value problems are obtained. The influence of kinetic and physical parameters on the solution of the stationary system of equations of two-velocity hydrodynamics with a single pressure is demonstrated.

Key words: two-fluid medium, incompressible fluid, overdetermined system, Poisson equation, inhomogeneous problem, Fourier transform, classical solution.

Введение. В настоящее время интерес к математическому описанию нестационарных неизотермических процессов в гетерофазных средах крайне высок. В первую очередь, он связан с необходимостью решения разнообразных технологических задач: описание гидродинамики различных суспензий, эмульсий, аэрозолей, гранулированных и сыпучих смесей и составов различной структуры, участвующих в производственных циклах; разработка новых гетерофазных сплавов, неоднородных и композитных материалов для промышленности и строительства; проектирование и эксплуатация сложных систем охлаждения и теплообмена для энергетических и обрабатывающих предприятий. Кроме того, интерес к математическому моделированию гетерофазных сред возникает при рассмотрении разнообразных задач описания техногенных систем: моделирование процессов в нефтяных скважинах и приповерхностных пластах, оптимизация процессов добычи полезных ископаемых; а так же при описании эндогенных процессов и при решении связанных с ними задач геодинамики и рудообразования. К числу последних можно отнести задачи гидродинамического описания процессов эволюции различных типов мантийно-коровых флюидных систем (фильтрационных течений литосферных флюидов в проницаемых зонах, процессов конвективного теплопереноса в глубинных магматических очагах, динамики флюидных гидротермальных систем и т.д.), решение которых является необходимым этапом при

описании динамики развития крупномасштабных рудообразующих структур в рамках единой согласованной модели эволюции системы, включающей верхнюю мантию, мантийную литосферу и земную кору [1;2].

Многофазные многокомпонентные среды широко представлены в различных природных процессах и областях человеческой деятельности. Можно уверенно сказать, что с не однофазными смесями приходится иметь дело гораздо чаще, чем с однофазными. Всё это делает задачу описания и изучения таких сред одной из актуальнейших и важнейших проблем механики вообще и механики сплошных сред в частности [3-5]. Гетерогенные среды характеризуют невероятное многообразие, взаимовлияние и сложность эффектов, возникающих благодаря не однофазности. К таким эффектам можно отнести фазовые переходы, химические реакции, капиллярные эффекты, пульсационное и хаотическое движение, деформация фаз, процессы столкновений, дроблений, коагуляции частиц и т.д.

**Потенциалы двойного слоя для стационарной системы
двухскоростной гидродинамики**

В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ рассматривается линеаризованная стационарная неоднородная задача двухскоростной гидродинамики [6]

$$v_1 \Delta \mathbf{u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad (1)$$

$$v_2 \Delta \mathbf{u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad u_{2n} = a_2, \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Здесь $u_{2n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} обозначает внешнюю по отношению к Ω нормаль к $\partial\Omega$,

v_1 и v_2 - соответствующие сдвиговые вязкости фаз. Здесь и далее векторные величины выделяются жирным шрифтом. Необходимым условием разрешимости системы (1)-(3) служат равенства:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n} d\omega = \int_{\partial\Omega} a_2 d\omega = 0.$$

Компоненты матриц $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $i, j = 1, 2, 3$ и вектора $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ фундаментального решения системы (1)-(3) находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$v_1 \Delta G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \partial_s G_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad (4)$$

$$v_2 \Delta \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \partial_i P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \partial_s \tilde{G}_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (5)$$

В формулах (4), (5) $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, δ_{ij} - символ Кронекера, $\delta(\mathbf{r})$ -- δ -- функция Дирака,

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. По повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

Следуя методу работы [7] решение системы (4)-(5) находится с помощью преобразования Фурье и имеет следующий вид:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi v_1} \left[\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \quad (6)$$

$$\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi v_2} \left[\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right], \quad (7)$$

$$P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{x_i - x'_i}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (8)$$

откуда следует равенство:

$$v_1 G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = v_2 \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Отсюда и из системы уравнений (4)-(5) видно, что по аргументу \mathbf{r}' функции $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, и $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяют сопряжённой системе

$$\frac{\partial G_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_s} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{G}_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_s} = 0, \quad (9)$$

$$v_1 \Delta_{\mathbf{r}} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_i} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10)$$

$$v_2 \Delta_{\mathbf{r}} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x'_i} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (11)$$

Функции $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, и $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ позволяют построить объёмные потенциалы:

$$u_{1i}(\mathbf{r}) = -\rho \int G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$u_{2i}(\mathbf{r}) = -\rho \int \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

которые в силу равенств (4) и (5) удовлетворяют стационарной неоднородной системе (1)-(2) во всём пространстве. Введём тензоры напряжений в случае двухскоростной гидродинамики с одним давлением:

$$T_{ik}(\mathbf{u}_1) = -p \delta_{ik} + v_1 (\partial_i u_{1k} + \partial_k u_{1i}),$$

$$\tilde{T}_{ik}(\mathbf{u}_2) = -p \delta_{ik} + v_2 (\partial_i u_{2k} + \partial_k u_{2i}),$$

для соответствующих (\mathbf{u}_1, p) и (\mathbf{u}_2, p) . Тензоры напряжений для сопряженной задачи имеют следующий вид:

$$T'_{ik}(\mathbf{v}_1) = q \delta_{ik} + v_1 (\partial_i v_{1k} + \partial_k v_{1i}),$$

$$\tilde{T}'_{ik}(\mathbf{v}_2) = q \delta_{ik} + v_2 (\partial_i v_{2k} + \partial_k v_{2i}),$$

для соответствующих (\mathbf{v}_1, q) и (\mathbf{v}_2, q) .

С помощью фундаментальных решений $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ можно получить интегральное представление любого решения $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, p)$ неоднородной системы (1), (2) через массовую силу $\rho \mathbf{f}$ и значения $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и $T_{ik}(\mathbf{u}_1)$, $\tilde{T}_{ik}(\mathbf{u}_2)$ на $\partial\Omega$

$$u_{1k}(\mathbf{r}) = -\rho \int_{\Omega} G_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\partial\Omega} T'_{ij}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) u_{1j} n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - \int_{\partial\Omega} G_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') T_{ij}(\mathbf{u}_1) n_j d\omega_{\mathbf{r}'}, \quad (14)$$

$$u_{2k}(\mathbf{r}) = -\rho \int_{\Omega} \tilde{G}_{kj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_{\partial\Omega} \tilde{T}'_{ij}(\tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) u_{2j} n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - \int_{\partial\Omega} \tilde{G}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{T}_{ij}(\mathbf{u}_2) n_j d\omega_{\mathbf{r}'}, \quad (15)$$

В формулах (14), (15)

$$\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (G_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), G_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), G_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')), \quad \tilde{\mathbf{G}}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\tilde{G}_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tilde{G}_{k2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \tilde{G}_{k3}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')).$$

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \int_{\Omega} P_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_{\partial\Omega} P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') T_{ij}(\mathbf{u}_1) n_j d\omega_{\mathbf{r}'} - 2v_1 \int_{\partial\Omega} \partial_j P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{1i} n_j d\omega_{\mathbf{r}'}. \quad (16)$$

Интегралы по поверхности в (14), (15) и (16) дают выражения потенциалов простого и двойного слоёв. Ввиду отличия задач (1) и (2) только коэффициентами v_1 и v_2 (без учёта краевых условий), будем рассматривать здесь только задачу Стокса для \mathbf{u}_1 и p . Определим потенциал двойного слоя с плотностью $\varphi(\eta)$ для задачи (1) как поверхностные интегралы:

$$W_k(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} T'_{ij}(\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \varphi_i(\eta) n_j(\eta) d\omega_{\eta},$$

$$\Pi(\mathbf{r}, \varphi) = -2\nu_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial\Omega} P_k(\mathbf{r}, \eta) \varphi_k(\eta) n_j(\eta) d\omega_\eta.$$

Подставляя в эти формулы явные выражения для \mathbf{G}_k и P_k из (6) и (8), получим:

$$W_k(\mathbf{r}, \varphi) = -\frac{3}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)}{|\mathbf{r} - \eta|^5} \varphi_i(\eta) n_j(\eta) d\omega_\eta,$$

$$\Pi(\mathbf{r}, \varphi) = \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\partial\Omega} \frac{x_k - \eta_k}{|\mathbf{r} - \eta|^3} \varphi_k(\eta) n_j(\eta) d\omega_\eta.$$

Положим

$$K_{ij}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{3}{4\pi} \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|^5} n_k(\eta),$$

$$K_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\nu_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_j - \eta_j}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}|^3} n_k(\eta).$$

Теперь потенциалы двойного слоя \mathbf{W} и Π могут быть записаны более кратко:

$$W_i(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} K_{ij}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) \varphi_j(\eta) d\omega_\eta, \quad \Pi(\mathbf{r}, \varphi) = \int_{\partial\Omega} K_j(\mathbf{r}, \boldsymbol{\eta}) \varphi_j(\eta) d\omega_\eta.$$

Заключение. Таким образом, рассмотрена краевая задача для переопределённой стационарной системы двухскоростной гидродинамики. Получены формулы для решения рассмотренных краевых задач. Показано влияние кинетических и физических параметров на решение стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шарапов В.Н., Ионе К.Г., Мазуров М.П., Мысов В.М., Перепечко Ю.В. Геокатализ и эволюция мантийно-коровых магматогенных флюидных систем, – Новосибирск: Гео, 2007.
2. Шарапов В.Н., Борисенко А.С., Мазуров М.П., Перепечко Ю.В., Черепанов А.Н., Бессонова Е.П., Павлова Г.Г., Боровиков А.А., Житова Л.М., Пономарчук В.А., Попов В.Н., Черепанова В.К., Чудненко К.В. Модельный анализ развития континентальных мантийно-коровых рудообразующих систем – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2009.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Изд. "Наука", 1978, 336 с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. --М.: Изд. "Наука", 1987, 464 с.
5. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. - М.: Изд. "Мир", 1975, 536 с.
6. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределённой стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. Т.20.– 2017.-Но. 4.–с. 425-437.
7. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Изд. "Наука", 1970, 288 с.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Шадиметов Халматвай Махкамбаевич,
профессор Ташкентского государственного
транспортного университета, д.ф. м.н.
kholmatshadimetov@mail.ru

Хаятов Хуридҷон Усманович,
преподаватель Бухарского государственного университета
wera00@mail.ru, x.u.hayatov@buxdu.uz

Аннотация. Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах. При исследовании наилучших формул приближённого интегрирования в первую очередь возникает вопрос о существовании таких формул. Этот вопрос исследован весьма полно, хотя и является достаточно сложным, о чём свидетельствует, например, статья [1], где, было достигнуто существенное продвижение в его решении. До последнего времени исследования наилучших квадратурных формул основывались на изучении сплайн-функций специального вида (монослайнов), связанных с рассматриваемыми формулами [2-5]. Эти методы исследований пока не удаётся эффективно применить при исследовании кубатурных формул в $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, являющихся многомерными аналогами пространств $W_2^{(m)}(T_1)$.

В работе рассматриваются весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и найдены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита с использованием необходимого условия экстремума.

Ключевые слова: кубатурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональное пространство, норма, экстремальная функция.

SOBOLEVNING $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ DAVRIY FUNKSIYALAR FAZOSIDA ERMIT TIPIDAGI
OPTIMAL VAZNLI KVADRATUR FORMULANI QURISH

Annotatsiya. Integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini optimallashtirish muammosi berilgan normallashtirilgan fazolarda formulaning xatolik funksionali normasini minimallashtirishdan iborat. Integrallarni taqribiy hisoblash formulalari uchun eng yaxshi formulalarni o'rganishda birinchi navbatda bunday formulalarning mavjudligi haqida savol tug'iladi. Bu masala juda ko'p o'rganilgan, garchi u juda murakkab bo'lsa-da, masalan, [1] maqolada uni hal qilishda sezilarli yutuqlarga erishilgan. Yaqin vaqtgacha eng yaxshi kvadratura formulalari bo'yicha tadqiqotlarda ko'rib chiqilayotgan formulalar bilan bog'liq bo'lgan maxsus turdagi splayn funksiyalarini o'rganishga asoslangan edi [2-5]. Ushbu tadqiqot usullarini $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ fazolarining ko'p o'lchovli analoglari bo'lgan $W_2^{(m)}(T_1)$ dagi kubatura formulalarini o'rganishda hali samarali qo'llash mumkin emas.

Maqolada Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar qaralgan va optimal koeffitsientlar topilgan.

Kalit so'zlar: kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funksiya.

CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL WEIGHTED QUADRATURE FORMULA OF
HERMITIAN TYPE IN THE SPACE OF PERIODIC SOBOLEV FUNCTIONS $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Abstract. The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the error functional of the formula on selected normalized spaces. When studying the best formulas for approximate integration, the question first arises about the existence of such formulas. This issue has been studied very fully, although it is quite complex, as evidenced, for example, by article [1], where significant progress has been made in solving it. Until recently, research into the best

quadrature formulas was based on the study of spline functions of a special type (monosplines) associated with the formulas under consideration [2-5]. These research methods cannot yet be effectively applied in the study of cubature formulas in $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$, which are multidimensional analogues of the spaces of $W_2^{(m)}(T_1)$.

The paper examines weighted quadrature formulas of Hermite type and finds the optimal coefficients.

Keywords: cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, norm, extremal function.

Введение. Многие работы, например [1-15] посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не только значения функции $f(x)$ в точках x на T_1 , но и значения её производных некоторых порядков, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функций.

В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита:

$$\int_{T_1} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha c_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x^{(\lambda)}), \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = P(x) \varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x^{(\lambda)}) \quad (2)$$

в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы, $P(x)$ - весовая функция и α - порядок производных, $\varepsilon_{T_1}(x)$ - характеристическая функция T_1 , а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщённые производные порядка m , суммируемые с квадратом в норме [4]

$$\|f | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2, \quad (3)$$

где \hat{f}_k - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$.

Постановка задачи. Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - это вычисление следующей величины:

$$\|\ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\| = \inf_{c_\lambda^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f | \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|}, \quad (4)$$

где $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти такие значения $c_\lambda^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная квадратурная формула и приведена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряжённом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$. А также для функционала погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ получена оценка сверху, и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при $m = 2(\alpha = 0, 1)$.

Отметим, что задача 1 решена в работе [5] и задача 2 решена при $\alpha = 0$ в работе [13].

Оптимальная квадратурная формула в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

В этой работе займёмся минимизацией нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1).

В работе [5] доказана следующая теорема:

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ равен:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \quad (5)$$

где $c_\lambda^{(\alpha)}$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) и \hat{P}_k - коэффициенты Фурье функции $P(x)$.

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций, при $m = 2(\alpha = 0, 1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$, $\lambda = 1, 2, \dots, N$ и равные коэффициенты $c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{o}{c}$ и $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \overset{o}{c}^{(1)}$, которые выражаются формулой:

$$\overset{o}{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \quad \text{и} \quad \overset{o}{c}^{(1)} = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть в равенстве (5) $m = 2$, тогда $\alpha = \overline{0, 1}$, и в этом случае (5) принимает следующий вид:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \quad (7)$$

Теперь произведём некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (7).

Пусть $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \neq 0$, тогда, умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину

$$\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda = \sum_{\beta=1}^N c_\beta \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} = \sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)}, \quad \text{получаем:}$$

$$\left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_{\lambda}^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)}} \right|^2}{k^4} = \\
 &= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$c'_{\lambda} = \frac{c_{\lambda}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}} \quad \text{и} \quad c'^{(1)}_{\lambda} = \frac{c_{\lambda}^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)}} \quad (9)$$

Очевидно, что
$$\sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_{\lambda} = 1 \quad (10)$$

Учитывая (9) и (10), равенство (8) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
 &\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left(\hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right)^2 + \\
 &\frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 &\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} + \left(\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right)^2 \right] + \\
 &\frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left[\hat{P}_k - \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2 + \left[(2\pi) k \left(\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2}{k^4}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} = x_1$ и $\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} = x_2$, после некоторых упрощений равенство (2)

перепишем полинома второй степени по x_1 и x_2 .

$$\begin{aligned}
 &\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \cdot \\
 &\cdot \sum_{k \neq 0} \frac{2\hat{P}_k x_1 \left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'^{(1)}_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Имея в виду условия (10) в равенстве (13) и используя результаты работы [6], получим:

$$\begin{aligned}
 &\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \\
 &\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2\hat{P}_k x_1 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь мы учитывали, что суммы

$$\sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \text{ и } \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2}$$

достигают своего наименьшего значения, равного соответственно:

$$\frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \text{ и } \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2},$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1), равноотстоящие и все коэффициенты c_{λ} , также $c_{\lambda}^{(1)}$ равны между собой, т.е.

$$c_{\lambda} = \frac{1}{N}, c_{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{N} \text{ и } x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}, \lambda = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Правую часть (14) будем рассматривать, как функцию от x_1, x_2 и обозначим её через $y(x_1, x_2)$ т.е.

$$y(x_1, x_2) = \left[\hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2x_1 \cdot \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (16)$$

Тогда из необходимого условия экстремума после некоторых упрощений из (16) получим систему уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 .

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right) x_1 &= \hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4} \\ \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Решая систему (17) и введя некоторые преобразования, последовательно находим x_1 и x_2 , т.е.

$$x_1 = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{\left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \text{ и } x_2 = 0. \quad (18)$$

Пусть $c_{\lambda} = \frac{1}{N}$ и $c_{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{N}$, $\lambda = \overline{1, N}$

тогда из (6) и (15) следует, что

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = \dot{c} \text{ и } c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \dot{c}^{(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} = N\dot{c} \text{ и } x_2 = \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} = N\dot{c}^{(1)}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е.

$$\dot{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N \left(1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \text{ и} \quad (20)$$

$$\dot{c}^{(1)} = 0, \tag{21}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании этой теоремы 1 функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет оценку:

$$\begin{aligned} |\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle| \leq & \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 |2\pi i k|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left| 1 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Вывод. Качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, которая определяется формулой, $\|\ell^N | B^*\| = \sup_{f \in B} \frac{|\langle \ell^N, f \rangle|}{\|f | B\|}$. Она является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по c_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача на исследование функции многих переменных на экстремум.

Значения c_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют оптимальную формулу. Таким образом, оптимальной квадратурной формулой, мы будем считать такую, в которой при заданном числе узлов N функционал погрешности имеет наименьшую норму.

В работе рассмотрены весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и для них определены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита с использованием необходимого условия экстремума.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шадиметов Х.М. Решётчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.
2. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. Матем. заметки. 1969, 6. Вып. 4, с. 475 – 480.
3. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М. Наука, 1979, 256 с.
4. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.
5. Жалолов Ф. И. О норме функционала погрешности квадратурных формул общего вида над пространством С. Л. Соболева. УЗМЖ. Ташкент, 2010 №1. с. 46-52.
6. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977, 41, №5, с.1110 – 1124.
7. Хаитов Т.И. Некоторые теоремы теории периодических кубатурных формул с заданием производных. ДАН ТаджССР, 1975, т. XVIII, 1.
8. Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, 5.
9. Шайнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от её производных, Диссертация доктора физ.- мат. наук. Новосибирск.
10. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.
11. Khayatov Kh.U. Algorithm for finding the norm of the error functional of Hermite-type interpolation formulas in the Sobolev space of periodic functions AIP Conference Proceedings 2781, 020063 (2023) <https://doi.org/10.1063/5.0144842>

12. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И., Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $W_2^{(m)}(T_1)$. Докл. АН РУз. - Ташкент, 2011,-1.
13. Jalolov O.I. Weighted optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space $L_p^{(m)}(K_n)$. AIP Conference Proceedings 2781, 020066 (2023) <https://doi.org/10.1063/5.0144837>
14. Жалолов О.И., Хаятов Х.У. Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики № 1(46) 2023.
15. Хаятов Х.У. Нахождение оптимальных коэффициентов интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики №3/1(50) 2023.

ANALOGUE OF KISHI'S THEOREM FOR LOGARITHMIC POTENTIALS

Gadaev Sokhib Abdullaevich,

Tashkent branch of the University of Business and Science, Department of Exact Sciences
sokhibgadaye@gmail.com,

Samandarov Toji Normurodovich,

Tashkent branch of the University of Business and Science, Department of Exact Sciences
tojiddinsamandarov@gmail.com

Rakhmanov Ulugbek Musirmon ugli,

Tashkent branch of the University of Business and Science, Department of Exact Sciences
ulugbekrakhmanov08@gmail.com

Abstract. In this paper, we discuss issues related to the properties of differentiability of potentials and study an analogue of Cartan's theorem for the Riesz potential. also it is proved that under some sufficient conditions imposed on the measure μ , the Riesz potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ ($1 \leq \alpha < n$) belongs to the Zygmund class.

Keywords: Riesz potential, logarithmic potential, differentiability of potentials, Cartan's theorem, Luzin's theorem on the continuity of capacities, Zygmund class.

LOGARITMIK POTENTIALLAR UCHUN KISHI TEOREMASINING ANALOGI

Abstrakt. Ushbu maqolada biz potentsiallarning differentsialligi xususiyatlariga oid masalalarni muhokama qilamiz va Riesz potentsiali uchun Kartan teoremasining analogini o'rganamiz. shuningdek, m o'lchoviga qo'yilgan ba'zi etarli sharoitlarda Riesz potentsiali $U_{(n-a)}^\mu(x)$ ($1 \leq a < n$) Zigmund sinfiga tegishli ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Riesz potentsiali, logarifmik potentsial, potentsiallarning differentsialligi, Kartan teoremasi, sig'imlarning uzluksizligi haqidagi Luzin teoremasi, Zigmund klassi.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КИШИ ДЛЯ ЛОГАРИТМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Аннотация. В данной работе обсуждаются вопросы, связанные со свойствами дифференцируемости потенциалов, и изучается аналог теоремы Картана для потенциала Рисса. Также доказывается, что при некоторых достаточных условиях, наложенных на меру μ , потенциал Рисса $U_{(n-a)}^\mu(x)$ ($1 \leq a < n$) принадлежит классу Зигмунда.

Ключевые слова: потенциал Рисса, логарифмический потенциал, дифференцируемость потенциалов, теорема Картана, теорема Люзина о непрерывности ёмкостей, класс Зигмунда.

Introduction. The well-known theorem of Cartan [1], (see also [2] p.231) on the continuity of Riesz potentials

$$U_{n-\alpha}^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n,$$

states that for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, of capacity $C_{n-\alpha}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ is continuous in the complement $\mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$.

Note that Cartan's theorem is also true in the case of a logarithmic potential:

$$U_0^\mu(x) = \int \ln|x-y| d\mu(y), \quad n = 2.$$

Note that this theorem is a capacity analogue of N.N. Luzin's theorem on the continuity "almost everywhere" (C -property) of measurable functions. According to the theorem on the Riesz representation for subharmonic functions (see, for example, [2], [3]) and Cartan's theorem, the following result holds.

Theorem 1. If $u(x)$ is a subharmonic function in the domain $D \subset \mathbb{R}^n$, then for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset D$, with Newtonian (logarithmic for $n = 2$) capacity $C_{n-2}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that $u(x)$ is continuous in the complement $D \setminus G_\varepsilon$.

In the work of Sadullaev A.S. and Madrakhimov R.M. [4] the smoothness of subharmonic functions outside a set thicker than a set of small Newtonian (logarithmic) capacity is established. Namely, the following theorem is proved.

Theorem 2. (Imomkulov S.A. [5]). Let $u(x)$ be a subharmonic function in the domain $D \subset \mathbb{R}^n$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset D$ with Lebesgue measure $m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that $u(x)$ belongs to the class C^2 of twice continuously differentiable functions on compact subsets of the difference $D \setminus G_\varepsilon$.

A subharmonic function, in general, does not belong to the Lipschitz class Lip_1 outside the set of small Hausdorff coverage \hat{H}_{n-1} . The question arises: what is the description of the "thinnest" set outside which a subharmonic function belongs to the class Lip_1 and is defined as the set of small Hausdorff coverage \hat{H}_{n-1+0} , where $\hat{H}_{n-1+0} = \sup_{\varepsilon > 0} \hat{H}_{n-1+\varepsilon}$. However, there is a stronger statement than this, namely, the following theorem is true.

Theorem 3. (Imomkulov S.A. [6]). Let $u(x)$ be a subharmonic function in the domain $D \subset \mathbb{R}^n$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset D$ with capacity $C_{n-1}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that $u(x)$ belongs to the class C^1 – of continuously differentiable functions on compact subsets of the difference $D \setminus G_\varepsilon$.

It is known that a set of small C_{n-1} - capacity is "thinner" than a set of small Hausdorff coverage \hat{H}_{n-1+0} , but "thicker" than a set of small Hausdorff coverage \hat{H}_{n-1} (see Lemma 1 below, and also [2 p. 253], [3], [9]).

Remark. Using Lemmas 1 and 2 below for any non-integer number $p: 0 < p < 2$, similarly to the proof of Theorem 2 (see [6]), one can prove that if $u(x)$ is a subharmonic function in the domain $D \subset \mathbb{R}^n$, then for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_{p,\varepsilon} \subset D$ with capacity $C_{n-2+p}(G_{p,\varepsilon}) < \varepsilon$ such that $u(x)$ belongs to the class C^p on compact subsets of the difference $D \setminus G_{p,\varepsilon}$.

Therefore, combining all the above formulated theorems, we obtain the following general theorem.

Differential properties of convex functions are also studied in the following papers [16], [17], [18], [19], [20]. In a recent paper [20] the following remarkable result was obtained.

The capacity, coverage and haudorff measure.

$C_{n-\alpha}$ - **capacity** (see [2]). First, we define $C_{n-\alpha}$ - capacity ($0 < \alpha < n$): by \mathfrak{M}_n we denote the set of all Borel measures in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, and let

$$U_{n-\alpha}^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$n - \alpha$ - potential of measure μ . $C_{n-\alpha}$ – the capacity of a compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ we call the following quantity:

$$C_{n-\alpha}(K) = \sup \left\{ \mu(\mathbb{R}^n) : \mu \in \mathfrak{M}_n, \text{supp} \mu \subset K; U_{n-\alpha}^\mu(x) \leq 1, x \in \text{supp} \mu \right\}$$

For an arbitrary set $E \subset \mathbb{R}^n$, the quantities:

$$\underline{C}_{n-\alpha}(E) = \sup \{ C_{n-\alpha}(K) : K - \text{компакт}, K \subset E \}$$

and

$$\overline{C}_{n-\alpha}(E) = \{ \inf \underline{C}_{n-\alpha}(G) : G - \text{открытое множество}, E \subset G \}$$

are called, respectively, internal and external capacities. If $\underline{C}_{n-\alpha}(E) = \overline{C}_{n-\alpha}(E)$ then the set E will be called C -measurable (measurable by capacity) and we will write $C_{n-\alpha}(E)$ instead of $\underline{C}_{n-\alpha}(E)$ or $\overline{C}_{n-\alpha}(E)$.

It is known that all Borel sets C - are measurable [2, p. 196].

Let us indicate some properties:

1) $C_{n-\alpha}(E) \leq \sum_i C_{n-\alpha}(E_i)$ for any finite or countable family C - of measurable sets $\{E_i\}$ such that $E \subset \bigcup_i E_i$;

2) $C_{n-\alpha}(B(x, r)) = A(n, \alpha) \cdot r^{n-\alpha}$, where $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$,

$A(n, \alpha)$ is a constant depending only on n and α .

Coverage and Hausdorff measure. (see [2], [9]) Let E be a set from \mathbb{R}^n . Consider a covering of set E by a finite or countable set of convex sets V_i with diameter d_i and set

$$\hat{H}_\alpha(E) = \inf \sum_i d_i^\alpha,$$

where \inf on the right-hand side is taken over all such coverings. $\hat{H}_\alpha(E)$ is called a Hausdorff coverage of order α . We impose an additional condition on $d_i : d_i < \varepsilon, \varepsilon > 0$. We denote the corresponding exact lower bound by $H_\alpha^\varepsilon(E)$. Then H_α^ε is an everywhere finite and non-increasing function of the variable, i.e. $H_\alpha^{\varepsilon_1}(E) \geq H_\alpha^{\varepsilon_2}(E)$ for $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. The limit $H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\alpha^\varepsilon(E)$ is called the outer α -Hausdorff measure of the set E . Note that in this definition, instead of convex sets, it is sufficient to consider balls.

Below we present some properties of the quantities \hat{H}_α and H_α that we need: 1) $\hat{H}_\alpha(E) \leq H_\alpha(E)$;

2) $\hat{H}_\alpha(E)$ and $H_\alpha(E)$ vanish simultaneously;

3) $\hat{H}_\alpha(E) \leq \sum_i \hat{H}_\alpha(E_i)$ and also $H_\alpha(E) \leq \sum_i H_\alpha(E_i)$ for any finite or countable family $\{E_i\}$ such that $E \subset \bigcup_i E_i$. The set $E \subset \mathbb{R}^n$ is called H_α -measurable if $H_\alpha(E) = H_\alpha(E \cap A) + H_\alpha(A \setminus E)$ for any $A \subset \mathbb{R}^n$. If the set E is H_α -measurable, then $H_\alpha(E)$ is called the Hausdorff measure of the set E .

4) let $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ be pairwise disjoint H_α -measurable sets, then

$$H_\alpha\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i H_\alpha(E_i),$$

i.e. H_α - is a countably additive measure;

5) every Borel set H_α - is measurable.

Now we present two lemmas:

Channel of basic theorems and lemmas.

Theorem 4. (Azagra D., Drake M., Hajlasz P.). Let $D \subset \mathbb{R}^n$ be a convex domain and $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ a locally strictly convex function. Then for any $\varepsilon_0 > 0$ and for any continuous function $\varepsilon(x) : D \rightarrow (0, 1]$ there exists a locally strictly convex function $\mathcal{G}(x)$ from the class $C^2(D)$, such that

- 1) $m\{x \in D : u(x) \neq \mathcal{G}(x)\} < \varepsilon_0$;
- 2) $|u(x) - \mathcal{G}(x)| < \varepsilon(x), \forall x \in D$;
- 3) Hausdorff measure $H_n(\Gamma_u \Delta \Gamma_{\mathcal{G}}) < \varepsilon_0, \Gamma_u = \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D\}$.

Also in the works [21], [22], [23] results were obtained on the differentiability of Riesz potentials with respect to capacitance.

In the paper by Carleson [24], a sufficient condition was established for the Riesz potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ to belong to the Lipschitz class, i.e. the following theorem was proved: let α, β - be some real numbers such that $0 < \alpha < n, 0 < \beta < 1$; μ - is a finite Borel measure with compact support on \mathbb{R}^n such that for any ball $B(x, r)$ centered at $x \in \mathbb{R}^n$ of radius $r > 0$ the inequality

$$\mu(B(x, r)) \leq \text{const} \cdot r^{n+\beta-\alpha}$$

is satisfied for all $x \in \mathbb{R}^n$ and all $r > 0$. Then the Riesz potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ belongs to the Lipschitz class $Lip_\beta(\mathbb{R}^n)$ of order β .

Later, Wallin [25] proved the converse theorem to Carleson's theorem and established that, in particular, Carleson's sufficient condition is also a necessary condition, i.e., the following theorem is true.

Lemma 1. For any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ with Lebesgue measure $m(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that

a) the family of functions $(T_\delta v)(x)$ converges uniformly to $(Tv)(x)$ as $\delta \rightarrow 0$ on the set $\mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$.

b) the family of functions

$$\frac{v(B(x, t))}{m(B(x, t))}$$

converges uniformly to $v'(x)$ as $t \rightarrow 0$ on the set $\mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$.

At first glance, this lemma seems to be no different from Egorov's theorem (see [26]). However, Egorov's theorem pertains to sequences of functions, whereas this lemma concerns families of functions that depend on a parameter that takes a continuum of values. It is important to note that Egorov's theorem is generally valid only for cases where the parameter runs over a countable set (see the example in [5]).

Lemma 2. Let μ - be a finite Borel measure with compact support $\text{supp } \mu \subset \mathbb{R}^n$. Then for any $\varepsilon > 0$ there exists an open set $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ with capacity $C_{n-\alpha}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ such that

I) the family of functions

$$\int_{|x-y|<\delta} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

converges uniformly to zero for $\delta \rightarrow 0$ on the set $\mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$;

II) the family of functions

$$\frac{\mu(B(x,t))}{t^{n-\alpha}}$$

converges uniformly to zero for $t \rightarrow 0$ on the set $\mathbb{R}^n \setminus G_\varepsilon$.

Main results. The following theorem complements Carleson's theorem.

Theorem 5. Let $1 \leq \alpha < n$ and μ be positive finite Borel measures with compact support in \mathbb{R}^n such that the inequality

$$\mu(B(x,r)) \leq \text{const} \cdot r^{n+1-\alpha}$$

is satisfied for all $x \in \mathbb{R}^n$ and all $r > 0$. Then the Riesz potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ belongs to the Zygmund class $\Lambda_1(\mathbb{R}^n)$, i.e. for all $x, h \in \mathbb{R}^n$

$$|U_{n-\alpha}^\mu(x+h) - 2U_{n-\alpha}^\mu(x) + U_{n-\alpha}^\mu(x-h)| \leq C|h|, \quad (1.3)$$

where C — is a constant.

Proof. Let the potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$, $1 \leq \alpha < n$, and μ — be a finite Borel measure with compact support, which has the following condition

$$\mu(B(x,r)) \leq c \cdot r^{(n+1-\alpha)},$$

for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, where c — is a constant. We estimate the following difference

$$R(x,h) = U_{n-\alpha}^\mu(x+h) - 2U_{n-\alpha}^\mu(x) + U_{n-\alpha}^\mu(x-h)$$

for all $x, h \in \mathbb{R}^n$, i.e.

$$\begin{aligned} R(x,h) &= \int_{|x-y| < 2|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y+h|^{n-\alpha}} - 2 \int_{|x-y| < 2|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} + \int_{|x-y| < 2|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y-h|^{n-\alpha}} + \\ &+ \int_{|x-y| \geq 2|h|} \left[\frac{1}{|x-y+h|^{n-\alpha}} - 2 \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} + \frac{1}{|x-y-h|^{n-\alpha}} \right] d\mu(y) = I_1(x,h) + I_2(x,h) + \\ &+ I_3(x,h) + I_4(x,h). \end{aligned}$$

We have an assessment of

$$\begin{aligned} I_1(x,h) &= \int_{|x-y| < 2|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y+h|^{n-\alpha}} \leq \int_{|x-y+h| < 3|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y+h|^{n-\alpha}} = \\ &= \int_0^{3|h|} \frac{d\mu(B(x+h,t))}{t^{n-\alpha}} = \frac{\mu(B(x+h,3|h|))}{(3|h|)^{n+1-\alpha}} 3|h| + \\ &+ (n-\alpha) \int_0^{3|h|} \frac{\mu(B(x+h,t))}{t^{n+1-\alpha}} dt \leq 3c(n+1-\alpha)|h| = C_1|h|. \end{aligned}$$

So $0 \leq I_1(x,h) \leq C_1|h|$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$.

The values $I_2(x,h)$ and $I_3(x,h)$ are estimated in exactly the same way:

$$\begin{aligned} 0 \leq I_2(x,h) &\leq C_2|h|, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{where } C_2 = 2c(n+1-\alpha) \text{ and} \\ 0 \leq I_3(x,h) &\leq C_3|h|, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{where } C_3 = 3c(n+1-\alpha). \end{aligned}$$

Now it remains to evaluate $I_4(x, h)$. We will use the inequality for the kernel:

$$\left| \frac{1}{|x-y+h|^{n-\alpha}} - 2\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} + \frac{1}{|x-y-h|^{n-\alpha}} \right| \leq M \frac{|h|^2}{|x-y|^{n+2-\alpha}},$$

$x, y, h \in \mathbb{R}^n$, $|x-y| \geq 2|h|$, M – constant.

We have an assessment of

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq M |h|^2 \int_{|x-y| \geq 2|h|} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n+2-\alpha}} = M |h|^2 \int_{2|h|}^{+\infty} \frac{d\mu(B(x, t))}{t^{n+2-\alpha}} \leq \\ &\leq M(n+2-\alpha) |h|^2 \int_{2|h|}^{+\infty} \frac{\mu(B(x, t))}{t^{n+1-\alpha}} t^{-2} dt \leq Mc(n+2-\alpha) |h|^2 \int_{2|h|}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \\ &= \frac{1}{2} Mc(n+2-\alpha) |h| = C_4 |h|. \end{aligned}$$

Combining all the estimates, we end up with an estimate of

$$|R(x, h)| \leq C |h|, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Thus, the potential $U_{n-\alpha}^\mu(x)$ belongs to the Zygmund class. *The theorem is proved.*

An analogue of Theorem 5 is also true in the case of a logarithmic potential.

Theorem 6. Let μ be a positive finite Borel measure with compact support μ in \mathbb{R}^2 such that the inequality

$$\mu(B(x, r)) \leq c \cdot r \tag{6.1}$$

is satisfied for $\forall x \in \mathbb{R}^2$ and all C . Then the logarithmic potential

$$U_0^\mu(x) = \int \ln|x-y| d\mu(y)$$

belongs to the Zygmund class $\Lambda_1(\mathbb{R}^2)$.

In fact, this theorem is proved in [29] (see [29], lemma 1).

Now we give an example of a logarithmic potential for which conditions (6.1) are satisfied, but the potential itself does not belong to the Lipschitz class $Lip_1(\mathbb{R}^2)$.

Example. Let $E \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ be a Cantor set such that the Hausdorff measure is finite $0 < H_1(E) < +\infty$ and the analytic capacity is zero (see [30]). Consider the following logarithmic potential

$$u(z) = \int \ln|z-w| d\mu(w),$$

where $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$, $d\mu = dH_1$, i.e. $\text{supp } \mu \subseteq E$. It is clear that $u(z) \notin Lip_1(\mathbb{C})$. Because the function

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} = \int \frac{d\mu(w)}{z-w}$$

is holomorphic in the domain $\mathbb{C} \setminus E$ and is not bounded.

Conclusion. This paper presents a review of results concerning the differential properties of subharmonic functions. It discusses both old results on the differentiability of subharmonic functions and provides new, more detailed proofs of theorems.

REFERENCES:

1. Cartan H. *Theori du Potential newtonien: energie, capacite, suites de potentials*. Bull. Soc. Math. France. 1945, Vol. 73. pp. 74-106.
2. Landkof N.S. *Foundation of modern potential theory (in Russian)*. Moskov, 1966.
3. Heyman W.K., Kennedy P.B. *Subharmonic Functions*. By Academic Press Inc., London, 1976.
4. Sadullaev A.S., Madrakhimov R.M. *Smoothness of subharmonic functions*. Math.sb. 1990, T.181. № 2, pp.167-182.
5. Imomkulov S. A. *Twice differentiability of subharmonic functions*, Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 1993, Vol. 41, Issue 1, pp. 157–167. <https://doi.org/10.1070/IM1993v041n01ABEH002184>
6. Imomkulov S. A. *Differentiability of subharmonic functions (In Russian)*, Uzbek Math. J., №1, 1994, pp. 35-40.
7. Calderón A.P. and Zygmund A. *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. 88 (1952), pp. 85-139.
8. Stein E. M. *Singular integrals and differentiability properties functions*. Princeton University press, Prensiton, New Jersey, 1970.
9. Carleson L. *Selected problems on exseptional sets*. Mineographed, Uppsala, 1961.
10. Whitney H. *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. Trans. Amer. Math. Soc. 1934, Vol. 36, p.63-89.
11. Malgrange B. *Ideals of differentiable functions*. Oxford University Press, London. 1966.
12. Rockafeller R. *Convex analysis*. Princeton, New Jersey Princeton University press. 1970.
13. Alexandrov A.D. *Internal geometry of convex surfaces*. (In Russian) Gostekhphizmat. 1948
14. Alexandrov A.D. *The existence almost everywhere of a second differential of a convex function and some related properties of convex surfaces*. Teaching Notes of Leningrad State University. ser. mat. 1939, N6. pp.3-35.
15. Reshetnyak Yu.G. *Generalized derivatives and differentiability almost everywhere*. Mat.sb. 1958, Vol. 75(117), №. 3. pp. 323-334.
16. Albrerty G., *On the structure of singular sets of convex functions*, Calc. Var. Partial Differential Equations. 2 (1994), pp. 17–27.
17. Imomkulov S.A., *On the smoothness of monoton and convex functions (In Russian)*, Reports of the Acad.Sci. of the Republic of Uzbekistan. №9-10, 1995, pp. 10-12.
18. Bianchi G., Colesanti A. and Pucci C., ‘*On the second differentiability of convex surfaces*’, Geom. Dedicata 60 (1996), pp. 39–48.
19. Azagra D., Hajlasz P., *Lusin-type properties of convex function and convex bodies*. J. Geom.Anal. 31 (2021), 11685–1170.
20. Azagra D., Drake M., Hajlasz P. *C^2 -Lusin approximation of strongly convex functions*. Inventiones Math. 236 (2024), 1055-1082. (free online access) [arXiv].
21. Imomkulov S.A., Dauzhanov A.Sh. *Differential properties of Riesz Potentials. Boundary value problems for differential equations*. Zb.nauk. Ave. Chernivtsi (Ukraine): Prut, 2005, Vol. 12, pp. 120–128.
22. Verdera J. *Capacitary differentiability of potentials of finite Radon measures*, Ark. Mat. 57 (2019), pp. 37–450.
23. Cufí J. and Verdera J. *Differentiability properties of Riesz potentials of finite measures and non-doubling Calder on–Zygmund theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (5) 18 (2018), 1081–1123.
24. Carleson L. *Removable singularities of continuous harmonic functions in \mathbb{R}^m* Math.Scand. 1963. Vol. 12, pp. 15–18.
25. Wallin H. *Existense and properties of Riesz potentials satisfying Lipschitz conditions*. Math. Scand. 1966, Vol. 19, pp. 151–160.
26. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions of functional analysis (In Russian)*. M.: Nauka 1981.
27. Federer G. *Geometric measure theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1969. Wade W.R. *An introduction to analysis*. 2nd ed. Prentice Hall Apper Saddle River. NJ 07458. 2000 y.
28. Ullrich D.C. *Removable sets for harmonic functions*. Michigan Math. J. 38 1991, pp. 467-473.
29. Vitushkin A.G. *An example of a set of positive length, but zero analytical capacity*. DAN USSR. 1959, Vol. 127, № 2. pp. 246 – 249.

СВЯЗАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ
ОРТОТРОПНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Каландаров Азиз Абдукаюмович,
доцент Гулистанского государственного
педагогического института, PhD
abrorshox@mail.ru

Аннотация. В статье предлагается модифицированная версия итерационного метода для численного решения трёхмерной нелинейной связанной динамической краевой задачи, описывающей процесс термопластических деформаций ортотропного параллелепипеда. На основе явных и неявных конечно-разностных схем составлены дискретные аналоги краевой задачи. Записаны рекуррентные соотношения на основе конечных разностей, позволяющие в сочетании с итерационным методом находить искомые компоненты вектора перемещений. Предполагается, что в первом приближении значения искомых перемещений во внутренних узлах тривиальны. Метод демонстрируется на примере решения термопластической связанной динамической краевой задачи для ортотропного параллелепипеда.

Ключевые слова: нелинейная термоупругость, связанная задача, теплопроводность, разностные уравнения, явная схема, неявная схема, итерация, метод переменных направлений.

ORTOTROP PARALLELEPIPED UCHUN NOCHIZIQLI TERMOELASTIKLIKNING
BOG'LIQ DINAMIK MASALASI

Annotatsiya. Maqolada ortotrop parallelepipedning termoplastik deformatsiyalanish jarayonini tavsiflovchi uch o'lchovli nochiziqli bog'liq dinamik chegaraviy masalani sonli yechish uchun iteratsion usulning modifikatsiyalangan varianti taklif etilgan. Oshkor va oshkormas sxemalar asosida chegaraviy masalaning diskret analoglari tuzilgan. Chekli ayirmali tenglamalar asosida rekurrent munosabatlar yozilib, ular iteratsion usul bilan birgalikda ko'chishlar vektorining komponentalarini aniqlash imkonini bergan. Dastlabki yaqinlashish sifatida qaralayotgan sohaning ichki tugun nuqtalarida ko'chishlarning trivial qiymatlari qabul qilingan. Taklif etilgan algoritmnining samaradorligi ortotropik parallelepiped uchun nochiziqli termoelastiklikning bog'liq dinamik masalasini yechish misolida namoyish etilgan.

Kalit so'zlar: nochiziqli termoelastiklik, bog'liq masala, issiqlik o'tkazuvchanlik, ayirmali tenglamalar, oshkor sxema, oshkormas sxema, iteratsiya, o'zgaruvchan yo'nalishlar usuli.

A COUPLED DYNAMIC PROBLEM OF NONLINEAR THERMOELASTICITY FOR AN
ORTHOTROPIC PARALLEPIPED

Abstract. This article proposes a modified version of an iterative method for the numerical solution of a three-dimensional nonlinear coupled dynamic boundary value problem describing the thermoplastic deformation process of an orthotropic parallelepiped. Discrete analogs of the boundary value problem are constructed using explicit and implicit finite difference schemes. Recurrence relations based on finite differences are written, which, when combined with the iterative method, allow finding the desired displacement vector components. It is assumed that, to a first approximation, the values of the desired displacements at the interior nodes are trivial. The method is demonstrated using the example of solving a thermoplastic coupled dynamic boundary value problem for an orthotropic parallelepiped.

Key words: nonlinear thermoelasticity, coupled problem, thermal conductivity, difference equations, explicit scheme, implicit scheme, iteration, alternating direction method.

Введение. Начало теоретических исследований в области теории нелинейного деформирования анизотропных тел было положено Мизесом и развито в работах Р.Хилла. Далее он предложил свою теорию пластического течения для анизотропных сред, в основу которой положены предположения о квадратичной форме условий пластичности и гипотеза существования пластического потенциала. Для теории Мизеса существенны предложения о несжимаемости материала и отсутствии упрочнения. Это направление нашло своё развитие в работах Р.Хилла, где учитывается упрочнение анизотропных материалов. На сегодняшний день существуют различные варианты деформационной теории для

анизотропных тел. На основе выше указанных теорий предложены различные модели пластических деформаций анизотропных тел.

Исследование термопластических состояний конструкций и их элементов для определения запасов прочности является одной из актуальных проблем математического моделирования и теории пластичности. Нелинейные соотношения между напряжениями и деформациями с учётом температуры более реально описывают процесс деформирования твёрдых тел. Процесс пластического деформирования конструкций и их элементов с учётом температурных воздействий, может быть описан модельными уравнениями двух типов, а именно так называемыми «связанными» и «несвязанными» термо-упруго-пластическими задачами. В несвязанной задаче температура считается известной или вычисляется отдельно путём решения уравнения теплопроводности. Результаты этой задачи используются при решении модельных уравнений «термопластичности».

В отличие от «несвязанных задач» в «связанных задачах» подразумевается совместное одновременное решение уравнения «притока тепла» и уравнений «термопластичности». При использовании данного подхода под действием механических и тепловых воздействий адекватно описывается процесс термопластического деформирования конструкций и их элементов, при которых деформация вызывает появление температуры, и наоборот. Математические модели, описывающие процесс распространения тепла, были рассмотрены в работе Дюамеля-Неймана [1], где предполагается что полная деформация состоит из упругой деформации и теплового расширения. В работе [2] рассмотрена термопластичность при переменных нагружениях. В [1] приведены математические модели трёхмерных задач теории упругости и термоупругости.

Для формулировки вышеназванных термопластических модельных уравнений нам необходимо знать нелинейное соотношение между тензором напряжений и деформаций с учётом температуры.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную связанную динамическую задачу термоупругости, которая состоит из уравнений движения:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1)$$

термопластическое модельное уравнение между напряжениями и деформациями с учётом температуры для ортотропных тел имеет следующий вид [5]

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0) \delta_{ij}, & \text{при } p \leq p^*, q \leq q^*, r \leq r^* \\ C_{ijke} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0) \delta_{ij} - 2(\lambda_2 - \lambda_2') (1 - \frac{p^*}{p}) p_{ij} - 2(\lambda_5 - \lambda_5') (1 - \frac{q^*}{q}) q_{ij} - \\ - 2(\lambda_9 - \lambda_9') (1 - \frac{r^*}{r}) r_{ij}, & \text{при } p > p^*, q > q^*, r > r^* \end{cases} \quad (2)$$

где, $\lambda_2 = C_{1212}$, $\lambda_5 = C_{1313}$, $\lambda_9 = C_{2323}$, p^*, q^*, r^* – пределы упругости для трёх экспериментально определяемых функций, $\lambda_2', \lambda_5', \lambda_9'$ – касательные модули, величины p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} – девиаторные части тензора деформаций ортотропного материала, которые имеют следующий вид:

$$p_{ij} = \varepsilon_{12} (\delta_{1i} \delta_{2j} + \delta_{2i} \delta_{1j})$$

$$q_{ij} = \varepsilon_{13} (\delta_{1i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{1j})$$

$$r_{ij} = \varepsilon_{23} (\delta_{2i} \delta_{3j} + \delta_{3i} \delta_{2j})$$

величины p, q, r – интенсивности тензора деформаций ортотропного материала, которые имеют следующий вид:

$$p = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}}, \quad q = \sqrt{\frac{1}{2} q_{ij} q_{ij}}, \quad r = \sqrt{\frac{1}{2} r_{ij} r_{ij}}$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3)$$

для формулировки модельных уравнений описания термопластических деформаций, нам также необходимо уравнение притока тепла (теплопроводности), которое в общем виде для анизотропных тел имеет следующий вид [3,4]:

$$\lambda_{ij} T_{,ij} - c_\varepsilon \dot{T} - T \cdot \beta_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (4)$$

с соответствующими начальными

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i, \quad \dot{u}_i|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = T_0 \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad T|_{\Sigma} = \bar{T}_0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0. \quad (6)$$

После некоторых преобразований, краевую задачу (1-6) можно привести к системе, состоящей из трёх нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\begin{cases} C_{1111} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{1133} + C_{1313}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \beta_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - f_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{1212} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C_{2233} + C_{2323}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \beta_{22} \frac{\partial T}{\partial y} - f_2 = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ C_{1313} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{3322} + C_{2323}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \beta_{33} \frac{\partial T}{\partial z} - f_3 = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (7)$$

и одного уравнения притока тепла параболического типа:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - T \left(\beta_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \beta_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \beta_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right) = 0 \quad (8)$$

с соответствующими начальными

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t)|_{t=0} &= \varphi_1, \quad v(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi_2, \quad w(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi_3, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \psi_1, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = \psi_3, \quad T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0, \end{aligned} \quad (9)$$

и краевыми условиями относительно перемещений и температуры

$$u(x, y, z, t)|_{\Sigma} = u^1, \quad v(x, y, z, t)|_{\Sigma} = v^1, \quad w(x, y, z, t)|_{\Sigma} = w^1, \quad T(x, y, z, t)|_{\Sigma} = T_1. \quad (10)$$

В уравнениях (7) величины f_i , определённые соотношением

$$f_i = 2(\lambda_2 - \lambda'_2) \left(1 - \frac{p^*}{p}\right) \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + 2(\lambda_5 - \lambda'_5) \left(1 - \frac{q^*}{q}\right) \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} + 2(\lambda_9 - \lambda'_9) \left(1 - \frac{r^*}{r}\right) \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{при } p > p^*, q > q^*, r > r^*$$

представляют собой нелинейную часть модельных уравнений и отличны от нуля только в зонах пластичности, т.е. при превышении предела упругости.

Заметим, что дифференциальные уравнения (7) и (8) между собой связаны относительно перемещений и температуры. Если процесс деформирования статический, т.е. не зависит от времени, тогда уравнение притока тепла (8) можно будет рассматривать отдельно от (7) и, задача становится несвязанной.

Методы решения. В настоящей работе для численного решения трёхмерной связанной динамической нелинейной краевой задачи термоупругости применяется новый конечно-разностный подход в сочетании с итерационным методом.

Суть метода заключается в построении симметричных конечно-разностных уравнений, отдельно для внутренних и граничных узлов рассматриваемой области, и их решении относительно “центральных” или граничных узловых точек и организации итерационного процесса. Задача решена для ортотропного параллелепипеда. В следующих параграфах этот подход будет применён для решения краевых задач термоупругости в напряжениях при различных начальных и граничных термомеханических условиях.

Заменяя производные в уравнениях (7) и (8) разностными отношениями, можно найти, что

$$C_{1111} \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{1313} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} +$$

$$+ (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + (C_{1133} + C_{1313}) \times$$

$$\times \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2h_1} - f_{1 i,j,k} = \rho \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2}$$
(11)

$$C_{1212} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{2222} \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{2323} \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} +$$

$$+ (C_{2211} + C_{1212}) \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + (C_{2233} + C_{2323}) \times$$

$$\times \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4h_2h_3} - \beta_{22} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2h_2} - f_{2 i,j,k} = \rho \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2}$$
(12)

$$C_{1313} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{2323} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{3333} \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} +$$

$$+ (C_{3311} + C_{1313}) \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} + (C_{3322} + C_{2323}) \times$$

$$\times \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{4h_1h_2} - \beta_{33} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2h_3} - f_{3 i,j,k} = \rho \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2}$$
(13)

$$\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + \lambda_{33} \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} -$$

$$- c_\varepsilon \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\tau} - T_0 \left(\beta_{11} \frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1} - u_{i+1,j,k}^{n-1} + u_{i-1,j,k}^{n-1}}{4h_1\tau} +$$

$$+ \beta_{22} \frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1} - v_{i,j+1,k}^{n-1} + v_{i,j-1,k}^{n-1}}{4h_2\tau} + \beta_{33} \frac{w_{i,j,k+1}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1} - w_{i,j,k+1}^{n-1} + w_{i,j,k-1}^{n-1}}{4h_3\tau} \right) = 0$$
(14)

решая разностные уравнения (11-14), относительно $u_{i,j,k}^{n+1}$, $v_{i,j,k}^{n+1}$, $w_{i,j,k}^{n+1}$ и $T_{i,j,k}^{n+1}$ соответственно, получим:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left[C_{1111} \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{1313} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} +$$

$$+ (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + (C_{1133} + C_{1313}) \times$$

$$\times \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2h_1} - f_{1 i,j,k} \right] + 2u_{i,j,k}^n - u_{i,j,k}^{n-1}$$
(15)

$$v_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left[C_{1212} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{2222} \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{2323} \times \right. \\ \left. \times \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} + (C_{2211} + C_{1212}) \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + (C_{2233} + C_{2323}) \times \right. \\ \left. \times \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4h_2h_3} - \beta_{22} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2h_2} - f_{2 i,j,k} \right] + 2v_{i,j,k}^n - v_{i,j,k}^{n-1} \quad (16)$$

$$w_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left[C_{1313} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + C_{2323} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{3333} \times \right. \\ \left. \times \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} + (C_{3311} + C_{1313}) \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} + (C_{3322} + C_{2323}) \times \right. \\ \left. \times \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{4h_1h_2} - \beta_{33} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2h_3} - f_{3 i,j,k} \right] + 2w_{i,j,k}^n - w_{i,j,k}^{n-1} \quad (17)$$

$$T_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left[\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + \right. \\ \left. + \lambda_{33} \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} - T_0 \left(\beta_{11} \frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - u_{i-1,j,k}^{n+1} - u_{i+1,j,k}^{n-1} + u_{i-1,j,k}^{n-1}}{4h_1\tau} + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_{22} \frac{v_{i,j+1,k}^{n+1} - v_{i,j-1,k}^{n+1} - v_{i,j+1,k}^{n-1} + v_{i,j-1,k}^{n-1}}{4h_2\tau} + \beta_{33} \frac{w_{i,j,k+1}^{n+1} - w_{i,j,k-1}^{n+1} - w_{i,j,k+1}^{n-1} + w_{i,j,k-1}^{n-1}}{4h_3\tau} \right) \right] + T_{i,j,k}^n \quad (18)$$

Величины $f_{1 i,j,k}, f_{2 i,j,k}, f_{3 i,j,k}$ вычисляются по значениям перемещений, известным из предпоследнего приближения итерации, при выполнении условия перехода предела упругости $p > p^*, q > q^*, r > r^*$. Все индексы меняются в пределах внутренних узлов.

Уравнения (15)-(18) позволяют найти значения перемещений и температуры на слое $(n+1)$ по времени, если известны значения перемещений на двух предыдущих слоях. Значения перемещений на двух начальных слоях $(n=0, n=1)$ можно найти из начальных условий (19)

$$u_{i,j,k}^0 = u^0, \quad v_{i,j,k}^0 = v^0, \quad w_{i,j,k}^0 = w^0, \quad T_{i,j,k}^0 = T_0. \quad (19)$$

Запишем уравнение (15) для $n=0$

$$u_{i,j,k}^1 = \frac{\tau^2}{\rho} \left[C_{1111} \frac{u_{i+1,j,k}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i-1,j,k}^0}{h_1^2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i,j-1,k}^0}{h_2^2} + \right. \\ \left. C_{1313} \frac{u_{i,j,k+1}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i,j,k-1}^0}{h_3^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1,k}^0 - v_{i-1,j+1,k}^0 - v_{i+1,j-1,k}^0 + v_{i-1,j-1,k}^0}{4h_1h_2} + \right. \\ \left. (C_{1133} + C_{1313}) \frac{w_{i+1,j,k+1}^0 - w_{i-1,j,k+1}^0 - w_{i+1,j,k-1}^0 + w_{i-1,j,k-1}^0}{4h_1h_3} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^0 - T_{i-1,j,k}^0}{2h_1} - f_{1 i,j,k} \right] + 2u_{i,j,k}^0 - u_{i,j,k}^{-1}. \quad (20)$$

Заменяя в начальном условии (19)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_2, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_3$$

производную разностным отношением, получим:

$$\frac{u_{i,j,k}^1 - u_{i,j,k}^{-1}}{2h_1} = \varphi_1(x_i, y_j, z_k) \quad \text{или} \quad u_{i,j,k}^1 = 2h_1\varphi_1(x_i, y_j, z_k) + u_{i,j,k}^{-1}. \quad (21)$$

Исключив из уравнений (20) и (21) значение $u_{i,j,k}^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j,k}^1 = \frac{\tau^2}{2\rho} & \left[C_{1111} \frac{u_{i+1,j,k}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i-1,j,k}^0}{h_1^2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i,j-1,k}^0}{h_2^2} + \right. \\
 C_{1313} & \frac{u_{i,j,k+1}^0 - 2u_{i,j,k}^0 + u_{i,j,k-1}^0}{h_3^2} + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1,k}^0 - v_{i-1,j+1,k}^0 - v_{i+1,j-1,k}^0 + v_{i-1,j-1,k}^0}{4h_1h_2} + \\
 (C_{1133} + C_{1313}) & \frac{w_{i+1,j,k+1}^0 - w_{i-1,j,k+1}^0 - w_{i+1,j,k-1}^0 + w_{i-1,j,k-1}^0}{4h_1h_3} - \\
 & \left. -\beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^0 - T_{i-1,j,k}^0}{2h_1} - f_{1i,j,k} \right] + u_{i,j,k}^0 + h_1\varphi_1(x_i, y_j, z_k).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Таким же способом находим значения функций V и W на первом слое. Заменяя смешанные производные со сдвинутыми по индексам разностными отношениями можно найти соотношения для нахождения значения температуры на первом слое:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} & \left[\lambda_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^0 - 2T_{i,j,k}^0 + T_{i-1,j,k}^0}{h_1^2} + \lambda_{22} \frac{T_{i,j+1,k}^0 - 2T_{i,j,k}^0 + T_{i,j-1,k}^0}{h_2^2} + \right. \\
 + \lambda_{33} & \frac{T_{i,j,k+1}^0 - 2T_{i,j,k}^0 + T_{i,j,k-1}^0}{h_3^2} - T_0 \left(\beta_{11} \frac{u_{i+1,j,k}^1 - u_{i-1,j,k}^1 - u_{i+1,j,k}^0 + u_{i-1,j,k}^0}{2h_1\tau} + \right. \\
 + \beta_{22} & \frac{v_{i,j+1,k}^1 - v_{i,j-1,k}^1 - v_{i,j+1,k}^0 + v_{i,j-1,k}^0}{2h_2\tau} + \beta_{33} \frac{w_{i,j,k+1}^1 - w_{i,j,k-1}^1 - w_{i,j,k+1}^0 + w_{i,j,k-1}^0}{2h_3\tau} \left. \right) \left. \right] + T_{i,j,k}^0.
 \end{aligned}$$

На остальных слоях $n=2,3,4,\dots$ значения перемещений и температуры находятся из уравнений (15)-(18). Выше рассмотренные разностные схемы были явными и вычисляются по рекуррентным соотношениям.

Рассмотренные явные разностные схемы выполняют условия сходимости Куранта-Фририхса-Леви. Приведённые выше конечно-разностные схемы положительно определены и симметричны.

Кроме этого, можно построить и неявные конечно-разностные уравнения. Для этого в слагаемых, содержащих главные неизвестные, индекс n поменяем на $n+1$, и полученные схемы становятся неявными, для сходимости которых нет ограничений относительно шагов сетки по времени.

$$\begin{aligned}
 C_{1111} & \frac{u_{i+1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i-1,j,k}^{n+1}}{h_1^2} + C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{1313} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} + \\
 + (C_{1122} + C_{1212}) & \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + (C_{1133} + C_{1313}) \times \\
 \times & \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} - \beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2h_1} - f_{1i,j,k} = \rho \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Конечно-разностное уравнение (23) приведём к следующему виду:

$$a_i u_{i+1,j,k}^{n+1} + b_i u_{i,j,k}^{n+1} + c_i u_{i-1,j,k}^{n+1} = d_i \tag{24}$$

где
$$a_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2}, \quad b_i = -2\left(\frac{C_{1111}}{h_1^2} + \frac{\rho}{\tau^2}\right), \quad c_i = \frac{C_{1111}}{h_1^2},$$

$$d_i = \rho \frac{-2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n-1}}{\tau^2} - \left(C_{1212} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{h_2^2} + C_{1313} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{h_3^2} + \right. \\ \left. + (C_{1122} + C_{1212}) \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4h_1h_2} + \right. \\ \left. + (C_{1133} + C_{1313}) \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4h_1h_3} \right) + \beta_{11} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2h_1} + f_{1i,j,k}.$$

Вычислим значения искомой функции на двух начальных слоях выше приведённым методом, тогда уравнение (24) совместно с граничными условиями $u_i|_{\Sigma_i} = u_i^0$ решается методом переменных направлений. Изменяя $j, k = \overline{1, N-1}$, найдём значения перемещений u во всех внутренних точках сетки на слое $(n+1)$. Таким же способом можно вычислить значения перемещений v и w , а значения температуры T вычисляются таким же способом, начиная с первого слоя. После вычисления всех численных значений искомых функций, определяются зоны пластичности, и вычисления проводятся заново.

Численный пример. Рассмотрим связанную термо-упруго-пластическую задачу о свободном ортотропном параллелепипеде, находящемся под действием температурного поля куполообразной формы, заданной в начальный момент времени. Требуется исследовать распределение температурных напряжений по времени в ортотропном параллелепипеде.

Задача описывается уравнениями (7-8). При этом начальные и краевые условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

начальные условия

$$\sigma_{11}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \sigma_{22}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \sigma_{33}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \sigma_{12}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \sigma_{13}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ \sigma_{23}(x, y, t)|_{t=0} = 0, T(x, y, t)|_{t=0} = T_0 \cdot \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

граничные условия

$$\sigma_{11}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{22}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{33}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{12}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, \\ \sigma_{13}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, \sigma_{23}(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0, T(x, y, t)|_{x=\Gamma} = 0.$$

константы

$$\lambda_{11} = 0.13, \quad \lambda_{22} = 0.17, \quad \lambda_{33} = 0.15, \quad \beta_{11} = 0.15, \quad \beta_{22} = 0.24, \quad \beta_{33} = 0.15, \quad Ce = 3.5, \\ T_0 = 20, h_1 = 0.1, \quad h_2 = 0.1, \quad h_3 = 0.1, \quad \tau = 0.01, \quad \rho = 1, \quad \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1, \quad C_{1111} = 1.25, \quad C_{2222} = 0.978, \\ C_{3333} = 2.76, \quad C_{1122} = 0.998, \quad C_{1133} = 1.01, \quad C_{2211} = C_{1122}, \quad C_{3311} = C_{1133}, \quad C_{2233} = 1.07, \quad C_{3322} = C_{2233}, \\ C_{2323} = 0.623, \quad C_{1313} = 0.561, \quad C_{1212} = 0.452.$$

Ниже в таблицах и рисунках приведём численные результаты перемещений и температуры, а также, зоны пластичности в различных сечениях рассматриваемого ортотропного термо-упруго-пластического параллелепипеда.

Таблица 1. Значения перемещений $u(x, y, z, t)$ при $k=5, l=6$ (явная схема)

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0016	0.0030	0.0041	0.0047	0.0000
	0.0047	0.0041	0.0030	0.0016						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0029	0.0055	0.0076	0.0086	0.0000
	0.0086	0.0076	0.0055	0.0029						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0040	0.0076	0.0104	0.0118	0.0000
	0.0118	0.0104	0.0076	0.0040						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0047	0.0089	0.0122	0.0139	0.0000
	0.0139	0.0122	0.0089	0.0047						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0049	0.0094	0.0129	0.0146	0.0000

MATHEMATICS

	0.0146	0.0129	0.0094	0.0049						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0047	0.0089	0.0122	0.0139	0.0000
	0.0139	0.0122	0.0089	0.0047						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0040	0.0076	0.0104	0.0118	0.0000
	0.0118	0.0104	0.0076	0.0040						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0029	0.0055	0.0076	0.0086	0.0000
	0.0086	0.0076	0.0055	0.0029						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0016	0.0030	0.0041	0.0047	0.0000
	0.0047	0.0041	0.0030	0.0016						
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 2. Значения перемещений $u(x,y,z,t)$ при $k=5, l=6$ (неявная схема)

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0016	0.0030	0.0041	0.0045	0.0000
	0.0045	0.0041	0.0030	0.0016						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0029	0.0055	0.0075	0.0083	0.0000
	0.0083	0.0075	0.0055	0.0029						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0040	0.0076	0.0104	0.0114	0.0000
	0.0114	0.0104	0.0076	0.0040						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0047	0.0089	0.0122	0.0134	0.0000
	0.0134	0.0122	0.0089	0.0047						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0049	0.0093	0.0128	0.0141	0.0000
	0.0141	0.0128	0.0093	0.0049						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0047	0.0089	0.0122	0.0134	0.0000
	0.0134	0.0122	0.0089	0.0047						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0040	0.0076	0.0104	0.0114	0.0000
	0.0114	0.0104	0.0076	0.0040						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0029	0.0055	0.0075	0.0083	0.0000
	0.0083	0.0075	0.0055	0.0029						
0.0000	-	-	-	-	0.0000	0.0016	0.0030	0.0041	0.0045	0.0000
	0.0045	0.0041	0.0030	0.0016						
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

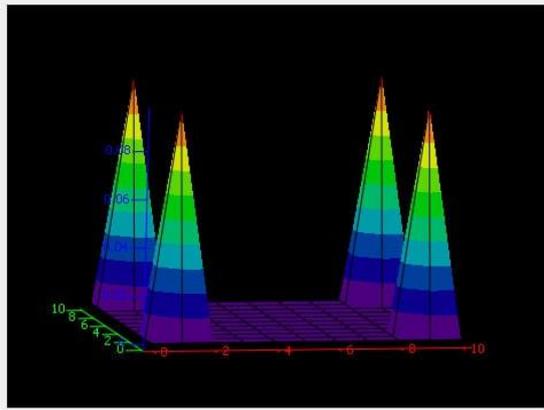
Таблица 3. Значения температуры $T(x,y,z,t)$ при $k=5, l=10$ (явная схема)

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.8784	3.3990	4.6674	5.4858	5.7680	5.4858	4.6674	3.3990	1.8784	0.0000
0.0000	3.1905	5.7947	7.9572	9.3525	9.8337	9.3525	7.9572	5.7947	3.1905	0.0000
0.0000	4.3608	7.9202	10.8759	12.7829	13.4406	12.7829	10.8759	7.9202	4.3608	0.0000
0.0000	5.1216	9.3024	12.7737	15.0136	15.7861	15.0136	12.7737	9.3024	5.1216	0.0000
0.0000	5.3848	9.7804	13.4302	15.7852	16.5973	15.7852	13.4302	9.7804	5.3848	0.0000
0.0000	5.1216	9.3024	12.7737	15.0136	15.7861	15.0136	12.7737	9.3024	5.1216	0.0000
0.0000	4.3608	7.9202	10.8759	12.7829	13.4406	12.7829	10.8759	7.9202	4.3608	0.0000
0.0000	3.1905	5.7947	7.9572	9.3525	9.8337	9.3525	7.9572	5.7947	3.1905	0.0000
0.0000	1.8784	3.3990	4.6674	5.4858	5.7680	5.4858	4.6674	3.3990	1.8784	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблица 4. Значения температуры $T(x,y,z,t)$ при $k=5, l=10$ (неявная схема)

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.7636	3.2739	4.4996	5.2890	5.5611	5.2890	4.4996	3.2739	1.7636	0.0000
0.0000	3.1649	5.8907	8.0969	9.5174	10.0071	9.5174	8.0969	5.8907	3.1649	0.0000
0.0000	4.3402	8.0788	11.1046	13.0528	13.7244	13.0528	11.1046	8.0788	4.3402	0.0000
0.0000	5.1004	9.4939	13.0498	15.3392	16.1285	15.3392	13.0498	9.4939	5.1004	0.0000
0.0000	5.3628	9.9822	13.7210	16.1282	16.9581	16.1282	13.7210	9.9822	5.3628	0.0000
0.0000	5.1004	9.4939	13.0498	15.3392	16.1285	15.3392	13.0498	9.4939	5.1004	0.0000
0.0000	4.3402	8.0788	11.1046	13.0528	13.7244	13.0528	11.1046	8.0788	4.3402	0.0000
0.0000	3.1649	5.8907	8.0969	9.5174	10.0071	9.5174	8.0969	5.8907	3.1649	0.0000
0.0000	1.7636	3.2739	4.4996	5.2890	5.5611	5.2890	4.4996	3.2739	1.7636	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

а) Явная схема



б) Неявная схема

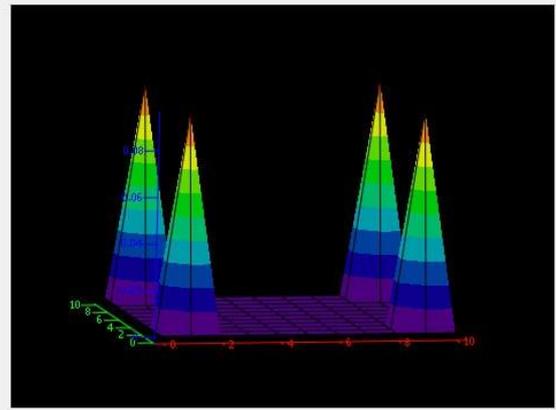
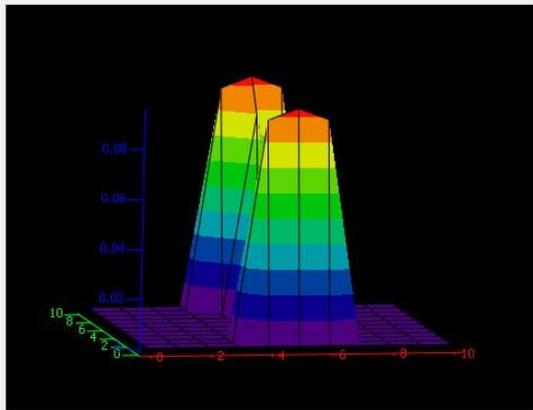


Рисунок 1. Зона пластичности по интенсивности тензора деформаций p в плоскости XOY при $z=0,3, t=0,07 (p > p^*)$

а) Явная схема



б) Неявная схема

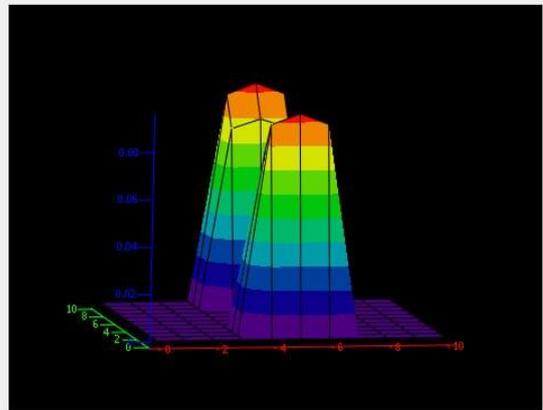
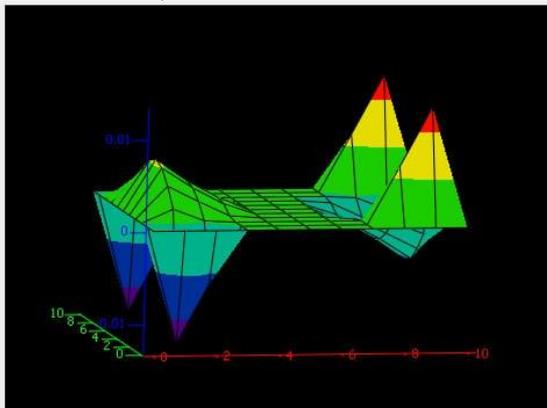


Рисунок 2. Зона пластичности по интенсивности тензора деформаций r в плоскости XOY при $z=0,7, t=0,07 (r > r^*)$

а) Явная схема



б) Неявная схема

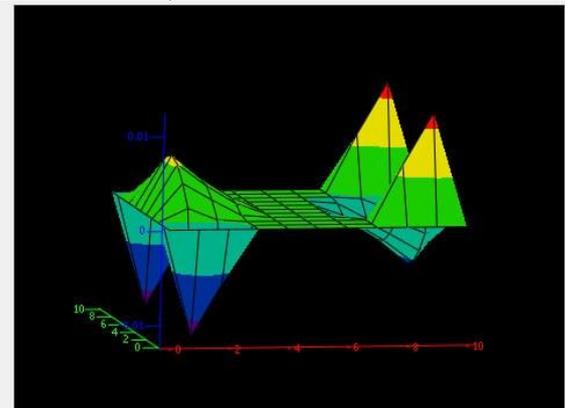


Рисунок 3. Значения нелинейной части f_1 в плоскости XOY при $z=0,2, t=0,07$

Так как граничные условия и температурное поле заданы симметрично, численные результаты, приведённые в таблицах и рисунках, полученные выше указанными конечно-разностными методами, распределены симметрично в рассматриваемом ортотропном параллелепипеде, кроме этого явно видно влияние анизотропии на численные результаты, что обеспечивает справедливость численных результатов и предложенных численных методов решения нелинейных задач для ортотропных тел.

Заключение. Сформулирована связанная динамическая термо-упруго-пластическая краевая задача для ортотропного параллелепипеда на основе деформационной теории Ильюшина.

Разработаны численные модели связанной динамической термо-упруго-пластической краевой задачи для ортотропного параллелепипеда на основе явных и неявных конечно-разностных уравнений. Численно решена трёхмерная связанная динамическая задача термопластичности для ортотропного параллелепипеда, закреплённого на границе под воздействием температурного поля.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
2. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагрузениях. - К.: Наук. думка, 1970. – 287с.
3. Babadjanov M.R., Kalandarov A.A., Adambaev U.E. Numerical modeling of the process of thermoplastic deformation of transversally isotropic parallelepipeds. // *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)* ISSN: 2278-3075, Volume-9 Issue-6, April 2020, DOI: 10.35940/ijitee.F4314.049620?, pp. 1484-1491.
4. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
5. Халджигитов А.А., Худазаров Р.С., Сагдуллаева Д. А. Теории пластичности и термопластичности анизотропных тел. – Ташкент, «Фан ва технология», 2015, 320 с.

TESTING SPACETIME AROUND BLACK HOLES IN DARK MATTER HALO BY QUASIPERIODIC OSCILLATIONS

Kholdorov Obidjon Narzulla ugli,
PhD student of Samarkand State University
obidxoldorov@gmail.com

Abstract. *In the present work, we plan to investigate spacetime around black holes in two cold and scalar fields of dark matter halo models, using data from quasiperiodic oscillations. To do this, we first derive the equation of equatorial motion of test particles around the BH and calculate fundamental frequencies with applications to quasiperiodic oscillations models such as relativistic precession, warped disk, and epicyclic resonants models.*

Keywords: *fundamental frequencies, quasiperiodic oscillations, scalar field, test particles.*

KVAZIDAVRIY TEBRANISHLAR YORDAMIDA QORONG‘U MATERIYA HOLATI SHAROITIDA QORA TUYNUKLAR ATROFIDAGI FAZOVIIY VAQTNI SINOVDAN O‘TKAZISH

Annotatsiya. *Ushbu ishda biz qora tuynuklar atrofidagi fazoviy-vaqtni, sovuq va skalyar maydonli qorong‘u materiya halolarining ikkita modelida o‘rganishni rejalashtirmoqdamiz, bunda kvaziperiodik tebranishlardan olingan ma‘lumotlardan foydalanamiz. Buning uchun avvalo qora tuynuk atrofida sinov zarrachalarining ekvatorial harakat tenglamasini chiqaramiz va kvaziperiodik tebranish modellariga, masalan, nisbiy pretsessiya, egilgan disk va epitsiklik rezonans modellariga qo‘llaniladigan asosiy chastotalarni hisoblaymiz.*

Kalit so‘zlar: *asosiy chastotalar, kvazidavriy tebranishlar, skalyar maydon, sinov zarrachalari.*

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ВОКРУГ ЧЁРНЫХ ДЫР В ГАЛО ТЁМНОЙ МАТЕРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Аннотация. *В данной работе мы планируем исследовать пространство-время вокруг чёрных дыр в двух моделях гало тёмной материи с холодными и скалярными полями, используя данные о квазипериодических колебаниях. Для этого мы сначала выводим уравнение экваториального движения пробных частиц вокруг чёрной дыры и вычисляем основные частоты с применением к моделям квазипериодических колебаний, таким как релятивистская прецессия, изогнутый диск и модели эцицентрического резонанса.*

Ключевые слова: *основные частоты, квазипериодические колебания, скалярное поле, пробные частицы.*

Introduction. The study of spacetime around black holes provides crucial insights into the fundamental nature of gravity and its interplay with dark matter, one of the most enigmatic components of the universe. In the context of dark matter halos, understanding how black holes interact with their surrounding environment is essential for unraveling the dynamics of galaxies and the large-scale structure of the cosmos. Quasiperiodic oscillations (QPOs), observed in the X-ray emissions of accretion disks around black holes, serve as a powerful diagnostic tool to probe the geometry and properties of spacetime in these extreme environments. By analyzing QPOs in the presence of cold and scalar field dark matter halo models, this study aims to investigate the motion of test particles around black holes and derive fundamental frequencies associated with relativistic precession, warped disk, and epicyclic resonance models. Through this approach, the research seeks to bridge the gap between theoretical models and observational data, advancing our understanding of black hole physics and the nature of dark matter.

Basic equations. Section Black holes surrounded by dark matter halo here we use static BH solution in CDM and SFDM The geometry of the spacetime of the BH can be defined, in spherical coordinates, $(x^\alpha = \{t, r, \theta, \phi\})$ in the form:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{1}$$

where the lapse function

$$f(r) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{8\rho_c R^2 \sin(\pi r/R)}{\pi \pi r/R} \right] - \frac{2M}{r}, & \text{for SFDM} \\ \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^{-\frac{8\pi\rho_c R_s^3}{r}} - \frac{2M}{r}, & \text{for CDM} \end{cases} \quad (2)$$

where R_s is the characteristic radius, ρ is the central DM density, and R is the radius of a point where the pressure and density of DM are zero. When $\rho = 0$, the metric (1) reflects the pure Schwarzschild BH case. These DM parameters have constrained the SMBH Sgr A* in Refs.[1] as $R_s = 17.46 \text{ kpc}$ & $\rho_c \simeq 2 \cdot 10^7 M_\odot/\text{kpc}^3$ and $R = 15.7 \text{ kpc}$ & $\rho_c \simeq 3.43 \cdot 10^7 M_\odot/\text{kpc}^3$ for CDM and SFDM models, respectively. Where $k = \frac{8\rho_c R^2}{\pi}$, $n = \frac{1}{R}$

$$f(r) = \begin{cases} \exp \left[-k \frac{\sin(n\pi r)}{n\pi r} \right] - \frac{2M}{r}, & \text{for SFDM} \\ (1 + nr)^{\frac{k\pi^2}{nr}} - \frac{2M}{r}, & \text{for CDM} \end{cases} \quad (3)$$

where $k, l, n, m \in (0,1)$, SFDM: $m = 1, k = 0.1, l = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ va
 $k = 0.5, l = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$, CDM: $m = 1, k = 0.1, n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$ va
 $k = 0.5, n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9$

Dynamics of test particles. Here, we provide a brief overview of the studies regarding the motion of electrically neutral test particles around static BHs using the following Lagrangian:

$$L_p = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4)$$

with the constants of the motion

$$g_{tt} \dot{t} = -\mathcal{E}, g_{\phi\phi} \dot{\phi} = \mathcal{L} \quad (5)$$

where $\mathcal{E} = E/m$ and $\mathcal{L} = L/m$ represent specific energy and angular momentum of the particle, respectively. The equations of motion for the particles are governed using so-called normalization condition:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \epsilon \quad (6)$$

with ϵ taking value 0 for massless particles and -1 for massive ones.

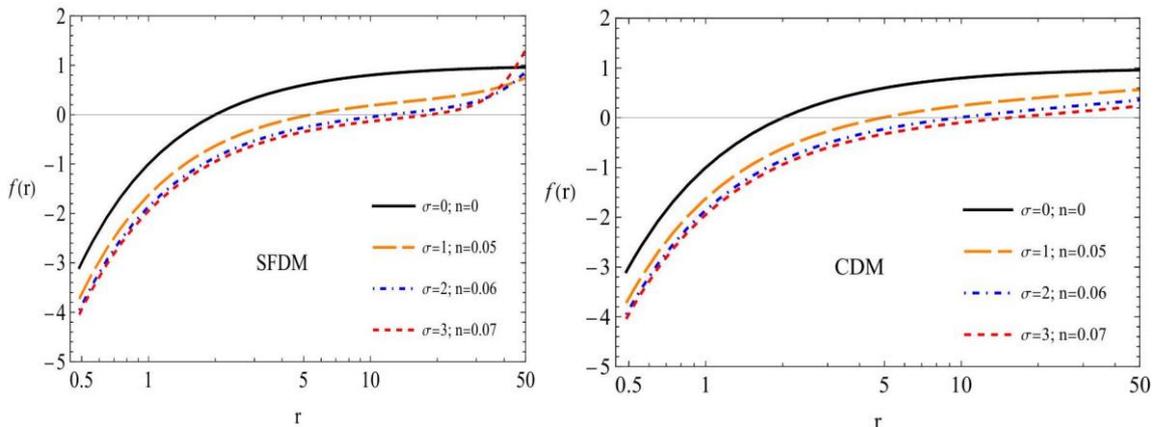


Figure 1. Graph describing the behavior of the function $f(r)$, at different discrete values of the parameters σ and n .

For test particles, the equations of motion for time-like geodesics can be obtained using the condition given in Eq. (6), together with Eq. (5) in the following form.

PHYSICS

$$\dot{r}^2 = \mathcal{E}^2 + g_{tt} \left(1 + \frac{\mathcal{K}}{r^2} \right) \quad (7)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{g_{\theta\theta}^2} \left(\mathcal{K} - \frac{\mathcal{L}^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (8)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\mathcal{L}}{g_{\phi\phi}} \quad (9)$$

$$\dot{t} = -\frac{\mathcal{E}}{g_{tt}} \quad (10)$$

where \mathcal{K} is the constant for the angular motion also known as the Carter constant, and corresponds to the total angular momentum of the test particle.

Here, we assume that the motion of the particles occur in the equatorial plane where $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ and the Carter constant is $\mathcal{K} = \mathcal{L}^2$, the equation for the radial motion of the particles becomes

$$\dot{r}^2 = \mathcal{E}^2 - V_{\text{eff}}, \quad (11)$$

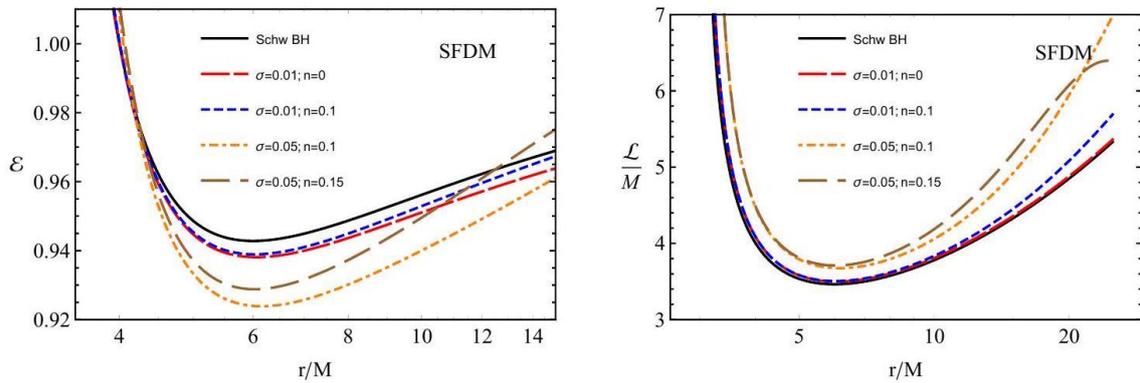


Figure 2. L and E vs r.

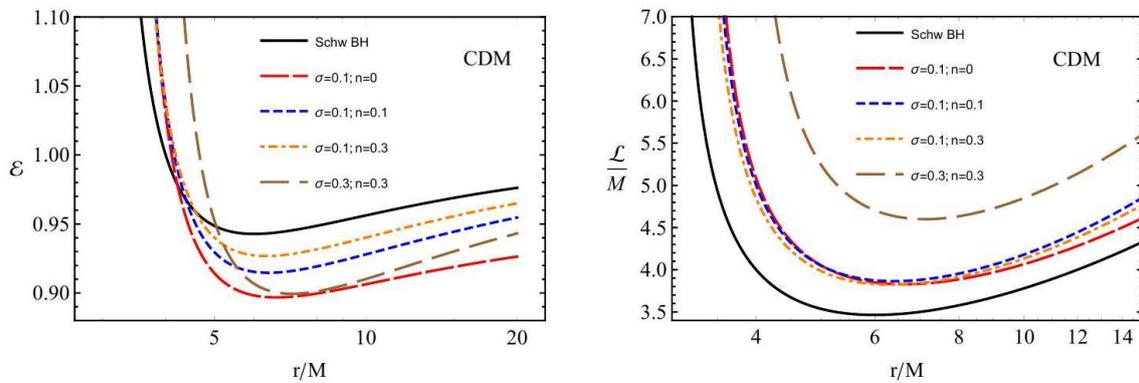


Figure 3. L and E vs r.

where the effective potential for the radial motion of test particles reads

$$V_{\text{eff}} = f(r) \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} \right). \quad (12)$$

$\mathcal{L}^2 = 20$, In order to compare effects of charges of above-mentioned charged BHs, we consider extremely charged BHs. To study circular motion of the particles, we use the following conditions:

$$V_{\text{eff}} = \mathcal{E}, V'_{\text{eff}} = 0 \quad (13)$$

In order to find the values of angular momentum and energy of particles in circular orbits, we used the conditions given in Eq.13, to obtain:

$$\mathcal{L}^2 = \frac{r^3 f'(r)}{2f(r) - r f'(r)}, \mathcal{E}^2 = \frac{2f(r)^2}{2f(r) - r f'(r)}. \quad (14)$$

The stability condition of circular orbits of test particles around a central point-like gravitating compact objects is described by the equation $\partial_{rr} V_{\text{eff}} = 0$. In most cases, this condition is applied together

with the circularity condition given in Eq.(13), called equation for ISCO. In the light of this condition, the equation for effective potential in Eq.(12) becomes,

$$f'(r) \left(2r \frac{f'(r)}{f(r)} - 3 \right) - r f''(r) = 0 \quad (15)$$

Use Contour Plot

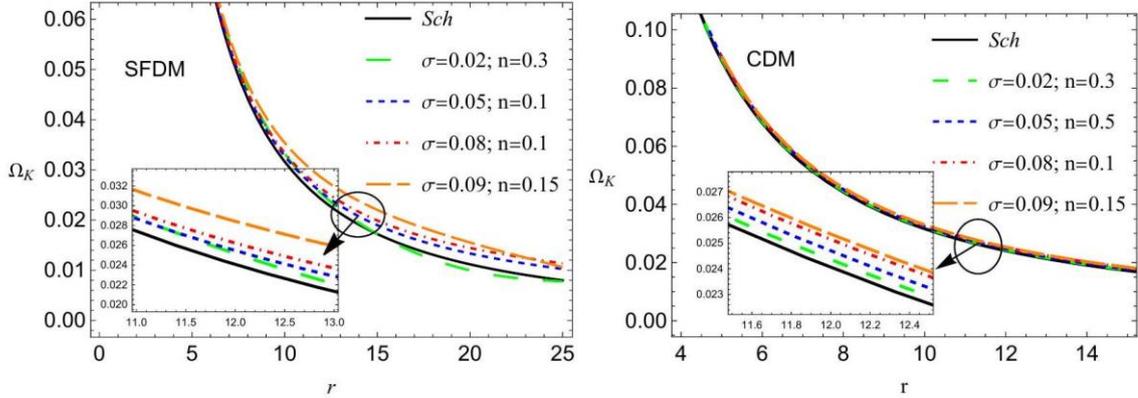


Figure 4. Angular velocity of particles in Keplerian orbits for various σ and n parameters

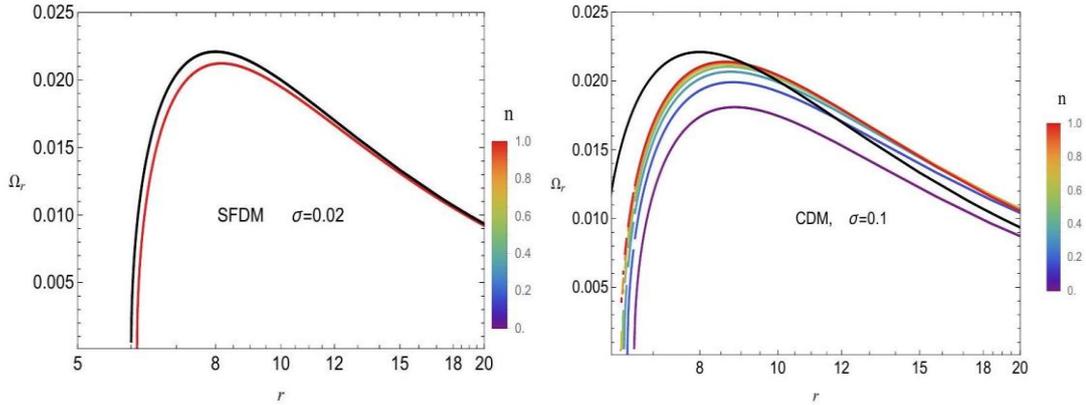


Figure 5. Angular velocity of particles in Keplerian orbits for various σ and n parameters

Keplerian frequency

The angular momentum of test particles in circular orbits (so-called) the Keplerian orbits $\Omega_K = \frac{d\phi}{dt}$ around static BHs takes the following form;

$$\Omega_K^2 = \frac{f'(r)}{2r} \quad (16)$$

in order to estimate the value of the fundamental frequencies, we express them in the unit of Hz as,

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{c^3}{GM} \Omega, [\text{Hz}]. \quad (17)$$

Note that the values of the speed of light in vacuum and the gravitational constant are $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec and $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m³/(kg² · sec), respectively.

subsection Harmonic oscillations The test particles orbiting in the equatorial plane around BHs in stable orbits oscillate along radial, angular and vertical axes, because of the small displacement from their stable orbits as $r_0 + \delta r$ and $\pi/2 + \delta\theta$. The radial and vertical frequencies can be calculated by the following harmonic oscillator equations.

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \Omega_r^2 \delta r = 0, \frac{d^2 \delta \theta}{dt^2} + \Omega_\theta^2 \delta \theta = 0 \quad (18)$$

where

$$\Omega_r^2 = -\frac{1}{2g_{rr}(u^t)^2} \partial_r^2 V_{\text{eff}}(r, \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} \quad (19)$$

$$\Omega_\theta^2 = -\frac{1}{2g_{\theta\theta}(u^t)^2} \partial_\theta^2 V_{\text{eff}}(r, \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} \quad (20)$$

are the radial and vertical angular frequencies, respectively. Finally, general expressions for these frequencies in the spacetime of static BHs can be calculated as follows

$$\Omega_r^2 = \Omega_K^2 \left[f(r) \left(3 + \frac{rf''(r)}{f'(r)} \right) - 2rf'(r) \right], \quad (21)$$

$$\Omega_\theta = \Omega_K = \Omega_\phi \quad (22)$$

where Ω_ϕ is the angular velocity of the particle measured by an observer at infinity.

$$\Omega_r^2 = \sin^2 \theta \left(\frac{(h(r) + 1)(a^2 \sin^2 \theta (2Mr + \Sigma))}{\Sigma} + \Sigma \right) \quad (23)$$

Conclusion. Investigating spacetime around black holes within dark matter halos using quasiperiodic oscillations is a significant topic in cosmology and astrophysics. This study focuses on deriving the equations of motion for test particles around black holes and calculating fundamental frequencies to analyze the applicability of quasiperiodic oscillation models, such as relativistic precession, warped disk, and epicyclic resonance. The findings contribute to a deeper understanding of the interactions between black holes and dark matter halos, providing a theoretical framework for astrophysical observations. This approach offers new insights into determining the geometry of spacetime around black holes and exploring the properties of dark matter.

REFERENCES:

1. K. Akiyama, *Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *ApJ* 875 (2019) L1.
2. B. J. Kavanagh, *Detecting dark matter around black holes with gravitational waves: Effects of dark-matter dynamics on the gravitational waveform*, *Phys. Rev. D* 102 (2020) 083006.
3. B. Narzilloev, *Dynamics of test particles around a Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter*, *Physical Review D* 102 (2020) 104062.
4. Z. Xu, *Deformed black hole immersed in dark matter spike*, *J. Cosmol. Astropart. Phys* 2021 (2021) 007.
5. P. Gondolo, *Dark Matter Annihilation at the Galactic Center*, *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999) 1719–1722.
6. R. C. Pantig, *Rotating dirty black hole and its shadow*, *Chinese Journal of Physics* 68 (2020) 236–257.
7. R. Konoplya, *Shadow of a black hole surrounded by dark matter*, *Physics Letters B* 795 (2019) 1–6.
8. X. Hou, *Rotating black hole shadow in perfect fluid dark matter*, *JCAP* 2018 (2018) 040.
9. W. de Blok, *The Core-Cusp Problem*, *Advances in Astronomy* 2010 (2010) 789293.
10. Z. Xu, *Black hole space-time in dark matter halo*, *JCAP* 2018 (2018) 038.
11. T.-C. Ma, H.-X. Zhang, P.-Z. He, H.-R. Zhang, Y. Chen, J.-B. Deng, *Shadow cast by a rotating and nonlinear magnetic-charged black hole in perfect fluid dark matter*, *Modern Physics Letters A* 36 (2021) 2150112.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ ВОЗНИКАЮЩЕЙ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Имомназаров Холматжон Худойназарович,

*Институт вычислительной математики и
математической геофизики Сибирского отделения РАН
imom@omzg.sscs.ru*

Давлатов Жасурбек Эшкүзиевич,

*Белорусско-Узбекский совместный межотраслевой
институт практико-технических квалификаций
jasurbek.davlatov@gmail.com*

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы квазилинейных уравнений, возникающая в двухскоростной магнитной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Хопфа. Используя явную разностную схему первого порядка, численно решена периодическая задача для одномерной системы квазилинейных уравнений типа Хопфа.

Ключевые слова: двухскоростная магнитная гидродинамика, система типа Хопфа, метод слабой аппроксимации, электрическое поле, разностная схема.

MODELING NONLINEAR WAVES IN AN EMERGING COLD PLASMA MODEL

Abstract. The Cauchy problem for a one-dimensional system of quasilinear equations arising in two-velocity magnetohydrodynamics is considered. Using a weak approximation method, the existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem for a one-dimensional Hopf-type system is proven. Using an explicit first-order difference scheme, a periodic problem for a one-dimensional system of quasilinear Hopf-type equations is numerically solved.

Keywords: Two-speed magnetohydrodynamics, Hopf-type system, weak approximation method, electric field, difference scheme.

RIVOJLANAYOTGAN SOVUQ PLAZMA MODELIDA CHIZIQLI BO'LMAGAN TO'LQINLARNI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. Ikki tezlikli magnit gidrodinamikada yuzaga keladigan bir o'lchovli kvaziziqli tenglamalar tizimi uchun Koshi muammosi ko'rib chiqildi. Kuchsiz yaqinlashish usulidan foydalanib, bir o'lchovli Hopf tipidagi tizim uchun Koshi muammosi yechimining mavjudligi va o'ziga xosligi isbotlangan. Aniq birinchi tartibli ayirma sxemasidan foydalanib, bir o'lchovli kvaziziqli Hopf tipidagi tenglamalar tizimi uchun davriy masala sonli yechiladi.

Kalit so'zlar: ikki tezlikli magnit gidrodinamika, Hopf tipidagi tizim, zaif yaqinlashish usuli, elektr maydoni, farq sxemasi.

Введение. В последние десятилетия математики становятся всё более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с нелинейным слагаемым и с учётом кинетических параметров. Проблемы такого типа возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с малыми вязкостями), физики плазмы. Значительное количество математических постановок различных задач естествознания обладает свойством пространственной локальности, т.е. наиболее важные изменения изучаемых характеристик сосредоточены в весьма ограниченной области пространства. При этом, как правило, определяющие динамические уравнения с частными производными заданы во всём пространстве, а соответствующие им краевые условия фактически определяют асимптотику искомых решений на бесконечности. Такие задачи возникают, например, в гидродинамике [1], физике плазмы [2], лазерной физике [3] и других областях естествознания. Например, когда пространственная локальность порождается аксиальной симметрией постановки, т.е. при использовании цилиндрических координат ярко выражено убывание решений по радиальному направлению. Аналогичная ситуация возникает в задачах геофизики при изучении

околоскважинного пространства. При численном моделировании такого типа явлений, как правило, демонстрируется первостепенная значимость поведения функций на оси (например, эффекты типа самофокусировки или самоканалирования; см. [3] и цитированную там литературу). Однако для вычисления аксиальных характеристик приходится проводить расчёты «полных» задач, т.е. в достаточно большой области изменения радиальной переменной по сравнению с характерными масштабами процесса [4, 5].

Аналогия уравнению Хопфа возникает, например, при исследовании слабо-нелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссипацией энергии. Другими словами, эти члены, обеспечивают непрерывность решений и представляют диссипативные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [6].

Постановка задачи

Рассмотрим в полосе $\Gamma_{[0,T]} = [0, T] \times R^1$ задачу Коши:

$$u_t + uu_x + E = 0, \quad (1)$$

$$E_t + uE_x - u = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R^1. \quad (3)$$

$$E(0, x) = E_0(x), \quad x \in R^1. \quad (4)$$

Система (1), (2) является одномерным аналогом совмещённой математической модели для смеси холодных, идеальных электронных и ионных жидкостей с уравнениями электродинамики можно считать систему уравнений типа Хопфа, которая представляет собой систему нелинейных уравнений конвекции-диффузии, величины u и E можно рассматривать, как импульс и электрическое поле.

Полная система уравнений является одной из простейших моделей бесстолкновительной плазмы, для которой справедливо так называемое квазигидродинамическое описание и называемое в литературе просто гидродинамическим. Данное приближение часто называют *уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики «холодной» плазмы*. Оно хорошо известно и достаточно подробно описано в учебниках и монографиях по физике плазмы (см., например [7-10]).

В данной работе для доказательства существования и единственности решения задачи Коши для одномерной квазилинейной системы типа Хопфа используется метод слабой аппроксимации. В наиболее полном виде метод слабой аппроксимации для линейных уравнений исследован Г.В. Демидовым и В.А. Новиковым [11]. З.Г. Гегечкори изучал расщепление многомерных эллиптических операторов со смешанными производными на одномерные (по различным направлениям) и сходимость таких методов для параболических задач [12]. Первые результаты о сходимости метода слабой аппроксимации для нелинейных уравнений принадлежат Г.И. Марчуку и Г.В. Демидову, доказавшим сходимость метода расщепления для одной из задач краткосрочного прогноза погоды [13]. Ю.Я. Беловым и Г.В. Демидовым исследована сходимость МСА для различных вариантов расщепления квазилинейной системы уравнений типа Бюргерса в [14]. Г.В. Демидовым, В.Ф. Рапутой метод слабой аппроксимации изучался для абстрактных нелинейных операторных уравнений, частными случаями которых являются системы типа Коши-Ковалевской [15, 16] Ю.Я. Белов на основе МСА исследовал вопросы разрешимости и устойчивости стационарных решений распадающихся квазилинейных параболических систем уравнений первого порядка. Ю.Е. Бояринцевым доказаны достаточно общие теоремы сходимости МСА для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследована возможность применения метода к задачам оптимального управления [17].

Нас будет интересовать классическое решение задачи Коши для системы уравнений (1)-(4), а именно $u(t, x), E(t, x) \in C^1(\Gamma_{[0, T]})$ -- класс функций один раз непрерывно дифференцируемых по t и по x .

Рассмотрим относительно данных Коши u_0, E_0 задачи (1)-(4) предположим, что $u_0, E_0 \in C^2(R^1)$ и

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n E_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n \quad x \in R^1, \quad n = 0, 1, 2, \quad (5)$$

где c_n, \tilde{c}_n - некоторые заданные неотрицательные постоянные.

Вначале рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых начальных данных. Предположим, что $u_0, E_0 \in C^\infty(R^1)$ и

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n E_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n \quad x \in R^1, \quad n = 0, 1, \dots, k, \dots (6)$$

Слабо аппроксимируем задачу (1)-(4) задачей

$$u_t^\tau + 2u^\tau u_x^\tau = 0, \quad E_t^\tau + 2u^\tau E_x^\tau = 0, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, \quad (7)$$

$$u_t^\tau = -2E^\tau, \quad E_t^\tau = 2u^\tau \quad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (8)$$

$$u^\tau(0, x) = u_0(x), \quad E^\tau(0, x) = E_0(x) \quad (9)$$

где $\tau N = t^*$, $N > 1$ — целое, $n = 0, 1, \dots, N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (13) (см. ниже).

Замечание 1. При построении решения задачи (6)–(9) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения переноса:

$$U_t + 2UU_x = 0, \quad (10)$$

а на вторых дробных шагах – задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой имеет вид:

$$u^\tau(t, x) = u_0(x) \cos 2t - E_0(x) \sin 2t,$$

$$E^\tau(t, x) = u_0(x) \sin 2t + E_0(x) \cos 2t$$

Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (8) с начальными данными

$$U|_{t=t_0} = U_0(x), \quad (11)$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место "градиентная катастрофа", то есть существовать $t_1 > 0$ такое, что классическое решение U этой задачи существует в полосе $\Gamma_{[0, t_1]}$, само остаётся в этой полосе ограниченным, но производная U_x в окрестности некоторой точки (t_1, x^0) становится неограниченной: $U_x(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_1, x \rightarrow x^0$ [18].

Общее решение уравнения (3.5.7) электрического поля имеет вид:

$$E^\tau(t, \xi) = E^\tau(t, \int u^\tau dt),$$

а из условия

$$x - \int u^\tau dt = const$$

следует

$$\frac{dx}{dt} = u^\tau(t, x) \quad [19].$$

Нетрудно показать, что если

$$\left| \frac{dU_0(x)}{dx} \right| < c_1, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (12)$$

то классическое решение задачи (10), (11) существует в полосе $\Gamma_{[0, t^*]}$, ограничено и

$$|U_x(t, x)| \leq \frac{c_1}{1 - 2c_1 t}, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, t^*]}, \quad (13)$$

где t^* удовлетворяет неравенству:

$$1 - 2c_1 t^* > 0,$$

Пусть выполнены соотношения (6), и постоянные c_1, \tilde{c}_1 и t^* удовлетворяют условиям

$$1 - c_1 t^* > 0, \quad 1 - \tilde{c}_1 t^* > 0 \quad (14)$$

тогда решение u^τ и E^τ в полосе $\Gamma_{[0,t^*]}$ существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t, x .

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение u^τ и E^τ задачи (7), (9) ограничены независимо от величины независимо от величины τ :

$$|u^\tau(t, x)| \leq c_0, \quad |E^\tau(t, x)| \leq \tilde{c}_0 \quad (15)$$

Повторяя рассуждение из [14], можно показать ограниченность частных производных решений u^τ и E^τ по x любого порядка равномерно по τ :

$$\left| \frac{\partial^k u^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k E^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (16)$$

где C_k, \tilde{C}_k -- некоторые положительные постоянные, такие что $C_0 = c_0, \tilde{C}_0 = \tilde{c}_0$.

Из неравенств (15), (16) и уравнений (7), (8) следуют равномерные по τ оценки:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq s_k, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} E^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq \tilde{s}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Из этих оценок следует, что u^τ, E^τ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Gamma_{[0,t^*]}$. На основании теоремы Арцела диагональным

способом можно выбрать подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}, \{E^{\tau_k}\}$ последовательностей $\{u^\tau\}, \{E^\tau\}$, сходящуюся в $\Gamma_{[0,t^*]}$ к функциям u и E соответственно вместе со всеми производными по x , равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Gamma_{[0,t^*]}$, вследствие чего

функции u и E имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u(0, x) = u_0(x), \quad E(0, x) = E_0(x), \quad (18)$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k E(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0,t^*]}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций $\{u^\tau\}, \{E^\tau\}$ при $\tau \rightarrow 0$, сходятся равномерно в $\Gamma_{[0,t^*]}$ к u

и E соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $u_0, E_0 \in C^2(R^1)$ доказывается с помощью средних функций [20].

Численное решение периодической задачи для системы типа Хопфа. Рассмотрим распространение нелинейных волн в двухжидкостной среде. В этом случае такая задача описывается системой (1), (2) и следующими начальными и краевыми условиями

$$u(0, x) = e^{-x^2}, \quad E(0, x) = 0.1 \cdot e^{-x^2}, \quad (20)$$

$$u(t, -4) = u(t, 4), \quad E(t, -4) = E(t, 4). \quad (21)$$

Для решения данной задачи используем явную разностную схему с первым порядком аппроксимации по времени и по пространству

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = -E_j^n, \quad (22)$$

$$\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{E_j^n - E_{j-1}^n}{h} = u_j^n. \quad (23)$$

В формулах (22) и (23) τ, h - соответствующие шаги дискретизации по времени и пространству.

Численные эксперименты. В данном разделе представлены численные результаты моделирования распространения нелинейных волн для тестовой модели среды (1), (2).

При $n = 0$ формулы (20) будут иметь следующий вид:

$$u_j^0 = e^{-(x_j)^2}, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (24)$$

$$E_j^0 = 0.1 \cdot e^{-(x_j)^2}, \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (25)$$

Здесь верхний индекс “0” представляет нулевой слой по времени t . Значения левых и правых сторон выражений определяется из краевых условий (20).

$$u_{-4}^{n+1} = u_{-4}^n, \quad u_4^{n+1} = u_4^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$E_{-4}^{n+1} = E_{-4}^n, \quad E_4^{n+1} = E_4^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Численный расчёт вёлся по схеме (22), (23). На рисунках 1 и 2 представлены результаты численного моделирования волновых $u(t, x)$ и электрических $E(t, x)$ полей, соответственно.

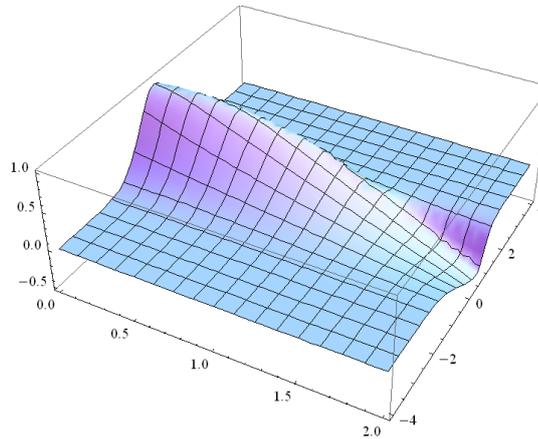


Рисунок 1. График для $u(t, x)$

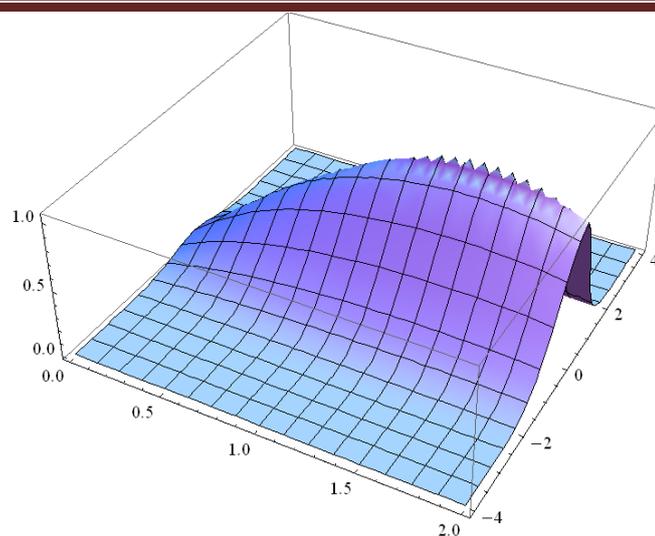


Рисунок 2. График для $E(t, x)$

Заключение. Таким образом, исследована задача Коши для одномерной системы квазилинейных уравнений, возникающая в двухскоростной магнитной гидродинамике. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Хопфа. Проведено численное моделирование распространения нелинейных волн в двухфазной периодической среде.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1986.
2. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
3. Боровский А.В., Галкин А.Л. Лазерная физика. М.: ИЗДАТ, 1996.4.
4. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012, 212 с.
5. Имомназаров Х.Х., Эркинова Д.А. Аксиальное решение системы типа Хопфа // Тезисы междунар. научно-практической конференции "Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий". - Нукус, 2-3 мая 2023, т. 1, с. 267-269.
6. Куликовский А.Г., Свешников Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений, Москва -2010, 122с.
7. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы Изд. 2, перераб. и доп. 1988. 424 с.
8. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.
9. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов / В. П. Силин. М.: Наука, 1971.
10. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазматипных сред. М.: Торговый дом "ЛИБРОКОМ", 2012.
11. Демидов Г.В., Новиков В. А. О сходимости метода слабой аппроксимации в рефлексивном банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения, 1975. Т. 9. № 1. С. 25-30.
12. Гегечкори З.Г., Демидов Г.В. О сходимости метода слабой аппроксимации // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 2. С. 264-266.
13. Демидов Г.В., Марчук Г. И. Теорема о существовании решения задачи краткосрочного прогноза погоды // ДАН СССР, 1966. Т. 170. № 5. С. 1006-1009.
14. Белов Ю.Я., Демидов Г.В. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1970. Т. 1. № 2. С. 3-16.
15. Демидов Г.В. Некоторые приложения обобщенной теоремы Ковалевской // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 1. № 2. С. 10—32.
16. Рапута В.Ф. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши в шкале банаховых пространств // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1975. Т. 6(1). С. 93-96.

PHYSICS

17. Бояринцев Ю. Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* — Новосибирск: Наука, 1980.
18. Рождественский Б.М., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений* - М.: Наука, 1978. - 668 с.
19. Зельдович Я.Б. *Горение, нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие, М.: Наука, с. 30-41.*
20. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* - Новосибирск: СО АН СССР, 1962. -255 с.

GRAFENDA ELEKTROSTATIK POTENSIALLAR ASIMMETRIYASINING ELEKTRON TO‘LQIN PAKETLARI DINAMIKASIGA TA‘SIRI

Nosirov Mirjalol Uljaboy o‘g‘li,
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi,
Materialshunoslik instituti kichik ilmiy xodimi,
Toshkent kimyo texnologiya instituti
Yangiyer filiali assistent o‘qituvchisi
Sulaymonov Miro‘tkir Mirtemirovich,
Toshkent davlat transport
universiteti assistent o‘qituvchisi
Butanov Xakimjan Turamuratovich,
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi,
Materialshunoslik instituti ilmiy kotibi, PhD
Nurmetov Jasur Rahimboy o‘g‘li,
Abu Rayhon Beruniy nomidagi
Urganch davlat universiteti talabasi
Bobojonov Komiljon Abdusharipovich,
Abu Rayhon Beruniy nomidagi
Urganch davlat universiteti dotsenti, PhD
Raximov Xamdani Yuldashevich,
O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi,
Materialshunoslik instituti katta ilmiy xodimi, DSc

Annotatsiya. Ushbu ishda grafen monoqatlamida asimmetrik joylashgan potensial to‘siqlar va o‘ralar mavjud bo‘lgan muhitda elektron to‘lqin paketining dinamikasi tadqiq qilindi. Hisoblashlar radiusi 7 nm bo‘lgan potensial sochuvchilar hamda o‘lchami 10 nm va energiyasi 100 meV bo‘lgan to‘lqin paketi uchun bajarildi. Vaqt bo‘yicha evolyutsiya natijalari o‘tish ehtimolligining dastlab keskin ortishini, so‘ngra esa to‘yingan qiymatga erishishini ko‘rsatdi. Potensial qiymatiga bog‘liq holda to‘siqdan o‘tish ehtimolligining to‘yingan qiymati monoton o‘zgarishi aniqlanib, minimum qiymat ma‘lum potensial qiymatlarida yuzaga kelishi ko‘rsatildi. Olingan natijalar asimmetrik potensiallar yordamida grafenda elektron transportini boshqarish va yo‘nalishga sezgir transport rejimlarini amalga oshirish mumkinligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: grafen, elektron to‘lqin paketi, asimmetrik potensiallar, o‘tish ehtimolligi, Dirak tenglamasi

ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ НА ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ГРАФЕНЕ

Аннотация. В данной работе исследована динамика электронного волнового пакета в среде с асимметрично расположенными потенциальными барьерами и ямами в монослое графена. Расчёты выполнены для потенциальных рассеивающих центров с радиусом 7 нм, а также для волнового пакета с размером 10 нм и энергией 100 мэВ. Результаты временной эволюции показывают резкое начальное увеличение вероятности прохождения, за которым следует достижение насыщенного значения. Установлено, что насыщенное значение вероятности прохождения через барьер немонотонно зависит от величины потенциального барьера, при этом минимальное значение возникает при определённых значениях потенциала. Полученные результаты демонстрируют возможность управления электронным транспортом в графене с помощью асимметричных потенциалов и реализации направленно-чувствительных транспортных режимов.

Ключевые слова: графен, электронный волновой пакет, асимметричные потенциалы, вероятность прохождения, уравнение Дирака.

EFFECT OF ELECTROSTATIC POTENTIAL ASYMMETRY ON THE DYNAMICS OF ELEKTRON WAVE PACKETS IN GRAPHENE

Abstract. In this work, the dynamics of an elektron wave packet in a graphene monolayer with asymmetrically arranged potential barriers and wells is investigated. The calculations are performed for potential scattering centers with a radius of 7 nm and for a wave packet with a spatial width of 10 nm and a central energy of 100 meV. The time evolution results reveal an initial sharp increase in the transmission probability, followed by the attainment of a saturated value. It is found that the saturated transmission probability through the barrier exhibits a nonmonotonic dependence on the potential strength, with a minimum occurring at certain potential values. The obtained results demonstrate that asymmetric potentials provide an effective way to control elektron transport in graphene and to realize direction-sensitive transport regimes.

Keywords: grapheme, elektron wave packet, asymmetric potentials, transmission probability, Dirac equation.

Kirish. Grafen bu bir atom qalinlikka ega bo'lgan ikki o'lchamli uglerod materiali bo'lib, u birinchi marta ajratib olinganidan buyon [1] o'zining noyob elektron xossalari sababli katta ilmiy qiziqish uyg'otib kelmoqda [2,3]. Dirak nuqtalari yaqinida energiya spektrining chiziqli bo'lishi grafendagi zaryad tashuvchilarning massasiz relyativistik kvazizarrachalar – Dirak fermionlari kabi harakatlanishiga olib keladi [4,5]. Natijada, grafenda yuqori harakatchanlik, noodatiy kvant transport hodisalari va an'anaviy yarimo'tkazgichlardan tubdan farq qiluvchi effektlar kuzatiladi [6,7].

Grafendagi relyativistik transportning eng muhim xususiyatlaridan biri Klein tunnellanishi bo'lib, bunda elektronlar elektrostatik potensial to'siqlardan deyarli to'liq o'tib ketishi mumkin. Ushbu hodisa fundamental ahamiyatga ega bo'lsa-da, grafen asosidagi elektron qurilmalarda zaryad tashuvchilarni lokalizatsiya qilish va oqimni boshqarish jarayonini murakkablashtiradi. So'nggi tajribalar Klein tunnellanishining kuchli burchakka bog'liqligini tasdiqladi [8], bu esa elektron dinamikasini chuqurroq tahlil qilish uchun to'lqin paketlari evolyutsiyasiga asoslangan yondashuvlarning dolzarbligini ko'rsatadi [9-11]. Shu sababli, grafenda tunnellanishni susaytirish yoki nazorat qilish nanoelektronika uchun muhim masalalardan biri hisoblanadi [12-14].

Elektron transportini boshqarishning samarali yo'llaridan biri sun'iy potensial to'siqlar yaratish hisoblanadi [15]. Oldingi ishlarda elektron to'lqin paketlarining magnit maydonlar ta'sirida [16-18] hamda turli xil sochuvchi potentsiallar orqali o'tishi [19-22] o'rganilgan. Bunda trayektoriya modellashtirish [23,24] va vaqtga bog'liq Dirak tenglamasini yechishga asoslangan hisoblash usullar [25-28] keng qo'llanilgan. Bunday potensial muhitlar grafenda lokal elektron-g'ovak sohalarini hosil qilishi mumkin [29,30]. Tasodifiy tartibsizliklar ta'siri keng tadqiq qilingan bo'lsa-da [31,32], potentsiallarning tartibli va qutblanishga bog'liq joylashuvi elektron transportiga qanday ta'sir qilishi hali yetarlicha tizimli o'rganilmagan.

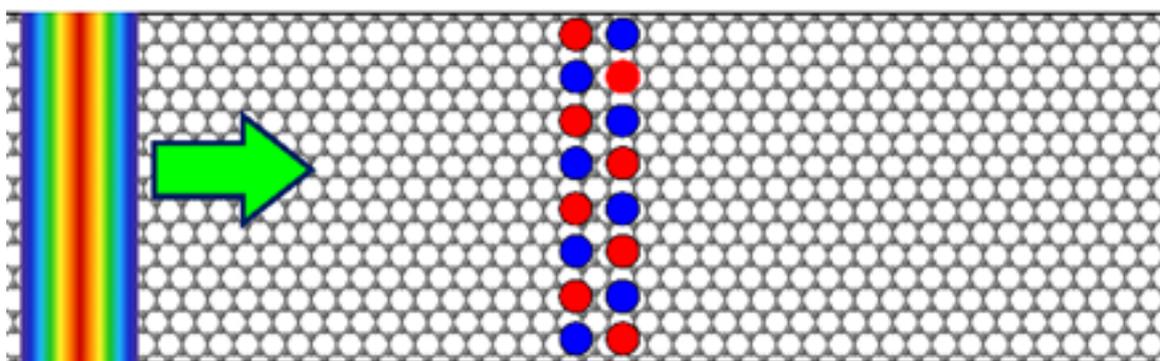
Sochuvchi to'siqlar geometriyasi orqali pseudospin va xiralikka bog'liq tunnellanishni boshqarish imkoniyati [33,34] grafen qurilmalarini loyihalashda istiqbolli yo'nalishlardan biri hisoblanadi. So'nggi yillarda grafen asosidagi nanostrukturalarni yuqori aniqlikda yaratish texnologiyalarining rivojlanishi [35-36] bunday nazariy modellarni amaliy jihatdan dolzarb qilmoqda.

Mazkur ishda grafen monoqatlamida assimetrik joylashtirilgan elektrostatik potentsiallar ta'sirida elektron to'lqin paketlarining dinamikasi o'rganiladi. Hisoblashlar Dirakning uzluksiz modeli asosida olib borilib, vaqt bo'yicha evolyutsiyasi operatorlarni ajratish usuli yordamida o'rganildi [37,38]. Potentsiallarning joylashuvi va kattaligi elektronni o'tishi ehtimoligiga qanday ta'sir qilishi tahlil qilindi. Olingan natijalar grafenda elektron transportini geometrik parametrlar orqali boshqarish imkoniyatlarini ochib beradi va kelajakdagi nanoo'lchamli elektron qurilmalarni loyihalash uchun muhim yo'riqnomalar taqdim etadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqotda qaralayotgan model tizimning sxematik tasviri 1-rasmda keltirilgan. Tizim uzunligi $L=1024\text{nm}$ va kengligi $W=128\text{ nm}$ bo'lgan grafen monoqatlamidan iborat. Grafen ichida o'lchami va moduli bir xil, biroq ishoralari turli (musbat va manfiy) bo'lgan doira shaklidagi elektrostatik potentsiallar joylashtirilgan. Ushbu potentsiallar o'zaro assimetrik tarzda joylashtirilgan sochuvchi markazlar majmuasini hosil qiladi. Xususan, birinchi (yuqori) qatorda chapdan o'ngga qarab avval potensial to'siq, so'ng potensial o'ra joylashtiriladi. Keyingi qatorda esa ushbu potensial to'siq va o'ralarning joylari almashtiriladi, ya'ni avval potensial o'ra, keyin esa potensial to'siq joylashadi va hokazo.

Qo'shni potensial markazlar orasidagi masofa har ikki x va y yo'nalishlarda $d=16\text{ nm}$ qilib tanlandi. To'lqin paketining dinamikasiga assimetrik joylashgan sochuvchi markazlar ta'sirini o'rganish maqsadida potensial to'siq va potensial o'ralarning radiusi bir silda $R=7\text{ nm}$ deb olindi. Bundan tashqari, potensial ta'sir kuchining transport xususiyatlariga ta'sirini tahlil qilish uchun potensial qiymatlari 20 meV dan 300 meV gacha bo'lgan keng oraliqda o'zgartirildi. Natijada, assimetrik potentsiallardan iborat soha orqali to'lqin

paketining o'tish ehtimolligi hamda uning to'yingan qiymatlarining potensial qiymatiga bog'liqligi o'rganildi.



1-rasm. Grafenda to'liqin paketining tarqalish sxematik tasviri

Rangli to'liqin fronti va o'q bilan ko'rsatilgan yo'nalish to'liqin paketining harakatini ifodalaydi. Qizil rangdagi doiralar elektrostatik potensial to'siqlarni, ko'k rangdagi doiralar esa potensial o'ralarni bildiradi.

Natijalar Dirak uzluksiz modelining qo'llanilishi doirasida, ya'ni Dirak nuqtasi atrofida (quyi energiya sohasi) qolishini ta'minlash uchun to'liqin paketining energiyasi va o'lchami, mos ravishda, $E = 100$ meV va $a_x = 10$ nm ga teng qilib olindi, hamda relativistik kvazizarra Gauss to'liqin paketi dep qaraldi. Xususan, Gauss to'liqin fronti olinib, u x – yo'nalishida chekli kenglikka ega va quyidagicha ifodalanadi:

$$\Psi(x, y, 0) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx - \frac{x^2}{2a_x^2}} \quad (1)$$

bu yerda N – normallashtirish doimiysi, x – yo'nalish bo'ylab to'liqin tarqalishini ta'minlash uchun pseudo-spinor $\langle\sigma_x\rangle=1$ va $\langle\sigma_y\rangle=\langle\sigma_z\rangle=0$ etib tanlangan. To'liqin paketining tarqalishi, boshlang'ich to'liqin paketiga qo'llaniladigan vaqt bo'yicha evolyutsiya operatori orqali ifodalanadi:

$$\Psi(x, y, t + \Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t}\Psi(x, y, t) \quad (2)$$

bu yerda H – grafenda quyi energiyalardagi elektron uchun Gamilton operatori bo'lib, quyidagicha ifodalanadi:

$$H = v_F (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + V(x, y) \mathbf{I}, \quad (3)$$

bu yerda v_F – **Fermi tezligi** ($v_F \approx 10^6$ m/s), $\vec{\sigma}$ Pauli matritsalarini va \mathbf{I} birlik matritsasi, $V(x, y)$ esa skalyar potensialni ifodalaydi. To'liqin funktsiyalari psevdospinorlar sifatida yoziladi $\Psi = (\Psi_A \Psi_B)^T$, bunda Ψ_A va Ψ_B mos ravishda elektronning A va B panjaralarida bo'lishi ehtimollikiga mos keladi. Qulaylik uchun operatorlarni ajratish usuli qo'llanildi [10-13]:

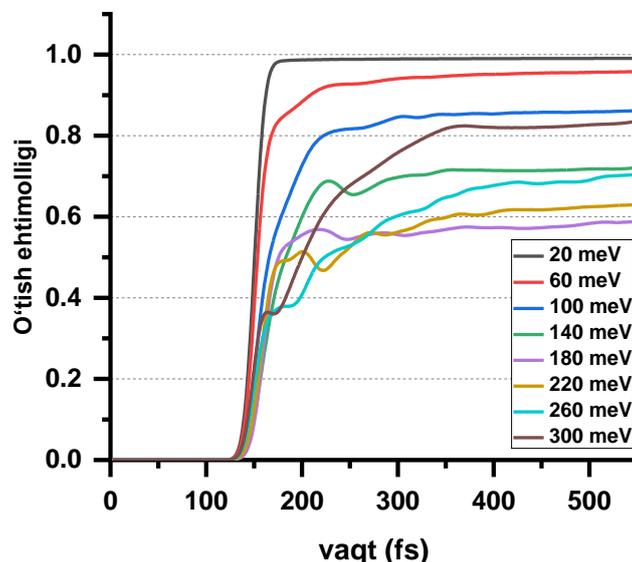
$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H\Delta t\right] = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}V(x, y)\mathbf{I}\Delta t\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}v_F\vec{p} \cdot \vec{\sigma}\Delta t\right] \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}V(x, y)\mathbf{I}\Delta t\right], \quad (4)$$

$O(\Delta t^3)$ va undan yuqori tartibdagi hadlar e'tiborga olinmadi. Ushbu yondashuv haqiqiy va teskari fazalarda samarali takrorlash imkonini beradi hamda Furrye almashtirish va $p = \hbar k$ orqali impuls operatorining aniq farqlanishiga yo'l qo'ymaydi. Bundan tashqari, Pauli matritsalarini o'z ichiga olgan matritsalarini qayta shakllantirish mumkin [28]. Hisoblashlar $\Delta t = 0,1$ fs vaqt qadami bilan amalga oshirildi va to'siq mavjud bo'lgan sohadan oldin va sohadan keyin elektronning topilish ehtimolligi hisoblandi. Davriy chegara shartlari bilan bog'liq sonli takrorlanishning oldini olish uchun 1024×128 nm bo'lgan yetarlicha katta o'lchamlar tanlandi: potensial sochuvchilar $x = 0$ atrofida 30×128 nm sohada yotadi. Bu esa o'tish va qaytish ehtimolliklarini to'g'ri baholashni ta'minlaydi, ya'ni to'siqdan o'tgan to'liqin paketi x -bo'ylab chegaraga yetib borgunga qadar uning qiymati o'zgarmay qoladi.

Natijalar va ularning muhokamasi. Hisoblash natijalari 2- va 3-raslarda keltirilgan bo'lib, 2-rasmda grafen monoqatlamida joylashgan asimmetrik potentsiallar orqali elektron to'liqin paketining vaqt bo'yicha o'tish ehtimolligi ko'rsatilgan. Hisoblashlarda barcha sochuvchi markazlarning radiusi $R=7$ nm qilib olingan. Dastlabki vaqt oralig'ida (130 fs gacha) o'tish ehtimolligi deyarli nolga teng bo'lib qoladi, bu esa to'liqin paketining hali potensial to'siq sohasiga kirib bormaganini anglatadi. Vaqt o'tishi bilan to'liqin paketi potensial sohaga yaqinlashadi va 130 fs dan oshganida o'tish ehtimollikining keskin ortishi kuzatiladi.

Ushbu bosqich to‘lqin paketining sochuvchi markazlardan tashkil topgan potensial hudud bilan faol ta’sirga kirishish jarayoniga to‘g‘ri keladi.

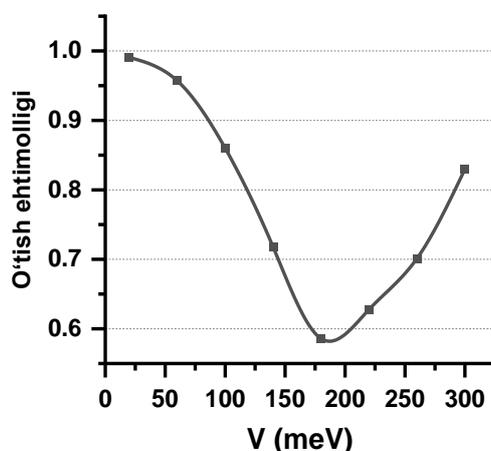
To‘lqin paketini to‘siqdan o‘tish ehtimolligi vaqt bo‘yicha monoton ravishda ortib, keyinchalik to‘yingan qiymatga erishadi. Bu holat grafenda Dirak fermionlari uchun xos bo‘lgan yuqori o‘tuvchanlik va Klein tunnellanish mexanizmining saqlanib qolishini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, to‘yingan qiymatning birdan kichik bo‘lishi asimmetrik potensialning qisman qaytish va interferensiya effektlarini keltirib chiqarayotganini bildiradi.



2-rasm. Grafen monoqatlamida asimmetrik joylashgan sochuvchi markazlar mavjud bo‘lgan holatda elektron to‘lqin paketining vaqt bo‘yicha to‘siq sohadan o‘tishi ehtimolligi grafigi.

Turli egri chiziqlar potensial balandligining $/V_0/$ turli qiymatlariga mos keladi.

To‘lqin paketining o‘lchami 10 nm bo‘lgani sababli, uning impuls fazosidagi yoyilishi nisbatan cheklangan bo‘lib, paket potensial to‘siq bilan ko‘proq lokal tarzda o‘zaro ta’sirlashadi. Radiusi 7 nm bo‘lgan sochuvchi potenciallar bilan bu o‘lchamlar taqqoslanadigan kattalikda bo‘lgani uchun, kuchli fazoviy interferensiya va ko‘p martalik sochilish hodisalari yuzaga keladi. Natijada o‘tish ehtimolligi silliq tarzda o‘sadi va barqarorlashadi. Muhim jihatlardan biri shundaki, sochuvchi markazlar asimmetrikligi sababli bu sohadan o‘tish jarayoni vaqt bo‘yicha sekinlashadi. Bu holat elektron transportining nafaqat potensial energiya qiymatiga, uning geometriyasiga ham bog‘liqligini ko‘rsatadi. Shunday qilib, 2-rasm natijalari asimmetrik potenciallar yordamida grafenda elektron to‘lqin paketining transport xususiyatlarini samarali boshqarish mumkinligini yaqqol namoyon etadi.



3-rasm. Grafenda asimmetrik potensial sochuvchi markazlar mavjud bo‘lgan holatda elektron to‘lqin paketining o‘tish ehtimolligining to‘yingan qiymatining potensial qiymatiga bog‘liqligi

Bu yerda musbat potensial qiymatlari to'siq balandligini, manfiy qiymatlar esa potensial o'ralar chuqurligini bildiradi.

3-rasmda elektron to'lqin paketining potensial mavjud sohadan o'tish ehtimolligining to'yingan qiymati potensial qiymatiga bog'liqligi tasvirlangan. Bu yerda to'yingan qiymat deganda, vaqt davomida o'tish ehtimolligini o'zgarmay qoladigan qiymat tushuniladi.

Grafikdan ko'rinib turibdiki, kichik potensial qiymatlarida ($|V_0| < 50$ meV) to'lqin paketining o'tishi ehtimolligi birga yaqin bo'lib, bu grafenda kvazizarra uchun xos bo'lgan yuqori o'tuvchanlik va deyarli to'siqsiz transport rejimini ifodalaydi. Potensial qiymati ortishi bilan asta-sekin kamayib boradi va $|V_0| \approx 170-190$ meV atrofida minimal qiymatga erishadi.

Mazkur minimum $|V_0|$ potensial qiymati bilan to'lqin paketining energiyasi ($E=100$ meV) o'rtasidagi nisbiy farqning kuchayishi bilan izohlash mumkin. Ushbu rejimda potensial to'siqning samarali balandligi oshib, qisman qaytish, interferensiya va ko'p martalik sochilish jarayonlari kuchayadi. Natijada, to'lqin paketining faqat bir qismi to'siq hududidan o'ta oladi (qolgan qismi to'siqdan orqaga qaytadi) va o'tish ehtimolligi minimal qiymatga tushadi. Qiziqarli jihati shundaki, $|V_0|$ potensial qiymatining bundan keyin ham orttirib borganda ($|V_0| > 200$ meV), o'tish ehtimolligi yana oshishni boshlaydi. Bu xatti-harakat grafenda Klein tunnellanish effektining energiyaga bog'liq holda qayta namoyon bo'lishi bilan bog'liq.

Umuman olganda, 3-rasm natijalari asimmetrik potentsiallar yordamida grafenda elektron to'lqin paketining to'siqli sohadan o'tishi ehtimolligini potensial qiymati orqali sozlash mumkinligini ko'rsatadi. Bu esa yo'nalishga sezgir elektron transport tizimlari va grafen asosidagi funksional nanostrukturalarni loyihalash uchun muhim fizik asos bo'lishi mumkin.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda grafen monoqatlamida asimmetrik potensial sochuvchi markazlar (potensial to'siqlar va potensial o'ralar) mavjud bo'lgan holatda elektron to'lqin paketining ushbu sohadan o'tish jarayoni tahlil qilindi. Radiusi 7 nm bo'lgan potensial sochuvchilar va o'lchami 10 nm bo'lgan to'lqin paketi uchun o'tish ehtimolligi batafsil o'rganildi. Olingan natijalar to'lqin paketining o'tish ehtimolligining asimmetrik muhit potensialining qiymatiga nomonoton bog'liqligini, shuningdek, asimmetriya tufayli interferensiya va qisman qaytish effektlarining muhim rol o'ynashini ko'rsatdi.

ADABIYOTLAR:

1. K. S. Novoselov, et al., *Science* 306, 666 (2004).
2. A. K. Geim and K. S. Novoselov, *Nat. Mater.* 6, 183 (2007).
3. A. K. Geim, *Science* 324, 1530 (2009).
4. A. H. Castro Neto, et al., *Rev. Mod. Phys.* 81, 109 (2009).
5. K. S. Novoselov, et al., *Nature* 490, 192 (2012).
6. S. Wang, et al. *Adv. Phys. X* 2, 518 (2017).
7. R. Zivieri, S. Lumetti, and J. Létang, *Materials* 16, 7579 (2023).
8. Z. Zhang, et al., *Phys. Rev. Lett.* 129, 233901 (2022).
9. G. Sundaram, and Q. Niu, *Phys. Rev. B* 59, 14915 (1999).
10. M.F. Lapa, and T.L. Hughes, *Phys. Rev. B* 99, 121111(R) (2019).
11. Y. Ren, and M.E. Sánchez Barrero, *arXiv preprint, arXiv:2509.00166* (2025).
12. J.D. Walls and D. Hadad, *Sci. Rep.* 5, 8435 (2015).
13. M. E. Akramov, et al., *Phys. Scr.* 100, 045209 (2025).
14. Y. Tan, et al., *Sci. Rep.* 7, 9714 (2017).
15. Q.-D. Jiang, et al., *Phys. Rev. B* 93, 195165 (2016).
16. E. Romera and F. de los Santos, *Phys. Rev. B* 80, 165416 (2009).
17. Kh. Rakhimov, et al., *J. Phys.: Condens. Matter* 23, 275801 (2011).
18. A. Chaves, et al., *Phys. Rev. B* 82, 205430 (2010).
19. S. Palpacelli, et al., *Int. J. Mod. Phys. C* 23, 1250080 (2012).
20. R. Egger, et al. (eds.), *Low-Dimensional Functional Materials*, (Springer, 2013).
21. M. Suleimanov, et al., *Physica B* 714, 417484 (2025).
22. Kh. Rakhimov, et al., *J. Appl. Phys.* 137, 144302 (2025).
23. E. Paredes-Rocha, et al., *Phys. Rev. B* 103, 045404 (2021).
24. Sh. Chen, et al., *Science*, 353, 1522 (2016).
25. J. W. Braun, Q. Su, and R. Grobe, *Phys. Rev. A* 59, 604 (1999).
26. F. Fillion-Gourdeau, et al., *Comput. Phys. Commun.* 183, 1403 (2012).
27. M. E. Akramov, et al., *Phys. Scr.* 98, 115238 (2023).
28. M. E. Akramov, et al., *Phys. Lett. A* 459, 128611 (2023).

PHYSICS

29. J. Martin, et al., *Nat. Phys.*, 4, 144 (2008).
30. Y. Zhang, et al., *Nat. Phys* 5, 722 (2009).
31. E.R. Mucciolo and C.H. Lewenkopf, *J. Phys.: Condens. Matter* 22, 273201 (2010).
32. Pei-Liang Zhao, et al., *Phys. Rev. B* 92, 045437 (2015).
33. P. Rickhaus, et al., *Appl. Phys. Lett.* 107, 251901 (2015).
34. Jian-Long Liu, Wei-Min Ye & Shuang Zhang, *Light Sci. Appl.*, 5, e16094 (2016)
35. Chen-Di Han, Hong-Ya Xu, and Ying-Cheng Lai, *Phys. Rev. Research* 2, 033406 (2020)
36. V. Kammarchedu, et al., *Nanoscale*, 16, 12857 (2024).
37. A. Chaves, et al., *Commun. Comput. Phys.* 17, 850 (2015).
38. M.H. Degani and J.P. Leburton, *Phys. Rev. B* 44, 10901 (1991).

ZARAFSHON VOHASI SUV VA TUPROQLARINING XAVFSIZLIK MASALALARI VA RADIOEKOLOGIK MONITORINGI

Fayzullayeva Mukarram Lutfullo qizi,
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Muhandislik fizikasi instituti Yadro fizikasi va astronomiya kafedrası tadqiqotchisi
mukarramfatzullayeva@gmail.com

Eshbo'riyev Rashid,
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Muhandislik fizikasi instituti Yadro fizikasi va astronomiya kafedrası professori
eshburiyev0082@gmail.com

Annотatsiya. Mazkur maqolada Zarafshon vohasining tuproq–suv tizimining radioekologik holati tadqiq etilib, tabiiy va antropogen manbalar ta'sirida yuzaga keluvchi radiatsion xavfsizlik muammolari ilmiy jihatdan tahlil qilingan. Tadqiqot jarayonida tuproq va suv namunalari fizik-kimyoviy hamda gamma-spektrometrik usullar asosida o'rganilib, ulardagi asosiy tabiiy (^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) va antropogen (^{137}Cs) radionuklidlarning faollik konsentratsiyalari, fazoviy taqsimlanishi, migratsiya mexanizmlari va biokumulyatsiya jarayonlari aniqlangan.

Radionuklidlarning atrof-muhit komponentlarida to'planishi natijasida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan radiatsion xavflar UNSCEAR, ICRP va WHO tavsiyalariga muvofiq miqdoriy baholangan. Olingan natijalar asosida Zarafshon vohasida radioekologik monitoring tizimini takomillashtirish va radiatsion xavfsizlikni kuchaytirishga qaratilgan ilmiy-amaliy tavsiyalar ishlab chiqilgan.

Kalit so'zlar: Zarafshon vohasi, radioekologik monitoring, tuproq–suv tizimi, radionuklidlar, gamma-spektrometriya, effektiv doza, biokumulyatsiya, radiatsion xavfsizlik.

ПРОБЛЕМЫ БЕЗОПАСНОСТИ ВОДНЫХ И ПОЧВЕННЫХ РЕСУРСОВ ЗАРАФШАНСКОГО ОАЗИСА И РАДИОЭКОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ

Аннотация. В данной статье исследуется радиоэкологическое состояние почвенно-водной системы Зарафшанской долины, и проводится научный анализ проблем радиационной безопасности, формирующихся под воздействием природных и антропогенных источников. В ходе исследования пробы почвы и воды были изучены с применением физико-химических и гамма-спектрометрических методов, что позволило определить концентрации активности, пространственное распределение, механизмы миграции и процессы биоаккумуляции основных природных (^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) и антропогенного (^{137}Cs) радионуклидов.

Потенциальные радиационные риски, обусловленные накоплением радионуклидов в компонентах окружающей среды, были количественно оценены в соответствии с рекомендациями UNSCEAR, ICRP и Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ). На основе полученных результатов разработаны научно-практические рекомендации, направленные на совершенствование системы радиоэкологического мониторинга и повышение уровня радиационной безопасности в Зарафшанской долине.

Ключевые слова: Зарафшанская долина, радиоэкологический мониторинг, почвенно-водная система, радионуклиды, гамма-спектрометрия, эффективная доза, биоаккумуляция, радиационная безопасность.

RADIOECOLOGICAL MONITORING AND SAFETY ISSUES OF THE SOIL-WATER SYSTEM OF THE ZARAFSHAN OASIS

Abstract. This article investigates the radioecological condition of the soil–water system of the Zarafshan Valley and provides a scientific analysis of radiation safety issues arising under the influence of natural and anthropogenic sources. Within the framework of the study, soil and water samples were analyzed using physicochemical and gamma-spectrometric methods to determine the activity concentrations, spatial distribution, migration mechanisms, and bioaccumulation processes of the principal natural radionuclides (^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) and the anthropogenic radionuclide (^{137}Cs).

Potential radiological risks associated with the accumulation of radionuclides in environmental components were quantitatively assessed in accordance with the recommendations of UNSCEAR, ICRP, and the World Health Organization (WHO). Based on the obtained results, scientific and practical

recommendations aimed at improving the radioecological monitoring system and enhancing radiation safety in the Zarafshan Valley were developed.

Keywords: Zarafshan Valley, radioecological monitoring, soil–water system, radionuclides, gamma spectrometry, effective dose, bioaccumulation, radiation safety.

Kirish. Hozirgi kunda atrof-muhit xavfsizligi muammolari global miqyosda dolzarb bo‘lib, ayniqsa, tuproq va suv resurslarining radioaktiv ifloslanishi ekologik barqarorlik va aholi salomatligiga jiddiy xavf tug‘diradi [1,5]. Tabiiy radiatsion fon bilan bir qatorda, sanoat va konchilik faoliyati natijasida yuzaga keluvchi antropogen radionuklidlar ekologik tizimlarda uzoq muddat saqlanib qolish xususiyatiga ega.

Zarafshon vohasi O‘zbekistonning muhim tabiiy-geografik va iqtisodiy hududlaridan biri bo‘lib, qishloq xo‘jaligi, konchilik va sanoat tarmoqlarining rivojlanganligi bilan ajralib turadi. Ushbu hududda uranli tog‘ jinslarining mavjudligi, rangli metallurgiya va kimyo sanoati korxonalarini faoliyati radionuklidlarning tuproq va suv muhitiga tushish ehtimolini oshiradi [2,9]. Bu holat radionuklidlarning migratsiyasi, bioakkumulyatsiyasi va oziq-ovqat zanjiri orqali inson organizmiga o‘tish xavfini kuchaytiradi.

Mazkur tadqiqotning asosiy maqsadi Zarafshon vohasidagi tuproq–suv tizimining radioekologik holatini fizik va miqdoriy jihatdan asoslangan holda baholash, radiatsion xavf darajasini aniqlash va mintaqaviy radioekologik monitoring tizimini takomillashtirishdan iborat. Ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi Zarafshon vohasidagi tuproq–suv tizimining radioekologik holatini ilmiy asosda baholash, mavjud xavf omillarini aniqlash hamda radiatsion xavfsizlikni ta‘minlashga qaratilgan chora-tadbirlarni ishlab chiqishdan iborat. Tadqiqot natijalari mintaqaviy ekologik monitoring tizimini takomillashtirishga, tabiiy resurslardan oqilona foydalanishni rag‘batlantirishga va aholining sog‘ligini himoya qilishga muhim hissa qo‘shishi kutilmoqda.

Markaziy O‘zbekiston hududida joylashgan Zarafshon vohasi Samarqand va Navoiy viloyatlarining asosiy hududlarini qamrab oladi. Vohani kesib oqib o‘tuvchi Zarafshon daryosi qishloq xo‘jaligi va sanoat ehtiyojlari uchun asosiy suv manbai hisoblanadi. Mintaqaning tuproqlari asosan kulrang tuproqlar bo‘lib, paxta, don va bog‘dorchilik ekinlarini yetishtirishda keng qo‘llaniladi. Shu sababli, tuproq va suv resurslarining radioekologik holatini doimiy monitoring qilish mahalliy aholining turmush farovonligi, sog‘ligi va iqtisodiy barqarorligini ta‘minlashda muhim omil hisoblanadi.

So‘nggi ilmiy tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, Zarafshon vohasining ayrim hududlarida radiatsion fon darajalari tabiiy me‘yorlardan oshib ketgan. Xususan:

2022–2024-yillarda o‘tkazilgan georadiometrik tahlillar shuni ko‘rsatdiki, Samarqand viloyatining Nurobod va Kattaqo‘rg‘on tumanlaridagi tuproq namunalarida ^{238}U va ^{232}Th radionuklidlarining konsentratsiyasi fon qiymatlardan 1,5–2 barobar yuqori bo‘lgan. Zarafshon daryosi havzasidan olingan suv namunalarida ^{40}K izotopining faollik darajasi 300–350 Bq/kg ni tashkil qilib, Jahon sog‘liqni saqlash tashkiloti tomonidan tavsiya etilgan chegaralarga yaqinlashgan.

Ba‘zi qishloq xo‘jaligi tuproqlarida ^{137}Cs radionuklidi izlari aniqlangan bo‘lib, bu Sovet davrida o‘tkazilgan yadroviy sinovlar oqibatidagi chiqindilarning uzoq muddat davomida saqlanib qolishini aks ettiradi. Ushbu natijalar vodiyning radiatsion xavfsizligini chuqur ilmiy baholashning dolzarbligini ta‘kidlaydi.

Radioekologik tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, Zarafshon vodiysidagi tuproq–suv tizimida radionuklidlarning mobilizatsiyasiga bir nechta omillar ta‘sir qiladi:

1. Geokimyoviy tarkib – yuqori karbonat miqdori va tuproq sho‘rligi radionuklidlarning mobilizatsiyasini oshiradi.

2. Sug‘orish amaliyotlari – Uzoq muddatli sug‘orish jarayonlari yer osti suvlari sathining ko‘tarilishiga olib kelib, radionuklidlarning yuqoriga migratsiya qilish jarayonini jadallashtirmoqda.

3. Antropogen ta‘sir – Navoiy viloyatidagi konchilik korxonalaridan chiqayotgan sanoat chiqindilari daryo tizimiga tushib, ekologik xavflarni yanada kuchaytirmoqda.

Radionuklidlarning tuproq va suvdan o‘simliklarga o‘tishi bioakkumulyatsiya jarayonlarining kuchayishiga olib kelmoqda. Vodiy hududida olib borilgan dala kuzatuvlari shuni ko‘rsatdiki:

- Don va sabzavot ekinlarining ayrim namunalari tarkibida ^{137}Cs miqdori 15–20 Bq/kg gacha yetgan;
- Paxta chigiti yog‘i namunalarida ham nurlanish darajasining oshgani qayd etilgan.

Mahalliy aholi o‘rtasida olib borilgan tibbiy monitoring natijalari onkologik va yurak-qon tomir kasalliklarining ko‘payish tendensiyasini ko‘rsatmoqda.

Mazkur holatlar mintaqaviy radioekologik monitoring tizimini yanada mustahkamlash zarurligini yaqqol tasdiqlaydi. Bu o‘z navbatida, radiatsion xavfsizlikni ta‘minlash, aholi salomatligini muhofaza qilish hamda barqaror ekologik boshqaruvni rivojlantirish uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

Tadqiqot obyekti va metodikasi. Namuna olish

Tadqiqot ishlari 2022–2024-yillarda Samarqand va Navoiy viloyatlarining Zarafshon daryosi havzasiga kiruvchi hududlarida olib borildi. Tuproq namunalari 0–20 sm qatlamdan, suv namunalari esa ochiq suv oqimlaridan olindi. Namuna olish jarayoni IAEA tomonidan tavsiya etilgan radioekologik monitoring metodikasiga muvofiq amalga oshirildi [4].

Radiometrik tahlil. Radionuklidlarning faolligi yuqori tozalangan germaniy (HPGe) detektor bilan jihozlangan gamma-spektrometr yordamida o‘lchandi. Detektorning energiya aniqligi 1,8 keV (1,33 MeV da), samaradorligi esa ^{152}Eu va ^{60}Co standart manbalari yordamida kalibrlangan. O‘lchov natijalarida fon nurlanishi hisobga olindi, statistik noaniqlik $\pm 5\text{--}10\%$ oralig‘ida baholandi.

Radionuklid faolligi quyidagi formula asosida hisoblandi:

$$A = \frac{N}{\varepsilon \cdot I_{\gamma} \cdot m \cdot t}$$

Radiatsion doza va xavfni baholash

Ichimlik suvi va oziq-ovqat mahsulotlari orqali olinadigan yillik effektiv doza UNSCEAR va ICRP tavsiyalariga muvofiq hisoblandi [5,8]:

$$E = \sum A_i \cdot DCF_i \cdot IR$$

Bu yerda DCF — doza konversiya koeffitsiyenti, IR — yillik iste‘mol miqdori. Olingan qiymatlar WHO tomonidan belgilangan 0,1 mZv/yil me‘yor bilan taqqoslandi [6].

Natijalar va muhokama.

1-jadval.

Zarafshon vohasi tuproqlarida radionuklidlarning o‘rtacha faolligi (Bq/kg)

No	Hudud	^{238}U	^{232}Th	^{40}K	^{137}Cs
1	Nurobod tumani	48 ± 5	52 ± 6	610 ± 45	18 ± 3
2	Kattaqo‘rg‘on tumani	44 ± 4	49 ± 5	580 ± 40	15 ± 2
3	Samarqand tumani	32 ± 3	35 ± 4	520 ± 38	<5
4	Fon qiymati*	25–30	30–35	400–500	<5

*Izoh: fon qiymatlar UNSCEAR ma‘lumotlari asosida keltirilgan [5].

Jadvaldan ko‘rinadiki, Nurobod va Kattaqo‘rg‘on tumanlarida ^{238}U va ^{232}Th faolligi fon qiymatlardan 1,5–2 barobar yuqori. Bu holat hududning geologik tuzilishi va konchilik faoliyatining ta‘siri bilan izohlanadi [2].

2-jadval.

Zarafshon daryosi suvlarida radionuklidlarning faolligi va yillik effektiv doza bahosi

No	Radionuklid	Faollik (Bq/kg)	WHO me‘yori (Bq/kg)	Yillik effektiv doza (mZv/yil)
1	^{40}K	300–350	400	0,05
2	^{238}U	12–18	30	0,02
3	^{232}Th	6–9	10	0,01
4	^{137}Cs	<5	10	<0,01
5	Jami	—	—	0,08–0,09

Hisob-kitoblarga ko‘ra, yillik effektiv doza WHO tomonidan tavsiya etilgan chegaraga yaqinlashgan bo‘lib, bu suv resurslari ustidan doimiy radioekologik monitoring olib borish zarurligini ko‘rsatadi [6].

Radionuklidlar migratsiyasi va biokumulyatsiyasi. Radionuklidlarning migratsiyasi diffuziya–adveksiya modeli bilan tavsiflandi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C - v \nabla C - \lambda C$$

Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, yuqori karbonat miqdori va sug‘orish jarayonlari radionuklidlarning yuqoriga migratsiyasini tezlashtiradi. Don va sabzavot ekinlarida ^{137}Cs uchun biokumulyatsiya koeffitsiyenti 0,15–0,25 oralig‘ida aniqlandi [10].

Radiatsion xavfsizlikni kuchaytirish bo‘yicha takliflar

1. Doimiy radioekologik monitoring stansiyalarini tashkil etish.
2. Qishloq xo‘jaligida radiatsion xavfsiz agrotexnologiyalarni joriy etish.
3. Sanoat chiqindilarini qat‘iy radiologik nazoratga olish.
4. Ichimlik suvi manbalarini muntazam radiatsion tekshirish.
5. Aholi uchun radiatsion xavfsizlik bo‘yicha ekologik ta‘limni kuchaytirish.

Zarafshon vohasi hududida ekologik xavfsizlikni ta'minlash va tabiiy resurslardan oqilona foydalanish maqsadida quyidagi strategik ustuvor yo'nalishlar muhim deb hisoblanadi:

1. **Ilmiy tadqiqotlarni kengaytirish** – radioekologik monitoringni kuchaytirish hamda xalqaro ilmiy-tadqiqot markazlari bilan hamkorlikni rivojlantirish.

2. **Innovatsion texnologiyalarni joriy etish** – ifloslangan tuproqlarni tozalashda bioremediatsiya va fitoremediatsiya usullarini qo'llash.

3. **Sanoat chiqindilarini ekologik tartibga solish** – Navoiy viloyatidagi konchilik faoliyati natijasida hosil bo'ladigan radioaktiv yon mahsulotlarni xavfsiz utilizatsiya qilish va qayta ishlashni ta'minlash.

4. **Hududiy ekologik dasturlarni ishlab chiqish** – Zarafshon vohasi uchun tuproq va suv resurslarining batafsil radioekologik xaritasini o'z ichiga olgan "ekologik pasport"ni yaratish.

5. **Aholi salomatligini muhofaza qilish** – ichimlik suvi sifatini muntazam monitoring qilish hamda ekologik jihatdan xavfli hududlarda yashovchi aholi o'rtasida tizimli tibbiy ko'riklarni tashkil etish.

Mazkur tadqiqotning ilmiy yangiligi Zarafshon vohasi tuproq-suv tizimida radionuklidlarning tarqalish qonuniyatlarini aniqlash, ularning bioakkumulyatsiya koeffitsiyentlarini hisoblash hamda mintaqaning radiatsion xavfsizligini kompleks baholashdan iboratdir. Shuningdek, tadqiqot natijalari ekologik monitoring tizimini takomillashtirish va barqaror rivojlanishni ta'minlashga qaratilgan aniq ilmiy-amaliy tavsiyalarni taqdim etadi.

Xulosa. Zarafshon vohasi tuproq-suv tizimida olib borilgan radioekologik tadqiqotlar ayrim hududlarda radiatsion fonning oshganini ko'rsatdi. Tuproq va suv namunalari tarkibida ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K va ^{137}Cs radionuklidlari aniqlanib, ularning migratsiyasi va bioakkumulyatsiyasi mintaqaviy ekologik xavfsizlikka potensial tahdid tug'dirishi aniqlandi. Olingan natijalar radioekologik monitoring tizimini takomillashtirish va radiatsion xavfsizlikni ta'minlash uchun muhim ilmiy-amaliy asos bo'lib xizmat qiladi.

Mazkur tadqiqot natijasida quyidagi ilmiy va amaliy xulosalarga kelindi:

1. Zarafshon vohasi hududida zamonaviy laboratoriya tahlillari bilan ta'minlangan tizimli radioekologik monitoring tizimini tashkil etish zarur.

2. Tuproq va suv resurslarida radionuklidlarning migratsiya qonuniyatlarini chuqur o'rganish hududiy ekologik xavfsizlik dasturlarini ilmiy asoslash imkonini beradi.

3. Qishloq xo'jaligi yerlarida radiatsion nazorat mexanizmlarini joriy etish, shuningdek, bioremediatsiya va fitoremediatsiya texnologiyalarini qo'llash samarali natijalar berishi mumkin.

4. Sanoat chiqindilarini ekologik me'yorlarga qat'iy rioya qilgan holda nazorat qilish, radioaktiv yon mahsulotlarni esa atrof-muhit ifloslanishini minimallashtirish maqsadida maxsus ajratilgan inshootlarda qayta ishlash va saqlash lozim.

5. Ekologik ta'limni kengaytirish, radiatsion xavfsizlik bo'yicha maxsus o'quv dasturlarini ishlab chiqish hamda muntazam tibbiy ko'riklarni tashkil etish hudud aholisining salomatligini muhofaza qilishga xizmat qiladi.

Umuman olganda, Zarafshon vohasi bo'yicha olib borilgan mazkur tadqiqot nafaqat mintaqaviy radioekologik muammolarni aniqlab beradi, balki ularni bartaraf etish bo'yicha amaliy chora-tadbirlarni ham taklif etadi. Tadqiqot natijalari O'zbekistonning hududiy ekologik xavfsizlik strategiyasini takomillashtirish hamda barqaror rivojlanish maqsadlariga erishish yo'lida muhim ilmiy-amaliy asos bo'lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Karimov A., To'xtayev B. *O'zbekiston hududlarida ekologik monitoring va radiatsion xavfsizlik muammolari*. – Toshkent, 2021.
2. Rasulov H., G'iyosov Sh. *Tabiiy muhitda radionuklidlarning migratsiyasi*. – Samarqand, 2020.
3. Qodirov I. *Suv resurslari monitoringi*. – Toshkent, 2019.
4. IAEA. *Radiological Environmental Impact Assessment*. – Vienna, 2018.
5. UNSCEAR. *Sources, Effects and Risks of Ionizing Radiation*. – New York, 2020.
6. WHO. *Guidelines for Drinking-water Quality: Radiological Aspects*. – Geneva, 2017.
7. Nazarov A., Boboyev D. *Radiatsion fon dinamikasi // O'zbekiston ekologik jurnali*, 2022.
8. Taskayev A.I. *Radioekologiya: nazariya va amaliyot*. – Moskva, 2018.
9. Mirzayev B., Yo'ldoshev M. *Zarafshon vohasi ekologiyasi // SamDU axborotnomasi*, 2021.
10. Alloway B.J. *Soil Pollution and Environmental Quality*. – Springer, 2019.
11. Ganiyev E. *Informed society development // Western European Journal*, 2024.
12. Пузаев И.И. *Рациональное природопользование*. – 2020.

**C₇₀/BENZOL/SIKLOGEKSAN TERNAR TIZIMLARNING BARQARORLIK
XUSUSIYATLARI TADQIQI**

Maxmanov Urol Kudratovich,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi,
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti,
“Optika va spektroskopiya” laboratoriyasi mudiri,
fizika-matematika fanlari doktori, professor
urolmakh@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-7185-2812>*

Tursunqulov Elyor Abil o‘g‘li,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi,
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti,
kichik ilmiy xodimi
elyortursunqulov1@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0000-7260-7897>*

Ramazonov Asror Xamroyevich,

*Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston
Milliy universiteti dotsenti, f.-m.f.n.
asrorkhramazanov@gmail.com*

Baxriyev Nizomiddin Nasridin o‘g‘li,

*Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston
Milliy universiteti magistranti
bakhrievnizom@gmail.com*

Annotatsiya. Mazkur tadqiqot ishida C₇₀-fullurenning benzol–siklogeksan aralash erituvchilarida hosil qilingan eritmalarining optik xususiyatlari va ularning vaqt bo‘yicha barqarorlikka erishish jarayonlari eksperimental usulda o‘rganildi. Tadqiqot yuqori va quyi konsentratsiyalarda tayyorlangan eritmalarda olib borildi. Eritmalarning nur sindirish ko‘rsatkichi, zichligi hamda yutilish spektrlarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishlari tahlil qilindi. O‘lchash natijalari asosida erituvchi tarkibidagi benzol va siklogeksan nisbatining, shuningdek, C₇₀ konsentratsiyasining eritmalarining optik parametrlari barqarorlashish tezligiga va spektral xususiyatlariga ta‘siri baholandi. Olingan ma‘lumotlar C₇₀ asosidagi organik eritmalarining optik barqarorligi va ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlarini aniqlashga xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: C₇₀ fulluren, benzol–siklogeksan aralash eritmaları, optik xossalari, nur sindirish ko‘rsatkichi, UV–Vis yutilish spektrlari, solvatatsiya jarayoni, vaqt bo‘yicha barqarorlik, molekulalararo o‘zaro ta‘sir.

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТНЫХ СВОЙСТВ ТЕРНАРНЫХ СИСТЕМ
C₇₀/БЕНЗОЛ/ЦИКЛОГЕКСАН**

Аннотация. В данной работе экспериментальными методами исследованы оптические свойства растворов фуллерена C₇₀, полученных в смешанных растворителях бензол–циклогексан, а также процессы достижения ими временной стабильности. Исследования проводились для растворов, приготовленных при высоких и низких концентрациях. Показатель преломления, плотность и спектры оптического поглощения растворов измерялись во времени, а их динамические изменения подвергались детальному анализу. На основе полученных результатов оценено влияние соотношения бензола и циклогексана в составе растворителя, а также концентрации C₇₀ на скорость стабилизации оптических параметров и спектральные характеристики растворов. Полученные данные позволяют оценить оптическую стабильность органических растворов на основе C₇₀ и определить перспективы их практического применения.

Ключевые слова: фуллерен C₇₀, смешанные растворы бензол-циклогексан, оптические свойства, показатель преломления, спектры поглощения UV–Vis, процесс солватации, временная стабильность, межмолекулярные взаимодействия.

INVESTIGATION OF STABILITY PROPERTIES OF C₇₀/BENZENE/CYCLOHEXANE
TERNARY SYSTEMS

Abstract. In this study, the optical properties of crystalline C₇₀ fullerene solutions prepared in mixed benzene–cyclohexane solvents, as well as the processes of achieving time-dependent stability, were investigated using experimental methods. The research was carried out for solutions prepared at both high and low concentrations. The refractive index, density, and optical absorption spectra of the solutions were measured as a function of time, and their dynamic changes were thoroughly analyzed. Based on the obtained results, the influence of the benzene–cyclohexane solvent composition and C₇₀ concentration on the stabilization rate of optical parameters and spectral characteristics of the solutions was evaluated. The obtained data provide insight into the optical stability of C₇₀-based organic solutions and indicate their potential for practical applications.

Keywords: C₇₀ fullerene, benzene–cyclohexane mixed solutions, optical properties, refractive index, UV–Vis absorption spectra, solvation process, time-dependent stability, intermolecular interactions.

Kirish. Fullerenlar – uglerodning noyob allotropik shakllaridan biri bo‘lib, ularning molekulari ko‘pincha yopiq sferik shaklida tuziladi va o‘zining noyob elektron, optik va kimyoviy xossalari bilan ajralib turadi [1]. Xususan, C₇₀ molekulari C₆₀ ga nisbatan uzunroq va assimetrik shaklga ega bo‘lib, uning eritmalaridagi optik xossalari va elektron holatlari sezilarli farq qiladi [2-3]. Shu sababli C₇₀ eritmalarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishini o‘rganish ilmiy jihatdan qiziq va amaliy ahamiyatga ega. C₇₀/benzol/siklogeksan eritmaları nanomateriallar va organik elektronika sohalarida keng qo‘llaniladi [4-5]. Ular organik quyosh batareyalarida samarali elektron yutuvchi sifatida ishlatiladi, organik yorug‘lik chiqaruvchi diodlarda elektron transport qatlamlarini hosil qiladi, shuningdek, fotokataliz va nurga sezgir sensorlar yaratishda qo‘llaniladi [6]. Bu tizimlarni tadqiq etish orqali molekular o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirlar, eritma barqarorligi va optik parametrlarning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi haqida muhim ma’lumot olish mumkin. Eritmaning zichligi va nur sindirish koeffitsiyenti kabi fizik parametrlarni o‘lchash uning strukturaviy o‘zgarishlarini tushunishda katta ahamiyat kasb etadi [7], shuningdek, optik yutilish spektri molekularning elektron holati va o‘zaro ta’sirini aniqlash imkonini beradi. Optik usullar, jumladan, spektrometriya va refraktometriya, molekularning vaqt bo‘yicha dinamik xatti-harakatlarini kuzatishda samarali vosita hisoblanadi [8].

Ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi C₇₀/benzol/siklogeksan eritmasining vaqt bo‘yicha optik xossalarini o‘rganish bo‘lib, eritma zichligi, nur sindirish koeffitsiyenti va optik yutilish spektri kabi parametrlar bilan birgalikda sistematik tahlil olib borish orqali molekulararo o‘zaro ta’sirlar va eritmadagi dinamik jarayonlarni aniqlashdan iborat. Ta’kidlash joizki, oldingi ilmiy ishlarda fullerenlarning eritmalaridagi xossalari alohida o‘rganilgan bo‘lsa-da [9-11], C₇₀/benzol/siklogeksan tizimining vaqt bo‘yicha optik parametrlar bilan birgalikda sistematik tahlili kam uchraydi, shu sababli mazkur tadqiqotni olib borish zarurati mavjud.

Materiallar va tadqiqot usullari. Ushbu tadqiqotda yuqori tozalikdagi (99,5%) C₇₀ fulleren kukuni, shuningdek, siklogeksan (C₆H₁₂) va benzol (C₆H₆) organik erituvchilari qo‘llanildi. Barcha kimyoviy moddalar qo‘shimcha tozalash jarayonlarisiz, Sigma Aldrich (AQSh) ishlab chiqaruvchi tomonidan taqdim etilgan holatda ishlatildi. Siklogeksan benzolda ko‘p miqdorda eriydi va barcha hajmiy nisbatlarda bir jinsli eritma hosil qiladi [12]. C₇₀ fullereni benzol va siklogeksan erituvchilarida yaxshi eriydi, bu esa fulleren molekularining ushbu erituvchilar bilan samarali molekulararo moslashuvi bilan izohlanadi. Natijada benzol va siklogeksan C₇₀ molekularini barqaror dispersiyada saqlovchi muhit hosil qiladi. Bundan tashqari, mazkur erituvchilar ko‘zga ko‘rinuvchi va yaqin ultrabinafsha sohalarida nurni kam yutadi [13], bu esa C₇₀ eritmalarining optik xossalari va elektron holatini aniqlashda spektral fonning minimal bo‘lishini ta’minlaydi. Tajriba davomida C₇₀ fullerenining yuqori (0.08 mg/ml) va quyi (0.05 mg/ml) konsentratsiyali eritmaları benzol–siklogeksan aralashmasida 98:2 va 96:4 hajmiy nisbatlarda tayyorlanib, jami to‘rtta eritma namunalari hosil qilindi. Namunalarni quyidagicha belgilab olindi: A namuna – 0.05 mg/ml C₇₀/benzol/seklogeksan 98:2 nisbatda, B namuna – 0.05mg/ml C₇₀/benzol/seklogeksan 94:6 nisbatda, C namuna – 0.08mg/ml C₇₀/benzol/seklogeksan 98:2 nisbatda va D namuna – 0.08mg/ml C₇₀/benzol/seklogeksan 94:6 nisbatda. Tayyorlangan eritmalar germetik yopiladigan shisha kolbalarga joylashtirilib, xona haroratida DLAB MX-S (Xitoy) rusumli mexanik laboratoriya aralastirgichi yordamida 2.5 Hz chastotada 2–3 soat davomida aralastirildi. Eritmalarning nur sindirish ko‘rsatkichlari yuqori sezgirlikka ega PAL-BX/RI (Atago, Yaponiya) raqamli refraktometri yordamida natriy atomining D₁ spektral chizig‘iga mos (~589.3 nm) to‘lqin uzunligida o‘lchandi, bunda o‘lchash noaniqligi ±0,01% dan

oshmadi. Har bir namuna uchun mustaqil o'lvovlar uch marta takrorlanib, o'rtacha qiymatlar hisoblab chiqildi. C_{70} eritmalarining optik yutilish spektrlari UV-5100 (Xitoy) rusumli UV-Vis spektrometrida ~ 0.1 nm spektral aniqlikda, 340–800 nm to'liq uzunliklari oralig'ida qayd etildi. Eritmalarning zichlik qiymatlari esa Mettler Toledo Densito 30PX (Yaponiya) rusumli yuqori aniqlikdagi zichlik o'lvovchi qurilma yordamida aniqlandi. C_{70} eritmalarini bilan bog'liq barcha o'lvovlar xona haroratida ($T \approx 21 \pm 1^\circ\text{C}$) bajarildi. Yangi tayyorlangan eritmalar turli vaqt oralig'ida yorug'likdan himoyalangan holda qorong'u muhitda saqlanib, ularning optik xossalari vaqt bo'yicha o'zgarishi kuzatildi.

Natijalar va ularning tahlili. C_{70} fulleren eritmalarining nur sindirish ko'rsatkichlarini vaqt bo'yicha o'zgarishi haqida ma'lumotlar erituvchi va erigan modda molekulari o'rtasidagi o'zaro ta'sir haqida muhim ma'lumot beradi [14]. C_{70} /benzol/siklogeksan yuqori va quyi konsentratsiyalar uchun (98:2 va 94:6 hajmiy nisbatlarda) nur sindirish ko'rsatgichi o'lvovlar davrida quyidagi natijalar olindi.

O'tkazilgan tajribalar shuni ko'rsatadiki, C_{70} fullerenining konsentratsiyasi oshishi bilan eritmalarining nur sindirish ko'rsatgichi (n) ham ortadi (1-jadval). 0.08 mg/ml konsentratsiyali eritmalarda n qiymatlari 0.05 mg/ml konsentratsiyali eritmalariga nisbatan yuqoriroq bo'lib, bu holat eritmadagi optik zichlik ortishi bilan izohlanadi. Konsentratsiya oshishi natijasida eritmada C_{70} molekulari soni ko'payadi, bu esa elektromagnit to'liq bilan o'zaro ta'sirlashuvchi elektron sonining ortishiga olib keladi. Natijada eritmaning sindirish ko'rsatgichi oshadi. Shu bilan birga, konsentratsiya ortishiga qaramasdan, vaqt bo'yicha n ning keskin o'zgarishlar ko'rsatmasligi eritmaning kolloid va optik barqarorligini tasdiqlaydi. Benzol va siklogeksan hajmiy nisbatining o'zgarishi n qiymatlarining farqlanishiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Benzol ulushi yuqori bo'lgan eritmalarda (98:2) nur sindirish ko'rsatgichi siklogeksan ulushi ko'proq bo'lgan eritmalariga (94:6) nisbatan kattaroq qiymatlarga ega.

1-jadval.

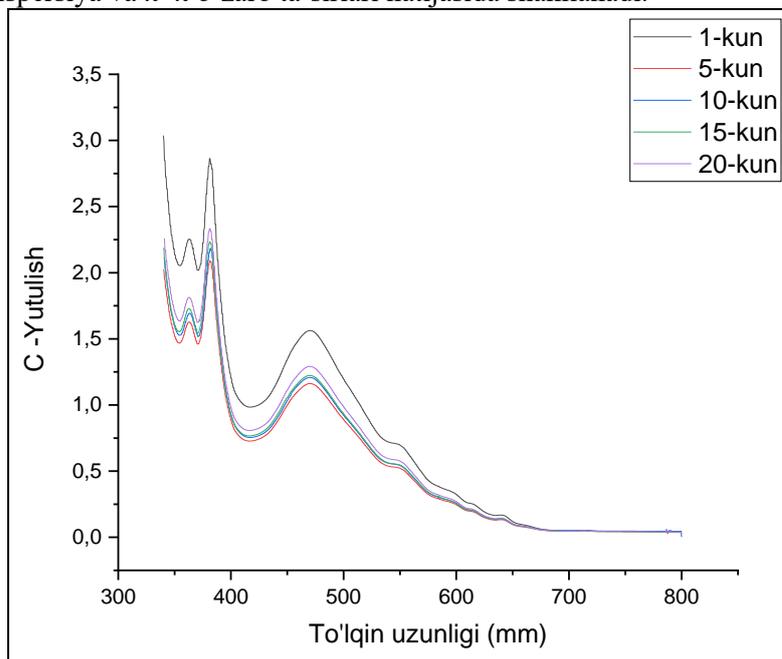
Barcha namunalar (A, B, C, D) uchun nur sindirish ko'rsatkichi qiymatlarining vaqt bo'yicha o'zgarishi

Eritmalar saqlangan vaqt (sutka)	A	B	C	D
1	1.496	1.4944	1.4957	1.4943
5	1.4976	1.498	1.4974	1.4964
10	1.4954	1.494	1.496	1.494
15	1.4951	1.4938	1.4957	1.4936
20	1.4953	1.4936	1.4959	1.4938

Bu holat benzolning o'ziga xos yuqoriroq sindirish ko'rsatgichi hamda uning aromatik tabiatiga bog'liq ravishda C_{70} molekularining elektron bilan kuchli dispersiya va π - π o'zaro ta'sirlarga kirishishi bilan izohlanadi. Siklogeksan ulushi oshirilganda esa eritmaning umumiy sindirish ko'rsatgichi pasayadi, biroq bu eritmalar ham yuqori optik barqarorlikni saqlab qoladi. Tajriba natijalariga ko'ra, eritmalar tayyorlanganidan keyingi dastlabki 1–15 kun oralig'ida nur sindirish ko'rsatgichida juda kichik, ammo sezilarli o'zgarishlar kuzatiladi. Ushbu davr C_{70} molekularining erituvchi muhitiga to'liq moslashuvi, solvatatsiya qobig'ining shakllanishi va molekulararo masofalarning qayta taqsimlanishi bilan tavsiflanadi. Shuningdek, juda sekin kechuvchi dastlabki agregatsiya yoki klasterlanish jarayonlari ham bu o'zgarishlarga hissa qo'shishi mumkin. 15-kundan boshlab barcha konsentratsiya va hajmiy nisbatlarda nur sindirish ko'rsatgichining o'zgarishi amalda nolga yaqinlashadi. Bu holat eritmada molekulyar va optik muvozanat holati shakllanganligini ko'rsatadi. Ushbu davrda eritmaning zichligi, molekulyar qutblanuvchanligi va ichki tuzilishi barqarorlashib, vaqt bo'yicha o'zgarishligi kuzatiladi. Benzol va siklogeksan aralashmasi C_{70} molekularini samarali stabilizatsiya qiluvchi muhit vazifasini bajaradi, natijada agregatsiya, cho'kish yoki fazaviy ajralish jarayonlari kuzatilmaydi. Shu sababli 15–20 kun oralig'ida barcha eritmalar yuqori darajadagi optik barqarorlikni namoyon etadi.

C_{70} /benzol/siklogeksan eritmasining optik yutilishi spektri barcha konsentratsiyalar uchun ko'zga ko'rinuvchi va ultrabinafsha sohada o'rganildi. C_{70} /benzol/siklogeksan tizimida tayyorlangan 0.08 mg/ml konsentratsiyali va 98:2 hajmiy nisbatdagi C namuna uchun olingan optik yutilish spektrlari ultrabinafsha va ko'zga ko'rinuvchi sohalarida aniq strukturalangan xarakterga ega bo'lib, spektrda bir nechta intensiv maksimumlar va bitta yelka (shoulder) maksimum mavjudligi kuzatiladi (1-rasm). 1-kunda qayd etilgan spektrda ~ 340 – 350 nm va ~ 370 – 380 nm oralig'idagi qisqa to'liqlik intensiv maksimumlar C_{70} molekulasidagi yuqori energiyali ruxsat etilgan $\pi \rightarrow \pi^*$ elektron o'tishlariga mos keladi va bu o'tishlar asosan asosiy singlet holatdan yuqori qo'zg'algan singlet holatlarga o'tishlar bilan bog'liq. ~ 470 – 485 nm

oralig'idagi maksimum esa C_{70} fullerenining pastroq energiyali, qisman ruxsat etilgan elektron o'tishlariga, jumladan, HOMO→LUMO tipidagi o'tishlarga tegishli bo'lib, molekulaning elektron tuzilmasi va erituvchi muhiti bilan o'zaro ta'siriga nisbatan sezgir hisoblanadi. ~530–550 nm atrofida kuzatiladigan yelka maksimum C_{70} molekularining vibronik holatlari hamda benzolning aromatik π -elektron tizimi bilan yuzaga keladigan zaif dispersiya va π - π o'zaro ta'sirlari natijasida shakllanadi.



1-rasm. C namunaning turli saqlash muddatlaridagi optik yutilish spektrlari o'zgarishlari

Vaqt bo'yicha spektrlarni solishtirish shuni ko'rsatadiki, C namuna uchun 15 kundan 20 kungacha bo'lgan oraliqda spektral egri chiziqlarning umumiy shakli deyarli o'zgarmay saqlanib qoladi, bu esa eritmaning yuqori optik va kolloid barqarorlikiga erishganini ko'rsatadi. Shu bilan birga, barcha asosiy maksimumlar va yelka maksimumning joylashuvi vaqt o'tishi bilan juda kichik miqdorda uzun to'lqinlar tomonga siljishi, ya'ni qizil siljish hodisasi kuzatiladi: qisqa to'lqinli maksimumlar uchun $\Delta\lambda \approx 2-3$ nm, 470–485 nm atrofidagi maksimum uchun $\Delta\lambda \approx 3-5$ nm, yelka maksimum uchun esa $\Delta\lambda \approx 4-6$ nmni tashkil etadi. Ushbu qizil siljish C_{70} molekularining vaqt davomida erituvchi muhitda yanada barqaror solvatatsiya holatiga o'tishi, benzol molekulari bilan dispersiya va π - π o'zaro ta'sirlarning asta-sekin kuchayishi hamda lokal dielektrik muhitning o'zgarishi natijasida elektron energiya darajalari orasidagi farqning biroz kamayishi bilan izohlanadi.

2-jadval.

Barcha namunalar (A, B, C, D) uchun eritma zichligi qiymatlarining vaqt bo'yicha o'zgarishi

Eritmalar saqlangan vaqt (sutka)	A	B	C	D
1	0.8633	0.8654	0.8676	0.8658
5	0.8723	0.8728	0.8679	0.8677
10	0.8706	0.8719	0.8689	0.8681
15	0.8698	0.8707	0.8675	0.8659
20	0.8678	0.8722	0.8663	0.8659

Yuqoridagi 2-jadvalda keltirilgan zichlik o'lchovlari C_{70} /benzol/siklogeksan tizimida eritma tarkibi va vaqt omilining fizik-kimyoviy xossalarga ta'sirini baholash imkonini beradi. Olingan natijalarga ko'ra, barcha namunalarda zichlik qiymatlari 1–20 kun oralig'ida nisbatan tor chegarada o'zgaradi, bu esa eritmalarning yuqori kolloid va termodinamik barqarorligini ko'rsatadi. Konsentratsiyasi yuqoriroq bo'lgan C va D namunalarda zichlik qiymatlari A va B namunalarga nisbatan biroz kattaroq bo'lib, bu eritmada C_{70} molekulari ulushining ortishi va umumiy massa konsentratsiyasining ko'payishi bilan izohlanadi. Benzol ulushi yuqori bo'lgan 98:2 nisbatdagi eritmalarda (A va C) zichlik, 94:6 nisbatdagi eritmalariga nisbatan pastroq bo'lishi kuzatiladi, bu holat siklogeksanning nisbatan yuqori zichlikka ega ekanligi va uning eritmadagi ulushi ortishi bilan bog'liq. Vaqt bo'yicha tahlil shuni ko'rsatadiki, dastlabki 1–5 kun oralig'ida

zichlik qiymatlarida nisbatan sezilarli o'sish kuzatiladi, bu C_{70} molekularining erituvchi muhitga moslashuvi, solvatatsiya jarayonlarining faollashuvi va molekulararo bo'shliqlarning qayta taqsimlanishi bilan izohlanadi. 5–10 kun oralig'ida zichlikning kichik tebranishlari kuzatiladi, bu davrda eritma ichki tuzilmasining barqarorlashuvi va solvatatsiya qobig'ining shakllanishi yakunlanadi. 15-kundan boshlab esa barcha namunalar uchun zichlik qiymatlarining o'zgarishi deyarli to'xtab, 15–20 kun oralig'ida amalda o'zgarish holatda qoladi. Bu holat eritmalarda molekulyar va strukturaviy muvozanat qaror topganini, C_{70} molekulari erituvchi muhitda barqaror dispers holatda saqlanayotganini hamda agregatsiya yoki fazaviy ajralish jarayonlari sodir bo'lmayotganini ko'rsatadi. Shunday qilib, zichlik o'lchovlari natijalari optik yutilish va sindirish ko'rsatkichlari bo'yicha olingan xulosalarni to'liq tasdiqlab, C_{70} /benzol/siklogeksan eritmalarining vaqt bo'yicha yuqori darajadagi fizik-kimyoviy barqarorlikka ega ekanligini namoyon etadi.

Xulosa. Mazkur ishda C_{70} fullerenining benzol–siklogeksan aralash erituvchilaridagi eritmalari turli konsentratsiya va hajmiy nisbatlarda tayyorlanib, ularning optik xossalari vaqt bo'yicha o'zgarishi turli eksperimental usullar yordamida o'rganildi. Tadqiqot natijasida C_{70} /benzol/siklogeksan tizimida tayyorlangan eritmalar 15–20 kun davomida yuqori darajadagi optik va fizik-kimyoviy barqarorlikka erishishi aniqlandi. Olingan natijalar benzol va siklogeksan aralashmasi C_{70} molekularini samarali solvatatsiya qiluvchi va agregatsiyadan himoyalovchi muhit hosil qilishini tasdiqlaydi hamda ushbu tizimlarning nanomateriallar sohasidagi amaliy qo'llanishi uchun istiqbolli ekanligini ko'rsatadi.

Eritmalarning nur sindirish ko'rsatkichlari yuqori aniqlikdagi raqamli refraktometriya usuli yordamida vaqt bo'yicha o'lchandi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, C_{70} konsentratsiyasi oshishi bilan sindirish ko'rsatkichi qiymatlari ortadi, bu eritmadagi optik zichlik va qutblanuvchanlikning kuchayishi bilan izohlanadi. Benzol ulushi yuqori bo'lgan eritmalarda nur sindirish ko'rsatkichi qiymatlarining kattaroq bo'lishi benzolning aromatik tabiatiga xos bo'lgan π – π o'zaro ta'sirlar bilan bog'liq ekanini aniqlandi. Vaqt bo'yicha tahlil natijasida dastlabki 1–15 kun oralig'ida n qiymatlarida juda kichik o'zgarishlar kuzatilgani, 15-kundan so'ng esa barcha namunalar uchun sindirish ko'rsatkichining deyarli o'zgarish holatga kelgani aniqlanib, bu eritmalarda molekulyar va optik muvozanat qaror topganini ko'rsatdi.

C_{70} /benzol/siklogeksan eritmalarining optik yutilish spektrlari UV–Vis spektroskopiya usuli yordamida 340–800 nm diapazonda o'rganildi. Spektrlarda C_{70} fullereniga xos bo'lgan bir nechta intensiv maksimumlar va yelka maksimum mavjudligi aniqlanib, ular $\pi \rightarrow \pi^*$ tipidagi elektron o'tishlarga, jumladan, HOMO \rightarrow LUMO o'tishlariga mos kelishi ko'rsatildi. Vaqt o'tishi bilan spektrlarning umumiy shakli saqlanib qolgan holda, barcha asosiy maksimumlar va yelka maksimumlarining uzun to'lqinlar tomonga juda kichik qizil siljishi ($\Delta\lambda \approx 2$ –6 nm) qayd etildi. Ushbu siljish C_{70} molekularining erituvchi muhitda asta-sekin barqaror solvatatsiya holatiga o'tishi, benzol bilan dispersiya va π – π o'zaro ta'sirlarning kuchayishi bilan izohlandi.

Eritmalarning zichligi vaqt bo'yicha yuqori aniqlikdagi zichlik o'lchovchi qurilma yordamida o'rganildi va zichlik qiymatlarining 1–20 kun oralig'ida tor diapazonda o'zgarishi aniqlandi. Yuqori konsentratsiyali namunalar uchun zichlik qiymatlarining biroz kattaroq bo'lishi C_{70} molekulari ulushining ortishi bilan bog'liq ekanligi ko'rsatildi. Benzol va siklogeksan hajmiy nisbatining o'zgarishi zichlikka ta'sir qilishi aniqlanib, siklogeksan ulushi ortishi bilan zichlikning biroz oshishi kuzatildi. Vaqt bo'yicha tahlil shuni ko'rsatdiki, dastlabki kunlarda zichlikning nisbatan o'zgarishi solvatatsiya jarayonlarining faollashuvi bilan bog'liq bo'lsa, 15-kundan so'ng, zichlik qiymatlarining barqarorlashuvi eritmalarda strukturaviy va termodinamik muvozanat qaror topganini tasdiqlaydi. Ushbu natijalar nur sindirish ko'rsatkichi va yutilish spektrlari bo'yicha olingan xulosalar bilan to'liq mos keladi hamda C_{70} /benzol/siklogeksan eritmalarining vaqt bo'yicha yuqori barqaror tizim ekanligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Minnatdorchilik. Ushbu ish O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi tomonidan belgilab berilgan ilmiy-tadqiqotlar doirasida amalga oshirilgan.

ADABIYOTLAR:

1. Kimbrell J.B., Crittenden C.M., Steward W.J., Khan F.A., Gaquere-Parker A.C., Stuart D.A. *Analysis of mixtures of C_{60} and C_{70} by Raman spectrometry // Nanoscience Methods, Vol. 3 (No.1), pp. 40–46 (2014).*
2. Talyzin A.V., Engström I. *C_{70} in Benzene, Hexane, and Toluene Solutions // The Journal of Physical Chemistry B, Vol. 102 (No.34), pp. 6477–6481 (1998).*
3. Ravi P., Basiuk E.V., Basiuk V.A., et al. *Effect of solvent polarity on the aggregation of fullerenes: a comparison between C_{60} and C_{70} // Chemical Physics Letters, Vol. 360 (No.5–6), pp. 422–428 (2002).*
4. Bansal S., Kumar N. *C_{60} and C_{70} electronic absorption spectra in different solvents and matrices // Journal of Biomedical Nanotechnology, Vol. 7 (No.1), pp. 199–201 (2011).*

5. Ivan V. M., Viktor A. V., Sofiya M. B., Dmitry S. V., Mikhail A. P., Vladimir K.I. Simultaneous quantification of fullerenes C_{60} and C_{70} in organic solvents by excitation–emission matrix fluorescence spectroscopy // *Inorganics*, Vol. 11 (No.4), Article 136 (2023)
6. Nagorna T.V., Kuzmenko M.O., Kyzyma O.A., Chudoba D., Nagorny A.V., Tropin T.V., Garamus V.M., Jazdzewska M., Bulavin L.A. Structural reorganization of fullerene C_{70} in *N*-methyl-2-pyrrolidone/toluene mixtures // *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 272, pp. 948–952 (2018).
7. Makhmanov U.K., Esanov S.A., Sidigaliyev D.T., Musurmonov K.N., Aslonov B.A., Chuliev T.A. Behavior of C_{70} fullerene in a binary mixture of xylene and tetrahydrofuran // *Liquids*, Vol. 3 (No.3), pp. 385–392 (2023).
8. Törpe A., Belton D.J. Improved spectrophotometric analysis of fullerenes C_{60} and C_{70} in high-solubility organic solvents // *Analytic Sciences*, Vol. 31 (No.2), pp. 125–130 (2015).
9. Ghosh H.N., Sapre A.V., Mittal J.P. Aggregation of C_{70} in solvent mixtures // *The Journal of Physical Chemistry*, Vol. 100 (No.22), pp. 9439–9443 (1996).
10. Alargova R.G., Deguchi S., Tsujii K. Stable colloidal dispersions of fullerenes in polar organic solvents // *Journal of the American Chemical Society*, Vol. 123 (No.43), pp. 10460–10467 (2001).
11. Mchedlov-Petrosyan N.O., Kamneva N.N., Marynin A.I., Shekhovtsov S.V. Fullerenes in liquid media: molecular and colloidal states // *Chemical Reviews*, Vol. 113 (No.7), pp. 5149–5193 (2013)
12. Alfe M., Apicella B., Barbella R., Bruno A., Ciajolo A. Aggregation and interactions of C_{60} and C_{70} fullerenes in solvent systems // *Chemical Physics Letters*, Vol. 405, pp. 193–197 (2005).
13. Semenov K.N., Charykov N.A., Keskinov V.A., Piartman A.K., Blokhin A.A., Kopyrin A.A. Solubility of light fullerenes in organic solvents // *Journal of Chemical & Engineering Data*, Vol. 55 (No.1), pp. 13–36 (2010).
14. Aksenov V.L., Avdeev M.V., Tropin T.V., Priezhev V.B., Schmelzer J.W.P. Cluster growth and dissolution of fullerenes in non-polar solvents // *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 127, pp. 142–144 (2006).

**SUVNING TURLI HAJM ULUSHLARIDA UCH KOMPONENTLI C₇₀/BENZOL/SUV
ERITMALARINING OPTIK VA O'LCHAM XUSUSIYATLARINING O'ZGARISHI**

*Maxmanov Urol Kudratovich,
Ion plazma va lazer texnologiyalari instituti,
"Optika va spektroskopiya" laboratoriyasi mudiri,
f.-m.f.d., professor*

urolmakh@gmail.com

*Aslonov Bobirjon Ashurovich,
O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi,
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti tayanch doktoranti*

*Shodiyeva Dildora Soatmurot qizi,
Mirzo Ulug'bek nomidagi
O'zbekiston Milliy universiteti magistranti*

Annotatsiya. C₇₀/benzol/suv ternar eritmalaridagi fullerenning agregatsiya xususiyati va optik evolyutsiyasi refraktometriya, UB-ko'rinadigan yutilish spektroskopiyasi va gidrodinamik o'lcham taqsimoti tahlili yordamida o'rganildi. Kichik suv fraktsiyalarida (0–10 vol%) eritma tayyorlangandan so'ng darhol 640, 617 va 601 nm da yutilish intensivligining sezilarli darajada oshishi, shuningdek, yuqori sindirish ko'rsatkichlari, sirtlararo erituvchining siljishi va π–π-ustma-ust tushadigan o'zaro ta'sirlar natijasida katta optik zich agregatlarning tez shakllanishi kuzatildi. Yetti kunlik saqlash davomida sindirish ko'rsatkichi ham, optik yutilish ham sezilarli darajada pasaydi, bu dastlab hosil bo'lgan klasterlarning cho'kishi, qayta tashkil etilishi va optik yo'ldan qisman olib tashlanishini ko'rsatadi. Gidrodinamik o'lcham o'lchovlari 100–130 nm o'lchamdagi agregatlar ustunlik qiladigan keng multimodal taqsimotdan 40–90 nm oralig'ida joylashgan torroq, termodinamik barqarorlashgan holatlarga aniq o'tishni ko'rsatdi. Ushbu natijalar C₇₀ agregatsiyasi klaster o'sishining tez, kinetik jihatdan boshqariladigan bosqichidan hamda so'ngra agregat cho'kishi va kamayishi bilan kechadigan termodinamik barqarorlashuvning sekinroq bosqichi kabi ikki bosqichli evolyutsion yo'ldan iborat ekanligini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: C₇₀ fulleren, sindirish ko'rsatkichi, ternar eritma, optik yutilish, agregatsiya dinamikasi, erituvchi ta'siri.

**ИЗМЕНЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ И РАЗМЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРНАРНЫХ
РАСТВОРОВ C₇₀/БЕНЗОЛ/ВОДА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ОБЪЕМНЫХ ДОЛЯХ ВОДЫ**

Аннотация. С помощью рефрактометрии, УФ-видимой абсорбционной спектроскопии и анализа гидродинамического распределения размеров изучались агрегационное поведение и оптическая эволюция фуллера в тройных растворах C₇₀/бензол/вода. Сразу после приготовления раствора в небольших объёмных долях воды (0–10%) наблюдалось значительное увеличение интенсивности поглощения при 640, 617 и 601 нм, а также быстрое образование крупных оптически плотных агрегатов за счёт высоких показателей преломления, вытеснения растворителя на границе раздела фаз и π–π-стекинг-взаимодействий. В течение семи дней хранения как показатель преломления, так и оптическое поглощение значительно снижались во всех составах, что указывает на седиментацию, реорганизацию и частичное удаление первоначально образовавшихся кластеров из оптического пути. Измерения гидродинамических размеров выявили чёткий переход от широкого многомодального распределения, в котором преобладают агрегаты размером 100–130 нм, к более узким, термодинамически стабилизированным состояниям, сосредоточенным в диапазоне 40–90 нм. Эти результаты подтверждают, что агрегация C₇₀ следует двухступенчатому эволюционному пути, состоящему из быстрой, кинетически контролируемой фазы роста кластеров, за которой следует более медленная фаза термодинамической стабилизации, характеризующаяся сжатием агрегатов и седиментацией.

Ключевые слова: фуллерен C₇₀, показатель преломления, тернарный раствор, оптическое поглощение, динамика агрегации, влияние растворителя.

**CHANGES IN OPTICAL AND DIMENSIONAL CHARACTERISTICS OF TERNARY
C₇₀/BENZENE/WATER SOLUTIONS AT DIFFERENT VOLUME FRACTIONS OF WATER**

Abstract. The aggregation behavior and optical evolution of fullerene in C₇₀/benzene/water ternary solutions were studied using refractometry, UV-visible absorption spectroscopy, and hydrodynamic size

distribution analysis. Immediately after solution preparation in small water fractions (0–10 vol%), a significant increase in absorption intensity at 640, 617, and 601 nm was observed, as well as the rapid formation of large optically dense aggregates due to high refractive indices, interfacial solvent displacement, and π – π stacking interactions. Over the course of seven days of storage, both the refractive index and optical absorption significantly decreased in all formulations, indicating sedimentation, reorganization, and partial removal of initially formed clusters from the optical path. Hydrodynamic size measurements revealed a clear transition from a broad multimodal distribution dominated by aggregates of 100–130 nm in size to narrower, thermodynamically stabilized states centered in the 40–90 nm range. These results confirm that C₇₀ aggregation follows a two-step evolutionary pathway consisting of a rapid, kinetically controlled phase of cluster growth, followed by a slower phase of thermodynamic stabilization characterized by aggregate shrinkage and sedimentation.

Keywords: C₇₀ fullerene, refractive index, ternary solution, optical absorption, aggregation dynamics, solvent effects.

Kirish. Fullerenlar, xususan C₆₀ va C₇₀ kabi yuqori simmetriyaga ega uglerod nanostrukturalari, o‘zining noyob elektron, optik va molekulyar tuzilish xususiyatlari tufayli so‘nggi yillarda nanomateriallar kimyosi, optik elektronika, bio-sensorika va fotokimyoviy jarayonlar sohasida keng qamrovli ilmiy qiziqishga sabab bo‘lmoqda [1-4]. Ayniqsa, C₇₀ fullerenining cho‘zilgan ellipsoidal tuzilishi, molekuladagi π -elektronlarning yuqori delokalizatsiyasi va nisbatan murakkab yutilish spektrlari uni noan’anaviy optik muhitlar, aralash eritmalar va nanoagregatsiya jarayonlarini o‘rganish uchun ideal model tizimga aylantiradi [5]. Fullerenlarning eritmadagi optik faol xatti-harakati ko‘p jihatdan ularning disperslanish darajasi, solvatatsiya tabiatiga, fazalararo taqsimlanishiga va agregatsiya–deagregatsiya muvozanatiga bog‘liq bo‘ladi. Shu sababli, turli organik va suvli muhitlarda fulleren agregatsiyasining evolyutsiyasini o‘rganish nafaqat fundamental ahamiyatga ega, balki barqaror fotonik materiallar va nanooptik tizimlar yaratishda hal qiluvchi omil bo‘lib xizmat qiladi.

Benzol va suv kabi o‘zaro aralashmaydigan ikki suyuqlikdan tashkil topgan muhitlarda C₇₀ ning o‘zini tutishi yanada murakkablashadi, chunki bunday tizimda fulleren molekulari erituvchilararo interfeysga taqsimlanadi, bu esa tezkor klasterlashuv, supramolekulyar yig‘ilish, solvatatsiya qobig‘i o‘zgarishi va dispers fazaning buzilishi kabi jarayonlarning bir vaqtning o‘zida kechishiga olib keladi [6-8]. Ternar (uch komponentli) tizimlar uchun xos bo‘lgan bunday murakkab solvatatsion muhit C₇₀ agregatsiyasining kinetik va termodinamik bosqichlarini farqlash imkonini beradi hamda ularning uzoq muddatli barqarorligini chuqur tahlil qilishga imkon yaratadi.

Hozirgi kunga qadar fullerenlarning optik xususiyatlari, ularning organik eritmalaridagi solvatatsiya xatti-harakati va agregatsiya jarayonlari to‘g‘risida ko‘plab tadqiqotlar olib borilgan bo‘lsa-da [9-12], C₇₀ ning suvning turli hajm ulushlarida uch fazali benzol/suv muhitida agregatsiyalanish xususiyatlari va o‘lcham taqsimotining dinamik evolyutsiyasi yetarlicha o‘rganilmagan. Aynan suvning 0–10 % oralig‘idagi kichik qo‘shimchalari ham fulleren molekularining optik signallariga, yutilish intensivligiga, sindirish ko‘rsatkichiga va gidrodinamik radiusga sezilarli darajada ta‘sir ko‘rsatishi ilmiy nuqtai nazaridan muhim va dolzarb masaladir. Bu hol, ayniqsa, C₇₀ ning bosqichma-bosqich agregatsiyalanish jarayonini modellashtirish, kinetik va termodinamik rejimlarni farqlash hamda barqaror va beqaror klasterlar tabiatini aniqlashda alohida ahamiyat kasb etadi.

Mazkur tadqiqot yangi tayyorlangan va uzoq muddatli saqlashdan keyin uch komponentli C₇₀/benzol/suv tizimida suvning turli hajm ulushlari qo‘shilganda fulleren nanoagregatlarining optik va o‘lcham xususiyatlaridagi o‘zgarishlarni kompleks baholashni maqsad qilgan.

Materiallar va metodlar. Tajribalarda C₇₀ fullereni (>99.5% tozalikda) Sigma Aldrich (AQSh) kompaniyasidan keltirilgan, uni hech qanday qo‘shimcha tozalashlarsiz ishlatilgan. Erituvchilar sifatida benzol (Sigma Aldrich, AQSh) hamda bir marta distillangan toza suv ishlatilgan. Tajribalar davomida namunalarni yorug‘lik ta‘sirida zararlanishni minimallashtirishga e‘tibor qaratilgan. Tadqiqotda C₇₀ fulleren benzolda eritilib, unga suvning 0–10 % hajmiy ulushlari qo‘shildi. C₇₀ ning eritmadagi konsentratsiyasi ~0.1 mg/ml darajada saqlandi. Nur sindirish ko‘rsatkichi (n), optik yutilish spektri va morfologik o‘lchashlar yangi tayyorlangan eritmalar va 7 sutka davomida saqlangandan so‘ng o‘lchandi. O‘lchovlar bir xil harorat va optik sharoitlarda amalga oshirildi.

C₇₀/benzol/suv eritmalarining nur sindirish ko‘rsatkichi Atago PAL-BX/RI raqamli refraktometr yordamida aniqlandi (o‘lchash xatoligi <0.0001). O‘lchashlar natriyning yaqin turgan ikki sariq chizig‘i to‘lqin uzunliklarining o‘rtachasi 589.3 nm bo‘lgan to‘lqin uzunlikda amalga oshirilgan.

Eritmalarning UV-ko‘rinuvchi yutilish spektrlari Shimadzu UV-2700 spektrofotometri (Shimadzu, Yaponiya) yordamida yozib olingan. Berilgan barcha spektrlar fon tuzatishlari bilan taqdim etilgan.

Eritmalardagi C_{70} nanoklasterlarining oʻrtacha gidrodinamik oʻlchamini va ularning eritmalarida taqsimlanishini aniqlash uchun Nanosight LM10Zetasizer (Malvern Instruments Ltd.) qurilmasida yorugʻlikning dinamik sochilishi (YDS) metodidan foydalanildi.

Natijalar va ularning tahlili. 1-jadvalda vaqt oʻtishi bilan suvning turli hajm ulushlarida C_{70} /benzol/suv eritmalarida sindirish koʻrsatkichi qiymatlarining evolyutsiyasi umumlashtirilgan. Jadvaldan koʻrinadiki, yangi eritmada suv ulushi 0–10 % oraligʻida oshirilganda sindirish koʻrsatkichi 1.5005 dan 1.3506 gacha muntazam tarzda kamayadi. Bu tendensiya aralashmaning optik zichligi kamayishi va C_{70} ning disperslanish xususiyatining oʻzgarishi bilan bogʻliq. Bu holda benzolning n qiymati yuqori ($n \approx 1.501$) va suvning n qiymati past ($n \approx 1.333$) ekanligi maʼlum, suv ulushi ortishi aralashmaning umumiy optik zichligini kamaytiradi. Shu sababli, suvning har 2 % ortishi refraksiyaning izchil pasayishiga olib keladi. Undan tashqari yangi eritmada suvning paydo boʻlishi benzolning C_{70} ni eritish qobiliyatini pasaytiradi, fulleren molekulariga mikroagregatsiya jarayonlarini boshlaydi, bu esa eritmaning optik zichligini pasaytiradi. Bu holat n dagi pasayish bilan mos keladi.

Eritma 7 sutka saqlangandan keyin n ning oʻzgarishi yana sezilarli tushgan (1-jadval). Ayniqsa eng katta oʻzgarish 4–6 % suv ulushlarida $\Delta n \approx -0.1276$ – -0.1449 koʻrinishida sodir boʻlgan. Sababi bu holda C_{70} ning yirik agregatlari choʻkish va tizim termodinamik muvozanatga yaqinlashgan boʻlishi mumkin. Jarayon dastlab benzol/suv interfeysida hosil boʻlgan yirik klasterlar ogʻirlik taʼsirida choʻkish, natijada eritma yuqori qatlamida C_{70} konsentratsiyasi keskin kamayishi hisobiga n pastlashiga olib keladi. Undan tashqari boshlangʻichda kinetik jihatdan beqaror boʻlgan eritma vaqt oʻtishi bilan fazalar boʻlinishi, suv tomchilari va benzolning oʻzaro diffuziyasi sekinlashishi va optik xossalar barqarorlashishi ham sodir boʻladi. Jadvaldan koʻrinib toʻribdiki, suv ulushi yuqori (>8 %) boʻlgan holatlarda Δn yana kamayadi. Bu shuni bildiradiki, yuqori suv ulushida eritma allaqachon ikki fazali holatga yaqinlashadi, C_{70} ning asosiy qismi suv interfeysida agregatlangan holatga oʻtib, 7 sutkada qoʻshimcha agregatsiya nisbatan kam sodir boʻlishiga olib keladi.

1-jadval.

Suvning turli hajm ulushlarida C_{70} /benzol/suv eritmalarida sindirish koʻrsatkichi (n) qiymatlarining vaqt oʻtishi bilan evolyutsiyasi. Eritmadagi C_{70} konsentratsiyasi ~ 0.1 mg/ml ni tashkil qiladi

Eritmadagi suvning hajm ulushi, %	n ning qiymatlari		Farq (Δn)
	Yangi eritma	Eritma 7 sutka saqlangan	
0	1.5005	1.5004	-0.0001
2	1.5001	1.4940	-0.0061
4	1.4999	1.3550	-0.1449
6	1.4585	1.3309	-0.1276
8	1.3590	1.3326	-0.0264
10	1.3506	1.3324	-0.0182

2-jadvalda yangi tayyorlangan C_{70} /benzol/suv eritmalarida suvning turli hajm ulushlaridagi optik yutilish qiymatlarining (A_1 , A_2 , A_3) oʻzgarish evolyutsiyasi keltirilgan. A_1 , A_2 , A_3 mos holda yorugʻlik toʻlqin uzunliklari 640 nm, 617 nm va 601 nm boʻlgan xarakterli piklardagi yutilish qiymatlaridir. Eritmada C_{70} konsentratsiyasi oʻzgarmas va ~ 0.1 mg/ml. Koʻrinib turibdiki, eritma tayyorlangan zahoti oʻlchangan optik yutilish qiymatlari suv ulushi oshishi bilan keskin ortgan (A_1 boʻyicha 3471 dan 95910 gacha, A_2 boʻyicha 4987 dan 115960 gacha, A_3 boʻyicha 7196 dan 145200 gacha). Yutilishning bunday ortishi asosan suv qoʻshilishi bilan C_{70} ning tezkor agregatsiyalanishi bilan bogʻliq boʻlishi mumkin. Benzol–suv tizimi aralashmaydigan ikki fazali boʻlib, suv ulushining ortishi C_{70} molekularini benzol fazasidan siqib chiqaradi. Bu jarayon π – π stacking, klaster–klaster yopishishi va suv/benzol interfeysida yirik agregatlar hosil boʻlishi bilan kechadi. Hosil boʻlgan yirik klasterlar yorugʻlikning 640, 617 va 601 nm toʻlqin uzunliklarida kuchli yutilish beradi. Ayniqsa 601 nm (A_3) pikining juda intensiv boʻlishi C_{70} agregatlarining oʻlcham va zichlik jihatidan katta ekanligini koʻrsatadi. Tayyorlangan zahoti kuzatilgan keskin optik yutilish oʻsishi tizimning hali barqaror emasligini, yaʼni zarrachalar orasidagi tezkor oʻlcham oshishi jarayonini koʻrsatadi.

Yangi tayyorlangan C₇₀/benzol/suv eritmalarida suvning turli hajm ulushlaridagi optik yutilish qiymatlarining (A₁, A₂, A₃) o'zgarish evolyutsiyasi. C₇₀~0.1mg/ml.

Eritmadagi suvning hajm ulushi, %	Optik yutilish qiymatlari		
	A ₁ (λ ₁ =640 nm)	A ₂ (λ ₂ =617 nm)	A ₃ (λ ₃ =601 nm)
0	3471	4987	7196
2	23 782	25 186	27300
4	55450	69280	90200
6	61670	76580	98060
8	91080	117 200	154 960
10	95910	115 960	145 200

3-jadvalda tayyorlanganidan 7 sutkadan so'ng C₇₀/benzol/suv eritmalarida suvning turli hajm ulushlaridagi optik yutilish qiymatlarining (A₁, A₂, A₃) o'zgarish evolyutsiyasi keltirilgan. Ko'rinib turibdiki, 7 sutkadan so'ng eritmada suv ulushidan qat'i nazar optik yutilish intensivliklari keskin kamaygan. Bu pasayish tizimda yirik va optik zich agregatlarning gravitatsion cho'kishi va termodinamik barqaror holatga o'tish jarayonlari yuz berganligini bildiradi. Tizim tayyorlangandan so'ng hosil bo'lgan yirik agregatlar vaqt o'tishi bilan og'irligi sababli cho'kadi. Natijada yuqori qatlamda optik yutilish beruvchi zarrachalar konsentratsiyasi pasayadi. Qolaversa, vaqt o'tishi bilan agregatlar qayta tashkil topishi, kichikroq va barqaror dispers faza hosil bo'lishi va optik yutilish piklari o'zaro yaqinlashishi sodir bo'lib, bu tizimning kinetik bosqichdan termodinamik muvozanatga o'tganini ko'rsatadi. Boshlang'ich vaqtda suv ulushining keskin ta'siri bo'lgan bo'lsa, 7 sutkada natijalar bir-biriga ancha yaqinlashgan. Bu suv ulushi qanchalik ko'p bo'lsa ham, tizim oxir-oqibat bir xil barqaror optik xususiyatga ega bo'lishini ko'rsatadi.

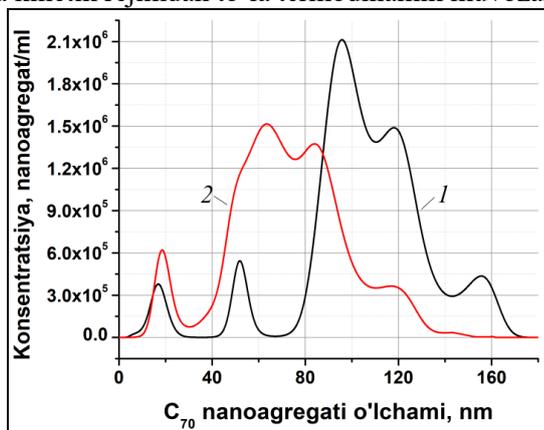
Tayyorlanganidan 7 sutkadan so'ng C₇₀/benzol/suv eritmalarida suvning turli hajm ulushlaridagi optik yutilish qiymatlarining (A₁, A₂, A₃) o'zgarish evolyutsiyasi. C₇₀~0.1mg/ml.

Eritmadagi suvning hajm ulushi, %	Optik yutilish qiymatlari		
	A ₁ (λ ₁ =640 nm)	A ₂ (λ ₂ =617 nm)	A ₃ (λ ₃ =601 nm)
0	2815	3203	3388
2	10 537	12 658	15 123
4	8432	10 863	13 632
6	19 896	22 087	24 921
8	37860	38170	38220
10	40 915	40000	40000

1-rasmda suvning 4% hajm ulushida C₇₀/benzol/suv eritmalarida hosil bo'lgan C₇₀ nanoagregatlarining gidrodinamik o'lchamlari taqsimoti berilgan. 4% suv ulushiga ega C₇₀/benzol/suv tizimida nanoagregatlar o'lcham taqsimotining evolyutsiyasi yangi tayyorlangan eritma (1-egri chiziq) va 7 sutka davomida saqlangan eritma (2-egri chiziq) uchun taqqoslanganda tizimning kinetik-termodinamik harakati yaqqol namoyon bo'ladi. Yangi eritma uchun kuzatilgan keskin ifodalangan piklar 20–35 nm, 60–70 nm va 90–130 nm oralig'ida yirik va turli o'lchamli agregatlarning ustunligini ko'rsatadi. Ayniqsa, 100–130 nm diapazonidagi maksimal pik konsentratsiyaning 2.0×10⁶ agregat/ml gacha yetishi bilan sistema boshlang'ich holatda yirik klasterlarning ko'p miqdorda shakllanganini tasdiqlaydi (1-rasm, 1-egri chiziq). Bu holat suvning benzolga qo'shilishi natijasida fullerenga boy fazaning suv-benzol interfeysiga siqilishi va π-π stacking asosida tezkor klasterlashuv boshlanishi bilan izohlanadi. Shu sababli yangi tayyorlangan eritma kinetik jihatdan beqaror, o'lchamlari bo'yicha keng tarqalgan, yuqori dispers bo'lmagan agregatlar bilan tavsiflanadi.

7 sutkadan keyingi taqsimot (2-egri chiziq) esa tizimning termodinamik barqarorlashuv bosqichiga o'tganini ko'rsatadi. Birinchidan, barcha diapazonlarda maksimal konsentratsiya sezilarli kamaygan bo'lib, 1.5×10⁶ agregat/ml dan past qiymatlarga tushgan. Ikkinchidan, taqsimotning o'rtacha markazi chapga siljigan, ya'ni yirik agregatlar konsentratsiyasi kamaygan, o'rniga 40–90 nm oralig'ida nisbatan kichik, barqaror nanoagregatlarning ustun qismi shakllangan. Uchinchi muhim holat 100–130 nm diapazonidagi yirik klasterlarning sezilarli darajada yo'qolishi yoki keskin kamayishi bo'lib, bu yirik agregatlarning vaqt o'tishi bilan gravitatsion cho'kish, agregatlarning parchalanishi yoki qayta tashkil topishi orqali eritmaning faol optik qatlamidan olib tashlanganini ko'rsatadi. Ushbu o'zgarishlar 7 sutkalik eritmada

nanoagregatlarning gidrodinamik o'lchamlari umuman olganda kamayganini, tizimning esa termodinamik jihatdan quyi energiya holatiga o'tganini tasdiqlaydi. Boshqacha aytganda, kinetik jihatdan tez shakllangan va metastabil bo'lgan yirik agregatlar vaqt o'tishi bilan barqaror emas, ular cho'kib ketadi yoki o'zaro qayta tashkil topib, kichikroq radiusli, dispersivligi yuqori bo'lgan nanoagregatlar majmuasini shakllantiradi. Natijada 7 sutka davomida sistema kinetik rejimdan to'la termodinamik muvozanatga yaqin holatga o'tadi.



1-rasm. C_{70} /benzol/suv eritmasida hosil bo'lgan C_{70} nanoagregatlarining gidrodinamik o'lchamlari taqsimoti: 1 - yangi eritma, 2 - 7 sutkalik eritma uchun. Eritmada suv 4% hajm ulushida, $C_{70} \sim 0.1$ mg/ml.

Shunday qilib, grafikdan olingan eksperimental ma'lumotlar C_{70} nanoagregatlarining 4% suv ulushida vaqt o'tishi bilan gidrodinamik o'lchami kamayishini ham sifat, ham miqdor jihatdan tasdiqlaydi. Bu jarayon erta bosqichda yirik agregatlar shakllanishi, keyinchalik ularning cho'kishi va dispersiyaning qayta barqarorlashuvi bilan bog'liq bo'lib, C_{70} ning kolloid barqarorligi suv qo'shilishi fonida kinetikdan termodinamik rejimga o'tishini ko'rsatadi. Mazkur natijalar fulleren asosidagi suyuq fazali tizimlarning uzoq muddatli optik barqarorligini baholashda muhim ilmiy ahamiyat kasb etadi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda C_{70} /benzol/suv ternar eritmada suvning kichik hajm ulushlari qo'shilganda fullerenga xos optik va kolloid xossalarning evolyutsiyasi refraktometrik, optik yutilish va gidrodinamik o'lchamlar tahlili asosida baholandi. Eksperimental natijalar suvning ortishi bilan sindirish ko'rsatkichi n ning muntazam kamayishi va optik yutilish piklarining (A_1 – A_3) keskin oshishi tizimning boshlang'ich (kinetik) bosqichida yirik, zich va beqaror agregatlar tezkor shakllanishi bilan bog'liqligini ko'rsatdi. Bu jarayon fullerenga boy organik fazaning suv–benzol interfeysiga siqilishi va π – π stacking asosidagi klasterlashuvning kuchayishi natijasida sodir bo'ldi.

Eritmalar 7 sutka davomida saqlanganda optik yutilish intensivliklarining sezilarli kamayishi va sindirish ko'rsatkichining pasayishi yirik kinetik agregatlarning vaqt o'tishi bilan cho'kishi yoki qayta tashkil topishi natijasida eritmaning faol optik qismidan yo'qolganini ko'rsatdi. Nanoagregatlarning o'lcham taqsimoti ham ushbu xulosa bilan to'liq mos keladi: yangi tayyorlangan eritmada 100–130 nm diapazonidagi yirik agregatlar ustun bo'lgan bo'lsa, 7 sutkadan keyin o'lcham taqsimoti 40–90 nm oralig'iga siljidi va maksimal konsentratsiya bir necha baravar pasaydi. Bu holat eritmaning kinetik rejimdan termodinamik barqaror fazaga o'tganini aniq tasdiqlaydi.

Shunday qilib, C_{70} nanoagregatlarining dispersiv xossalari suv qo'shilishiga va vaqt omiliga sezilarli darajada bog'liq bo'lib, tizimning optik va kolloid barqarorligi kinetik o'zgaruvchan bosqichdan termodinamik barqaror bosqichga evolyutsiyalanadi. Ushbu natijalar C_{70} asosidagi optik faol kolloid tizimlarning barqarorligini baholash, yangi optik materiallar, sensor tizimlar va fullerenga asoslangan kompozit eritmalarini loyihalashda muhim ilmiy asos bo'lib xizmat qiladi.

Ushbu ish O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining Fundamental tadqiqotlar jamg'armasi va O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiya vazirligining loyihasi (FL-8323102108) tomonidan qo'llab-quvvatlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Deguchi S., Alargova, R.G., Tsujii K. Stable dispersions of fullerenes, C_{60} and C_{70} , in water. Preparation and characterization. *Langmuir*, 2001, 17, 6013–6017. <https://doi.org/10.1021/la010651o>
2. Sachdeva S., Singh D., Tripathi S.K. Optical and electrical properties of fullerene C_{70} for solar cell applications. *Opt. Mater.*, 2020, 101, 109717. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2020.109717>

3. Pilehvar S., De Wael K. Recent advances in electrochemical biosensors based on fullerene-C₆₀ nano-structured platforms. *Nanocarbons for Electroanalysis*, 2017, 173-196. <https://doi.org/10.1002/9781119243915.ch7>
4. Paukov M., Kramberger C., Begichev I., Kharlamova M., Burdanova M. Functionalized fullerenes and their applications in electrochemistry, solar cells, and nanoelectronics. *Materials*, 2023, 16, 1276. <https://doi.org/10.3390/ma16031276>
5. Baskar A.V., Benzigar M.R., Talapaneni S.N., Singh G., Karakoti A.S., Yi J., Vinu A. Self-assembled fullerene nanostructures: synthesis and applications. *Adv. Funct. Mater.*, 2022, 32, 2106924. <https://doi.org/10.1002/adfm.202106924>
6. Mchedlov-Petrosyan N.O. Fullerenes in liquid media: an unsettling intrusion into the solution chemistry. *Chem. Rev.*, 2013, 113, 5149-5193. <https://doi.org/10.1021/cr3005026>
7. Diederich F., Gómez-López M. Supramolecular fullerene chemistry. *Chem. Soc. Rev.*, 1999, 28, 263-277. <https://doi.org/10.1039/A804248I>
8. Makhmanov U.K., Esanov S.A., Aslonov B.A., Chuliev T.A. Stability of self-organization of C₆₀ fullerene molecules in xylene/ethanol and xylene/ethanol/water mixtures. *Adv. Nat. Sci: Nanosci. Nanotechnol.*, 2025, 16, 025010-025016. <https://doi.org/10.1088/2043-6262/adc4c6>
9. Mchedlov-Petrosyan N.O., Marfunin M.O., Kriklya N.N. Colloid chemistry of fullerene solutions: Aggregation and coagulation. *Liquids*, 2023, 4, 32-72. <https://doi.org/10.3390/liquids4010002>
10. Nath S., Pal H., Sapre A.V. Effect of solvent polarity on the aggregation of fullerenes: a comparison between C₆₀ and C₇₀. *Chem. Phys. Lett.*, 2002, 360, 422-428. [https://doi.org/10.1016/S0009-2614\(02\)00780-7](https://doi.org/10.1016/S0009-2614(02)00780-7)
11. Makhmanov U.K., Kokhkharov A.M., Bakhramov S.A., Shukurov A.X., Esanov S.A., Bekmurodov Z., Musurmonov K.N. Peculiarities of C₇₀ fullerene in a binary mixture of xylene and tetrahydrofuran. *Rom. J. Phys.*, 2025, 70, 617-624. <https://doi.org/10.59277/RomJPhys.2025.70.617>
12. Kyzyma O.A., Avdeev M.V., Bolshakova O.I., Melentev P., Sarantseva S.V., Ivankov O.I., Bulavin L.A. State of aggregation and toxicity of aqueous fullerene solutions. *Appl. Surf. Sci.*, 2019, 483, 69-75. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2019.03.167>

Si(111) SIRTIDA YUQORI DOZA ION IMPLANTATSIYASI NATIJASIDA PLAZMON ENERGIYASI KAMAYISHINING NAZARIY TAHLILI

Abrayeva Sevara Toshtemirovna,
Termiz iqtisodiyot va servis universiteti,
fizika-matematika fanlari falsafa doktori (PhD)
ORCID: 0009-0003-9401-8905
sevara_abrayeva@tues.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada katta dozali ion implantatsiyasi jarayonida Si(111) monokristalli sirtidagi valent elektronlarning sirt va hajm plazma tebranishlari qo'zg'alish energiyasining kamayishi bilan bog'liq bo'lgan eksperimental effekting nazariy izohi keltirilgan. Taqdim etilgan model elektron gazning ikki suyuqlikli nazariyasiga asoslanadi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, kuzatilgan plazmon energiyasining pasayishi Si(111) kristallining to'liq amorflanishigacha bo'lgan buzilishi jarayonida valent elektron tebranishlarining kuchli susayishi bilan izohlanadi. Bundan tashqari, aralashma ionlari yadro elektronlarining barqaror holatdagi qutblanishi ham yarimo'tkazgichdagi plazmonlarning energiya yo'qotish cho'qqilarining siljishiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: past energiyali ion implantatsiyasi, valent elektronlarining sirt va hajm plazma tebranishlarining qo'zg'alish energiyasi, sirt amorfizatsiyasi, elektron plazma tebranishlarining susayishi, dielektrik xususiyatlar, ikki suyuq elektron gaz modeli.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УМЕНЬШЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПЛАЗМОНОВ ПРИ ВЫСОКОДОЗНОЙ ИМПЛАНТАЦИИ ИОНОВ НА ПОВЕРХНОСТЬ Si(111)

Аннотация. В данной статье представлено теоретическое объяснение экспериментально обнаруженного эффекта снижения энергии возбуждения поверхностных и объёмных плазменных колебаний валентных электронов Si(111) при ионной имплантации с большой дозой. Предложенная модель основана на двухжидкостной (two-fluid) модели электронного газа. Показано, что наблюдаемое снижение энергии плазмонов объясняется сильным затуханием колебаний валентных электронов, возникающим в процессе разупорядочения кристаллической структуры Si(111) вплоть до её полной аморфизации. Кроме того, установлено, что поляризация ядерных электронов примесных ионов в стационарном состоянии оказывает значительное влияние на смещение пиков потерь энергии, связанных с возбуждением плазмонов в полупроводнике.

Ключевые слова: низкоэнергетическая ионная имплантация, энергия возбуждения поверхностных и объёмных плазменных колебаний валентных электронов, аморфизация поверхности, затухание электронных плазменных колебаний, диэлектрические свойства, модель двухжидкостного электронного газа.

THEORETICAL ANALYSIS OF PLASMON ENERGY REDUCTION IN HIGH-DOSE ION IMPLANTATION ON Si(111) SURFACE

Abstract. This paper presents a theoretical explanation of the experimentally observed effect of the decrease in the excitation energy of surface and bulk plasma oscillations of valence Si(111) electrons during high-dose ion implantation. The proposed model is based on the two-fluid model of the electron gas. The results show that the observed decrease in plasmon energy can be explained by strong damping of valence electron oscillations caused by the disordering of the Si(111) crystal structure up to its full amorphization. In addition, it is shown that the polarization of the core electrons of impurity ions in their stationary state significantly affects the shift of energy loss peaks associated with plasmon excitations in the semiconductor.

Keywords: low-energy ion implantation, excitation energy of surface and bulk plasma oscillations of valence electrons, surface amorphization, damping of electron plasma oscillations, dielectric properties, two-fluid electron gas model.

Kirish. So'nggi yillarda nanomateriallarga bo'lgan ilmiy qiziqish keskin ortib bormoqda. Bu yo'nalishdagi tadqiqotlar sonining yil sayin eksponensial o'sishi nanokristall moddalarning ko'plab noyob xususiyatlari aniqlanishi bilan izohlanadi. Nanosistemalarda o'leham-kvantlash effektlarining namoyon

bo'lishi — xususan, kvant nuqtalarining hosil bo'lishi, eksiton lokalizatsiyasi tufayli polosali bo'shliq kengligining o'zgarishi va plazmon rezonansining paydo bo'lishi — ularni alohida ilmiy ahamiyatga egaligidadir[1, 2].

Eksperimental tadqiqotlar natijalarida [3–5] Ba⁺, hamda ishqoriy element ionlari implantatsiya qilingan Si(111) namunalarda elektronlarning xarakterli energiyasini (E = 30–300 eV) yo'qotish spektrlari o'rganilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, implantatsiya dozasi bilan sirt va hajm plazmonlarining energiyasi sezilarli darajada pasayadi. Ushbu maqolada katta dozada ion implantatsiyasi (xususan, Ba va ishqoriy element ionlari uchun) paytida Si(111) plazmon energiyasining pasayish effekti uchun nazariy tushuntirish olib borildi.

Adabiyotlar tahlili va metodlar. Tadqiqot obyekti sifatida 6000 Ω·sm⁻¹ qarshilikka ega bo'lgan n- va p-turdagi Si(111) monokristallari tanlab olindi. Namunalar ikki bosqichli termik ishlov berish orqali tozalandi: birinchi bosqichda — 1200 K haroratda 60 daqiqa davomida, ikkinchi bosqichda esa 1500 K haroratda 1 daqiqa davomida qisqa muddatli qizdirish amalga oshirildi. Bundan tashqari, [12] mualliflari tomonidan taklif etilgan, sirt sohasida ichki oluvchi qatlamni hosil qilishni o'z ichiga olgan yangi tozalash usuli ham qo'llanildi. Ushbu usul past energiyali (5 keV gacha) Ba yoki ishqoriy element ionlarini implantatsiya qilish hamda olingan oluvchi qatlamni qisqa muddatli yuqori haroratli qizdirish orqali ketma-ket olib tashlash bosqichlarini o'z ichiga oladi.

Eksperimental natijalar va muhokama. Ushbu maqolaning asosiy maqsadi — past energiyali Ba va ishqoriy element ionlarini implantatsiya qilish jarayonida Si(111) va Si(100) kristallarida hajm va sirt plazma tebranishlarining qo'zg'alish energiyasining kamayishi bilan bog'liq eksperimental ravishda aniqlangan effektning nazariy talqinini berishdan iboratdir.

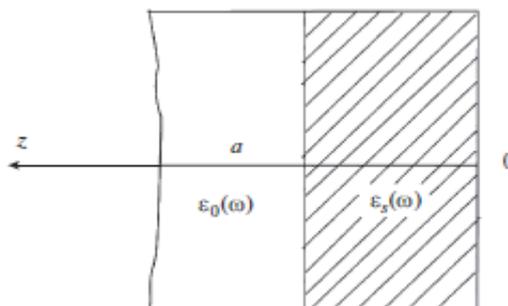
Si(111) va Si(100) sirtlarining kristall tuzilmasida yuz beradigan o'zgarishlar 0,5–5 keV energiyaga ega ishqoriy elementlar Ba⁺ ionlarini implantatsiya qilish jarayonida sekin elektronlar difraksiyasi usuli yordamida o'rganildi. Tadqiqot natijalariga ko'ra, ma'lum bir kritik ion dozasi (D_a) dan boshlab Si sirtining to'liq amorf holatga o'tishi kuzatildi. Shuningdek, ma'lum ion turi uchun implantatsiya energiyasi ortishi bilan D_a qiymatining kamayish tendensiyasi aniqlangan. 1-jadvalda turli energiyalarga ega Li⁺, Na⁺, K⁺, Rb⁺, Cs⁺ va Ba⁺ ionlarini implantatsiya qilish natijasida Si(111) yuzasi uchun o'lchangan D_a qiymatlari keltirilgan.

1-jadval.

Si(111)/Si(100) sirt amorfizatsiyasining minimal dozalari

Ion energiyasi E ₀ , eV	Si (111)/Si (100) sirtning amorfizatsiya dozasi D _a , ×10 ¹⁵ sm ⁻²					
	Li ⁺	Na ⁺	K ⁺	Rb ⁺	Cs ⁺	Ba ⁺
500	10/12	7/9	6/8	6/8	4/6	4/5
1000	7/8	5/7	5/7	5/7	2/4	1/3
2000	5/7	3/5	3/4	4/3	1/2	0.7/1
3000	3/5	1/3	0.8/2	0.7/1	0.6/1	0.6/0.9
4000	1/1.5	0.8/1.2	0.9/1.2	0.5/0.8	0.4/0.5	0.3/0.6
5000	0.5/1	0.3/0.6	0.2/0.4	0.1/0.2	0.09/0.1	0.08/0.1

Ion implantatsiya qilingan Si da asosiy nur energiya yo'qotishlari spektrini aniqlash uchun biz sirt qatlamining quyidagi eng sodda tuzilmasidan boshlaymiz. Sirt qatlamida zararlangan qatlam *a* mavjud bo'lib, u zararlanmagan sof Si bilan tutashadi, bu esa qolgan yarim fazani egallaydi (1-rasm).



1-rasm. Ikkita o'zaro ta'sir qiluvchi "suyuqlik"

Rasmda $a > z > 0$ *a* sohasi zararlangan qatlam, $z > a$ *z* sohasi esa sof material mintaqasini ifodalaydi.

$$\epsilon_0(\omega) = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{(\omega - i\nu)^2} \quad (1)$$

Sof material dielektrik o'tkazuvchanlik (1) bilan xarakterlanadi, bu yerda ω_{p0}^2 — plazmon chastotasi kvadrati, ν — tashqi ta'sirga materialning javobini o'rganish uchun tanlangan chastota. Shuningdek, ν — bu valent elektronlar tebranishlarning so'nishi va ω — sof Si valent elektronlarining tebranish chastotasi.

Uzun to'lqin uzunligi chegarasida ion bilan qo'shilgan yarimo'tkazgichning o'tkazuvchanligi quyidagi yig'indi shaklida yozilishi mumkin:

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_s(z) \quad (2)$$

bu yerda $\varepsilon_0(\omega)$ boshlang'ich sof yarimo'tkazgichning o'tkazuvchanligi, va

$$\varepsilon_s(\omega) = \frac{4\pi e^2}{m} N_{imp}(z) \sum_{i=\nu} \frac{Z_{eff,i}}{(\omega_{1c}^2 - \omega_{pv}^2)} \quad (3)$$

(3)-formuladagi yig'indi valentlik zonasi ostida joylashgan aralashma ionining barcha to'ldirilgan qobiqlarini o'z ichiga oladi; ya'ni,

$$\omega_{1c}^2 \gg \omega_{pv}^2; \omega_{pv}^2 = \frac{4\pi e^2 N_V}{m}$$

Yarimo'tkazgichlardagi valent elektronlarining plazma chastotasining kvadratini bildiradi; ω_{1c}^2 esa aralashma ionini yadro elektronlarining birinchi qobig'idan yarimo'tkazgichning o'tkazuvchanlik zonasiga o'tish chastotasining kvadratidir; $N_{imp}(z)$ - joylashtirilgan aralashma ionlarining chuqurlik bo'yicha taqsimot profili; va $Z_{eff,i} \rightarrow c$ o'tishida ishtirok etuvchi elektronlarning samarali soni deb hisoblanadi.

Bu yerda, (3)-formula bilan berilgan $\varepsilon(\omega, z)$ ning parchalanishi ma'lum darajada shartli ekanligini ta'kidlash lozim, chunki $\varepsilon_0(\omega)$ funksiyasi umumiy holda joylashtirilgan aralashmaga bog'liq bo'ladi. Bunday bog'liqlik, hatto boshqa hech qanday sabab bo'lmagan taqdirda ham, yarimo'tkazgich panjarasining konstantasi qo'shilish jarayonida o'zgarishi hamda $\varepsilon(\omega)$ ni aniqlovchi ω_{pv}^2 kattaligining shu o'zgarish bilan birga o'zgarishi natijasida yuzaga keladi. Nurlanish doza parametri

$$D = \int_0^{\infty} N_{imp}(z) dz$$

eksperimental sharoitlarga muvofiq berilgan miqdor sifatida qabul qilinadi. Keyingi nazariy mulohazalar nisbatan kichik nurlanish dozalari uchun amal qiladi, ya'ni D juda katta bo'lmagan hollarda $N_{imp}(z)$ taqsimoti $z = z_{max} > \nu/\omega_{pv}$ da aniq belgilangan maksimal qiymatga ega bo'ladi, ya'ni mahalliy dielektrik funksiyani $\varepsilon(\omega, z)$ ko'rib chiqish mumkin bo'ladi.

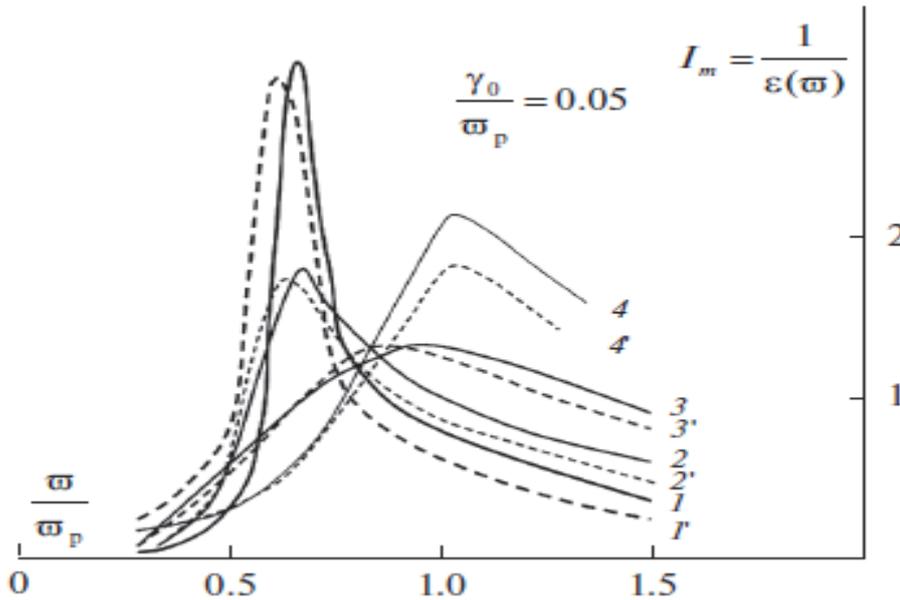
Ma'lumki, hajmli plazmonlarning spektridagi energiyasi maksimal pozitsiyasi hajmli plazmonlarning cho'qqisiga mos keladigan $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ funksiya bilan belgilanadi. Amorflangan qatlamda $\varepsilon(\omega)$ o'tkazuvchanlik $\varepsilon_0(\omega)$ dan ikki omilga ko'ra farq qiladi. Birinchidan, Si bilan birikma hosil qiluvchi implantatsiya qilingan Na (yoki Ba) ionlari $\omega_p < \omega_{p0}$ chastotasi va demping $\gamma \ll \omega_p$ bilan plazma tebranishlariga hissa qo'shadi. Ikkinchidan, shikastlangan qatlam mintaqasida valentlik elektronlari tizimida kuchayadi, shuning uchun bu holda

$$\varepsilon_s(\omega) = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{(\omega - i\gamma)^2} - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\gamma)^2} \quad (4)$$

$\gamma > \nu$ ga teng, bu amorfizatsiya natijasidir, uning mavjudligi sekin elektron difraksiyasini o'rganish tajribalari bilan tasdiqlangan. Bunday amorfizatsiya natijasida valentlik elektronlarining plazma tebranishlarining so'nishiga olib keladigan aralashmalar va amorf konsentratsiyasi keskin oshadi.

Sof Si da material tomonidan elektron energiyasining yo'qotilishi bilan o'lchanadigan spektri $J_m \frac{1}{\varepsilon_0(\omega)}$ funksiyasi bilan aniqlanadi, ion implantatsiya qilingan Si esa $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ funksiyasi bilan tavsiflanadi. $J_m \frac{1}{\varepsilon_0(\omega)}$ funksiyasining maksimal qiymati $\omega = \omega_p$ da ro'y beradi, bu holatda $\nu/\omega_p \ll 1$ bo'ladi. $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ funksiyasining maksimal qiymati $\frac{\gamma}{\omega_p}$ nisbatiga qarab $\omega = \omega_p$ ga nisbatan yuqori yoki past chastotalar diapazoniga siljishi mumkin. $\frac{\gamma}{\omega_p}$ qiymati qancha katta bo'lsa, maksimal qiymat ω_p dan kichik chastotalarga shuncha ko'p siljiydi.

2-rasmda $A = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_p^2} = 0,6$ va $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ ning qiymatlari va $\frac{Y}{\omega_p} = 0,05; 1,0; 1,5;$ va 2 bo'lgandagi bog'liqliklar ko'rsatilgan, bunda $\frac{Y}{\omega_p} = 0,05$. Spektral maksimal qiymat $\frac{Y}{\omega_p} \geq 1$ bo'lganda, amorflangan qatlam sohasidagi struktura kuchli yo'q qilinish tufayli $\omega < \omega_p$ diapazoniga siljiydi.



2-rasm. $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ ning $\frac{\omega}{\omega_p}$ ga bog'liqligi, $E_0 = 1$ keV bo'lgan Ba ionlari bilan implantatsiya qilingan

Si uchun. $A = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega_p^2} = 0,6$ va $\frac{Y_0}{\omega_p} = 0,5; 1,0; 1,5$ va 2 qiymatlari 4–1 egri chiziqchilarga mos keladi. 4'–1' egri chiziqchilari Na^+ ionlari bilan implantatsiya qilingan Si ga va 4–1 egri chiziqchilari, mos ravishda $10^{14}, 10^{15}, 10^{16}$ va 10^{17} sm^{-2} dozalari bo'lgan Ba^+ ionlari bilan mos keladi.

Shunday qilib, amorflangan qatlamdagi asosiy plazmon uchun EEL spektridagi xarakterli xususiyat valent elektronlari tizimida kuchli suspenziya sifatida namoyon bo'ladi va u metall Ba, Na hamda sof Si dagi plazma chastotalarining nisbati bilan bir xil tartibda kuzatiladi.

Tushgan elektron tomonidan asosiy plazmon qo'zg'alishi kesmada $J_m \frac{1}{\varepsilon_0(\omega)}$ va $J_m \frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ bog'liqliklarining nisbiy og'irligini va fazoviy jihatdan bir xil bo'lmagan muhitda plazmon qo'zg'alishi nazariyasi orqali aniqlash mumkin. Amorflangan qatlamdagi hajm yo'qotishlari spektrining og'irligi esa qatlam qalinligining λ_c uzunligiga nisbatan sezilarli darajada bog'liq bo'lib, bu holatda tushayotgan elektron uchun kogerentlik yo'qoladi.

Xulosa. Taqdim etilgan nazariy model Si(111) kristalli tuzilmasining to'liq amorflanishigacha bo'lgan buzilish jarayonida valentlik elektron tebranishlarining sezilarli susayishi natijasida, yuqori dozalarda Ba hamda ishqoriy element ionlarini implantatsiya qilish vaqtida Si plazmonlarining $\hbar\omega_V$ va $\hbar\omega_{\zeta\omega}$ energiyalarining kamayishi bilan bog'liq eksperimental kuzatuvlarni muvaffaqiyatli tushuntirib berdi.

Bundan tashqari, olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, aralashma ionlarining yadro elektronlarining barqaror holatdagi qutblanishi ion implantatsiyasi natijasida hosil bo'lgan yarimo'tkazgich muhitida plazmonlarning qo'zg'alish jarayonlariga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Bu ta'sir, o'z navbatida, energiya yo'qotish spektridagi cho'qqilarning siljishiga sabab bo'lishi aniqlandi.

ADABIYOTLAR:

1. A.S.Rysbaev, J.B. Khujaniyozov, and S.T.Abraeva *Theoretical Explanation of the Effect of a Decrease in the Si(111) Plasmon Energy during the Implantation of Ions with a Large Dose* ISSN 1027-

4510, *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 816–822.

2. А. А. Елисеев, А. В. Лукашин. *Функциональные наноматериалы*. Под ред. Ю. Д. Третьякова. – Москва: Физматлит, 2010.

3. И. П. Суздаев. *Нанотехнология: физическая химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов*. – Москва: Комкнига, 2006.

4. A. S. Rysbaev, S. S. Nasriddinov, M. T. Normuradov. *Uzbek Physical Journal*, 2(1), 33 (2000).

5. А. С. Рысбаев. *Тонкие наноразмерные силицидные пленки: синтез и свойства*. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2013.

6. Ж. Б. Хужаниезов, А. С. Рысбаев, И. Р. Бекпулатов. *Особенности возбуждения электронных плазменных колебаний в неупорядоченных полупроводниках: монография*. – Ташкент: Infinity Group, 2014.

7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Курс теоретической физики. Том 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. – Москва: Физматлит, 1963; Оксфорд: Butterworth-Heinemann, 1991.

8. D. Pines. *Elemental Excitations in Solids*. – New York: Benjamin, 1963.

9. В. Д. Горбаченко, М. В. Жарников, Е. Г. Максимов, С. Н. Рашикеев. *Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)*, 1985, т. 88, № 2, с. 677.

10. В. Д. Горбаченко, М. В. Жарников, Е. Г. Максимов, К. А. Молдосанов. *Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)*, 1984, т. 86, № 2, с. 597.

11. M. Strum. *Advances in Physics*, 1982, t. 31, № 1, s. 64.

12. M. T. Normuradov, D. S. Rumi, A. S. Rysbaev. *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1986, № 4, s. 70.

13. A. S. Rysbaev, Zh. B. Khuzhaniyozov, A. M. Rakhimov, and I. R. Bekpulatov, *Uzbekistan Patent No. IAP 05720*, 30 November 2018.

14. N. Libenson and V. V. Rumyantsev, *Sov. Phys. JETP*, 59, 999 (1984).

15. V. V. Rumyantsev and B. N. Libenson, *Sov. Phys. JETP* 56 (1), 135 (1982).

16. A. S. Rysbaev, M. T. Normuradov, Zh. B. Khuzhaniyozov, I. R. Bekpulatov, and A. M. Rakhimov, in *Proc. XXIV International Conf. on Radiation Physics of Solids (Sevastopol, 7–11 July 2014)*.

**METALL–DIELEKTRIK–YARIMO‘TKAZGICH TUZILMALARIDA INTERFEYS
HOLATLARINING KINETIK JARAYONLARI VA ELEKTRFIZIK XUSUSIYATLARI**

Mamatkarimov Odiljon Oxundedayevich,
Namangan davlat texnika universiteti professori,
fizika-matematika fanlari doktori

Quchqarov Behzod Hoshimjonovich,
Impuls tibbiyot instituti dotsenti,
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Abdulxayev Abrorbek Abdulloxon o'g'li,
Namangan davlat texnika universiteti
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
abdulxayev2308@gmail.com

Annotatsiya. Metall–dielektrik–yarimo‘tkazgich (MDYa) tuzilmalarining elektr javobi interfeysda joylashgan zaryad holatlarining vaqtga bog‘liq kinetik jarayonlari bilan belgilanadi. Interfeys va interfeysga yaqin dielektrik qatlamda kechadigan zaryad almashinuvi sig‘im–kuchlanish beqarorligi, sekin relaksatsiya hamda parametrlarning vaqt bo'yicha siljishiga olib keladi. Ushbu ishda MDYa tuzilmalarida elektr javobning barqarorligi interfeys holatlarining kinetik xususiyatlari nuqtayi nazaridan tahlil qilindi. Nazariy model Shockley–Read–Hall va non-radiative multiphonon mexanizmlariga asoslanib, eksperimental kuzatuvlar bilan solishtirildi. Olingan natijalar tashqi ta'sirlar yangi nuqsonlar hosil qilmasdan, interfeysda zaryad almashinuvi jarayonlarining vaqt masshtablarini o'zgartirishini ko'rsatdi.

Kalit so'zlar: metall–dielektrik–yarimo‘tkazgich tuzilmalari, interfeys holatlari, vaqtga bog‘liq kinetika, zaryad relaksatsiyasi, elektr barqarorlik, sig‘im–kuchlanish xususiyatlari, tashqi ta'sirlar, interfeys potentsiali.

**КИНЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
МЕЖФАЗНЫХ СОСТОЯНИЙ В СТРУКТУРАХ МЕТАЛЛ-ДИЭЛЕКТРИК-
ПОЛУПРОВОДНИК**

Аннотация. Электрический отклик структур металл–диэлектрик–полупроводник (МДП) определяется временно-зависимыми кинетическими процессами зарядовых состояний, локализованных на интерфейсе. Процессы зарядообмена, протекающие на границе раздела и в приповерхностном диэлектрическом слое, приводят к ёмкостно-вольтной неустойчивости, медленной релаксации и временным сдвигам параметров. В данной работе устойчивость электрического отклика МДП-структур проанализирована с точки зрения кинетических свойств интерфейсных состояний. Теоретическая модель основана на механизмах Шокли–Рида–Холла и безызлучательной многофононной релаксации и сопоставлена с экспериментальными наблюдениями. Полученные результаты показывают, что внешние воздействия не приводят к образованию новых дефектов, а изменяют временные масштабы процессов зарядообмена на интерфейсе.

Ключевые слова: структуры металл–диэлектрик–полупроводник, интерфейсные состояния, временно-зависимая кинетика, релаксация заряда, электрическая стабильность, ёмкостно-вольтные характеристики, внешние воздействия, интерфейсный потенциал.

**KINETIC PROCESSES OF INTERFACE STATES AND ELECTROPHYSICAL
PROPERTIES OF METAL–DIELECTRIC–SEMICONDUCTOR STRUCTURES**

Abstract. The electrical response of metal–dielectric–semiconductor (MDS) structures is governed by time-dependent kinetic processes of charge states localized at the interface. Charge-exchange processes occurring at the interface and in the near-interface dielectric layer lead to capacitance–voltage instability, slow relaxation, and time-dependent parameter shifts. In this work, the stability of the electrical response of MDS structures is analyzed from the standpoint of the kinetic properties of interface states. The theoretical model is based on the Shockley–Read–Hall and non-radiative multiphonon mechanisms and is compared with experimental observations. The obtained results demonstrate that external influences do not generate new defects but modify the time scales of charge-exchange processes at the interface.

Keywords: *metal–dielectric–semiconductor structures, interface states, time-dependent kinetics, charge relaxation, electrical stability, capacitance–voltage characteristics, external influences, interface potential.*

Kirish. So‘nggi o‘n yilliklarda metall–dielektrik–yarimo‘tkazgich (MDYa) tuzilmalar mikro- va nanoelektron qurilmalarning asosiy elementi sifatida jadal rivojlanmoqda. Qurilmalar o‘lchamlarining qisqarishi va yangi material tizimlarining joriy etilishi dielektrik–yarimo‘tkazgich interfeysida sodir bo‘ladigan fizik jarayonlarning rolini keskin oshirdi. Natijada interfeys nuqsonlari endilikda faqat texnologik kamchilik emas, balki qurilma xatti-harakatini belgilovchi asosiy fizik omil sifatida qaralmoqda. Klassik MOS nazariyasida interfeys holatlari ko‘pincha statsionar parametrlar sifatida tavsiflanadi. Biroq real qurilmalarda interfeys holatlari dinamik tizim bo‘lib, ularning zaryad almashinuvi vaqt bo‘yicha o‘zgarib turadi. Aynan shu dinamik xususiyatlar sig‘im–kuchlanish gisterезisi va sekin relaksatsiya kabi hodisalarning kelib chiqishiga sabab bo‘ladi. Shu bois interfeys holatlarining nafaqat qiymatini, balki ularning kinetik xossalarini chuqur tahlil qilish zarurati yuzaga keladi. Mazkur ishda ushbu muammoni interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining tashqi ta‘sirilar ostida qayta konfiguratsiyalanishi konsepsiyasi asosida yoritilgan va ushbu yondashuvning nazariy va eksperimental asoslarini izchil bayon etilgan.

Tadqiqot usullari. Metall–dielektrik–yarimo‘tkazgich tuzilmalarining elektr xatti-harakatini to‘g‘ri tavsiflash uchun dielektrik–yarimo‘tkazgich interfeysida mavjud bo‘lgan elektr faol holatlarning energetik va kinetik xossalarini chuqur tahlil qilish zarur. Real MDYa tizimlarida interfeys ideal keskin chegara bo‘lmay, balki murakkab energetik va fazoviy tuzilishga ega bo‘lgan o‘tish sohasi hisoblanadi. Ushbu sohada joylashgan interfeys va interfeysga yaqin dielektrik qatlamda mavjud bo‘lgan chegara zaryad tutib qoluvchi holatlari qurilmaning elektr hususiyatini belgilovchi asosiy omil sifatida namoyon bo‘ladi. Interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlari yarimo‘tkazgich sirtida buzilgan atom bog‘lanishlari, kimyoviy nomuvozanat va kristall panjaradagi mahalliy buzilishlar bilan bog‘liq bo‘lib, energetik jihatdan yarimo‘tkazgichning taqiqlangan zonasi bo‘ylab taqsimlangan bo‘ladi. Ushbu holatlar yarimo‘tkazgichning o‘tkazuvchanlik va valent zonalariga bilan to‘g‘ridan-to‘g‘ri energetik almashinuvida ishtirok etadi va nisbatan qisqa vaqt konstantalariga ega. Shu sababli ular kuchlanish yoki maydon o‘zgarishlariga tez javob beradi va asosan sig‘im–kuchlanish o‘lchovlarida namoyon bo‘ladi. Bunga qarama-qarshi ravishda, interfeysga yaqin dielektrik qatlamda joylashgan chegara zaryad tutib qoluvchi holatlari yarimo‘tkazgich bilan bevosita bog‘lanmagan bo‘lib, zaryad almashinuvida tunnel mexanizmi orqali qatnashadi. Tunnel ehtimolining interfeysdan masofaga eksponensial bog‘liqligi sababli, ushbu holatlar keng vaqt konstantalari spektrini hosil qiladi. Natijada, chegara holatlari asosan sekin zaryad relaksatsiyasi va uzoq vaqtli elektr beqarorlik hodisalarining manbai sifatida namoyon bo‘ladi.

Interfeys zaryadining o‘zgarishi metall–yarimo‘tkazgich tizimidagi elektrostatik muvozanatni buzadi va tekis-tasma kuchlanishining siljishiga olib keladi:

$$\Delta V_{FB} = \frac{Q_{it}}{C_{ox}} \quad (2)$$

Bu munosabat interfeys zaryadi bilan elektr sezuvchanlik o‘rtasidagi to‘g‘ridan to‘g‘ri bog‘lanishni ifodalaydi. Muhim jihat shundaki, dielektrik sig‘imi o‘zgarmagan holda kuzatilgan ΔV_{FB} siljishlari interfeys zaryadining qayta taqsimlanishini anglatadi, ya‘ni hodisaning kelib chiqishi hajmiy emas, balki interfeysga xos ekanini ko‘rsatadi. Interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlaridan zaryad chiqarilishi Shockley–Read–Hall mexanizmi bilan tavsiflanadi. Biroq real dielektrik tizimlarda zaryad tashuvchilarning fononlar bilan kuchli o‘zaro ta‘siri tufayli ushbu jarayon non-radiative multiphonon modeli bilan to‘ldirildi. Natijada zaryad chiqarilish tezligi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ldi:

$$e(E_a, F) = e_0 \exp\left(-\frac{E_a - \gamma F}{kT}\right) \quad (3)$$

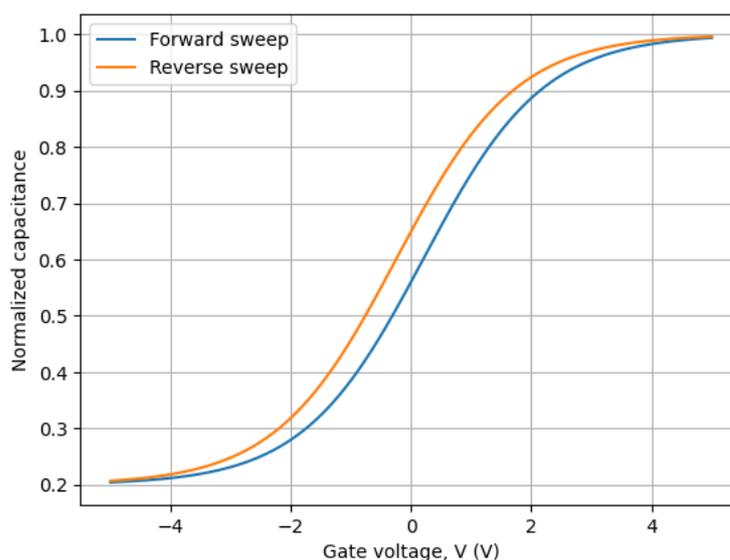
Bu ifoda zaryad chiqarilish ehtimoli aktivatsiya energiyasiga eksponensial bog‘liq ekanini va tashqi elektr maydon yoki bosim orqali samarali to‘siq balandligi kamaytirilishi mumkinligini ko‘rsatadi. Muhim jihat shundaki, tashqi ta‘sirilar aktivatsiya energiyasining o‘zini o‘zgartirmaydi, balki zaryad almashinuvi ehtimolini modifikatsiyalaydi. Real interfeys tizimlarida zaryad tutib qoluvchi holatlari yagona aktivatsiya energiyasiga ega emas. Aksincha, ular keng energetik diapazonda taqsimlangan bo‘ladi. Shu sababli zaryad relaksatsiyasi bitta vaqt konstantasi bilan emas, balki vaqt konstantalarining uzluksiz spektri bilan tavsiflanadi. Bu holat quyidagi integral ifoda orqali ifodalandi:

$$Q(t) = \int g(E_a) \exp[-t/\tau(E_a)] dE_a \quad (5)$$

$$\tau(E_a) = \tau_0 \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right) \quad (6)$$

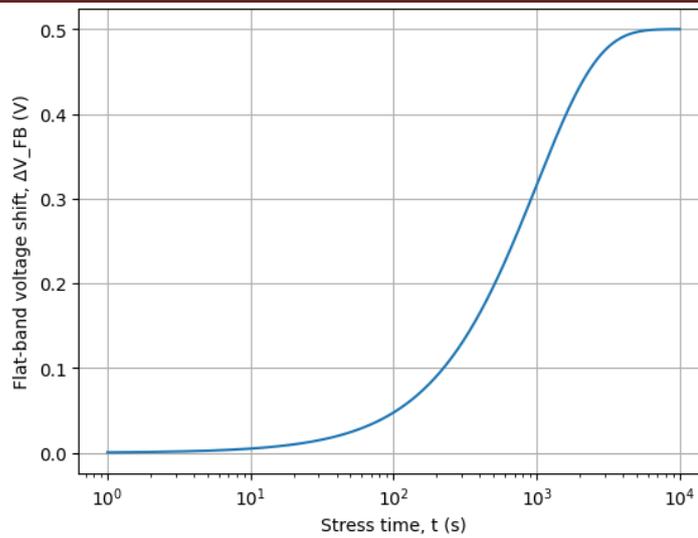
Mazkur integralning mavjudligi zaryad relaksatsiyasining oddiy eksponenta qonuniga bo‘ysunmasligini, balki cho‘zilgan eksponenta xatti-harakati bilan tavsiflanishini tushuntiradi. Ushbu matematik natija eksperimental relaksatsiya egri chiziqlari bilan bevosita solishtirildi va interfeys hamda chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining fizik rolini aniqlashda asosiy vosita bo‘lib xizmat qildi. Ushbu holatda ishlab chiqilgan energetik va kinetik model metall–dielektrik–yarimo‘tkazgich interfeysida sodir bo‘ladigan barcha asosiy jarayonlarni yagona fizik doirada tavsiflash imkonini beradi[3]. Mazkur model keyingi bobda taqdim etiladigan sig‘im–kuchlanish gisterezisi va zaryad relaksatsiyasi natijalarini izchil va mantiqiy tarzda talqin qilish uchun mustahkam nazariy asos yaratdi.

Muhokama va tadqiqot natijalari. Ishlab chiqilgan energetik va kinetik model eksperimental natijalar asosida tekshirildi va aniqlashtirildi. Sig‘im–kuchlanish xarakteristikalari, tekis-tasma kuchlanishining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi hamda zaryad relaksatsiyasi natijalari interfeys va chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining zaryad almashinuvi jarayonlarini turli vaqt masshtablarida ochib berdi[4]. Har bir eksperimental kuzatuv nazariy model bilan bevosita bog‘lanib, ularning umumiy fizik mohiyati aniqlanadi.



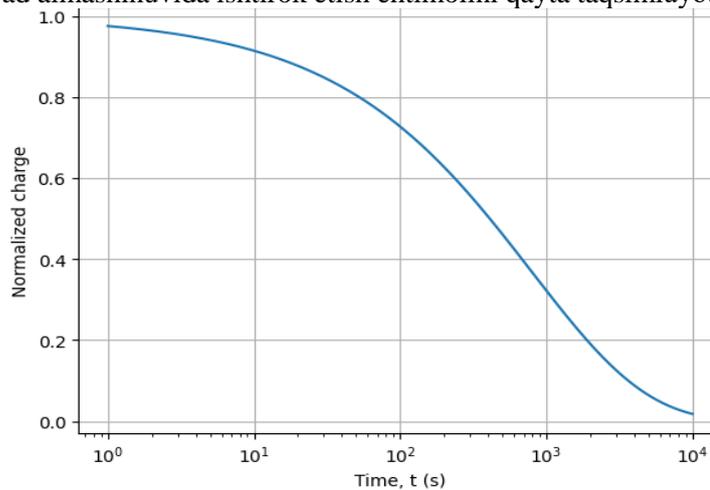
1-rasm. C–V gisterezisi

Sig‘im–kuchlanish o‘lchovlarida kuzatilgan gisterezis interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining kinetik xususiyatlarini tavsiflovchi eng sezgir ko‘rsatkichlardan biri hisoblanadi. 1-rasmda ko‘rsatilgan C–V xarakteristikalari oldinga va orqaga kuchlanish grafiklari orasida aniq farq mavjudligini namoyon qiladi. Ushbu farq interfeys holatlarida zaryadning kuchlanish o‘zgarishiga nisbatan kechikib chiqarilishi bilan bog‘liq. Muhim jihat shundaki, gisterezis mavjud bo‘lishiga qaramay, maksimal va minimal sig‘im qiymatlarining deyarli o‘zgarmasligi dielektrik qatlam yoki yarimo‘tkazgichning hajmiy xossalari o‘zgarmaganini ko‘rsatadi. Bu natija gisterezisning kelib chiqishi hajmiy nuqsonlar bilan emas, balki interfeysga xos zaryad almashinuvi jarayonlari bilan bog‘liq ekanini aniq tasdiqlaydi.



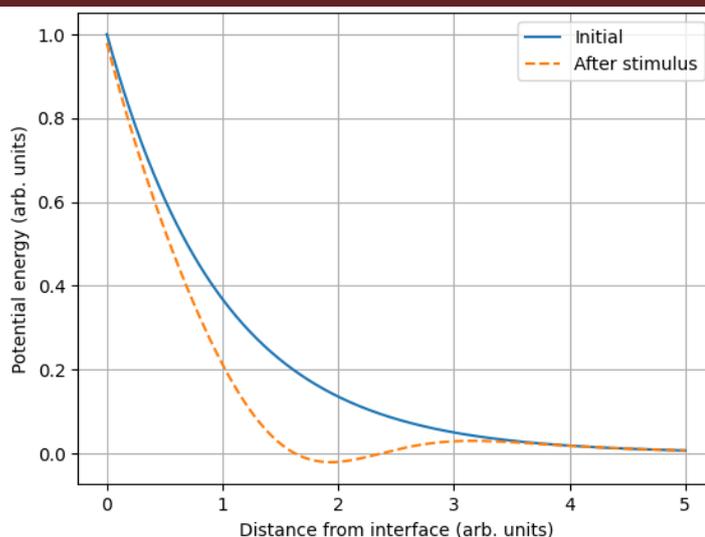
2-rasm. ΔV_{FB} ning tashqi ta'sir davomiyligiga bog'liqligi

C–V gisterезisi bilan bevosita bog'liq holda tekis-tasma kuchlanishining vaqt bo'yicha grafigi orqali ham muhim kuzatish mumkin. 2-rasmda ko'rsatilganidek, tekis-tasma kuchlanishi tashqi ta'sir davomiyligi oshishi bilan ortadi va ma'lum vaqt oralig'ida to'yinganlik xatti-harakatini namoyon qiladi. Ushbu to'yinganlik interfeys holatlarining cheklangan energetik va fazoviy diapazonga ega ekanini ko'rsatadi. Agar tashqi ta'sirlar yangi nuqsonlar hosil qilayotgan bo'lsa, tekis-tasma kuchlanishining siljishi vaqt o'tishi bilan davomli ravishda ortib borishi kutilardi. Biroq kuzatilgan to'yinganlik hodisasi tashqi ta'sirlar mavjud interfeys holatlarining zaryad almashinuvida ishtirok etish ehtimolini qayta taqsimlayotganini ko'rsatadi.



3-rasm. Zaryad relaksatsiyasi

Zaryad relaksatsiyasi o'lchovlari interfeys va chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining uzoq vaqt masshtablaridagi xatti-harakatini ochib beradi. 3-rasmda ko'rsatilgan relaksatsiya egri chizig'i oddiy eksponenta qonuniga bo'ysunmasdan, cho'zilgan eksponenta shaklida ifodalanadi[5]. Ushbu xatti-harakat interfeys va chegara holatlarining keng vaqt konstantalari spektriga ega ekanini bildiradi. Agar relaksatsiya bitta dominant emissiya mexanizmi bilan belgilanganda edi, relaksatsiya oddiy eksponenta shaklida kechgan bo'lardi. Biroq real holatda kuzatilgan cho'zilgan eksponenta interfeys tizimining energetik va fazoviy notekisligini bevosita aks ettiradi.



4-rasm. Interfeys yaqinidagi potensial relyef modifikatsiyasi

Yuqoridagi barcha eksperimental kuzatuvlar interfeys yaqinidagi lokal potensial relyef tushunchasi orqali yagona fizik mexanizm doirasida tushuntiriladi. 4-rasmda ko'rsatilganidek, tashqi ta'sirlar interfeys yaqinidagi potensial relyefni modifikatsiyalaydi. Ushbu modifikatsiya zaryad tutib qoluvchi holatlarining energetik chuqurligini o'zgartirmaydi, biroq zaryad tashuvchilar uchun samarali tunnel va emissiya yo'llarini qayta tashkil etadi[6]. Natijada ayrim interfeys va chegara holatlari zaryad almashinuvida faolroq ishtirok eta boshlaydi, boshqalari esa vaqtinchalik passiv holatga o'tadi. Shu tarzda, C–V gisterezisi, tekis-tasma kuchlanishining vaqt bo'yicha o'zgarishi va zaryad relaksatsiyasi bir-biridan mustaqil hodisalar emas, balki interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining tashqi ta'sirlar ostida qayta konfiguratsiyalanishining turli vaqt masshtablaridagi namoyon bo'lishidir[7]. Keltirilgan eksperimental natijalar va ularning fizik talqini oldingi ishlab chiqilgan nazariy modelning to'g'riligini tasdiqlaydi va keyingi umumlashtiriladigan yagona fizik konsepsiya uchun mustahkam asos yaratdi.

Keltirilgan nazariy yondashuv va eksperimental natijalar metall–dielektrik–yarimo'tkazgich tuzilmalarida kuzatiladigan sig'im–kuchlanish gisterezisi hamda zaryad relaksatsiyasi hodisalari o'zaro mustaqil jarayonlar emasligini ko'rsatadi. Aksincha, ushbu hodisalar interfeys va interfeysga yaqin dielektrik qatlamda joylashgan chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining tashqi ta'sirlar ostida qayta konfiguratsiyalanishining turli vaqt masshtablarida namoyon bo'lishi sifatida qaralishi mumkin[8]. Shu nuqtai nazardan, olingan barcha natijalar yagona fizik konsepsiya doirasida umumlashtirildi. Avvalgi muhokama qilingan C–V gisterezisi interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining zaryad almashinuvida kinetik cheklovlar mavjudligini aniq namoyon etadi[9]. Oldinga va orqaga kuchlanish skanerlari orasidagi farq interfeys holatlarining zaryadni o'lchov vaqt masshtabida muvozanatga keltira olmasligi bilan bog'liq. Muhim jihat shundaki, gisterezis mavjud bo'lishiga qaramay, maksimal va minimal sig'im qiymatlarining deyarli o'zgarishsizligi dielektrik yoki yarimo'tkazgichning hajmiy xossalari saqlanib qolganini ko'rsatadi. Bu esa kuzatilgan effektning hajmiy nuqsonlar bilan emas, balki interfeysga xos kinetik jarayonlar bilan bog'liq ekanini tasdiqlaydi. Xuddi shu interfeys jarayonlari zaryad relaksatsiyasi o'lchovlarida ham namoyon bo'ladi. Zaryad relaksatsiyasi cho'zilgan eksponenta qonuni bilan tavsiflanadi, bu esa interfeys va chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining keng vaqt konstantalari spektriga ega ekanini bildiradi. Agar interfeys jarayonlari bitta dominant emissiya mexanizmi bilan belgilanganda edi, relaksatsiya oddiy eksponenta shaklida kechgan bo'lardi. Biroq real holatda relaksatsiyaning murakkab xarakterga ega bo'lishi interfeys va chegara holatlarining energetik hamda fazoviy notekis taqsimlanganligi bilan izohlanadi. Mazkur ikki kuzatuv — gisterezis va relaksatsiya — o'zaro uzviy bog'liq bo'lib, interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining bir xil fizik mexanizmi bilan belgilanadi. Gisterezis interfeys holatlarining qisqa vaqt masshtabida muvozanatga ulgurmasligi natijasida yuzaga kelsa, relaksatsiya ushbu holatlarning uzoq vaqt oralig'ida muvozanat holatiga qaytish jarayonini ifodalaydi. Shunday qilib, ushbu ikki hodisa bitta interfeys mexanizmining turli vaqt masshtablaridagi ko'rinishlari sifatida talqin qilinadi.

Tashqi ta'sirlar ostida kuzatilgan elektr xatti-harakatlarni talqin qilishda asosiy masala shundan iboratki, ushbu ta'sirlar yangi nuqsonlar hosil qiladimi yoki mavjud interfeys holatlarining xossalari o'zgartiradimi tahlillarda keltirilgan natijalar ikkinchi yondashuvni qo'llab-quvvatlaydi. Tekis-tasma kuchlanishining vaqt bo'yicha to'yinganlik xatti-harakati interfeys holatlarining cheklangan energetik diapazonga ega ekanini ko'rsatadi. Agar tashqi ta'sirlar yangi nuqsonlar hosil qilayotgan bo'lsa, tekis-tasma

kuchlanishining siljishi vaqt o'tishi bilan davomli ravishda ortib borishi kerak edi. Biroq bunday holat kuzatilmaydi. Bundan tashqari, zaryad relaksatsiyasi jarayonida cho'zilgan eksponenta parametrining sezilarli darajada o'zgarishligi interfeys zaryad tutib qoluvchi holatlarining energetik spektri saqlanib qolayotganini bildiradi. Bu esa tashqi ta'sirlar interfeys holatlarining qiymatini emas, balki ularning zaryad almashinuvida ishtirok etish ehtimolini va kinetik yo'llarini o'zgartirayotganini ko'rsatadi. Demak, tashqi ta'sirlar interfeys jarayonlarini faollashtiruvchi yoki susaytiruvchi rol o'ynaydi, biroq yangi energetik holatlar yaratmaydi. Ushbu xulosalarni umumlashtirish uchun interfeys yaqinidagi lokal potensial relyef tushunchasi kiritiladi. Interfeys va chegara zaryad tutib qoluvchi holatlari energetik to'siqlar va tunnel bog'lanishlari bilan tavsiflanadi. Tashqi ta'sirlar ushbu to'siqlarning mutlaq balandligini emas, balki ularning fazoviy va elektrostatik konfiguratsiyasini modifikatsiyalaydi. Natijada ayrim zaryad tutib qoluvchi holatlari zaryad almashinuvida faolroq ishtirok eta boshlaydi, boshqalari esa vaqtinchalik passiv holatga o'tadi. Bu jarayon interfeys holatlarining energetik spektri saqlangan holda zaryad almashinuvi yo'llarining qayta taqsimlanishiga olib keladi. Shu tarzda, interfeys va chegara zaryad tutib qoluvchi holatlarining tashqi ta'sirlar ostida qayta konfiguratsiyalanishi konsepsiyasi sig'im–kuchlanish gisterezisi, zaryad relaksatsiyasi, tekis-tasma kuchlanishining vaqt bo'yicha evolyutsiyasi hamda tashqi ta'sirlarga sezgir kinetik javob kabi barcha kuzatilgan hodisalarni yagona fizik mexanizm doirasida izchil tushuntiradi.

Xulosa. Mazkur ishda metall–dielektrik–yarimo'tkazgich tuzilmalarining elektr xatti-harakati interfeys va interfeysga yaqin dielektrik qatlamda joylashgan zaryad holatlarining vaqtga bog'liq kinetik jarayonlari bilan belgilanishi ko'rsatildi. Tadqiqot natijalari turli ko'rinishdagi noideal elektr hodisalar — sig'im–kuchlanish beqarorligi, parametrlarning vaqt bo'yicha siljishi va sekin relaksatsiya — alohida mustaqil jarayonlar emas, balki interfeysda kechadigan zaryad almashinuvi jarayonlarining umumiy fizik mohiyatidan kelib chiqishini tasdiqlaydi.

Olingan nazariy va eksperimental natijalar tashqi ta'sirlar interfeysda yangi nuqsonlar hosil qilmasdan, mavjud zaryad holatlarining zaryad almashinuvida ishtirok etish sharoitlarini va vaqt masshtablarini o'zgartirishini ko'rsatdi. Shu orqali MDYa tuzilmalarining elektr javobi interfeys holatlarining kinetik xususiyatlariga sezgir ekanligi aniqlandi. Ish natijalari interfeys hodisalarini statik nuqsonlar to'plami sifatida emas, balki vaqtga bog'liq dinamik tizim sifatida qarash zarurligini ko'rsatdi.

ADABIYOTLAR:

1. Fleetwood, D. M. *Border traps in MOS devices. IEEE Transactions on Nuclear Science*, 62(4), 1462–1486 (2015)
2. Grasser, T., et al. *The universality of charge trapping in oxides. Microelectronics Reliability*, 52(1), 39–70 (2012).
3. Kuchkarov B., Mamatkarimov O., and Abdulkhayev A., "Influence of the ultrasonic irradiation on characteristics of metal–glass–semiconductor structures," in **IOP Conference Series: Earth and Environmental Science**, vol. 614, Art. no. 012027, 2020, doi: 10.1088/1755-1315/614/1/012027.
4. Mamatkarimov O. O., Kuchkarov B. H., Sharibaev N. Yu., and Abdulkhayev A. A., "Influence of the ultrasonic irradiation on characteristic of the structures metal–glass–semiconductor," *European Journal of Molecular and Clinical Medicine*, vol. 8, no. 1, 2021.
5. Kuchkarov B. K., Mamatkarimov O. O., and Abdulkhayev A. A., "Relaxation dependence of the capacity of a three-layer structure in the process of charge formation of an inversion layer," *Scientific Bulletin of Namangan State University*, vol. 1, no. 6, pp. 26–33, 2019.
6. Kuchkarov B. and Abdulkhayev A., "Factors providing the efficiency of semiconductor lasers," *Scientific Bulletin of Namangan State University*, vol. 3, no. 5, pp. 48–52, 2021.
7. Fazliddinov S., Abdulkhayev A., Ergashov A., and Shariboev N., "Ruteniy (II) birikmalari bilan yupqa plyonkali quyosh elementlariga asoslangan TiO₂ ning fotoelektrik xususiyatlari," *Optika va fotonika uchun ilg'or materiallar: Kimyo va muhandislik istiqbollari (AMOP 2025), JSPI*, vol. 14014, pp. 133–147, 2025.
8. Mamatkarimov O. O., Sharibaev N. Yu., Abdulkhayev A. A., and Turgunov M. O., "Effect of electron injection on charge properties of lead-boron-silicate glass," *AIP Conference Proceedings*, vol. 3304, Art. no. 030087, 2025, doi: 10.1063/5.0160879.
9. Mamatkarimov O. O., Kuchkarov B. Kh., Abdulkhayev A. A., and Ne'matullaev B. K., "Si <N> tipli yarimo'tkazgichlarda geterostrukturalar yuzaga kelganda elektronlarni kuchli qatlamlarini hosil qilish," *BNTU*, 2022.

TbAlO₃ NING QUTBLANISH OPTIK SPEKTRLARI

Saidjanova Madina Shuxratovna,

Buxoro davlat tibbiyot instituti Biotibbiyot muhandisligi,
biofizika va informatika kafedrasida o'qituvchisi

Annotatsiya. Terbiy nodir yer ionli ortaluminatning magnit xossalarini 420 – 750nm to'liq uzunliklari intervalida, 90 - 300K temperatura oralig'ida harorat va spektral bog'liqliklari batafsil tadqiqot qilingan. TbAlO₃ kristallning [10] o'qi bo'yab o'lchangan Verde doimiysining haroratga proporsionalligi, tajribaning berilgan geometriyasida Faradey aylanishida (tashqi H maydonda) Tb³⁺ - NY-ion elektron holatlarining Van-flek "qo'shilishlari" mexanizmining hissasi o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Zeeman effekti, kristall maydon, Shtark effekti, kramers singletlari, granat struktura, ortoaluminat, kvazidublet, kvaziizing.

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ ТЬАЛОЗ

Аннотация. Магнитные свойства ортоалюмината, активированного ионами редкоземельного элемента тербия, в интервале длин волн 420–750 нм и в диапазоне температур 90–300 К были подробно исследованы с анализом температурных и спектральных зависимостей. Установлена пропорциональность температурной зависимости константы Верде, измеренной для кристалла TbAlO₃ вдоль оси [10]. В заданной геометрии эксперимента изучен вклад механизма ван-влекковского «подмешивания» электронных состояний Tb³⁺ (P3-иона) в фарадеевское вращение во внешнем магнитном поле H.

Ключевые слова: эффект Зеемана, кристаллическое поле, эффект Штарка, кramerсовы синглеты, гранатная структура, ортоалюминат, квазидублет, квази-Изинг.

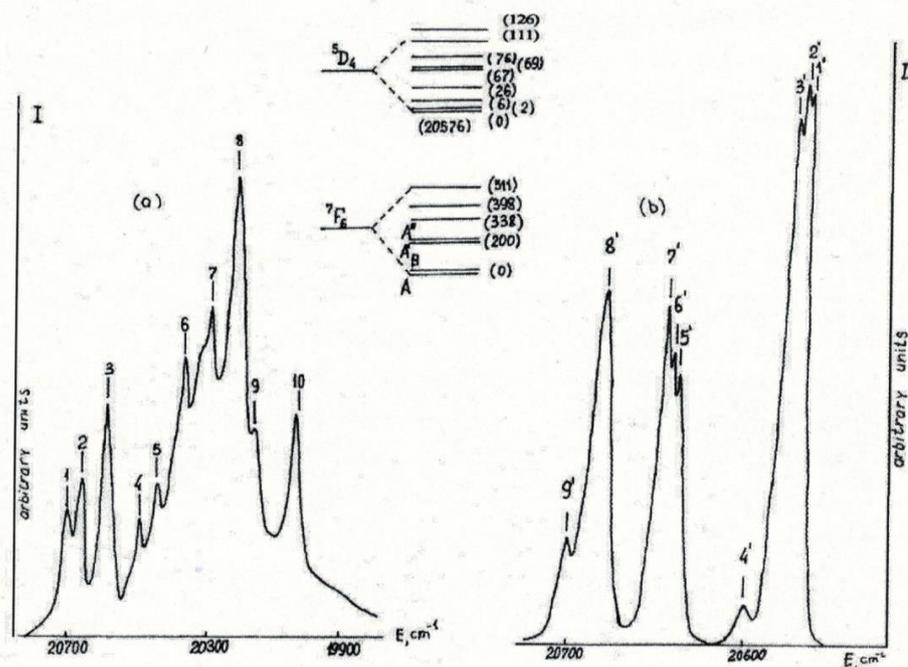
POLARIZATION OPTICAL SPECTRA OF TbAlO₃

Abstract. The magnetic properties of rare earth ionic orthoaluminates in the wavelength range of 420–750 nm and in the temperature range of 90–300 K have been studied in detail. The temperature proportionality of the Verde constant measured along the [10] axis of the TbAlO₃ crystal and the contribution of the Van-fleck "coupling" mechanism of the electronic states of the Tb³⁺ - NY- ions in the Faraday rotation (in an external H field) in the given geometry of the experiment have been studied.

Keywords: Zeeman effect, crystal field, Stark effect, Kramers singlets, garnet structure, orthoaluminate, quasidoublet, quasiizing.

Kirish. TbAlO₃ magnit krituvchanligi χ TbAlO₃ ning haroratga bog'liqligini o'lchash ma'lumotlaridan topilgan Tb³⁺ ionining ⁷F₆ asosiy multipletning pastki sathcharining Shtarkning bo'linishi xarakteri polarizatsiya-optik tadqiqotlar natijalar bilan bir xil tarzda tasdiqlaydi. 1.4-rasmda ⁵D₄ → ⁷F₆ (20000-20700 sm⁻¹) nurlanishli 4f-4f o'tishda chiziqli qutblangan nurda T=300K da qayd etilgan TbAlO₃ dagi Tb³⁺ nodir yer ionining lyuminessensiya spektri ko'rsatilgan [10].

Shuni ta'kidlash kerakki, optik o'tishlarni aniqlash qutblangan optik spektrlarda samaraliroq amalga oshiriladi, chunki tanlash qoidalari (simmetriya bo'yicha) turli yorug'lik polarizatsiyalarida bir-biridan sezilarli darajada farq qilishi mumkin.



1-rasm. Qutblangan yorug'likda ($E||a - o'q$, E yorug'lik to'lqinining elektr vektori) $TbAlO_3$ lyuminessensiya va yutilish $T=300K$ (a) va $T=78K$ (b) da qayd etilgan spektri. (a) kristallning "c" o'qi va (b) kristallning "b" o'qi bo'yicha. Qavslarda shtark sathchalarining energiyalari keltirildi (sm^{-1})

Olingan natijalar va ularning tahlili. Ikkilamchi luminessensiya spektrining xarakterli xususiyatlarining energiyalarini batafsil taqqoslash (1.2-jadvalga qarang), bir tomondan, ortoalyuminat tuzilishida Tb^{3+} ionining uyg'ongan va asosiy multiplitlari Shtark sathchalari sodir bo'ladigan optik o'tishlar bilan aniqlash imkonini beradi. Boshqa tomondan bu ish, C_s simmetriyasili kristall maydonda asosiy $7F_6$ multipletining Shtarkning bo'linishi tasvirini (qisman bo'lsa ham) qayta yaratish uchun (1-rasmga kiritilgan) zarur.

Darhaqiqat, mos ravishda: -1, -2, -3 va -4, -5, -6 polosalarning energiyalarini taqqoslash asosiy holatga eng yaqin sath yoki sathlar guruhi $\approx 200sm^{-1}$ masofada joylashganligini ko'rsatadi. Boshqa chiziqlarning energiyalarini bir-biri bilan taqqoslash (masalan, -1 va -10 va boshqalar) shtarkning yuqori sathlari energiyasini aniq aniqlash va $TbAlO_3$ dagi asosiy $7F_6$ multipletining umumiy kristall bo'linishini $\sim 500 sm^{-1}$ ni tashkil qiladi (1.4-rasmdagi ilova). Bundan tashqari, $7F_6$ multipletining ($\Delta_1 \approx 200 sm^{-1}$) (1.2-jadvalga qarang) ustki uyg'ongan holatlaridan asosiy holatning pastki sathlarini (kvazidublet) yetarlicha yuqori darajada "izolyatsiyalanishi" spektroskopik ma'lumotlardan $T = 78 K$ da $7F_6 \rightarrow 5D_4$ o'tishda qutblangan optik yutilish cho'qqilarining energiyalarini aniqlashga imkon berdi. Shuningdek ortoalyuminat strukturasiidagi Tb^{3+} ionining asosiy $4f^8$ konfiguratsiyasining uyg'ongan $5D_4$ multipleti shtark bo'linishining tabiati aniqlash mumkin (1.4-rasm).

1-jadval.

Ikkilamchi nurlanish polosasiidagi optik o'tishlarning energiyalari va $TbAlO_3$ dagi $5D_4 \rightarrow 7F_6$ ning yutilishi [10]

Luminessensiya $TbAlO_3$		Yutilish $TbAlO_3$	
Polosa	O'tish energiyasi, sm^{-1}	Polosa	O'tish energiyasi, sm^{-1}
1	20699	1'	20575
2	20658	2'	20578,5
3	20588	3'	20582
4	20500	4'	20601
5	20500	5'	20642
6	20374	6'	20646,4
7	20296	7'	20651
8	20236	8'	20686,4
9	20176	9'	20702,2
10	20063		

$T=85\div 300$ K diapazonida nodir yer – $TbAlO_3$ ortoalyuminatning optik va magnit xususiyatlarini yuqorida har tomonlama o'rganish Tb^{3+} ionining asosiy 7F_6 va uyg'ongan 5D_4 multipletlarini energiya spektrlarining Shtark strukturasi aniqlashtirish imkonini berdi. Shuningdek, bu elektron holatlar spektrlarida kvazidubletlar (yaqin joylashgan shtark singllari tomonidan hosil qilingan) mavjudligi haqidagi taxmini asoslash mumkin. Kvazidubletlar, keskin anizotrop g - omil va magnit momentga ega bo'lgan o'ziga xos magnit holatlar, ularning qiymati Van - Vleck "aralashuv" darajasi (tashqi H maydonida) va shtark singletlarining to'liq funksiyalarining simmetriyasi bilan aniqlanadi.

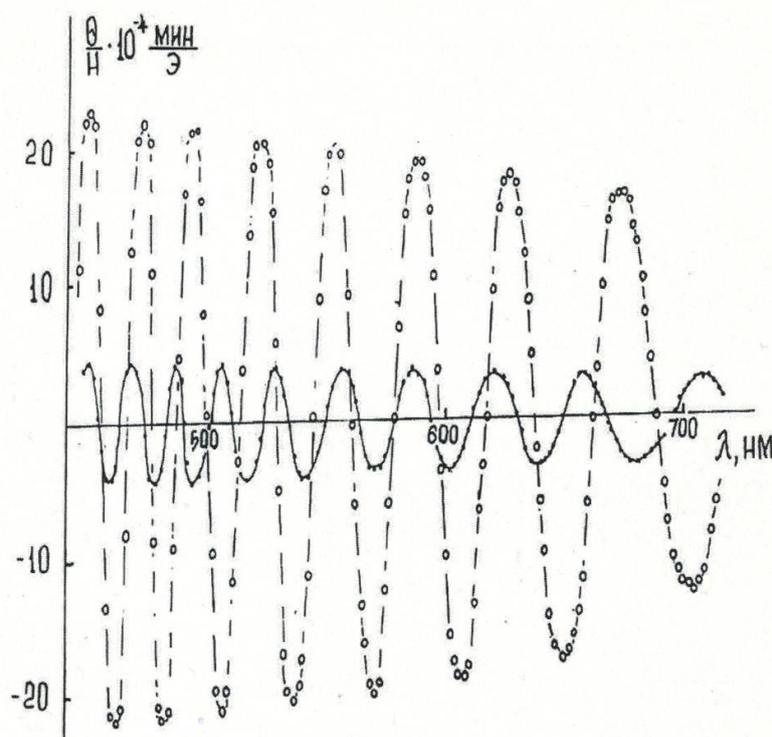
Van-Vlekning nodir yer -ionning magnitlanishiga qo'shgan hissasi, tashqi magnit maydon H qo'llanilganda, uyg'ongan holatlarning asosiy holatga "aralashuvi" tufayli yuqori haroratlarda ($T\geq 100K$) juda sezilarli bo'ladi va nodir yer -ionning o'rtacha magnit momenti bilan kattaligi bo'yicha solishtirish mumkin [5].

Shuning uchun, $TbAlO_3$ dagi Faraday effektini (EF) o'rganayotganda, Faraday buralishining "paramagnit" mexanizmi bilan bir qatorda (FE C - hadi [20]), asosiy multipletning eng quyi shtark sathchalarining turlicha to'ldirilishi tufayli (va o'z navbatida ionning o'rtacha magnit momentiga proporsional), natijaviy FE_A (FE B - hadi [1]) magnit faol ionning asosiy va uyg'ongan holati to'liq funksiyalarining "aralashuvi" mexanizmining hissasini hisobga olish kerak. Shu bilan birga, magnitoptik faollikning (MOA) turli mexanizmlarining FE_A qo'shgan hissasini to'g'ri taqqoslash ortoalyuminat strukturasi dagi Tb^{3+} nodir er ionining elektron holatlarining energiya spektri va to'liq funksiyalarining simmetriyasi haqida batafsil ma'lumotni talab qiladi. Bu tadqiqotning magnitoptik usulini sezgir vosita sifatida qarashga imkon beradi, bu kam simmetriyali kristall matritsasidagi nodir yer ionining elektron tuzilishini "zondlash" imkonini beradi.

Boshqa tomondan, $RAIO_3$ dagi magnitoptik hodisalarning eksperimental tadqiqotlari va ularni keng harorat oralig'ida magnit kirituvchanligini χ o'lchash natijalari bilan taqqoslash mutlaqo mustaqil qiziqish uyg'otadi. Chunki ortoalyuminatlarning murakkab kristallografik tuzilishi haroratning o'zgarishi bilan magnit anizotropiya, magnitlanish va Faraday buralishi konstantalarining xilma-xil va qiziqarli bo'lishiga, yoki nodir yer – paramagnet granatlar kabi yuqori simmetrik birikmalarda tashqi magnit maydoni deyarli mavjud bo'lmasligiga olib kelishi mumkin. Ilgarida aniqlanganidek [22], ortoalyuminat tuzilishiga ega bo'lgan nodir yer birikmalari optik jihatdan ikki o'qli kristallardir va ularni o'rganishda katta tabiiy ikkilamchi sinish ($\Delta n\sim 10^{-2}$) "fonida" chiziqli magnitoptik effektlarni (EF va boshqalar) o'rganishning jiddiy muammosi mavjud [20].

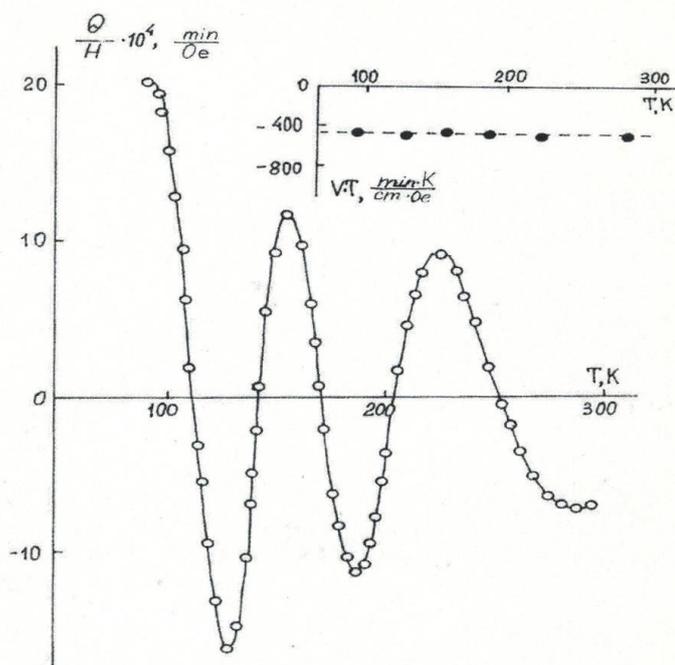
Shuning uchun $TbAlO_3$ dagi qutblanish ellipsi katta o'qining aylanish θ burchaklarining λ to'liq uzunligiga o'lchangan bog'liqliklari (3.5-rasmga qarang), kristall qalinligi l (shuningdek, T temperature ham (3.6-rasmga qarang)) tebranish xarakteriga ega, bundan tashqari, amplitudali ossilyatsiyalar Faraday buralish burchagiga - α_θ ga, ularning davri esa tabiiy ikkilamchi sinishning qiymatiga proporsionaldir - Δn [10]. Agar kristalldagi ikkilamchi sinish T haroratga bog'liq bo'lsa. 500nm to'liq uzunligida Δn qiymati $T=300K$ da $1,8\times 10^{-2}$ ga teng.

Eksperimental ma'lumotlardan aniq ko'rinib turibdiki (3.5-3.6-rasmlarga qarang) harorat pasayganda tebranishlar amplitudasi keskin ortadi, bu past haroratlarda (formula (1.9) bo'yicha) V doimiyning ortishiga to'g'ri keladi (chunki $V\sim\theta$). Bundan tashqari, θ burchakning T temperaturaga ossilyatsion bog'liqliklari (3.6-rasmga qarang) haroratning pasayishi bilan tebranishlar davrining kamayishini aniq ko'rsatadi, bu past T da tabiiy kristallografik qo'sh sinish Δn ortishidan dalolat beradi. Temperatura (3.6-rasmga qarang) va [10] o'qi bo'ylab o'lchangan θ burchaklarning (3.5-rasm) spektral bog'liqliklaridan, Faraday buralishi burchaklariga o'xshash bog'liqliklardan ([22]ish uslubiga ko'ra) qayta tiklash, u $TbAlO_3$ ortoalyuminatning Verde doimiysi V ni topish qiyin emas (2-rasmga qarang).



2-rasm. $TbAlO_3$ dagi qutblanish ellipsi katta o'qining aylanish θ burchaklarining λ to'lqin uzunligiga bog'liqlilari

Bunda biz eksperimental ma'lumotlarni qayta ishlash uchun quyidagi sxemadan foydalandik: a) Δn qiymatining spektral bog'liqligi θ burchakning spektral bog'liqligining max va min o'rtasidagi faza siljishi λ_1 va λ_2 to'lqin uzunliklari uchun 180° ga teng ekanligiga asosanib aniqlanadi.



3-rasm. $\lambda=506$ nm to'lqin uzunligida $TbAlO_3$ dagi qutblanish ellipsi katta o'qining aylanish θ burchaklarining temperatura bog'liqligi. Plovada [10] o'qi uchun $V \cdot T$ ko'paytmaning T temperaturaga bog'liqligi.

Xulosa. Yuqori bosimli simob lampalaridan foydalanilganda ultrabinafsha nurlanishining uygʻotilishining barqarorligi optik metodlarida muhim rol oʻynaganligi sababli, boshqarib boʻlmaydigan xatolarning elektron sxema yordamida minimallashtirildi.

Kvazidubletlar, keskin anizotrop g - omil va magnit momentga ega boʻlgan oʻziga xos magnit holatlar, ularning qiymati Van - Vleck "aralashuv" darajasi (tashqi H maydonida) va shtark singletlarining toʻlqin funksiyalarining simmetriyasi bilan aniqlanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Знаменский Н.В., Малюхин Ю.В. Спектры и динамика оптических переходов редкоземельных ионов в кристаллах. Москва. Физматлит.2008.
2. U.V. Valiev, J.B. Gruber, G.W. Burdick. *Magneto-optical spectroscopy of the rare-Earth compounds: development and application*. Scientific Research Publishing, Irvin, USA, 2012, p.143.
3. Dejun Fu., Uygun V.Valiev, Gary W. Burdick, Pavel E. Pyak. *Interaction of Electromagnetic Radiation with Matter*. Beijing 100717, China. 2017, p.173.
4. Lucarini V, Saarinen J.J., Peiponen K.E. Vartiainen E.M. *Kramers-Kronig Relations in Optical Materials Research*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2005.
5. J.B. Gruber, U.V. Valiev, G.W. Burdick, S.A. Rakhimov, M. Pokhrel, and D.K. Sardar, *J. Lumin.*, 131, 1945 (2011).
6. Goldner P. *Accuracy of the Judd - Ofelt theory* // *Mol. Phys.* 2003. Vol. 101. C. 903.
7. Suyver J. F., Aebischer A., Garca-Revilla S., Gerner P., Güdel H. U. *Anomalous power dependence of sensitized upconversion luminescence* // *Phys. Rev. B* 2005. Vol. 71. P. 125123.
8. Chen Xueyuan, Luo Zundu, Jaque D., Romero J. J., J. Garcia Sole. *Comparison of optical spectroscopy of Nd³⁺ in NdAl(BO₃)₄ (NAB), Nd:GdAl₃(BO₃)₄ (NGAB) and Nd:Gd_{0.2}Y_{0.8}Al(BO₃)₄ (NGYAB) crystals* // *Phys.: Condens. Matter*. 2001. Vol. 13. C. 1171.
9. Cherepakhin A. V., Zaitsev A. I., Aleksandrovsky A. S., Zamkov A. V. *Optical and nonlinear optical properties of orthorhombic BiB₃O₆* // *Opt. Mater.* 2012. № 34. C. 790-792.
10. Валиев У.В., Лукина М.М., Саидов К.С. *О природе эффекта Фарадея в редкоземельном ортоалюминате TbAlO₃* // *ФТТ*, 1999, Т.41, В.11, С.2047-2052.

BIR QATLAMLI MoS_2 ELEKTR O'TKAZUVCHANLIGINING YO'RUG'LIK TA'SIRIDA O'ZGARISHI

Dadamirzayev Muhammadjon G'ulomqodirovich,

*Namangan davlat texnika universiteti
dadamirzaev70@mail.ru*

Qosimova Mamura Odiljonovna,

*Namangan davlat texnika universiteti
omamuraqosimova@gmail.com*

Maxmudov Azamat Sattorovich,

*Namangan davlat texnika universiteti
asmakhmudov05@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu ishda bir qatlamli molibden disulfid (MoS_2) asosidagi ikki o'lchamli yarimo'tkazgich kanalining elektr o'tkazuvchanligi yorug'lik nurlanishi ta'sirida o'zgarishi nazariy jihatdan tahlil qilindi. Yarimo'tkazgichli qurilmalarda elektr o'tkazuvchanlik zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi, harakatchanligi hamda tashqi elektr maydon parametrlariga bog'liq ekanligi asosida mos analitik ifodalar ko'rib chiqildi. Kanal o'tkazuvchanligi zaryad tashuvchilar zichligi, tashqi kuchlanish va threshold kuchlanish parametrlarini hisobga olgan holda ifodalandi. Harakatchanlikning haroratga bog'liqligi modeli asosida elektr o'tkazuvchanlikning umumlashgan ifodasi hosil qilindi. Yorug'lik ta'siri natijasida fotogeneratsiya orqali hosil bo'ladigan qo'shimcha zaryad tashuvchilar elektr o'tkazuvchanlikning oshishiga olib kelishi nazariy jihatdan asoslandi.

Kalit so'zlar: bir qatlamli MoS_2 , fotoo'tkazuvchanlik, ikki o'lchamli yarimo'tkazgich, zaryad tashuvchilar, harakatchanlik, fototranzistor, yorug'lik ta'siri, threshold kuchlanish, nanoelektronika, optoelektronika.

ИЗМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ОДНОСЛОЙНОГО MoS_2 ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СВЕТА

Аннотация. В данной работе теоретически исследовано изменение электрической проводимости двумерного полупроводникового канала на основе однослойного дисульфида молибдена (MoS_2) под воздействием светового излучения. Рассмотрены аналитические выражения, основанные на зависимости электрической проводимости полупроводниковых устройств от концентрации носителей заряда, их подвижности и параметров внешнего электрического поля. Проводимость канала описана с учётом плотности носителей заряда, приложенного внешнего напряжения и порогового напряжения (threshold voltage). На основе модели температурной зависимости подвижности получено обобщённое выражение для электрической проводимости. Теоретически показано, что воздействие света приводит к фотогенерации дополнительных носителей заряда, что вызывает увеличение электрической проводимости. Полученные результаты могут служить теоретической основой для разработки оптоэлектронных устройств, фототранзисторов и высокочувствительных фотодетекторов на основе однослойного MoS_2 . Под воздействием света теоретически обосновано, что дополнительные носители заряда, возникающие в результате фотогенерации, приводят к увеличению электрической проводимости.

Ключевые слова: однослойный MoS_2 , фотопроводимость, двумерный полупроводник, носители заряда, подвижность, фототранзистор, воздействие света, пороговое напряжение, нанoelektronika, оптоelektronika.

CHANGE IN ELECTRICAL CONDUCTIVITY OF SINGLE-LAYER MoS_2 UNDER THE INFLUENCE OF LIGHT

Abstract. In this work, the variation of the electrical conductivity of a two-dimensional semiconductor channel based on monolayer molybdenum disulfide (MoS_2) under light irradiation is theoretically investigated. Analytical expressions describing the dependence of electrical conductivity in semiconductor devices on charge carrier concentration, carrier mobility, and external electric field parameters are

considered. The channel conductivity is described taking into account the carrier density, applied external voltage, and threshold voltage. Based on a temperature-dependent mobility model, a generalized expression for electrical conductivity is derived. It is theoretically shown that light irradiation leads to the photogeneration of additional charge carriers, resulting in an increase in electrical conductivity. The obtained results can serve as a theoretical basis for the development of optoelectronic devices, phototransistors, and highly sensitive photodetectors based on monolayer MoS_2 . It was theoretically demonstrated that additional charge carriers generated through photogeneration under light irradiation lead to an increase in electrical conductivity.

Keywords: monolayer MoS_2 , photoconductivity, two-dimensional semiconductor, charge carriers, mobility, phototransistor, light irradiation, threshold voltage, nanoelectronics, optoelectronics.

Kirish. Bugungi kunda Ikki o'lchovli (2D) materiallar - bu nanoelektronikadan tortib sensor va fotonikagacha bo'lgan qiziqarli fizik xususiyatlar va qo'llanilishlarga ega bo'lgan yangi materiallar sinfidir. Eng ko'p o'rganilgan 2D material bo'lgan grafendan tashqari, yarim o'tkazgichli dixalkogenidlar MoS_2 yoki WSe_2 kabi boshqa qatlamli materiallarning monoqatlamlari dala effektli tranzistorlar (FET) uchun istiqbolli kanal materiallari sifatida ahamiyat kasb etmoqda. Ikki o'lchamli (2D) yarimo'tkazgich materiallar nanoelektronika va optoelektronika sohalarida keng o'rganilmoqda. [1] Bular orasida molibden disulfid — MoS_2 materialining bir qatlamli shakli o'zining to'g'ridan-to'g'ri energetik zonasi, yuqori yoniq/o'chiq tok nisbati va yuqori yorug'lik sezgirligi bilan alohida ahamiyat kasb etadi. Monoqatlamli MoS_2 asosida yaratilgan tranzistor va fotodetektorlar past o'lchamli elektron qurilmalar, yuqori sezgir sensorlar hamda energiya tejamkor optoelektronik tizimlar yaratishda istiqbolli material sifatida qaralmoqda [2] Ushbu ishda Yarimo'tkazgichli qurilmalarda elektr o'tkazuvchanlik zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi, ularning harakatchanligi hamda tashqi elektr maydon ta'siri bilan belgilanadi. Yorug'lik nurlanishi ta'sirida yarimo'tkazgichda qo'shimcha elektron-kovak juftliklari hosil bo'lishi natijasida zaryad tashuvchilar soni ortadi va elektr o'tkazuvchanlik o'zgaradi. Shu sababli monoqatlamli MoS_2 da fotoo'tkazuvchanlik mexanizmlarini o'rganish zamonaviy ilmiy tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. [3] bu ishda ikki o'lchamli yarimo'tkazgichlar asosidagi tranzistorlarning elektr transport xossalarini yaxshilash uchun kislorodsiz (oxygen-free) texnologiyalar taklif etilgan. BU ishda olib borilgan tadqiqotda MoS_2 va WS_2 asosidagi FET qurilmalarida kislorod adsorbsiyasining zaryad tashuvchilar harakatchanligiga salbiy ta'siri ko'rsatildi. Oxygen-free tayyorlash usuli orqali monoqatlam va ikki qatlamli MoS_2 tranzistorlarida mos ravishda 91 va 132 $\text{cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ gacha rekord mobilite qiymatlari olingan. Ushbu natijalar atmosfera kislorodi 2D materiallarda asosiy cheklovchi omillardan biri ekanligini va qurilma ishlab chiqarishda inert muhitdan foydalanish zarurligini ko'rsatadi [4] yarimo'tkazgichli qurilmalar fizikasi va texnologiyasiga bag'ishlangan klassik ilmiy darslik hisoblanadi. Kitob elektronika, nanoelektronika va yarimo'tkazgich qurilmalarining fizik asoslarini batafsil tushuntiradi hamda nazariya va amaliy texnologiyani yaqqol namoyon qiladi. [5] Yarimo'tkazgich materiallari va qurilmalarining eksperimental tavsiflash usullariga bag'ishlangan fundamental manba hisoblanadi. Elektr, sig'im-kuchlanish (C-V), Hall effekti hamda optik o'lchovlar orqali material parametrlarini aniqlash metodlari tizimli ravishda bayon qilingan. Ushbu manba zamonaviy MOS strukturalari, interfeys hodisalari va nanoelektron qurilmalarni tavsiflashda keng qo'llaniladigan. [6]. adqiqotchilar strukturaning h-BN kapsulalanishi yordamida interfeys sifatini yaxshilab, fotolyuminessensiya spektrida tor va yaxshi ajralgan qatlamlararo o'tishlarni kuzatishga muvaffaq bo'lishgan. Aylana qutblangan qo'zg'atish ostida qarama-qarshi spirallarga ega bo'lgan ikki asosiy eksiton o'tishi aniqlangan — biri kiruvchi yorug'lik qutblanishini saqlaydi, ikkinchisi esa uni teskari qiladi [7] Bu ishda natijalari interfeys defektlari eksitonlarning rekombinatsiya vaqtini qisqartirib, fototokning kuchlanishga bog'liqligiga bevosita ta'sir qilishini ko'rsatadi. Bu holat ayniqsa $\text{MoS}_2/\text{WSe}_2$ kabi ikki material orasida tabiiy van-der-Vaals interfeysi bo'lgan strukturalarda muhim ahamiyatga ega. 2D materiallar va ularning geterostrukturalari ustida umumiy nazariy asoslar Novoselov va hamkorlari tomonidan yoritilgan bo'lib, ular 2D materiallarning yangi elektron fazalari, kuchli kvant cheklanishi va van-der-Vaals bog'lanishlarini ko'rsatadi [7]. Bu ishda grafen, boshqa ikki o'lchovli materiallar va turli ikki o'lchovli kristallar yoki ikki o'lchovli kristallar va boshqa (nano) materiallarning kombinatsiyasiga asoslangan gibrid tizimlarga asoslangan zamonaviy fotodetektorlarning umumiy ko'rinishini va baholashini taqdim etamiz. to'lqin o'tkazgichlar [8]. Bu maqolada $\text{MoSe}_2 / \text{WSe}_2$ heterobilayerlarida asosiy noma'lum parametrlarni ratsional qurilma dizayni va submikrometr burchakli echilgan fotoemissiya spektroskopiyasi (m-ARPES) yordamida fotoluminesans bilan birgalikda aniqlaymiz. Biz K-nuqta maydondagi chiziqlar kuchsiz gibridlanganligini aniqlaymiz, valentlik diapazoni 300 meV ga teng bo'lib, II turdagi diapazonning tekislanishini nazarda tutadi [9]. 2D fotodetektorlar bo'yicha keng ko'lamlil adabiyotlarni qilib, turli mexanizmlar (photovoltaik, photoconductive, bolometric va boshqalar) asosida shaxsiy xossalarini chuqur

sharhlagan[10]. Ushbu ishda MoS₂/WSe₂ van-der-Vaals geterobilayerida hosil bo'ladigan interlayer (ya'ni elektron va teshik) turli qatlamlarda o'rganilgan, lekin zaryad tashuvchi ajralishi o'lgangan, lekin hosil bo'lgan fototok yoki qurilma xarakteristikasi berilmagan[11]. Ush ishda MoS₂/WSe₂ van-der-Vaals geterostrukturasida yorug'lik ta'sirida hosil bo'lgan eksitonlarning qatlamlararo zaryad ajralishi o'rganilgan[12]. Ushbu ish Ikki o'lchamli materiallarda eksitonlarni boshqarish ularni yashash vaqtini va uzoqroqqa tarqalishini(diffuziyasi) nazorat qilinadi[13]. Bu ishda manba-drenaj oqimi sezilarli bo'lgan mintaqada n-tipdagi MoS₂ elektronlari va p-tipli WSe₂ segmentlaridagi teshiklar deyarli muvozanatlashgan, heterostruktura maydoni esa mobil zaryadlardan tugaydi. Mahalliy o'tkazuvchanlikning fazoviy evolyutsiyasi MoS₂-heterostruktura-WSe₂ chizig'i bo'ylab lateral tasmaning egilishi va kamayish mintaqalarining shakllanishi bilan bog'liq bo'lishi mumkin. Bizning ishimiz yangi transport harakatlarining mikroskopik kelib chiqishini aniq ko'rsatib beradi, bu WSe₂ geterosturuktura o'rganilgan[14]. yarimo'tkazgichli qurilmaning o'lchami kamayishi bilan ularda asta-sekin turli xil kvant effektlari paydo bo'ladi. Bu klassik qurilmalar nazariyasini qo'llash doirasi hozir cheklanganligini ko'rsatadi. So'nggi yillarda ajoyib atomik xususiyatlarga ega ikki o'lchovli (2D) materiallar katta qiziqish uyg'otdi. WS₂, MoS₂, MoSe₂, WSe₂ va qora fosfor (BP) kabi ba'zi 2D pn birikmalarining elektrostatik maydon xususiyatlari yarimo'tkazgichlar uchun yangi imkoniyatlar eshigini ochadi. Mikroto'lqinli maydon ta'sirida 2D pn o'tkazgichlarning diffuziya sig'imlari va differentsial o'tkazuvchanligining o'zgarishi va 2D va 3D pn o'tkazgichlarning diffuziya sig'imlari va differentsial o'tkazuvchanliklari mikroto'lqinli maydon ta'sirida o'tkazuvchanliklarning o'zgarishi solishtirilgan.[15]. kki o'lchovli (2D) diodlarning elektronlari va teshiklarining kvazifermi darajalari va oqim kuchlanish xususiyatlarining yorug'lik to'lqin uzunligiga bog'liqligi nazariy jihatdan o'rganildi. Mikroto'lqinli maydon ta'sirida 2D MOSFETlarning kvant sig'imi ortadi. Mikroto'lqinli maydon kanalidagi elektronlar va teshiklarni isitadi, bu esa yarimo'tkazgichning potentsial to'siqni engib o'tishiga imkon beradi. Natijada yarimo'tkazgich orqali to'g'ridan-to'g'ri oqim o'tadi [16]. Maqolada pn o'tishda (p-n-junction) energiya yuqori (ya'ni "issiq") zaryad tashuvchilar (elektron va teshiklar) issiqlik termofoto emf (mikroto'lqin maydoni va yorug'lik ta'siri ostida davom etdilar. Tajriba yordamga ko'ra, mikroto'lqin maydoni tashuvchilarni isitadi va bu isish termo-elektromotor kuchi vujudga keladi. Uch effekt fotovoltajdagi elektron-hol juftliklari (yorug'likdan hosil bo'ladigan) ta'siridan alohida klassik va muhim rol o'ynaydi. Ushbu ishda meaxanik deformatsiya kuchli elektromagnit maydon ostida sig'im hamda dinamik qarshilikning nohiziq xossalari nazariy tadqiq qilinga[17]. Dioddan chiqadigan tokning o'rtacha faqat konveksiya toki bilan. Bu ishda

Siljish toki ning o'rtacha qiymat har doim nolga teng , shu sababli u dioddan chiqadigan o'rtacha tokka ta'sir qilmaydi. Ushbu ishda O'YUCH maydonda joylashgan p-n-o'tish VAXsi noideallik koefitsiyenti o'zgarishining differensial qarshiligi, diffuziya sig'imi va differensial o'tkazuvchanligiga ta'siri o'rganilgan. Bunda, differensial qarshilik kuchli O'YUCH maydonda bo'lsa ham, kuchsiz O'YUCH maydonda bo'lsa ham p-n o'tish VAXsi noideallik koefitsiyenti qiymati ortishi bilan ortib borishi ko'rsatilgan. Diffuziya sig'imi va differensial o'tkazuvchanligi esa p-n o'tish VAXsi noideallik koefitsiyenti qiymati ortishi bilan kamayib borishi keltirilgan[18] Ushbu tadqiqotda graphene/MoS₂ van der Waals geterostrukturasida tok-kuchlanish (I-V) xarakteristikalari yorug'lik ta'siri ostida qanday o'zgarishi nazariy va eksperimental jihatdan tahlil qilingan. Strukturada yuqori elektr o'tkazuvchanlikka ega grafen qatlami hamda kuchli yorug'lik yutish xususiyatiga ega MoS₂ yarimo'tkazgich qatlami birlashtirilgan bo'lib, bu ularning fotoelektrik xususiyatlarini sezilarli darajada kuchaytiradi.

Yorug'lik tushganda MoS₂ qatlamida elektron-kovak juftlari hosil bo'ladi va grafenning yuqori mobil zaryad tashuvchilari tufayli ular tez ajralib, tok ortishiga olib keladi. Natijada, I-V egri chiziqlari yorug'lik intensivligi oshishi bilan sezilarli ravishda o'zgaradi: fototok ortadi, nolinear transport va ba'zi holatlarda fotovoltaj xatti-harakatlar kuzatiladi[19]. Ushbu ishda ikki o'lchamli MoS₂/WSe₂ geterostrukturasida yorug'lik ta'sirida hosil bo'ladigan fototokning kuchlanishga bog'liqligi o'rganildi. Geterostruktura p-n o'tishiga foton energiyasi materialning taqiqlangan zona kengligidan katta bo'lgan yorug'lik tushganda, elektron-teshik juftlari generatsiyasi yuz beradi. Elektr maydon ta'sirida ushbu zaryad tashuvchilar ajraladi va tashuvchilar yo'nalishida fototok hosil qiladi. Bir qatlamli materiallarning atom o'lchamlari, kuchli spin-orbital bog'lanish va kvant effektlari tufayli generatsiya qilingan fototokning tezkorligi, amplitudasi va chiziqiligi yuqori bo'ladi. Tadqiqotda yorug'lik intensivligi, to'lqin uzunligi va kuchlanishning fototok hosil bo'lishiga ta'siri tahlil qilinadi hamda ikki o'lchamli geterostrukturalarning optoelektronika qurilmalaridagi afzalliklari ko'rsatib berilgan.

Yarimo'tkazgichli qurilmalarning elektr o'tkazuvchanligi:

$$G = \frac{I}{U} = \sigma \frac{W}{L} \quad (1)$$

Ifoda yordamida hisoblanadi [1]. Bu yerda, σ – qatlam o‘tkazuvchanligi bo‘lib, $\sigma = q\mu n_{2D}$ ifoda yordamida aniqlanadi. q – elektr zaryadi, μ – harakatchanlik, $n_{2D} = \frac{C_{ox}}{q}(U_{bg} - U_{th})$ – 2D zaryad tashuvchilar konsentratsiyasi,[4] U_{bg} – tashqi qo‘yilgan kuchlanish, U_{th} – ichki qatlam kuchlanishi (threshold voltage), W – qatlam kengligi, L – qatlam uzunligi.

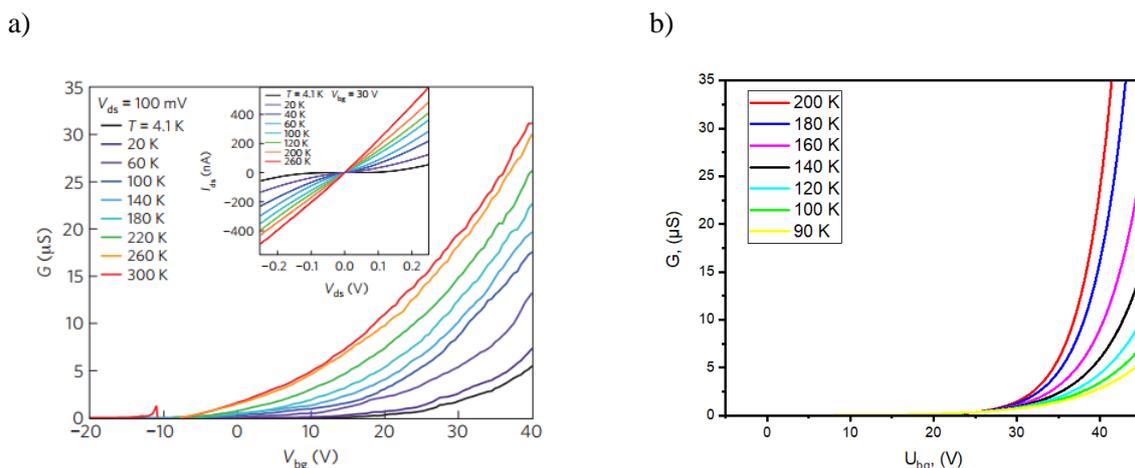
Harakatchanlik μ ning haroratga bog‘liqlik ifodasi $\mu(T) = \mu_0 \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right)$ dan foydalanib, elektr o‘tkazuvchanlik uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz.

$$G(T, U_{bg}) = \mu(T)C_{ox}\frac{W}{L}(U_{bg} - U_{th}), \quad (\text{agar } U_{bg} > U_{th}) \quad (2)$$

Bu ifodalardan foydalanib, elektr o‘tkazuvchanlik uchun quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$G(T, U_{bg}) = G_0(U_{bg} - U_{th})\exp\left(-\frac{E_a - \delta(U_{bg} - U_{th})}{kT}\right), \quad \text{faqat } U_{bg} > U_{th} \text{ uchun} \quad (3)$$

Bu yerda, $G_0 = \mu_0 C_{ox} \frac{W}{L}$, δ – tashqi qo‘yilgan kuchlanish ortishi bilan aktivatsiya energiyasi kamayish tezligini bildiruvchi kattalik bo‘lib, materialning elektron tuzilishi, kanal geometriyasi va dielektrik qatlami, elektr maydon ta‘sir va kontakt xususiyatlariga bog‘liq holda o‘zgaradi. E_a – aktivatsiya energiyasi bo‘lib, material, qurilma parametrlariga va tashqi qo‘yilgan kuchlanishga bog‘liq holda o‘zgaradi. 2D materiallarda taqiqlangan zona kengligi va Fermi energiyasiga ham bog‘liq bo‘ladi. Aktivatsiya energiyasi kamayishi hisobiga elektr o‘tkazuvchanlik ortishi [1] ishda turli haroratlar uchun keltirilgan.



1-rasm. Turli xil haroratlarda o‘lchangan bir qatlamli MoS₂ strukturasi elektr o‘tkazuvchanligining tashqi (gate) kuchlanishga bog‘liqligi. a) tajriba [1], b) nazariya

1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, $U_{bg} > U_{th}$ shartida harorat ortishi bilan elektr o‘tkazuvchanlik qiymati sezilarli ravishda ortadi. Bu holat, issiqlik energiyasi ortishi natijasida faol zonaga qo‘shimcha zaryad tashuvchilar termal uyg‘onishi va potensial to‘siqlarning kamayishi bilan izohlanadi. Shuningdek, δ parametrining ijobiy qiymati tashqi qo‘yilgan kuchlanish ta‘sirida aktivatsiya energiyasining pasayishini ko‘rsatadi, bu esa kuchlanish va haroratning birgalikdagi ta‘sirida o‘tkazuvchanlikni yanada kuchaytiradi. Ushbu natijalar materialning transport xususiyatlari yuqori harorat rejimlarida sezilarli darajada yaxshilanishini va qurilma samaradorligini oshirish uchun optimal ish rejimlarini tanlashda muhim ahamiyatga ega ekanini tasdiqlaydi.

Bir qatlamli MoS₂ yarimo‘tkazgichida yorug‘lik ta‘sirida fotogeneratsiya jarayoni sodir bo‘lib, natijada qo‘shimcha zaryad tashuvchilar — fototashuvchilar hosil bo‘ladi. Bu qo‘shimcha zaryad tashuvchilar kanalning umumiy elektr o‘tkazuvchanligi (G) ni orttiradi. Yorug‘lik ta‘sir, shuningdek, potensial to‘siqlarni pasaytirish orqali aktivatsiya energiyasining (E_a) kamayishiga olib keladi.

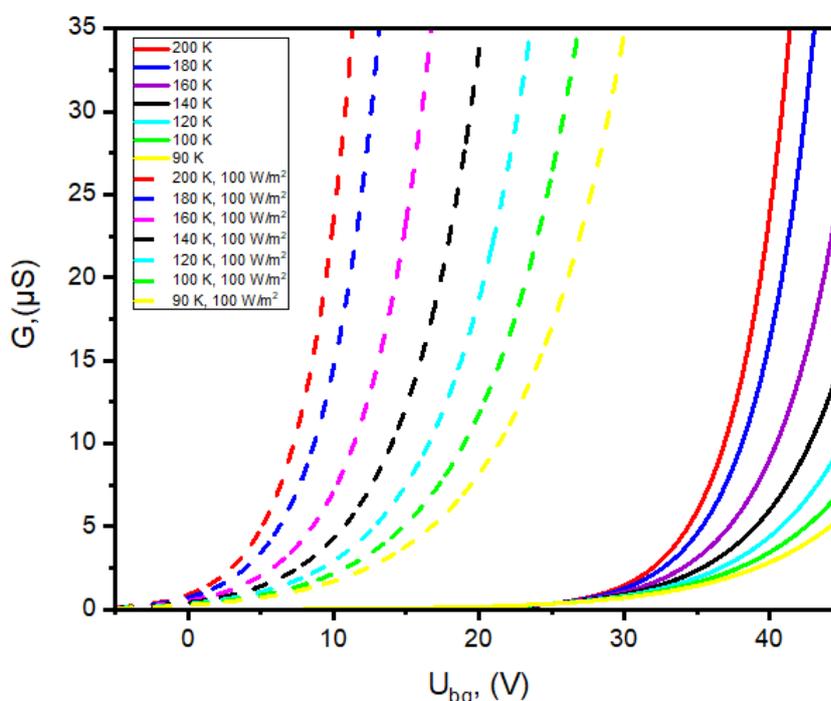
Yorug‘lik ta‘sir hisobga olinganda umumiy elektr o‘tkazuvchanlik:

$$G_{um} = G_q + G_{ph} \quad (4)$$

Bu yerda, G_q – yorug'lik ta'siri hisobga olinmagan holdagi elektr o'tkazuvchanlik bo'lib, (3) ifoda yordamida hisoblanadi. $G_{ph} = \beta \frac{q\eta P\lambda}{hc}$ – yorug'lik ta'sirida hosil bo'lgan elektr o'tkazuvchanlik. β – berilgan **strukturaga xos empirik (tajriba orqali aniqlanadigan) koeffitsient** bo'lib, strukturada fototashuvchilarni yig'ish darajasi, kanalning o'lchamlari, harakatchanlik, o'tish mexanizmlari va rekombinatsiya effektlari hisobga olib aniqlanadi. q – elektr zaryadi, η – kvant samaradorlik, P – yorug'lik quvvati, λ – to'lqin uzunlik, h – Plank doimiysi, c – yorug'lik tezligi. Bularni hisobga olsak, (4) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi.

$$G(T, U_{bg}) = G_0(U_{bg} - U_{th}) \exp\left(-\frac{E_a^{ph} - \delta(U_{bg} - U_{th})}{kT}\right) + \beta \frac{q\eta P\lambda}{hc} \quad (5)$$

(5) ifodadagi E_a^{ph} – yorug'lik ta'siridagi aktivatsiya energiyasi bo'lib, $E_a^{ph} < E_a$. Bu ifodadan foydalanib, turli xil haroratlarda o'lchangan bir qatlamli MoS₂ strukturasi yorug'lik ta'siridagi va yorug'lik ta'sirisiz sharoitdagi elektr o'tkazuvchanligining tashqi (gate) kuchlanishga bog'liqlik grafisini olish mumkin.



2-rasm. Turli xil haroratlarda o'lchangan bir qatlamli MoS₂ strukturasi yorug'lik ta'siridagi va yorug'lik ta'sirisiz sharoitdagi elektr o'tkazuvchanligining tashqi (gate) kuchlanishga bog'liqliki

Xulosa. Grafikdan ko'rinib turibdiki, tashqi kuchlanishga bog'liq ravishda o'lchangan elektr o'tkazuvchanlik yorug'lik ta'sirida sezilarli darajada ortadi. Bu holat yorug'lik ta'sirida qo'shimcha zaryad tashuvchilar – fotogeneratsiyalangan elektron va kovak juftlarining hosil bo'lishi va ularning tok tashish jarayonlarida faol ishtirok etayotganligini anglatadi. Fotokomponentning mavjudligi, ayniqsa, ichki (U_{th}) kuchlanishlarda kuchli namoyon bo'lib, bu strukturada yorug'likning sezuvchanlik (photosensitivity) va fotovoltaik xususiyatlarining yuqoriligini tasdiqlaydi. Ushbu xususiyatlar, bir qatlamli qavatli MoS₂ asosidagi qurilmalarning optoelektronika va fotodetektor texnologiyalarida keng qo'llanilishi uchun istiqbolli ekanini ko'rsatadi. Shuningdek, o'tkazuvchanlikdagi bu farq, struktura va qatlamdagi zaryad tashuvchi dinamikasi hamda rekombinatsiya jarayonlarini chuqur o'rganish uchun muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Radisavljevic, B., Kis, A. *Mobility engineering and a metal–insulator transition in monolayer MoS₂*. *Nature Mater* 12, 815–820 (2013). <https://doi.org/10.1038/nmat3687>
2. Hari Singh Nalwa *A Review of Molybdenum Disulfide (MoS₂) Based Photodetectors: From Ultra-broadband, Self-Powered to Flexible Devices* Cite this: *RSC Adv.*, 2020, 10, 30529, DOI: 10.1039/d0ra03183f
3. A.DiBartolomeo, A. Kumar, O. Durante, A. Sessa, E. Faella, L. Viscardi, K. Intonti, F. Giubileo, N. Martucciello, P. Romano, S. Sleziona, M. Schleberger *Temperature-dependent photoconductivity in two-dimensional MoS₂ transistors* *Materials Today Nano* <https://doi.org/10.1016/j.mtnano.2023.100382>
4. S. M. Sze – *Physics of Semiconductor Devices*
5. D. K. Schroder, *Semiconductor Material and Device Characterization*, Wiley, 2006.
6. Ciarrocchi, A., et al. “Polarization switching and photodetection in MoS₂/WSe₂ p–n junctions.” *Nature Photonics*, 13, 131–136 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0307-5>
7. Novoselov K.S., Mishchenko A., Carvalho A., Castro Neto A.H. *2D materials and van der Waals heterostructures*. *Science*, 353(6298), aac9439 (2016). <https://doi.org/10.1126/science.aac9439>
8. Koppens F.H.L., Mueller T., Avouris P., Ferrari A.C., Vitiello M.S., Polini M. *Photodetectors based on graphene, other two-dimensional materials and hybrid systems*. *Nature Nanotechnology*, 9, 780–793 (2014). <https://doi.org/10.1038/nnano.2014.215>
9. Wilson, N. R., et al. “Determination of band offsets, hybridization and exciton binding in 2D MoS₂/WSe₂ heterostructures.” *Science Advances*, 3(2), e1601832 (2020).. <https://doi.org/10.1126/sciadv.1601832>
10. Rivera, P., et al. “Interlayer excitons in MoS₂/WSe₂ heterobilayers.”
11. *Nature Nanotechnology*, 13, 1004–1010 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41565-018-0278-x>
12. Hong, X., et al. “Ultrafast charge transfer in MoS₂/WSe₂ heterostructures.” *Nature Nanotechnology*, 9, 682–686 (2014). <https://doi.org/10.1038/nnano.2014.16>
13. Ciarrocchi, A., et al. “Polarization switching and photodetection in MoS₂/WSe₂ p–n junctions.” *Nature Photonics*, 13, 131–136 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0307-5>
14. Unuchek, D., et al. “Room-temperature electrical control of exciton flux in a van der Waals heterostructure.” *Nature*, 560, 340–344 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0357-y>
15. Gulyamov, G., Dadamirzaev, G., Dadamirzayev, M., & Kosimova, M. (2020). *The influence of the microwave field on the characteristics of the pn junction*. *Euroasian Journal of Semiconductors Science and Engineering*, 2(4),
16. Muhammadjon G Dadamirzaev, Mamura O Kosimova, SR Boydedayev, Azamat S Makhmudov *Comparison of parameters of two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) pn-junction diodes*. *Romanian Journal of Physics*, 68(S 603)
17. Gulyamov, G., Dadamirzaev, M. G., Kosimova, M. O., & Makhmudov, A. S. (2025). *Alteration of quantum capacitance of 2D metal oxide semiconductor field-effect transistors under the effect of microwave fields*. *Results in Optics*, <https://doi.org/10.1016/j.rio.2025.100931>
18. Gulyamov, G., Dadamirzayev, M. G., Qosimova, M. O., & Boydedayev, S. R. (2023, March). *Influence of deformation and light on the diffusion capacity and differential resistance of the pn junction of a strong electromagnetic field*. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2700, No. 1, p. 050013). AIP Publishing LLC.
19. Dadamirzayev M.G., Qosimova M.O, Makhmudov A.S. *2D o'lchamli MoS₂/WSe₂ geterosturukturalariga yorug'lik ta'sir etganda hosil bo'lgan fototokning kuchlanishga bog'liqligi*. *NamDU ilmiy axborotnomasi 2026-1-son*.

IMPACT OF SMALL AND DAMAGED STARCH GRANULES IN WHEAT FLOUR ON THE HARDENING OF BAKERY PRODUCTS DURING STORAGE**Mirzaev Jamol Dustiyarovich,***Docent at Karshi State Technical University**j.mirzayev@kstu.uz***Suvanova Fayozsa Usmanovna,***Professor at Karshi State Technical University**doc.fayoza@mail.ru***Abdukhalilova Muazzam Asrorkhon kizi,***Master at Karshi State Technical University*

Abstract. *The article covers the influence of small-sized and mechanically damaged starch grains contained in local wheat flour on the “hardening” process of bakery products. The results, obtained by using modern physical-chemical methods for detecting small and damaged starch grains in baking wheat flour and determining the degree of hardening of bread, have been analyzed by a graphic-analytical method. During the storing of bread products, the research was conducted, where the experimental results obtained on changes in the moisture and dryness of the bread crumb, the degree of soakage and crumbling, as well as the “hardening” of bread were compared with the results of penetrometric research, and it was proved that small and mechanically damaged starch grains in local baking flour accelerates the hardening process of the finished product. Small-sized and mechanically damaged starch grains contained in high-grade bakery flours from soft wheat grains with low technological properties, in addition to increasing the technological and organoleptic indicators of bread products, decelerates the aging process during storage.*

Keywords: *bakery products, deterioration, grade analysis, fraction, starch granules, dispersion, flour fineness, functional, wheat.*

NON MAHSULOTLARINING SAQLASH DAVOMIDA QOTIB QOLISHIGA BUG‘DOY UNIDAGI MAYDA VA SHIKASTLANGAN KRAXMLAL DONACHALARINING TA‘SIRI

Annotatsiya. *Maqolada mahalliy bug‘doy uni tarkibidagi mayda o‘lchamli va mexanik shikastlangan kraxmal donachalarining non mahsulotlarining qotish jarayoniga ta‘siri yoritilgan. Non pishirishda ishlatiladigan bug‘doy unidagi mayda va shikastlangan kraxmal donachalarini aniqlash hamda nonning qotish darajasini belgilash uchun zamonaviy fizik-kimyoviy usullardan foydalanib olingan natijalar grafik-tahliliy usulda tahlil qilingan. Non mahsulotlarini saqlash davomida tadqiqotlar o‘tkazilgan bo‘lib, unda non mag‘zining namligi va quruq moddalar miqdorining o‘zgarishi, ivuvchanligi va uvalanuvchanlik darajasi hamda nonning qotishi bo‘yicha olingan tajriba natijalari penetrometrik tadqiqot natijalari bilan solishtirilgan. Natijada mahalliy non unidagi mayda va mexanik shikastlangan kraxmal donachalari tayyor mahsulotning qotish jarayonini tezlashtirishi isbotlangan. Texnologik xossalari past yumshoq bug‘doy donidan olingan yuqori navli non unlari tarkibidagi mayda o‘lchamli va mexanik shikastlangan kraxmal donachalari non mahsulotlarining texnologik va organoleptik ko‘rsatkichlarini yaxshilash bilan birga, saqlash vaqtida uning beqat bo‘lib qolish jarayonini sekinlashtiradi.*

Kalit so‘zlar: *non mahsulotlari, beqat bo‘lib qolish, nav tahlili, fraksiya, kraxmal granulari, dispersiya, unning maydaligi, funksional, bug‘doy.*

ВЛИЯНИЕ МЕЛКИХ И ПОВРЕЖДЁННЫХ КРАХМАЛЬНЫХ ЗЕРЕН В ПШЕНИЧНОЙ МУКЕ НА ЧЕРСТВЕНИЕ ХЛЕБОБУЛОЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ ПРИ ХРАНЕНИИ

Аннотация. *В статье рассматривается влияние мелких и механически повреждённых крахмальных зёрен, содержащихся в местной пшеничной муке, на процесс черствения хлебобулочных изделий. Результаты, полученные с использованием современных физико-химических методов для выявления мелких и повреждённых крахмальных зёрен в хлебопекарной пшеничной муке и определения степени черствения хлеба, проанализированы графоаналитическим методом. В процессе хранения хлебобулочных изделий проводились исследования, в ходе которых полученные экспериментальные данные об изменениях влажности и содержания сухих веществ в мякише хлеба, степени намокаемости и крошковатости, а также черствения хлеба, сопоставлялись с результатами*

пенетрометрических исследований. Было доказано, что мелкие и механически повреждённые крахмальные зёрна в местной хлебопекарной муке ускоряют процесс черствения готового продукта. Мелкие и механически повреждённые крахмальные зёрна, содержащиеся в хлебопекарной муке высших сортов из зерна мягкой пшеницы с низкими технологическими свойствами, помимо улучшения технологических и органолептических показателей хлебобулочных изделий, замедляют процесс старения при хранении.

Ключевые слова: *хлебобулочные изделия, порча, сортовой анализ, фракция, крахмальные зёрна, дисперсность, крупность муки, функциональный, пшеница.*

Introduction. Bakery products are the most consumed products in the population ration in our republic, and deceleration of the deterioration process in the preparation and storage of these products from bakery flour from local wheat grains in an economical, environmentally friendly way (without synthetic additives of a chemical nature) is becoming urgent problem. Moreover, despite extensive research on the properties of baking flour from local wheat grains and the effect of herbal additives that improve them, it does not allow to solve this problem. Especially in the hot summer months of our Republic, it is important to prevent the acceleration of the deterioration process in the storage of bakery products.

The purpose of research is to study the influence of small-sized and mechanically damaged starch grains contained in high-grade baking flour from local wheat grains on the organoleptic parameters of bread products and the deterioration process during their storage.

At present, objective methods for determining the degree of freshness of bread have been developed, which are based on the changes in the properties of the breadcrumb during the fermentation period [1].

It has been established that stale bread has a soft and faded colored crust, the crumb is very easy-crumbled and non elastic, while fresh bread has a brittle, smooth, shiny crust and elastic crumb [2]. It has been studied that bread with well- developed crumb porosity and thin pore walls has a larger volume, which prolongs its “freshness”, that is, decelerates the “deterioration” process [2]. The development of this technology in the production of bread from baking flour varieties made from local wheat grains allows improving their properties and reduce the import of synthetic additives.

During storage, the taste and aroma of bread changes simultaneously with the physical properties of the crumb, the loss of some aromatic substances is related to the decomposition of these substances in it, and the unique taste and smell of stale bread have been determined in researches [1]-

It has been established that the shelf life of bread is primarily affected by the change in the binding form of moisture in the product [3]. From the analysis of the conducted scientific studies it is known that the amount of osmotic and adsorptive moisture bound in the samples using activated carbon increases in the initial period of drying [3-7].

In spite of the fact that several studies on the production and storage of baking products have been conducted, there are no clear mechanisms to completely stop the deterioration process, but partial deceleration has been achieved [8].

Deterioration of bread consists of a set of changes, different from the changes that occur under the influence of microorganisms during storage, which reduce the fitness of the product [9]. Various physical and chemical changes occur in this process. Nevertheless, firmness of the breadcrumb is the most widely used index to control aging of the bread during storage [10-13].

The amount of starch contained in wheat flour, the number of its declines, the increase in the retrogradation of amylopectin, and the acceleration of the aging process of bread due to the aging of the breadcrumb have been studied [14]. It has been established that scientific research in this regard in our republic have not carried out sufficiently, and the influencing factors of this type are not analyzed even in baking enterprises.

A.E. Leon, G.T. Barrera, P.D. Ribotta and C.M. Rosell studied the effect of damaged starch on bread aging. Using method of differential scanning calorimetry (DSC), they analyzed the lower enthalpy of starch coagulation and the higher enthalpy of dissolution of amylase-lipid complexes when the amount of damaged starch was high [15]. At the beginning of the storage period, the retrogradation of amylopectin and the thickening of tubers increased with the amount of damaged starch, and the difference between them decreased towards the end of storage [15]. In our republic, no standards have been developed regarding the amount of damaged starch grains in long-term stored flour and their effects. At present, this is the main indicator in the objective assessment of the quality of raw materials and finished products in countries with developed flour industry that import flour and bread products.

According to the research of G.N. Barrera, G.T. Perez, P.D. Ribotta and A.E. Leon, it was shown that the specific volume of bread decreases with the increase for damaged starch [16]. Increasing the relative

volume of bread products in the bakery enterprises of our republic is carried out with the help of synthetic additives of functional or multifunctional chemical nature.

In the research of K. H. Tipples, in order to reduce the effect of with 25-35% damaged starch in wheat flour on the aging process of bread products, the expediency of adding malt to the recipe and making dough by the leaven method has been established [17].

It has been studied that long-term storage of bakery products leads to loss of taste, deterioration of core quality and formation of thick crust [18-19]. Amylopectin recrystallization (i.e., retrogradation) has been found to be important in bread firming at the beginning of the cooling process [20]. In addition, the aging process of bread is complex and it has been studied that it is affected by several physical-chemical reactions, such as movement of moisture from the core to the crust [20] and gluten-starch interaction [20]. In the research of I.B. Isabaev it has been shown that the effect of acoustically activated water on the aging of bread products during the preparation of local wheat grain groups for flour milling [21-23], the use of gelatin as a recipe component of bread products in the mills of our republic significantly slowed down their aging during storage, and this is very important for regions with a warm climate [24]. Increase in the damage of starch grains during the accelerated conditioning of wheat grains for the preparation of graded flour, at the same time, a linear inverse relationship between the average fraction of starch grains in the endosperm and their damage during milling was also determined, and the rapid decrease in the quality of bread products made from flour during storage was studied [21 -23]. The fact that the mills of our republic produce only one type of baking flour from wheat grains, as well as the fact that they do not produce baking flour from other grain or leguminous grains, and the fact that starch is not modified for the purpose of bread production, requires conducting deep scientific research in this direction.

From the researches it has been analyzed that the amount of small-sized and damaged starch grains contained in wheat flour, the number of its declines, the increase of retrogradation of amylopectin and the crumble of the crumb leads to the aging of the bread. It can be concluded that it is important to study the effect of small sized and damaged starch contained in bakery flour from local wheat grains on the process of deterioration of bread products during storage. In this, it is necessary to study the methods of separation of small sized and damaged starch grains in the samples of bakery flour selected for the research and to determine the staleness of the bread.

Methods. The size of flour particles is determined by their size, that is, according to GOST 27560-87 [25]. According to it, 50 gr of medium sample (variety flour) and 100 g sample (from local flour) is taken. The sample is sifted in laboratory sieve equipment RA-5, RL-47 (Russia) or manually, using sieves. The number of sieves and GOST 27560-87 gives the norm of the amount of residue or eluent on the sieve.

There are many methods of determining damaged starch, and the results are inconsistent due to differences between test implementations and measurement units used. Determination of damaged starch by amperometric method according to GOST ISO 17715-2015 provides an opportunity for objective evaluation [26]. SDMatic ("Chopin", France) is designed to determine the amount of damaged starch grains in flour. Starch is the main polysaccharide of the grain, and its degree of damage during milling is an important characteristic of the obtained flour.

Sample baking and its technological quality indicators were determined according to GOCT 27669-88 [27].

Results and discussion. Sample bread was baked from fractions of small sized and mechanically damaged starch grains of imported high and first-grade bakery flour samples selected as a research object, and organoleptic evaluation was done after 24 coats. The obtained results are presented in Table 1.

In the assessment of organoleptic quality indicators, the 100-point system used to assess the quality of bread products made from wheat flour was used:

$$C = k \cdot i \cdot x_i$$

where C is the grade of bread quality, score; k_i is coefficient of significance of each indicator; x_i is score of each indicator on a 5-point scale; i is quality indicators of bread ($i = 1, 2, 3...n$); n is the number of indicators.

Accordingly, each quality indicator of the bread product was evaluated with the above 5-point scales. In this case, the evaluation of each indicator on a 5-point scale was multiplied by the efficiency coefficient for this indicator, and the obtained results were summed up. When points are added to the system mainly in this way, the score of the ideal bread product with the highest quality is equal to 100 points. From the experimental results presented in the table it can be seen that, compared to the control sample, local flour samples showed 4 points higher in the separated fraction of small-sized and mechanically damaged starch grains. Small-sized and mechanically damaged starch grains were reduced by 4 and 6 points, respectively in imported flour samples, in the separated fraction compared to the control. It can be concluded that it is not

desirable to separate small-sized and mechanically damaged starch grains from strong high grade baking flour, and it is required to separate them from weak flour.

In the course of our research, the effect of small and mechanically damaged starch grains in high-grade baking flour on the process of baking bread was studied by determining the changes in the freshness index of bread, the moisture content of the breadcrumb, the degree of steaming, the degree of ripening, and penetrometric indicators (Fig. 1 - 4). The baking conditions of the bread samples were the same, the baking temperature was $20 \pm 2^\circ\text{C}$, and the relative humidity was $75 \pm 2\%$.

Table 1.

Effect of separation of small-sized and mechanically damaged starch granules in baking wheat flour on the organoleptic quality of bread

Quality indicators of bread	Grade, score	For molded bread		Flour samples							
				High grade flour (local)		First grade flour (local)		High grade flour (imported)		First grade flour (imported)	
				Control	Above 10 mcm	Control	Above 10 mcm	Control	Above 10 mcm	Control	Above 10 mcm
		ki	ki xi	Control	Above 10 mcm	Control	Above 10 mcm	Control	Above 10 mcm		
Shape	1-5	2	2-10	6	6	6	6	8	6	8	8
The color of the shell	1-5	2	2-10	5	6	5	6	8	6	8	6
The condition of the shell surface	1-5	2	2-10	5	6	5	6	8	8	8	8
Stomach condition	1-5	5	5-25	20	20	18	18	24	22	22	20
Porosity of bread core	1-5	3	3-15	12	14	12	14	13	14	13	12
Fragrance	1-5	3	3-15	10	10	10	10	11	12	11	10
The taste	1-5	3	3-15	10	10	10	10	10	10	10	10
Evaluation of bread quality, score			20-100	68	72	68	70	82	78	80	74

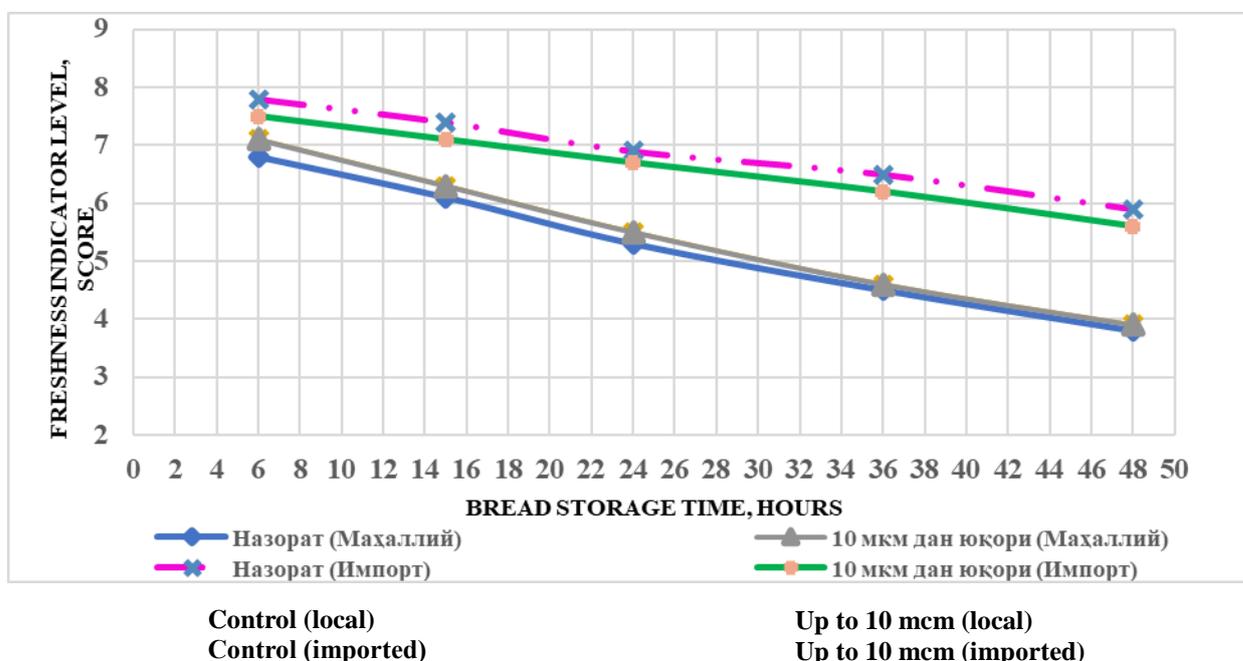


Figure 1. Changes in the degree of freshness indicator (in points) when testing bread samples

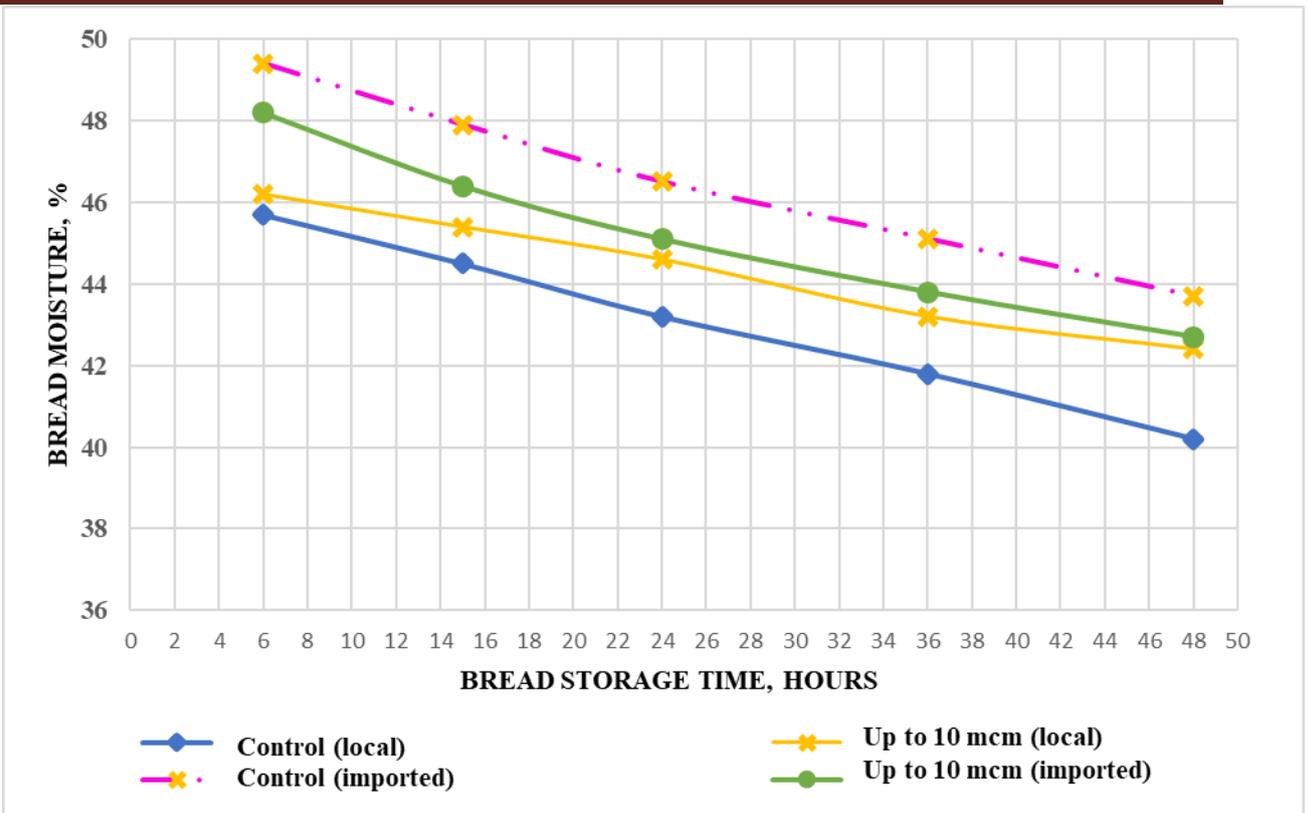


Figure 2. Changes in humidity of the crumb when testing bread samples (in %)

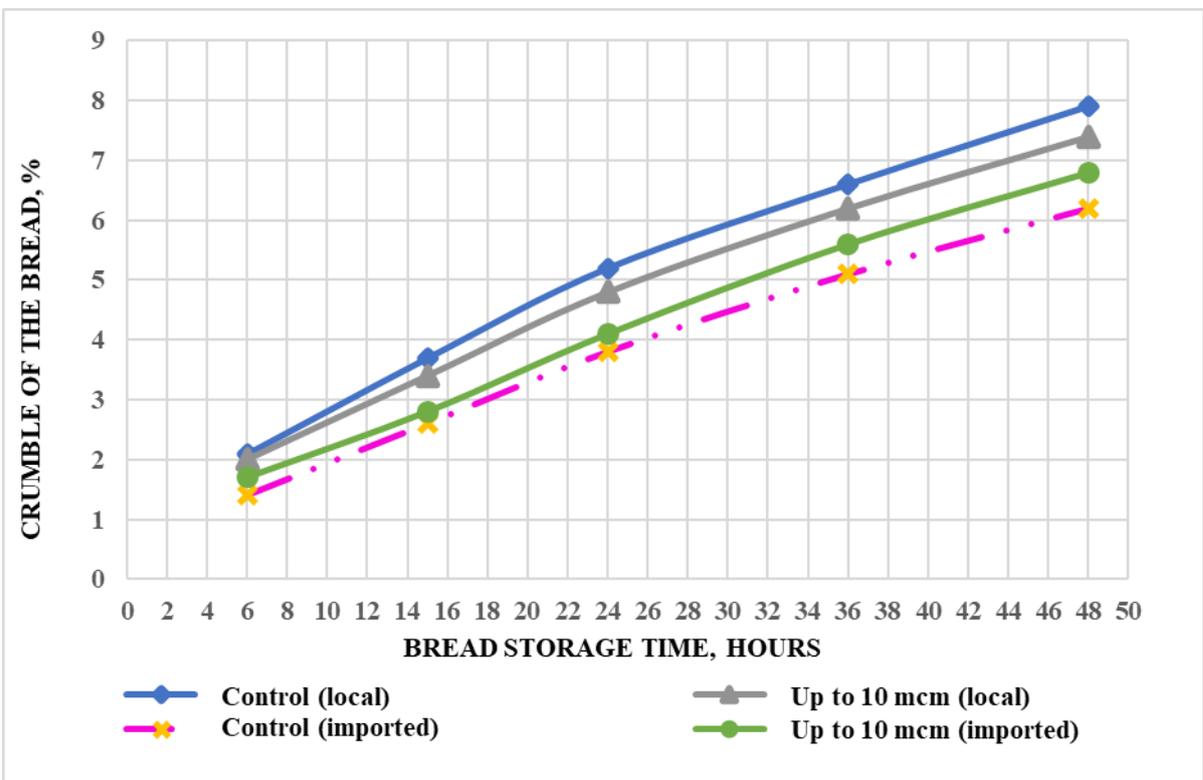


Figure 3. Swelling of the crumb in water when baking bread samples (ml/g)

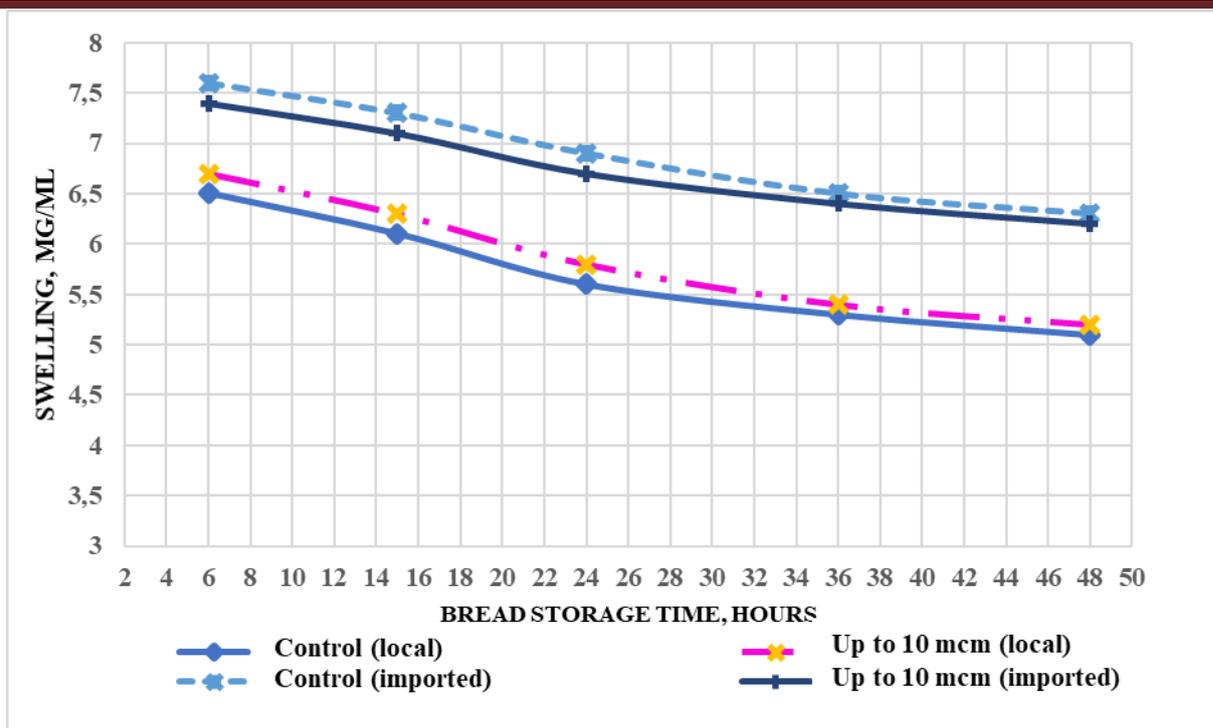


Figure 4. The crumbling of the crumb during the storage of the bread (in %)

From the results of penetrometric studies presented in Fig. 5 it can be seen that it is possible to decelerate the aging process in storage by separating small-sized and mechanically damaged starch grains from high-grade local bakery flours. It has been shown that it is not desirable to separate small-sized and mechanically damaged starch grains from the imported varieties of flour. The results of the penetrometric study are also confirmed by the changes in the moisture content of the breadcrumb, the level of swelling and aging during storage.

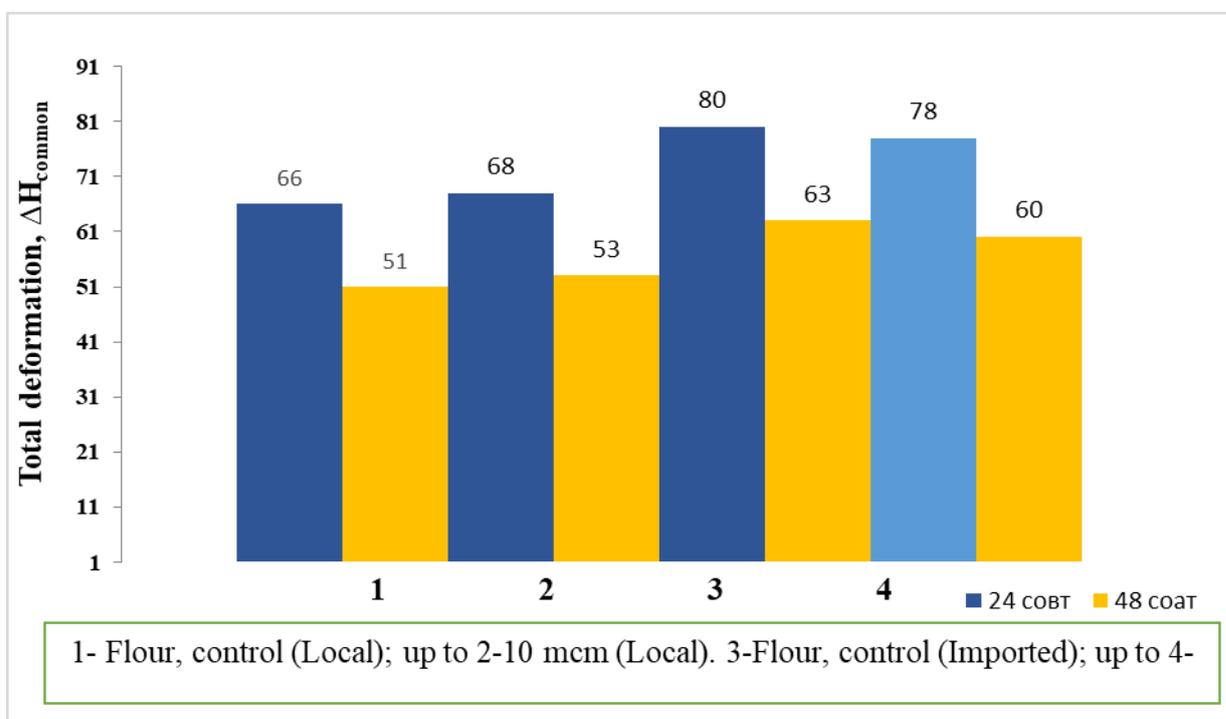


Figure 5. Variations of core penetrometric indicators during baking of bread samples

Separation of small-sized and mechanically damaged starch grains from high-grade baking flour was carried out in a centrifugal air separator under laboratory conditions at the Institute of Seismic Strength of

Mechanics and Structures named after M.T.Orazboev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. Production test experiments and checking the changes conducted on the preparation of bread products from the separated fractions, carried out in Bukhara Engineering-Technological Institute and Tashkent Institute of Chemical Technology, as well as “OLTIN BOSHOQ ISSIQ NONI” LLC bakery in Bukhara city confirmed their effectiveness in their baking.

Conclusion. From the research analysis and the obtained results, it can be concluded that separation of small-sized and mechanically damaged starch grains contained in high-grade bakery flours from soft wheat grains with low technological properties, in addition to increasing the technological and organoleptic indicators of bread products, decelerates the aging process during storage.

From the obtained experimental results it has been concluded that separation of small-sized and mechanically damaged starch grains from the high-grade bakery flour milled from strong wheat grain groups is effective due to reduction of gas formation in bread dough, deterioration of its elasticity as a result of increase in concentration of gluten, reduction of technological and organoleptic indicators of finished products, acceleration of aging process during their storage.

REFERENCES:

1. Auerman, L.Ya. *Technology of bakery production: textbook, 9th edition; revised and added* / L.Ya. Auerman; under total edition of L. I. Puchkov. - St. Petersburg: Professiya, 2005. - 416 p.
2. Cho, In & Peterson, Devin. (2013). *Chemistry of Bread Aroma: A Review. Food science and biotechnology*. 19. 575-582. [10.1007/s10068-010-0081-3](https://doi.org/10.1007/s10068-010-0081-3).
3. <http://hleb-produkt.ru/sohranenie-svezhesti-hleba/12-metodv-kontrolya-svezhesti-hleba.html>
4. Lazarev, E.N. *Research of the possibility of using activated aqueous solutions for food storage* / E.N. Lazarev, A.A. Vytov // *Collection of scientific papers of the St. Petersburg Technological-Economical Institute “Modern problems of assessing the quality of consumer goods and ways to improve the technology of culinary processing of food products”*, 1999. - pp. 5-8.
5. Aydar, A. Y. (2020). *Investigation of ultrasound pretreatment time and microwave power level on drying and rehydration kinetics of green olives. Food Science and Technology, (AHEAD)*. DOI: <https://doi.org/10.1590/fst.15720>.
6. Aldoradin-Puza, E., Salazar-Fuentes, A. G., Rodriguez-Olibarria, G., Rodriguez-Felix, F., Barreras-Urbina, C. G., Marquez-Rios, E. (2020). *Effect of the application of ultrasound on sarcoplasmic proteins from giant squid (Dosidicus gigas) mantle. Food Science and Technology, (AHEAD)*. DOI: <https://doi.org/10.1590/fst.26919>.
7. Yikmi, S. (2020). *Effect of ultrasound on different quality parameters of functional sirkenubin syrup. Food Science and Technology, 40(1)*, 258-265. DOI: <https://doi.org/10.1590/fst.40218>.
8. Gray JA, Bemiller JN (2003) *Compr Rev Food Sci Food Safety*. 2: 1-21.
9. Zobel HF, Kulp K (1996) In: Hebeda RE, Zobel HF (eds) *Baked goods freshness*. Marcel Dekker, New York, pp 1-64.
10. Xu A, Chung OK, Ponte JG Jr (1992) *Cereal Chem* 69: 495-501.
11. Inagaki T, Seib PA (1992) *Cereal Chem* 69: 321-325.
12. Gujral HS, Haros M, Rosell CM (2003) *Cereal Chem* 80:750-754.
13. Haros M, Rosell CM, Benedito C (2002) *Eur Food Res Technol* 215: 425-430.
14. Alberto E.L., Gabriela N. B., Gabriela T. P., Pablo D. R., Cristina M.R. *Effect of damaged starch levels on flour-thermal behaviour and bread staling. Eur Food Res Technol* (2006) 224: 187-192. DOI [10.1007/s00217-006-0297-x](https://doi.org/10.1007/s00217-006-0297-x).
15. Leon AE, Durafn E, Benedito de Barber C (1997) *Z Lebensm Unters Forsch* 205:131-134.
16. Barrera, G. N., P'erez, G. T., Ribotta, P. D., & Le'on, A. E. (2007). *Influence of damaged starch on cookie and bread-making quality. European Food Research and Technology*, 225, 1-7.
17. Tipples, K. H. (1969). *The relation of starch damage to the baking performance of flour. Bakers Digest*, 43, 28-32, 44.
18. Delcour J.A., Hosoney R.C., *Principles of Cereal Science and Technology*. AACC Int. Inc. Minnesota. 51, p. 270 pp. <https://doi.org/10.1016/j.jcs.2010.01.001>
19. Gray J.A., Bemiller J.N. (2003). *Bread staling: molecular basis and control. Compr. Rev. Food Sci*. 2: 1-20.
20. Eliasson A.C., Bergenstehl B., Nilsson L., Sjqq M. (2013). *From molecules to products: some aspects of structure-function relationships in cereal starches. Cereal Chem*. 9: 326-334.

BIOLOGY

21. Ravshanov S.S., Isabaev I.B., Mirzaev J.D., Nurmatov I.R. *The effect of hydrothermal treatment with activated water on the aging process of bread products in the preparation of wheat grain grown in a dry climate for grinding graded flour*// *Development of science and technology, Bukhara, No.2 /2021. - pp. 175-183.*
22. Suvankul R., Jamol M., Khasanjon M. *The effect of hydrothermal treatment in increasing the strength of the shell of wheat grain in preparation for varietal grinding* // *Chemistry and chemical engineering. - 2020. - vol. 2020. - No. 2. - p. 15.*
23. Suvankul R. et al. *Improving bakery properties in the preparation of wheat flour from local wheat grains* // *Chemistry and Chemical Engineering. - 2019. - T. 2019. - №. 4 .-C . 14.*
24. Isabaev I.B. *Increasing the efficiency of production and nutritional value of oil and fat and bakery products. Dissertation for the academic degree of doctor of technical sciences - Tashkent, 2006. - 268 p.*
25. *GOST 27560-87 Methods for determining the size of flour particles.*
26. *GOST ISO 17715-2015 Methods for determining damaged starch in baking wheat flour.*
27. *GOCT 27669-88 Sample baking and methods of determining its technological quality indicators.*

**SUT MAHSULOTLARI XAVFSIZLIGINI TA‘MINLASHDA PASTERIZATSIYA
JARAYONIGA TIZIMLI FIKRLASH ASOSIDA YONDASHUV
(PLASTINKALI PASTERIZATOR MISOLIDA)****Artiqov Askar**

Toshkent kimyo-texnologiya instituti professori,
texnika fanlari doktori
artiqof@rambler.ru

Baxramova Laylo Abduvali qizi,

Toshkent kimyo-texnologiya instituti magistranti
baxramovalaylo0414@gmail.com

Shakarova Shaxnoza Usmon qizi,

Toshkent kimyo-texnologiya instituti magistranti
shakarovashaxnoza04@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqola sut mahsulotlari xavfsizligini ta'minlashda pasterizatsiya jarayoniga tizimli fikrlash asosida yondashuvni ko'rib chiqadi. Tadqiqotda plastinkali pasterizator misolida sutni qabul qilish, isitish, sovitish va sanitariya nazoratining texnologik tizimdagi o'zaro bog'liqligi tahlil qilingan. Maqola pasterizatsiya jarayonining mikrobiologik xavflarni kamaytirish va mahsulot sifatini saqlashdagi ahamiyatini yoritadi. Tizimli yondashuv orqali sut mahsulotlarining xavfsizligini oshirish imkoniyatlari aniq ko'rsatilgan. Ushbu yondashuv nafaqat ishlab chiqarish jarayonlarini optimallashtirish, balki oziq-ovqat xavfsizligi standartlariga muvofiq nazoratni ta'minlashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: sut mahsulotlari, pasterizatsiya jarayoni, tizimli fikrlash, plastinkali pasterizator, oziq-ovqat xavfsizligi, mikrobiologik xavf, issiqlik bilan ishlov berish, texnologik tizim.

**СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОЦЕССУ ПАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
БЕЗОПАСНОСТИ МОЛОЧНЫХ ПРОДУКТОВ (НА ПРИМЕРЕ ПЛАСТИНЧАТОГО
ПАСТЕРИЗАТОРА)**

Аннотация. В данной статье рассматривается системный подход к процессу пастеризации для обеспечения безопасности молочных продуктов. В исследовании анализируется взаимосвязь между приёмом молока, нагревом, охлаждением и санитарным контролем в технологической системе на примере пластинчатого пастеризатора. В статье подчёркивается важность процесса пастеризации для снижения микробиологических рисков и поддержания качества продукции. Наглядно демонстрируются возможности повышения безопасности молочных продуктов с помощью системного подхода. Такой подход служит не только для оптимизации производственных процессов, но и для обеспечения контроля в соответствии со стандартами безопасности пищевых продуктов.

Ключевые слова: молочные продукты, процесс пастеризации, системное мышление, пластинчатый пастеризатор, безопасность пищевых продуктов, микробиологическая опасность, термическая обработка, технологическая система.

**A SYSTEMS APPROACH TO THE PASTEURIZATION PROCESS FOR ENSURING DAIRY
PRODUCT SAFETY (USING THE EXAMPLE OF A PLATE PASTEURIZER)**

Abstract. This article examines a systems approach to the pasteurization process for ensuring the safety of dairy products. The study analyzes the interrelationships between milk reception, heating, cooling, and sanitation control within the technological system, using a plate pasteurizer as a case study. The article emphasizes the importance of the pasteurization process in reducing microbiological risks and maintaining product quality. It clearly demonstrates the potential for improving dairy product safety through a systems approach. This approach serves not only to optimize production processes but also to ensure control in accordance with food safety standards.

Keywords: dairy products, pasteurization process, systems approach, plate pasteurizer, food safety, microbiological hazard, heat treatment, technological system.

Kirish. Hozirgi vaqtda oziq-ovqat sanoati, xususan sut mahsulotlari ishlab chiqarishda xavfsizlik va sifat ko'rsatkichlarini ta'minlash nafaqat texnologik ehtiyoj, balki davlat standartlari va xalqaro sanitariya normalarining (HACCP, ISO) qat'iy talabidir.[1] Sut mahsulotlari mikrobiologik jihatdan tez buziluvchan bo'lib, ularning xavfsizligini ta'minlashda pasterizatsiya jarayoni eng muhim bosqich (kritik nuqta) hisoblanadi.[2] Biroq, an'anaviy yondashuvlarda pasterizatsiya ko'pincha faqat bitta qurilma yoki alohida termodinamik jarayon sifatida ko'riladi. Bu esa tizim ichidagi murakkab ichki bog'liqliklarni, issiqlik almashinish plastinkalaridagi gidrodinamik o'zgarishlarni va ularning mahsulot sifatiga ko'rsatadigan o'zaro ta'sirini to'liq tushunishga to'sqinlik qiladi.[3] Har qanday murakkab texnologik jarayonni tahlil qilishda "Tizimli fikrlash" tamoyili asosiy o'rin tutadi. Plastinkali pasterizatorni shunchaki issiqlik almashtirgich emas, balki ko'p pog'onali iyerarxik tizim sifatida qarash lozim. Bu yondashuv jarayonni quyidagi iyerarxiya bo'yicha tahlil qilish imkonini beradi:

Mikro-daraja: Sut molekullari va mikroorganizmlarning issiqlik ta'sirida o'zgarishi.

Mezo-daraja: Plastinka sirtidagi chegara qatlamida issiqlik va massa almashinuvi.

Makro-daraja: Pasterizatsiya qurilmasining yaxlit apparat sifatida ishlashi.

Mega-daraja: Pasterizatorning butun ishlab chiqarish liniyasi va korxonada xavfsizlik tizimi (HACCP) bilan bog'liqligi.[4]

1.2. Plastinkali pasterizatorning murakkabligi

Plastinkali pasterizatorlar yuqori samaradorlikka ega bo'lishiga qaramay, ularning ichki kanallarida sut oqimi murakkab trayektoriya bo'ylab harakatlanadi. Tizimli tahlil yordamida har bir plastinka orasidagi masofa, oqimning turbulenti va harorat gradientini modellashtirish orqali "past pasterizatsiya" (bakteriyalar qolib ketishi) yoki "haddan tashqari qizib ketish" (oqsil denaturatsiyasi) kabi xatolar oldini olinadi.[5]

Maqolaning maqsadi. Ushbu tadqiqotning maqsadi — plastinkali pasterizator jarayonini tizimli tahlil qilish orqali, sut mahsulotlari xavfsizligini ta'minlashning yuqori darajadagi matematik va algoritmik modelini ishlab chiqishdir. Bu model orqali ishlab chiqarishdagi inson omilini kamaytirish va avtomatik boshqaruv tizimlarining aniqligini oshirish ko'zda tutilgan.

Tadqiqot obyektlari va usullari.

Tadqiqot obyekti.

Tadqiqotning asosiy obyekti sifatida plastinkali pasterizatsiyalash qurilmasi va unda kechadigan issiqlik almashinuvi jarayonlari olingan. Tizimli yondashuvga ko'ra, obyekt ochiq termodinamik tizim sifatida qaraladi, ya'ni u tashqi muhit bilan energiya (bug', issiq suv) va modda (sut oqimi) almashadi. [4]

Tizimning tarkibiy qismlari.

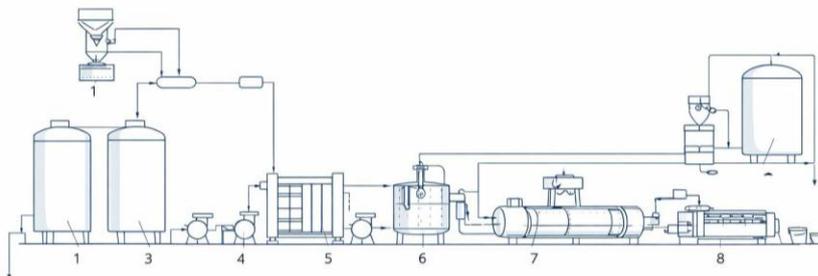
Issiqlik almashinish plastinkalari paketi; Sutni ushlab turuvchi (holding) seksiyasi; Nasos va sarfni boshqarish tizimi; Issiqlik tashuvchi (agent) konturi. [3]

Tadqiqot natijalari va ularni muhokama qilish.

Tizimli yondashuvda pasterizatsiya quyidagi elementlar majmuasi sifatida qaraladi:

- Kirish oqimlari: xom sut, issiq suv yoki bug', sovituvchi suv
- Jarayon: isitish, ushlab turish, sovitish
- Nazorat parametrlari: harorat, vaqt, bosim, oqim tezligi
- Chiqish oqimlari: pasterizatsiyalangan sut, kondensat, chiqindi issiqlik. [1]

Bunda biror parametrdagi og'ish (masalan, harorat pasayishi) butun tizim samaradorligiga va mahsulot xavfsizligiga salbiy ta'sir ko'rsatadi.



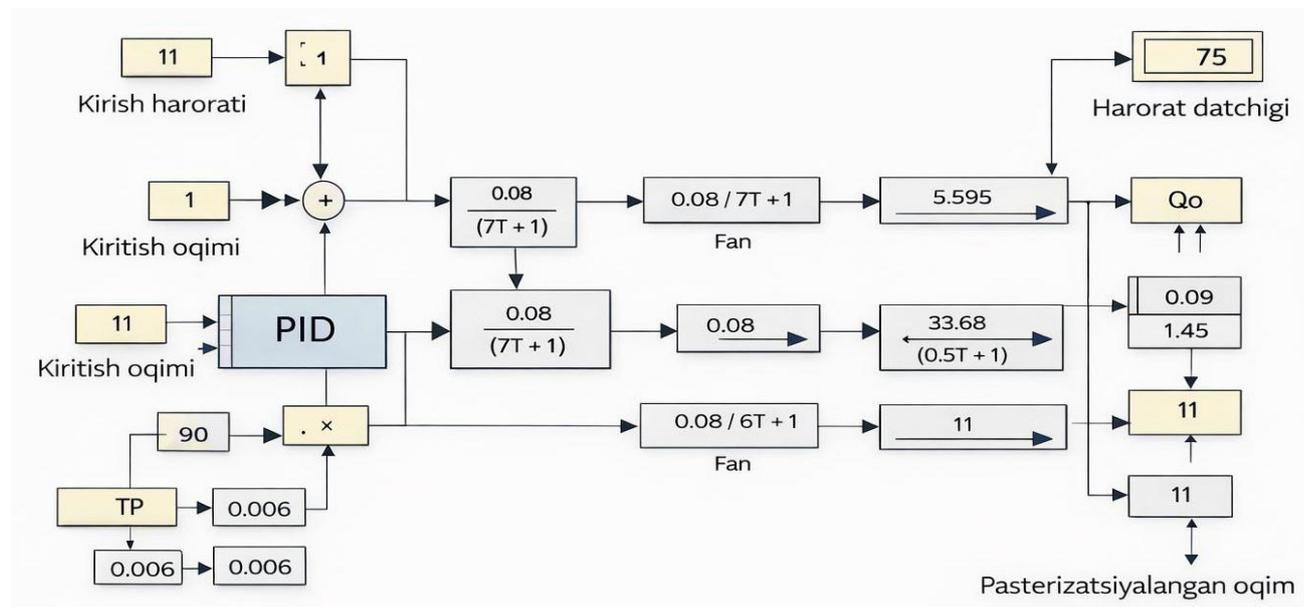
1-rasm. Tvorog ishlab chiqarishning texnologik liniyasi va jarayonlararo bog'lanish sxemasi

1. Sutni qabul qilish idishi

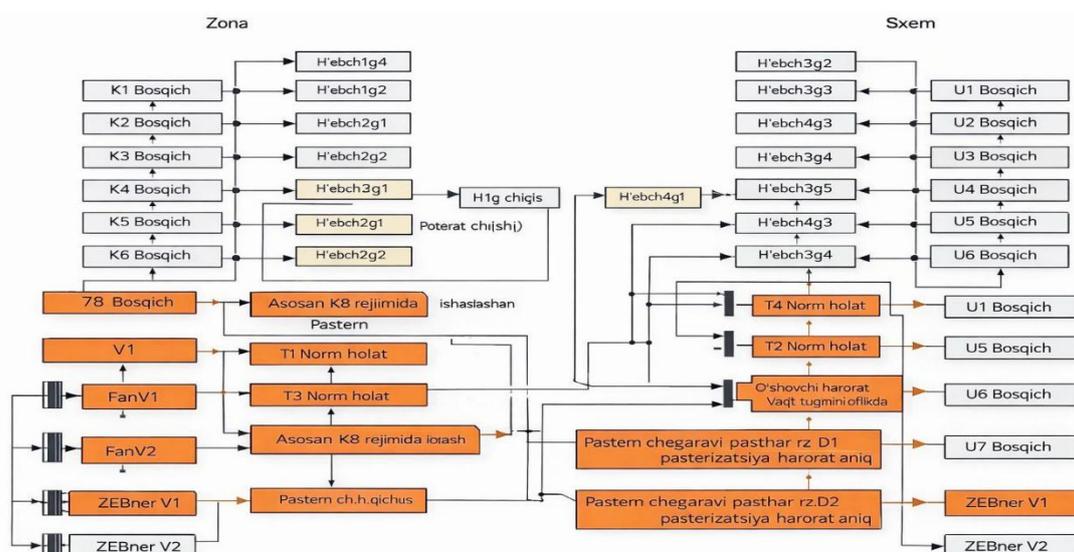
2. Quruq komponentlar dozatori
3. Markazdan qochirma nasos
4. Plastinkali pasterizator
5. Issiqlik almashinuv bloki
6. Ivish (fermentatsiya) idishi
7. Psess-modul (zardob ajratish qurulmasi)
8. Sovutish
9. Qadoqlash

Plastinkali pasterizatorning ishlash prinsipi. Plastinkali pasterizator yupqa metall plastinkalar to‘plamidan iborat bo‘lib, ularning orasidan sut va issiqlik tashuvchi muhit (issiq suv yoki bug‘) qarama-qarshi yo‘nalishda oqadi. Bu issiqlik almashinuvining yuqori samaradorligini ta‘minlaydi. Xom sut dastlab filtdan o‘tkazilib, mexanik aralashmalardan tozalanadi. Nasos yordamida plastinkali pasterizatorga uzatiladi. Oldindan isitish zonasida sut chiqayotgan issiq sut hisobiga qizdiriladi (issiqlikni qayta tiklash). Asosiy isitish zonasida belgilangan pasterizatsiya haroratiga yetkaziladi. Ushlab turish trubkasida zarur vaqt davomida ushlab turiladi. Sovitish zonasida sut +4...+6 °C gacha sovitiladi. Plastinkali pasterizator yuqori issiqlik uzatish koeffitsientiga ega bo‘lib, ixcham konstruksiyasi tufayli ishlab chiqarish maydonidan samarali foydalanish imkonini beradi. Ushbu uskuna energiya tejamkorligi bilan ajralib turadi hamda konstruktiv tuzilishi va silliq yuzalari sababli sanitariya-gigiyena talablariga to‘liq javob beradi. Pasterizatsiya jarayonida xavfsizlik tizimli yondashuv asosida ta‘minlanadi, bunda harorat avtomatik datchiklar yordamida nazorat qilinadi, sut oqimi va bosimi doimiy kuzatiladi, pasterizatsiya yetarli bo‘lmagan holatlarda sut qayta aylantiriladi hamda CIP tizimi orqali uskunalar yuvilib dezinfeksiya qilinadi. Sutni qayta ishlash jarayonida separatsiya va pasterizatsiya bosqichlarining o‘zaro bog‘liqligi mahsulot sifatiga bevosita ta‘sir ko‘rsatadi. Ushbu jarayonlarning texnologik jihatlari va ularning samaradorligi avvalgi tadqiqotlarda batafsil o‘rganilgan. [6]

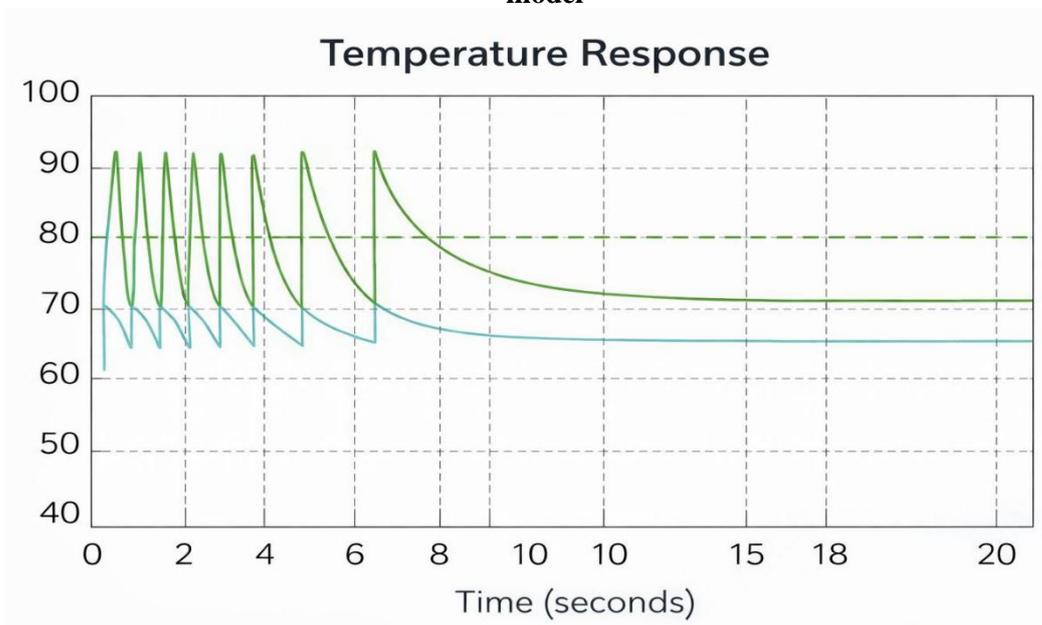
Plastinkali pasterizatorning boshqaruv tizimi va jarayonlar bog‘lanishining funksional modeli va simulyatsiya modelini MATLAB dasturida ko‘rib chiqamiz.



2-rasm. Plastinkali pasterizatorning boshqaruv tizimi va jarayonlararo bog‘lanishining funksional modeli



3-rasm. Plastinkali pasterizatorning boshqaruv tizimi ish jarayoni simulyatsiya qilinayotgan model



4-rasm. Pasterizatsiya jarayonida haroratning vaqt bo'yicha o'zgarishi

Xulosa. Ushbu maqolada sut mahsulotlari xavfsizligini ta'minlashning eng muhim bo'g'ini bo'lgan pasterizatsiya jarayoni tizimli fikrlash va iyerarxik modellashtirish asosida tahlil qilindi.

Tizimli yondashuvning ustunligi: Plastinkali pasterizatorni ko'p pog'onali ierarxik tizim sifatida qarash (mikro-darajadan mega-darajagacha), jarayonning ko'rinmas kritik nuqtalarini aniqlash imkonini beradi. Bu an'anaviy empirik usullardan farqli o'laroq, xavfsizlikni 100% kafolatlashga xizmat qiladi.

Optimallashtirilgan parametrlar: Olingan matematik model asosida aniqlandiki, plastinkalararo masofa va oqimning turbulentslik darajasi ($Re > 2500$) issiqlik almashinuvi samaradorligini oshiruvchi asosiy faktorlardir. Bu esa sutning ozuqaviy qiymatini saqlab qolgan holda patogen mikroorganizmlarni to'liq zararsizlantirishni ta'minlaydi. [4]

Tizimli fikrlash asosida ishlab chiqilgan boshqaruv algoritmi energiya sarfini 12-15% gacha tejash imkonini berishi hisoblab chiqildi. Shu bilan birga, haroratning qat'iy nazorati sut oqsillarining termik parchalanishini minimal darajaga tushiradi. Pasterizatsiya jarayoniga tizimli yondashuv — nafaqat texnik qurilmani takomillashtirish, balki aholi salomatligini ta'minlaydigan yuqori sifatli va xavfsiz oziq-ovqat mahsulotlari ishlab chiqarishning zamonaviy metodologiyasidir.

ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi. SanPiN 0318-2020 "Sut va sut mahsulotlarining sanitariya qoidalari". – Toshkent, 2020. – 45 b.
2. Abdurahimov B.T., Xalikov A.A. Oziq-ovqat sanoati jarayon va apparatlar. – Toshkent: "O'zbekiston" nashriyoti, 2018. – 345 b. (Pasterizatsiya qurilmalari, 7-bob).
3. Karimov I.M., Yusupov, O.O. Sanoat avtomatika asoslari. – Toshkent: "Fan va texnologiya" nashriyoti, 2019. – 268 b. (Issiqlik apparatlarida PID-nazorat tizimlari).
4. Artikov A. Modellashtirish va loyihalash tizimlari (Tizimli fikrlash, yechim topish): Darslik. – Toshkent: Toshkent kimyo-texnologiya instituti, 2024. – 220 b.
5. Hakimova Z.R., Ismoilov B.B. "Pasterizatsiya qurilmalarida haroratni avtomatik nazorat qilish tizimlarini takomillashtirish". Xalqaro texnika va innovatsiyalar konferensiyasi materiallari. – Toshkent-2022, 124-128-betlar.
6. Baxramova L, Kengboyev S, Ibodullayev M Respublika ilmiy-amaliy anjumani ma'ruzalar to'plami, "Sutni separatsiyalash mashinasini o'rganish". Toshkent-2023.

**UNIVERSITET AXBOROT TIZIMLARINI INTEGRATSIYALASHDA KUTUBXONA
MODULNING ARHITEKTURA VA FUNKSIONAL YECHIMLARI****Xusenov Murodjon Zoxirovich,***Buxoro davlat universiteti axborot tizimlari va
raqamli texnologiyalar kafedrası dotsenti**m.z.xusenov@buxdu.uz,**ORCID: 0000-0002-1533-3102***Istamov Bexzod Bafqulovich,***Buxoro davlat universiteti kompyuter
tizimlari va ularning dasturiy ta'minoti**ta'lim yo'nalishi magistranti**b.b.istamov@buxdu.uz**ORCID: 0009-0009-7499-9906*

Annotatsiya. Ushbu maqolada oliy ta'lim muassasalarida qo'llanilayotgan turli dasturiy modullarni yagona axborot tizimi doirasida integratsiyalash muammolari tahlil qilinadi. Amaliy yechim sifatida universitet kutubxona boshqaruv modulini yagona tizimga integratsiyalash modeli taklif etiladi. Mazkur modul Laravel va ReactJS texnologiyalari asosida ishlab chiqilgan bo'lib, foydalanuvchilarni autentifikatsiyalash jarayoni Django REST Framework yordamida amalga oshiriladi. Autentifikatsiyada JSON Web Token (JWT) texnologiyasidan foydalanish orqali modullar o'rtasida xavfsiz va markazlashgan axborot almashuvi ta'minlanadi. Taklif etilgan yondashuv tizim modullari o'rtasidagi integratsiyani soddalashtirish, ma'lumotlar almashuvining tezkorligini oshirish, xavfsizlik darajasini kuchaytirish hamda tizimni kelgusida kengaytirish imkoniyatlarini yaxshilashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: axborot tizimlarini integratsiyalash, JSON Web Token (JWT), autentifikatsiya va avtorizatsiya, Django REST Framework, Laravel va ReactJS, moduly arxitektura, REST API, universitet kutubxona tizimi, oliy ta'lim axborot tizimlari.

**АРХИТЕКТУРНЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ БИБЛИОТЕЧНОГО
МОДУЛЯ В ИНТЕГРАЦИИ УНИВЕРСИТЕТСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

Аннотация. В данной статье анализируются проблемы интеграции различных программных модулей, используемых в высших учебных заведениях, в единую информационную систему. В качестве практического решения предлагается модель интеграции модуля управления университетской библиотекой в единую систему. Этот модуль разработан на основе технологий Laravel и ReactJS, а процесс аутентификации пользователей осуществляется с использованием Django REST Framework. Аутентификация использует технологию JSON Web Token (JWT) для обеспечения безопасного и централизованного обмена информацией между модулями. Предложенный подход упрощает интеграцию между модулями системы, увеличивает скорость обмена данными, повышает безопасность и улучшает возможности расширения системы в будущем.

Ключевые слова: интеграция информационных систем, JSON Web Token (JWT), аутентификация и авторизация, Django REST Framework, Laravel и ReactJS, модульная архитектура, REST API, система университетской библиотеки, информационные системы высшего образования.

**ARCHITECTURAL AND FUNCTIONAL SOLUTIONS OF THE LIBRARY MODULE IN
THE INTEGRATION OF UNIVERSITY INFORMATION SYSTEMS**

Abstract. This article analyzes the problems of integrating various software modules used in higher education institutions into a single information system. As a practical solution, a model for integrating the university library management module into a single system is proposed. This module is developed based on Laravel and ReactJS technologies, and the user authentication process is carried out using the Django REST Framework. Authentication uses JSON Web Token (JWT) technology to ensure secure and centralized information exchange between modules. The proposed approach simplifies integration between system

modules, increases the speed of data exchange, enhances security, and improves the ability to expand the system in the future.

Keywords: *Information systems integration, JSON Web Token (JWT), authentication and authorization, Django REST Framework, Laravel and ReactJS, modular architecture, REST API, university library system, higher education information systems.*

Kirish. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 5-oktabrdagi PF-6079-son Farmoni bilan tasdiqlangan “Raqamli O‘zbekiston – 2030” strategiyasida mamlakatda raqamli iqtisodiyotni rivojlantirish, shuningdek, davlat boshqaruvi, ta’lim, sog‘liqni saqlash va qishloq xo‘jaligi sohalarida zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini keng joriy etish ustuvor vazifalar sifatida belgilangan [1]. Mazkur strategiya doirasida oliy ta’lim tizimini raqamlashtirish, o‘quv va boshqaruv jarayonlarini avtomatlashtirish hamda axborot tizimlarini yagona platformada integratsiyalash muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Jahon amaliyotida universitet axborot tizimlarini integratsiyalash masalasi so‘nggi yillarda keng o‘rganilmoqda. Biroq amalda qo‘llanilayotgan ko‘plab yechimlar yirik korporativ dasturiy ta‘minot ishlab chiqaruvchilarining mahsulotlariga (SAP, Oracle, Microsoft Dynamics) asoslangan bo‘lib, ularning joriy etilishi o‘rta darajadagi universitetlar uchun moliyaviy va tashkiliy jihatdan murakkab hisoblanadi [2]. Shu bilan birga, ochiq kodli va moslashuvchan yechimlar yetarli darajada rivojlanmagan, modullararo integratsiya mexanizmlari esa ko‘pincha fragmentar xarakterga ega.

Buxoro davlat universitetida 2021-yildan buyon UNIWORK axborot tizimi joriy etilgan bo‘lib, u orqali ayrim boshqaruv jarayonlari avtomatlashtirilgan. Biroq kutubxona modulida aniqlangan funksional va texnik cheklovlar, jumladan monolitik arxitektura, markazlashgan autentifikatsiya mexanizmining yetishmasligi hamda modullararo ma’lumot almashinuvining murakkabligi, yanada mukammal va integratsiyalashgan yechim ishlab chiqish zaruratini yuzaga keltirdi. Shu munosabat bilan universitet axborot tizimlarini yagona platformada boshqarishga qaratilgan “**Main BuxDU**” axborot platformasi ishlab chiqildi.

Kutubxona axborot tizimlarini avtomatlashtirish va elektron resurslarni boshqarish masalalari bir qator ilmiy tadqiqotlarda yoritilgan. Jumladan, Parker (2007) elektron resurslarni boshqarish tizimlarining (ERMS – Electronic Resources Management Systems) asosiy funksional talablarini belgilab, litsenziyalash, bibliografik nazorat hamda foydalanish statistikasini monitoring qilish jarayonlarini muhim komponentlar sifatida ajratib ko‘rsatgan [3]. Mitchell va Surratt (2005) raqamli resurslarni kataloglashtirish va tashkil etish jarayonlarini tahlil qilib, standartlashtirilgan metadata sxemalarining elektron resurslarni samarali boshqarishdagi ahamiyatini asoslab bergan [4].

Bothmann va Holmberg (2010) universitet kutubxonalarida elektron resurslar boshqaruvi jarayonlarini workflow yondashuvi asosida o‘rganib, obunalar, litsenziyalash va foydalanish statistikasi bilan bog‘liq jarayonlarni tizimli tarzda tahlil qilganlar [5]. Biroq mazkur tadqiqotlarda zamonaviy mikroservislar arxitekturasi, markazlashgan autentifikatsiya hamda universitetning boshqa axborot tizimlari bilan integratsiya masalalari yetarli darajada yoritilmagan.

So‘nggi yillarda olib borilgan empirik tadqiqotlar ham elektron resurslarni boshqarish sohasidagi muammolarni ochib berdi. Xususan, Umap va Jani (2024) muhandislik oliy ta’lim muassasalari kutubxonalarida elektron resurslarni boshqarish holatini o‘rganib, ko‘plab kutubxonalarda ERMS tizimlari joriy etilmaganligi va ma’lumotlarni qo‘lda kiritish amaliyoti keng qo‘llanilayotganligini qayd etganlar [6]. Shu bilan birga, mazkur tadqiqotlarda texnik integratsiya, axborot tizimlari arxitekturasi va xavfsizlik mexanizmlariga oid masalalar chuqur tahlil qilinmagan.

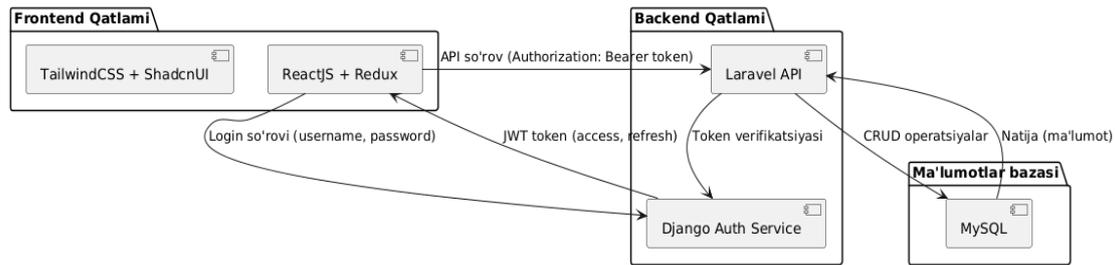
Metodlar. Tadqiqot jarayonida universitet kutubxona modulini yagona axborot tizimiga integratsiyalash maqsadida modulli va uch qavatli (three-tier) arxitektura asosida axborot tizimi ishlab chiqildi. Tizim komponentlari o‘rtasidagi o‘zaro aloqa REST API texnologiyasi asosida tashkil etildi. Foydalanuvchilarni autentifikatsiyalash va avtorizatsiya qilish jarayonida JWT (JSON Web Token) mexanizmidan foydalanildi. Ma’lumotlar bazasi ER-model asosida loyihalaniib, asosiy obyektlar va ularning bog‘lanishlari aniqlandi.

Tizim arxitekturasi: Tizim uch qavatli arxitektura asosida qurilgan bo‘lib, quyidagi asosiy komponentlardan tashkil topgan:

- **Frontend qatlami (ReactJS + Redux)** — foydalanuvchi interfeysini ta’minlaydi, autentifikatsiya jarayonida yaratilgan tokenlarni saqlaydi hamda API so‘rovlarini orqali backend bilan o‘zaro aloqani amalga oshiradi.

- **Backend qatlami (Laravel)** — tizimning asosiy biznes mantiqini amalga oshiradi, jumladan kitoblar, filiallar, BBK tasnifi va nashriyotlar bilan bog‘liq jarayonlarni boshqaradi. Backend foydalanuvchi tokenlarini tekshirish orqali ruxsatlarni nazorat qiladi.

- **Autentifikatsiya xizmati (Django REST Framework)** — foydalanuvchilarni login va logout jarayonlari orqali identifikatsiyalaydi hamda JWT formatidagi access va refresh tokenlarni yaratadi va yangilaydi.



1-rasm. Tizim arxitekturasi

Diagrammada universitet kutubxona modulining integratsiyalashgan axborot tizimi arxitekturasi aks ettirilgan. Tizim uch qavatli (three-tier architecture) yondashuv asosida qurilgan bo‘lib, frontend, backend va autentifikatsiya xizmatlaridan tashkil topgan.

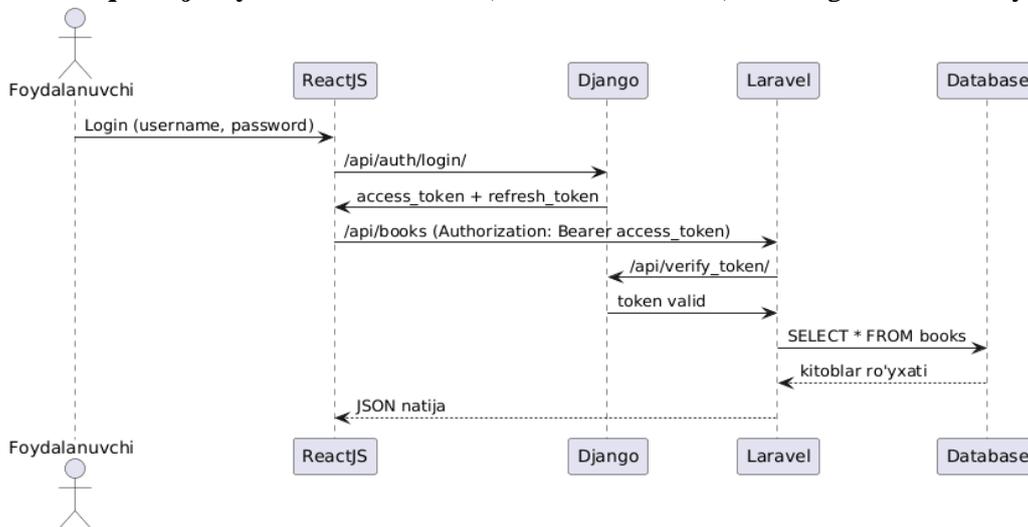
Frontend qatlami ReactJS va Redux texnologiyalari yordamida ishlab chiqilgan bo‘lib, foydalanuvchi interfeysini ta‘minlaydi. Interfeys dizayni TailwindCSS va ShadcnUI komponentlari asosida shakllantirilgan. Foydalanuvchi tizimga kirishda login ma‘lumotlarini frontend orqali autentifikatsiya xizmatiga yuboradi.

Autentifikatsiya jarayoni Django REST Framework asosida ishlab chiqilgan Django Auth Service orqali amalga oshiriladi. Ushbu xizmat foydalanuvchini identifikatsiyalab, JWT (JSON Web Token) formatidagi access va refresh tokenlarni yaratadi. Yaratilgan tokenlar frontend tomonidan saqlanib, keyingi API so‘rovlarida avtorizatsiya maqsadida ishlatiladi.

Backend qatlami Laravel API asosida ishlab chiqilgan bo‘lib, tizimning asosiy biznes mantiqini amalga oshiradi. Frontend tomonidan yuborilgan API so‘rovlarda Authorization: Bearer token orqali foydalanuvchi autentifikatsiyalanadi. Laravel backend tokenni Django Auth Service orqali tekshiradi va token haqiqiy bo‘lgan holatda CRUD operatsiyalarini bajaradi.

Ma‘lumotlar bazasi sifatida MySQL tanlangan bo‘lib, unda kutubxona resurslari, foydalanuvchilar va tranzaksiyalar haqidagi ma‘lumotlar saqlanadi. Ushbu arxitektura xavfsizlik, modullilik va kengaytirilish imkoniyatlarini ta‘minlaydi.

Token boshqaruv jarayoni: Tizimda JWT (JSON Web Token) asosidagi autentifikatsiya ishlaydi.



2-rasm. Token boshqaruv oqimi

Diagrammada JWT token asosida ishlovchi autentifikatsiya va avtorizatsiya jarayonining ketma-ketligi tasvirlangan. Jarayon foydalanuvchining tizimga kirishidan boshlab, ma‘lumotlar bazasidan natija olishgacha bo‘lgan bosqichlarni o‘z ichiga oladi.

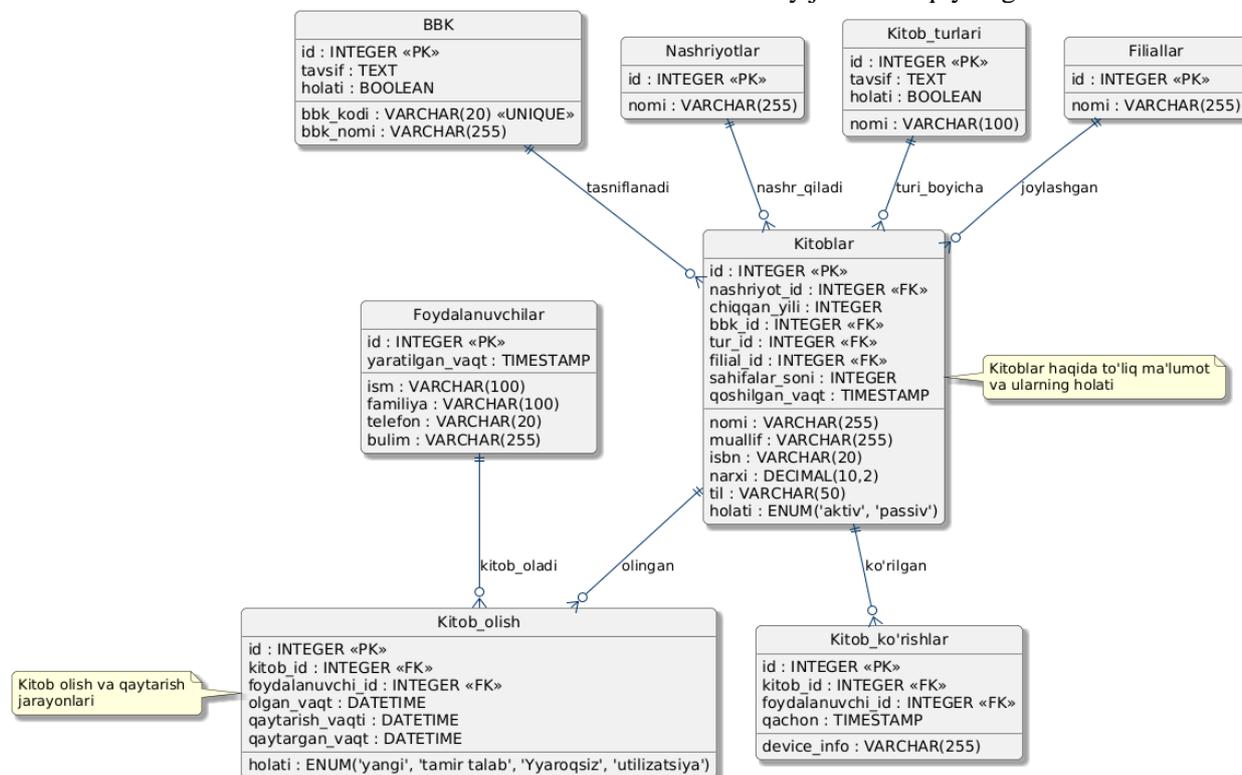
Birinchi bosqichda foydalanuvchi login (foydalanuvchi nomi va parol) ma‘lumotlarini ReactJS asosidagi frontend orqali Django autentifikatsiya xizmatiga yuboradi. Django Auth Service foydalanuvchi ma‘lumotlarini tekshiradi va muvaffaqiyatli autentifikatsiya holatida access va refresh tokenlarni yaratib, frontendga qaytaradi.

Keyingi bosqichda frontend Laravel backendga ma'lumot so'rovini yuboradi. Ushbu so'rov HTTP sarlavhasida Authorization: Bearer access_token orqali amalga oshiriladi. Laravel backend foydalanuvchining tokenini to'g'ridan-to'g'ri Django autentifikatsiya xizmati orqali tekshiradi.

Token haqiqiy deb topilganidan so'ng, Laravel backend ma'lumotlar bazasiga murojaat qilib, tegishli SELECT yoki boshqa CRUD operatsiyalarini bajaradi. Olingan natijalar JSON formatida frontendga qaytariladi va foydalanuvchiga ko'rsatiladi.

Mazkur token boshqaruv oqimi modullararo xavfsiz aloqa, markazlashgan autentifikatsiya va foydalanuvchi huquqlarini aniq nazorat qilish imkonini beradi.

Ma'lumotlar bazasi modeli: Kutubxona moduli uchun asosiy jadvallar quyidagicha tuziladi:



3-rasm. Ma'lumotlar bazasi

Diagrammada kutubxona boshqaruv modulining ma'lumotlar bazasi modeli aks ettirilgan. Model asosiy obyektlar - kitoblar, foydalanuvchilar, nashriyotlar, BBK tasnifi, filiallar va kitob olish jarayonlarini qamrab oladi. Markaziy jadval sifatida **Kitoblar** jadvali tanlangan bo'lib, u nashriyot, BBK kodi, kitob turi va filiallar bilan tashqi kalitlar orqali bog'langan.

Foydalanuvchilar va **Kitoblar** jadvallari o'rtasidagi bog'lanish **Kitob_olish** jadvali orqali amalga oshirilib, kitoblarni olish va qaytarish jarayonlari qayd etiladi. **Kitob_ko'rishlar** jadvali esa foydalanuvchilarning kitoblar bilan ishlash faolligini va statistik ma'lumotlarni saqlashga xizmat qiladi.

Mazkur ma'lumotlar bazasi modeli ma'lumotlarning yaxlitligini ta'minlash, jarayonlarni nazorat qilish hamda kutubxona faoliyatini samarali avtomatlashtirish uchun mo'ljallangan.

Rollar: Rollar asosida vakolatlarni taqsimlash kutubxona jarayonlarini avtomatlashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu yondashuv foydalanuvchilarning tizimdagi harakatlarini nazorat qilish, axborot xavfsizligini oshirish hamda inson omili ta'sirini kamaytirishga xizmat qiladi. Natijada kutubxona fondini boshqarish, kitoblar harakatini monitoring qilish va statistik tahlil jarayonlari yanada shaffof va samarali amalga oshiriladi.

Rol nomi	Funksional vazifasi
Talaba va xodim roli	Kutubxona tizimida mavjud bo'lgan kitoblar va resurslar haqida ma'lumotlarni ko'rish, kitoblarni olish va qaytarib berish jarayonlarini elektron tarzda amalga oshirish.
Kitob kirituvchi roli	Kutubxonaga yangi kelgan kitoblarni ma'lumotlar bazasiga kiritish, mavjud kitoblarni filiallar o'rtasida transfer qilish jarayonlarini boshqarish.
Kutubxona administratori roli	Kutubxona fondidagi barcha kitoblar sonini, qaytarilgan va qaytarilmagan kitoblar statistikasini fakultet, kafedra va guruh kesimida monitoring qilish, filiallar bo'yicha kitob fondlarini va tahliliy hisobotlarni

	shakllantirish.
Kitob beruvchi roli	Talabalar va xodimlarga kutubxonadagi kitoblarni berish hamda qaytarib olish jarayonlarini amalga oshirish, kitoblar harakatini tizimda qayd etish.
Kutubxonachi roli	Kitoblarni skanerlash, kitob berish va qabul qilish jarayonlarini nazorat qilish, kutubxona fondidagi mavjud kitoblar ro'yxatini ko'rish hamda o'ziga biriktirilgan fondlar bo'yicha monitoring olib borish.

Kutubxona moduli tavsifi: Kutubxona moduli universitet axborot tizimining muhim tarkibiy qismi bo'lib, o'quv va ilmiy resurslarni markazlashgan holda boshqarish, filiallararo axborot almashinuvini ta'minlash hamda foydalanuvchilarga qulay va tezkor xizmat ko'rsatishga mo'ljallangan. Mazkur modul kitoblar, elektron resurslar, foydalanuvchilar va filiallar o'rtasidagi ma'lumotlar oqimini avtomatlashtiradi hamda kutubxona jarayonlarida inson omilini kamaytirishga xizmat qiladi. Modul quyidagi asosiy kichik bo'limlardan tashkil topgan:

1. **BBK (Bibliografik-bibliotek klassifikatsiyasi)** – Kitob va resurslarni ilmiy tasniflash uchun BBK kodi asosida guruhlash amalga oshiriladi. Ushbu bo'lim resurslarni fan yo'nalishlari bo'yicha tizimlashtirish, qidiruv jarayonlarini soddalashtirish va kutubxona fondini mantiqiy boshqarish imkonini beradi.

2. **Nashriyotlar** – Kitob va elektron resurslarning nashriyotlari haqidagi ma'lumotlarni (nomi, turi, faoliyati, nashrlar soni) yuritish uchun mo'ljallangan. Ushbu bo'lim nashriyotlar kesimida tahliliy hisobotlar shakllantirish va resurslarning kelib chiqishini monitoring qilish imkonini yaratadi.

3. **Resurs turlari** – Kutubxona fondidagi resurslarni bosma va elektron ko'rinishda ajratib ko'rsatadi. Bu bo'lim resurslardan foydalanish shakllarini boshqarish, elektron resurslarga masofadan kirish imkoniyatlarini tashkil etish va statistik tahlil o'tkazishda muhim ahamiyatga ega.

4. **Kitoblar** – Har bir kitob bo'yicha muallif, nashriyot, nashr yili, narxi, nusxalar soni va joriy holati (mavjud, berilgan, rezerv qilingan) kabi ma'lumotlarni saqlaydi. Ushbu bo'lim kutubxona fondining asosiy ma'lumotlar bazasini tashkil etadi.

5. **Kitob olish** – Foydalanuvchilar tomonidan olingan kitoblar, ularning berilgan sanasi, qaytarish muddati va joriy holati haqidagi ma'lumotlarni aks ettiradi. Bu bo'lim orqali foydalanuvchi faoliyati nazorat qilinadi va kechiktirilgan qaytarish holatlari aniqlanadi.

6. **Kitob transferi** – Kutubxonaning turli filiallari o'rtasida kitob va resurslarni ko'chirish jarayonlarini boshqaradi. Mazkur bo'lim resurslardan samarali foydalanish, talab yuqori bo'lgan kitoblarni tezkor taqsimlash imkonini beradi.

7. **Kitob QR kodi** – Har bir kitob uchun avtomatik tarzda yaratiladigan QR-kodlar orqali identifikatsiya amalga oshiriladi. QR kodi orqali kitob berish va qabul qilish jarayonlarini tezlashtiradi, inson xatosini kamaytiradi hamda real vaqt rejimida monitoringni ta'minlaydi.

8. **Kitob filiallari** – Filiallar kesimida kitoblar soni, ularning holati va harakatini aks ettiruvchi statistik ma'lumotlarni taqdim etadi. Ushbu bo'lim filiallararo resurslar taqsimotini tahlil qilish va boshqaruv qarorlarini qabul qilishda muhim rol o'ynaydi.

9. **Kitob berish va qabul qilish** – Kitoblarning foydalanuvchilarga berilishi va qaytarib olinishi jarayonlarini avtomatlashtiradi. Jarayonlar QR kod yoki elektron identifikatsiya asosida amalga oshirilib, barcha harakatlar tizimda qayd etiladi.

10. **Foydalanuvchini izlash** – Foydalanuvchilarni Familiya, ism, otasini ismi asosida tezkor qidirish imkonini beradi. Ushbu bo'lim xizmat ko'rsatish jarayonlarini tezlashtirishga xizmat qiladi.

11. **Statistika** – Kutubxona faoliyatiga oid statistik va tahliliy hisobotlarni shakllantiradi. Kitoblar aylanishi, foydalanuvchilar faolligi, filiallar kesimidagi yuklama va resurslardan foydalanish darajasi kabi ko'rsatkichlar asosida boshqaruv qarorlarini qabul qilish imkonini beradi.

Mazkur kutubxona moduli modulli arxitektura asosida ishlab chiqilgan bo'lib, uni universitetning boshqa axborot tizimlari bilan integratsiyalash imkonini beradi. QR-kodlar va elektron identifikatsiya texnologiyalaridan foydalanish orqali kitoblar harakati to'liq raqamlashtiriladi, natijada inson omili kamayadi va jarayonlar shaffofligi ta'minlanadi.

Natija. Ishlab chiqilgan **Main BuxDU** platformasini universitet kutubxona faoliyatiga joriy etish natijasida kutubxona jarayonlarini boshqarish samaradorligi sezilarli darajada oshirildi. Tizim yordamida kutubxona faoliyatining asosiy jarayonlari raqamlashtirilib, inson omiliga bog'liq xatoliklar kamaytirildi hamda axborot almashinuvi tezlashtirildi. Xususan, quyidagi asosiy natijalarga erishildi:

Birinchidan, kutubxona fondini shakllantirish, boshqarish va monitoring qilish jarayonlari **to'liq raqamlashtirildi**. Kitoblarni berish va qaytarib olish jarayonlari avtomatlashtirilib, har bir operatsiya tizimda elektron tarzda qayd etila boshlandi. Bu jarayonlar QR-kodlar va skanerlash texnologiyalari asosida amalga oshirilgani sababli xizmat ko'rsatish vaqti qisqardi va jarayonlarning shaffofligi ta'minlandi.

Ikkinchidan, **filiallararo kitob transferi mexanizmi** joriy etilib, turli filiallar o'rtasida resurslarni qayta taqsimlash imkoniyati yaratildi. Natijada talab yuqori bo'lgan o'quv adabiyotlaridan foydalanish samaradorligi oshdi va fondlardan foydalanish darajasi muvozanatlashtirildi.

Uchinchidan, kutubxona fondini boshqarish bilan bog'liq barcha ma'lumotlar markazlashgan holda yuritila boshlandi. Har bir filial bo'yicha mavjud kitoblar soni, ularning joriy holati hamda harakati real vaqt rejimida kuzatish imkoniyati yaratildi. Bu esa fondni nazorat qilish va boshqaruv qarorlarini qabul qilishda muhim axborot manbai bo'lib xizmat qildi.

To'rtinchidan, tizim orqali **yangi kitoblar va axborot resurslarini qo'shish**, ularni tahrirlash va o'chirish jarayonlari avtomatlashtirildi. BBK kodlari, nashriyotlar va axborot resurs turlari bo'yicha ma'lumotlarni boshqarish imkoniyati yaratilgani kutubxona fondini ilmiy va tashkiliy jihatdan tizimli shakllantirishga yordam berdi.

Beshinchidan, foydalanuvchilar faoliyatini nazorat qilish va tahlil qilish imkoniyatlari kengaytirildi. Xususan, kitobdan qarzdor foydalanuvchilarni aniqlash, berilgan kitoblar bo'yicha hisobotlar yuritish va statistik ma'lumotlarni shakllantirish imkoniyatlari yaratildi. Ushbu tahliliy ma'lumotlar kutubxona faoliyatini rejalashtirish va takomillashtirishda muhim ahamiyat kasb etdi.

Umuman olganda, Main BuxDU platformasining joriy etilishi kutubxona jarayonlarini avtomatlashtirish, resurslardan oqilona foydalanish va foydalanuvchilarga xizmat ko'rsatish sifatini oshirishga xizmat qildi.

UNIWORK va Main BuxDU platformalarining solishtirma tahlili

Quyidagi jadvalda amaliyotda qo'llanilgan UNIWORK tizimi va taklif etilayotgan Main BuxDU platformasi imkoniyatlari solishtirildi.

Mezon	UNIWORK	Main BuxDU
Arxitektura	Monolitik	Modulli, uch qavatli (three-tier)
Filiallararo kitob transferi	Mavjud emas	To'liq qo'llab-quvvatlanadi
Kitob berish/qaytarish (filial kesimida)	Mavjud emas	Mavjud
Fond monitoringi	Cheklangan	Real vaqt rejimida
Hisobot va statistika	Minimal	Kengaytirilgan, tahliliy
Integratsiya imkoniyati	Past	Yuqori (REST API orqali)
Xavfsizlik va autentifikatsiya	Markazlashmagan	JWT asosida markazlashgan

Olingan natijalar asosida aytish mumkinki, taklif etilgan Main BuxDU platformasi universitet kutubxonalarida elektron resurslarni boshqarish jarayonlarini raqamlashtirish bilan bir qatorda, ularni yagona axborot tizimi doirasida integratsiyalash imkonini beradi. Bu yondashuv nafaqat kutubxona xizmatlari sifatini oshiradi, balki universitet boshqaruv jarayonlarini raqamlashtirish bo'yicha davlat strategiyalariga ham mos keladi.

Xulosa. Xulosa qilib aytganda, O'zbekiston ta'lim tizimida raqamlashtirish jarayoni "Raqamli O'zbekiston – 2030" strategiyasida belgilangan ustuvor yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Ushbu jarayon doirasida oliy ta'lim muassasalarida HEMIS va UNIWORK kabi axborot tizimlari joriy etilib, ta'lim va boshqaruv faoliyatini avtomatlashtirishga xizmat qilmoqda.

Biroq amaliyot shuni ko'rsatadiki, mavjud tizimlarda ayrim modullar o'zaro integratsiyalanmaganligi, ma'lumotlar takrorlanishi va jarayonlar sinxron emasligi sababli boshqaruv samaradorligi to'liq ta'minlanmayapti. Ayniqsa, kutubxona modulida kuzatilayotgan texnik va funksional cheklovlar bu yo'nalishda yanada kompleks yechimga ehtiyoj borligini ko'rsatadi.

Shu nuqtayi nazardan, Main BuxDU platformasining ishlab chiqilishi — Buxoro davlat universitetida axborot tizimlarini yagona muhitda integratsiyalash va kutubxona jarayonlarini to'liq raqamlashtirish yo'lida muhim qadam bo'ldi. Mazkur tizim kutubxona faoliyatini avtomatlashtirish, foydalanuvchilar uchun qulay interfeys yaratish, ma'lumotlarni real vaqt rejimida boshqarish hamda boshqaruv qarorlarini tezkor va ishonchli ma'lumotlar asosida qabul qilish imkonini beradi. Natijada, Main BuxDU platformasi nafaqat kutubxona tizimini, balki universitetning boshqa modullarini ham yagona raqamli makonda birlashtirish uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Bu esa ta'lim jarayonining shaffofligini, samaradorligini va boshqaruv sifatini oshirishga xizmat qiladi hamda raqamli transformatsiya jarayonining amaliy natijasi sifatida e'tirof etiladi.

ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 5-oktabrdagi PF-6079-son "Raqamli O'zbekiston – 2030" strategiyasi Farmoni.

2. Gartner, Inc. (2023). *Market Guide for Higher Education ERP Systems*. Gartner Research Report, ID G00760234.
3. Parker, K. (2007). *Applying work flow analysis and ERMS options analysis to e-resource acquisitions*. *Library Collections, Acquisitions, and Technical Services*, 31(1), 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.lcats.2007.01.001>
4. Mitchell, A. M., & Surratt, B. E. (2005). *Cataloging and Organizing Digital Resources: A How-To-Do-It Manual for Librarians*. Neal-Schuman Publishers, New York.
5. Bothmann, R. L., & Holmberg, M. (2010). *Integrating a new electronic resource management system with legacy systems at the University of Minnesota*. *Journal of Electronic Resources Librarianship*, 22(1-2), 54-69. <https://doi.org/10.1080/1941126X.2010.503286>
6. Umap, M., & Jani, R. (2024). *A Study of E-Resources Management & Management Challenges Faced in Engineering College Libraries*. *KUEY Journal*, 36(4), 123-134. <https://kuey.net/index.php/kuey/article/view/3737/2460>
7. Xusenov M. Z., Istamov B. B. (2025) *Universitet kutubxonalarida elektron resurslar boshqaruv tizimi / InnovaTech International Conference Proceedings*. <https://euro-conferences.org/index.php/innovatech/article/view/615>
8. React Team. *React – A JavaScript library for building user interfaces*. Official documentation. <https://react.dev>
9. Laravel LLC. *Laravel Documentation*. Official documentation. <https://laravel.com/docs>
10. Django Software Foundation. *Django REST Framework Documentation*. <https://www.django-rest-framework.org>

RAQAMLI KRIPTOGRAFIYANING ZAMONAVIY RIVOJLANISH BOSQICHLARI**Qurbonov G‘ulomjon G‘afurovich,***Buxoro davlat pedagogika instituti Matematika va informatika kafedrasini mudiri, p.f.f.d., professor
gulomjonqurbonov0880@gmail.com***Iskandarov Jo‘shqin Shuxrat o‘g‘li,***Jaloliddin Manguberdi nomidagi harbiy-akademik litseyi matematika fani bosh o‘qituvchisi
iskandarovjoshqin@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada raqamli kriptografiyaning tarixiy evolyutsiyasi va zamonaviy rivojlanish yo‘nalishlari tahlil qilinadi. Assimetrik kriptografiyaning paydo bo‘lishidan tortib, kvant kompyuterlarining tahdidiga qarshi kurashadigan post-kvant algoritmlargacha bo‘lgan yo‘l ko‘rib chiqiladi. Maqolada, shuningdek, homomorf shifrlash, nol bilish isbotlari kabi innovatsion texnologiyalar va ularning amaliy qo‘llanilishi, shu bilan birga kelajakdagi tendensiyalar va dolzarb muammolar haqida so‘z boradi. Tadqiqot zamonaviy axborot xavfsizligi tizimlarini shakllantiruvchi kriptografik mexanizmlarni tizimli tahlil qilishga qaratilgan.

Kalit so‘zlar: raqamli kriptografiya, shifrlash, post-kvant kriptografiya, homomorf shifrlash, nol bilish isboti, kalit almashish, blockchain, kvant tahdidi.

ЭТАПЫ СОВРЕМЕННОГО РАЗВИТИЯ ЦИФРОВОЙ КРИПТОГРАФИИ

Аннотация. В данной статье анализируется историческая эволюция и современные направления развития цифровой криптографии. Рассматривается путь от возникновения асимметричной криптографии до постквантовых алгоритмов, противодействующих угрозе квантовых компьютеров. В статье также обсуждаются инновационные технологии, такие как гомоморфное шифрование, доказательства с нулевым разглашением, и их практическое применение, а также будущие тенденции и текущие проблемы. Исследование направлено на систематический анализ криптографических механизмов, формирующих современные системы информационной безопасности.

Ключевые слова: цифровая криптография, шифрование, постквантовая криптография, гомоморфное шифрование, доказательство с нулевым разглашением, обмен ключами, блокчейн, квантовая угроза.

STAGES OF MODERN DEVELOPMENT OF DIGITAL CRYPTOGRAPHY

Abstract. This article analyzes the historical evolution and modern development directions of digital cryptography. The path from the emergence of asymmetric cryptography to post-quantum algorithms that combat the threat of quantum computers is considered. The article also discusses innovative technologies such as homomorphic encryption, zero-knowledge proofs and their practical applications, as well as future trends and current problems. The research is aimed at a systematic analysis of cryptographic mechanisms that form modern information security systems.

Keywords: digital cryptography, encryption, post-quantum cryptography, homomorphic encryption, zero-knowledge proof, key exchange, blockchain, quantum threat.

Kirish. Axborot texnologiyalarining jadal rivojlanishi va raqamlashtirishning keng miqyosda yoyilishi bilan ma‘lumotlarning maxfiyligi va yaxlitligini ta‘minlash dolzarb muammoga aylanmoqda. Raqamli kriptografiya – bu axborotni shifrlash, dekodlash va himoya qilishning matematik asoslari va protokollarini o‘rganadigan fan bo‘lib, zamonaviy axborot-kommunikatsiya tizimlarining asosini tashkil etadi.

Maqsad va vazifalar: Ushbu maqolaning maqsadi raqamli kriptografiyaning asosiy rivojlanish bosqichlarini, zamonaviy holatini va kelajakdagi istiqbollarni tizimli tahlil qilishdan iborat. Quyidagi vazifalar belgilangan:

- kriptografiyaning tarixiy evolyutsiyasini asosiy bosqichlar bo‘yicha ko‘rib chiqish;
- zamonaviy kriptografik texnologiyalar va ularning amaliy qo‘llanilish sohalarini o‘rganish;
- raqamli kriptografiyani kutayotgan asosiy muammo va tahdidlarni, xususan, kvant hisoblash tahdidini tahlil qilish;
- kelajakdagi rivojlanish tendensiyalari va ilmiy izlanish yo‘nalishlarini aniq ko‘rsatish.

Tadqiqotning dolzarbligi. Internet, IOT qurilmalari, bulutli texnologiyalar va raqamli iqtisodiyotning butun dunyo bo'ylab kirib borishi bilan bog'liq. Shaxsiy ma'lumotlarning oqimi va turli xil hujumlar (sil-tomil, firibgarlik, ma'lumotlarni o'g'irlash) xavfi ortib bormoqda. Shu sababli, an'anaviy usullarni takomillashtirish va butunlay yangi yondashuvlarni ishlab chiqish zarurati tug'ilgan.

Adabiyotlar tahlili va tadqiqot metodologiyasi. Raqamli kriptografiya sohasida olib borilgan ilmiy tadqiqotlar axborot xavfsizligini ta'minlashning nazariy va amaliy jihatlarini chuqur o'rganishga qaratilgan. Ushbu yo'nalishdagi dastlabki fundamental ishlar U. Diffie va M. Hellman tomonidan taklif etilgan ochiq kalitli kriptografiya konsepsiyasi bilan bog'liq bo'lib, bu yondashuv kriptografiya rivojida tub burilish yasadi. Mazkur tadqiqotlar simmetrik kriptotizimlarning kalit almashish muammosini samarali hal etishga xizmat qildi. R. Rivest, A. Shamir va L. Adleman tomonidan ishlab chiqilgan RSA algoritmi ochiq kalitli kriptografiyaning amaliy qo'llanilishiga keng yo'l ochdi. Ushbu algoritim katta tub sonlarga asoslangan sonlar nazariyasi muammolariga tayanib, uzoq vaqt davomida axborotni himoyalashda ishonchli vosita sifatida qo'llanib kelinmoqda. Shuningdek, D. ElGamal tomonidan taklif etilgan kriptotizim diskret logarifmlash muammosiga asoslanganligi bilan ajralib turadi.

Zamonaviy tadqiqotlarda elliptik egri chiziqlar kriptografiyasi (ECC) muhim o'rin egallaydi. N. Koblitz va V. Miller tomonidan ilgari surilgan ushbu yondashuv kamroq kalit uzunligi bilan yuqori darajadagi xavfsizlikni ta'minlashi bilan ajralib turadi. Natijada ECC mobil qurilmalar va resurslari cheklangan tizimlarda keng qo'llanila boshladi. So'nggi yillarda post-kvant kriptografiya yo'nalishida ham jadal ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. P. Shor algoritmining kvant kompyuterlar uchun taklif etilishi klassik kriptotizimlarning zaif tomonlarini ko'rsatib berdi. Shu sababli, panjara (lattice) asosidagi, kodlash nazariyasiga asoslangan va ko'p o'zgaruvchili polinomlarga tayangan kriptotizimlar faol tadqiq qilinmoqda. Umuman olganda, adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, raqamli kriptografiya doimiy ravishda rivojlanib, yangi tahdidlarga moslashib borayotgan ilmiy soha hisoblanadi. Mazkur tadqiqotda raqamli kriptografiyaning zamonaviy rivojlanish bosqichlarini o'rganish uchun kompleks ilmiy metodlardan foydalanildi. Tadqiqot metodologiyasi quyidagi asosiy yondashuvlarni o'z ichiga oladi:

Birinchi, nazariy tahlil metodi orqali kriptografiya sohasiga oid klassik va zamonaviy ilmiy manbalar, monografiyalar, xalqaro standartlar va ilmiy maqolalar o'rganildi. Ushbu metod kriptografik algoritmlarning shakllanishi va evolyutsiyasini tahlil qilish imkonini berdi.

Ikkinchi, taqqoslash metodi yordamida simmetrik, ochiq kalitli, elliptik egri chiziqlar va post-kvant kriptotizimlarning afzallik va kamchiliklari solishtirildi. Bu yondashuv turli kriptografik usullarning qo'llanish sohasini aniqlashga xizmat qildi.

Uchinchi, tizimli yondashuv asosida kriptografiyaning rivojlanish bosqichlari ketma-ketlikda ko'rib chiqilib, ularning o'zaro bog'liqligi va axborot xavfsizligiga ta'siri tahlil qilindi.

To'rtinchi, induktiv va deduktiv xulosa chiqarish metodlari orqali alohida kriptografik algoritmlar tahlilidan umumiy ilmiy xulosalar shakllantirildi.

Natijada qo'llanilgan metodologiya raqamli kriptografiyaning zamonaviy holatini har tomonlama yoritish va uning kelajakdagi rivojlanish istiqbollarini asoslab berishga imkon yaratdi.

Raqamli kriptografiyaning tarixiy evolyutsiyasi.

Simmetrik kriptosistemalar davri (1970-1980-yillar): Zamonaviy raqamli kriptografiyaning asosi 1970-yillarda qo'yilgan. Uning rivojlanishi ikkita parallel yo'nalishda: simmetrik (yashirin kalitli) va asimmetrik (ochiq kalitli) kriptosistemalar shakllanishida davom etdi.

Data Encryption Standard (DES, 1977): IBM tomonidan ishlab chiqilgan va AQSh Milliy standartlar byurosi tomonidan tasdiqlangan birinchi sanoat standarti. U 56 bitli kalit va Feistel shifri tamoyiliga asoslangan edi. DES o'z davri uchun innovatsion bo'lib, kriptografiyani ilmiy tadqiqot va standartlashtirish obyektiga aylantirdi. Biroq, kompyuter quvvatining oshishi va differensial kriptotahlil kabi hujum usullarining paydo bo'lishi uning zaif tomonlarini ochib berdi.

Bu davrda blokli shifrlash (ma'lumotni bloklarga ajratish) va oqimli shifrlash (bitma-bit) tamoyillari ishlab chiqildi.

Kriptografik inqilob: Asimmetrik kriptografiya (1976-1977): 1976-yilda Whitfield Diffie va Martin Hellman "Kriptografiyaning yangi yo'nalishlari" maqolasida ochiq kalitli kriptografiya konsepsiyasini taklif qilishdi. Bu kriptografiya tarixidagi eng muhim burilishlardan biri bo'ldi.

Diffie-Hellman kalit almashish protokoli: Ikki tomon ochiq kanal orqali maxfiy kalitni xavfsiz ravishda almashish imkoniyatiga ega bo'ldi. Bu protokol birgalikda ishlash uchun umumiy sirni (kalitni) yaratishga imkon beradi, ammo u o'z-o'zidan ma'lumotlarni shifrlash uchun ishlatilmaydi.

RSA algoritmi (1977): Ron Rivest, Adi Shamir va Leonard Adleman tomonidan ishlab chiqilgan. Bu bir vaqtning o'zida ham shifrlash, ham raqamli imzo uchun ishlatiladigan birinchi amaliy amalga oshirilgan algoritim bo'ldi. RSA ning xavfsizligi katta sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish qiyinligiga (faktorizatsiya

muammosi) asoslanadi. Uning paydo bo'lishi elektron tijorat, raqamli sertifikatlar va ochiq kalit infratuzilmasi (PKI) asosini qo'ydi.

Standartlashtirish va kengaytirish davri (1990-2000-yillar): AES (Advanced Encryption Standard, 2001): DES ning zaifligi va uning vorisi bo'lgan 3DES ning sekinligi sababli, AQSh Milliy standartlar va texnologiyalar instituti (NIST) yangi standart uchun tanlov e'lon qildi. Belgilar algoritmi (Rijndael) g'olib chiqdi va AES nomi bilan dunyo bo'ylab standartga aylandi. U 128, 192 yoki 256 bitli kalit uzunligini qo'llab-quvvatlaydi va hozirgacha amaliy hujumga uchramagan eng ishonchli simmetrik shifr hisoblanadi.

Hash funksiyalari: Ma'lumotlar yaxlitligini tekshirish va raqamli imzolarni qisqartirish uchun ishlatiladigan bir tomonlama funksiyalar rivojlandi. MD5 (128 bit) va SHA-1 (160 bit) keng tarqaldi, ammo keyinchalik ularning to'qnashuvga qarshi himoyasi zaif ekanligi aniqlandi. Hozirgi kunda SHA-2 oilasi (SHA-256, SHA-512) va yangi SHA-3 standarti ishlatilmoqda.

PKI (Public Key Infrastructure): Raqamli sertifikatlar, sertifikat beruvchi organlar (CA) va rostdash markazlari (RA) tizimi ishlab chiqildi. Bu HTTPS protokoli, elektron hujjat aylanmasi va davlat xizmatlari uchun asos bo'lib xizmat qildi.

Zamonaviy rivojlanish bosqichlari va innovatsion texnologiyalar.

Hozirgi davr kriptografiya sohasida nafaqat mavjud algoritmlarni takomillashtirish, balki butunlay yangi paradigmalarni va himoya modellarini yaratish bilan tavsiflanadi.

Post-Kvant Kriptografiya (PQC): Kvant kompyuterlarining nazariy imkoniyatlari (xususan, Shor algoritmi) RSA va ECC (Elliptik egri kriptografiyasi) kabi ko'pgina hozirgi ochiq kalitli algoritmlarni samarali buzishi mumkin.

Maqsad: Klassik kompyuterlarda ishlaydigan, lekin kvant hujumlariga qarshi chidamli yangi algoritmlarni ishlab chiqish.

Asosiy oilalar:

1. Panjara asosidagi kriptografiya (Lattice-based): NTRU, Kyber (NIST tanlovida g'olib). Xavfsizligi panjara muammolarining yechish qiyinligiga asoslanadi.

2. Kod asosidagi kriptografiya (Code-based): McEliece. Kodni tuzatish muammosiga asoslangan.

3. Ko'p o'zgaruvchili kriptografiya (Multivariate): Raqamli imzo uchun.

4. Hash asosidagi imzolar: XMSS, SPHINCS+.

NIST standartlashtirish jarayoni: 2016-yilda boshlangan tanlovda 2022-2024 yillarda birinchi standart algoritmlar tanlab olindi (masalan, shifrlash uchun Kyber, imzo uchun Dilithium). Bu kriptografiya sohasidagi eng muhim va dolzarb yo'nalishlardan biridir.

Funksional va Homomorf Shifrlash: Bu texnologiyalar ma'lumotni shifrlangan holatda saqlash va qayta ishlash imkonini beradi, bu esa maxfiylikni saqlab, bulutli xizmatlar va ma'lumotlarni boshqalar bilan ishlashda inqilob qiladi.

To'liq homomorf shifrlash (FHE): 2009-yilda Kreyg Gentry tomonidan amalga oshirishning nazariy imkoni isbotlangan. Shifrlangan ma'lumot ustida har qanday hisob-kitobni (qo'shish, ko'paytirish) amalga oshirish va natijani dekodlaganda, xuddi shifrlangan bo'lmagan ma'lumot ustida shu amallarni bajargan natija bilan bir xil bo'lishiga imkon beradi. Hozirda samaradorlikni oshirish bo'yicha faol ishlar olib borilmoqda.

Qisman homomorf shifrlash: Faqat ma'lum amallarni (masalan, faqat qo'shish yoki faqat ko'paytirish) qo'llab-quvvatlaydi, lekin samaraliroq (masalan, Paillier tizimi).

Zero-Knowledge Proofs (Nol Bilish Isbotlari): Bu protokol bir tomon (isbotlovchi) ikkinchi tomonga (tekshiruvchi) ma'lum bir dalil haqiqat ekanligini o'zining maxfiy ma'lumotlarini oshkor qilmasdan isbotlashi mumkin.

Ilovalari:

Blockchain va kriptovalyutalar: Zcash va boshqa maxfiylikka yo'naltirilgan kriptovalyutalarda tranzaksiya miqdori va manbasini yashirish, lekin uning to'g'riligini tekshirish (zk-SNARKs, zk-STARKs).

Kimlikni tekshirish: Foydalanuvchi parol yoki shaxsiy ma'lumotlarini oshkor qilmasdan, serverga o'zining haqiqiy ekanligini isbotlashi mumkin.

Ma'lumotlar hisobi: Boshqa tomonning ma'lumotlarini ko'rmasdan, ma'lum shartlar bajarilganligini isbotlash.

Kriptografiya va Blockchain: Blockchain texnologiyasi turli kriptografik konstruksiyalarga asoslangan:

Kriptografik hash funksiyalar: Blokklar zanjirini bog'lash va ma'lumotlarning o'zgarishsizligini ta'minlash.

Raqamli imzolar: Tranzaksiyalarni tasdiqlash va manbasini isbotlash.

Konsensus mexanizmlari: Proof of Work (Ish isboti) hash funksiyalarining hisoblash qiyinligiga asoslanadi.

Xavfsizlik protokollarining takomillashuvi. End-to-End shifrlash (E2EE): Signal, WhatsApp kabi ilovalarda qo'llaniladigan Signal protokoli – bu xabarlarini faqat jo'natuvchi va qabul qiluvchi o'qiy oladigan zamonaviy standart.

TLS 1.3: Veb-saytlar bilan xavfsiz aloqa protokoli. Oldingi versiyalarga nisbatan sezilarli darajada optimallashtirilgan va xavfsizroq.

Muammolar, tahdidlar va kelajak tendensiyalari.

Asosiy muammolar:

1. Kvantga o'tish: Mavjud kriptotizimlarni post-kvant algoritmlariga nisbatan juda uzoq muddatli va qimmat bo'lgan migratsiya qilish.

2. Samaradorlik va ishlash: Ko'pgina yangi algoritmlar (ayniqsa, PQC va FHE) hali ham klassik analoglariga qaraganda sekinroq va resurs talab qiladi.

3. Standartlashtirish va interoperabilite: Dunyo miqyosida yangi standartlarni qabul qilish va turli tizimlarning bir-biri bilan muvofiqligini ta'minlash.

4. Dizayn va amalga oshirish xatolari: Matematik algoritmnining mustahkamligi bilan birga, uning dasturiy ta'minotda noto'g'ri amalga oshirilishi xavfsizlik teshiklari keltirib chiqarishi mumkin.

Kelajak tendensiyalari:

1. Kriptografiya va Sun'iy Intellekt (AI): AI yordamida kriptotizimlarni tahlil qilish va yangi hujum usullarini kashf etish. Kriptografik primitivlardan foydalangan holda AI modellarini himoya qilish va ularni tayyor ma'lumotlarsiz o'rgatish (FHE yordamida).

2. Biometrik kriptografiya: Biometrik naqshlar (barmoq izi, yuz) bilan kalitlarni bog'lash va ularni shifrlash orqali parollarni almashtirishga urinishlar.

3. Kvant tarmoqlari va Kvant Kalit Taqsimoti (QKD): Kvant fizikasining qonunlariga (masalan, noaniqlik prinsipi) asoslangan, nazariy jihatdan shartnomasiz xavfsiz kalit almashish.

4. Maxfiylikni hisobga olgan holda hisoblash (Privacy-Enhancing Computation – PEC): Homomorf shifrlash, nol bilish isbotlari va maxfiylikni himoya qiluvchi boshqa texnikalarni birlashtiruvchi yondashuv. Bu ma'lumotlar jamg'armalarini birlashtirish va ularni tahlil qilish imkonini beradi, shaxsiy ma'lumotlarni oshkor qilmasdan.

Xulosa. Raqamli kriptografiya axborot xavfsizligining tayanch tayanch toshi bo'lib qolmoqda, ammo u statik emas, balki doimiy rivojlanib boruvchi dinamik fan va texnologiya sohasidir. Undan DES dan AES ga o'tish, asimmetrik kriptografiyaning kashf etilishi va hozirda post-kvantga o'tish kabi muhim bosqichlar o'tgan.

Bugungi kunning eng muhim vazifasi – nafaqat kvant kompyuterlari, balki murakkab kiberhujumlar va ma'lumotlarni suiste'mol qilish xavfiga qarshi turishga qodir bo'lgan kelajakka chidamli kriptotizimlarni yaratishdir. Bunga post-kvant algoritmlari, homomorf shifrlash va nol bilish isbotlari kabi innovatsion yondashuvlar yordam beradi.

Kriptografiyaning kelajagi uning boshqa zamonaviy texnologiyalar – kvant hisoblash, sun'iy intellekt, keng miqyosli IoT tarmoqlari va global raqamli infratuzilma bilan chuqur integratsiyasida yotadi. Shu bilan birga, qonun chiqaruvchilar (GDPR, CCPA kabi) tomonidan qo'yiladigan qat'iy talablar "dizayndan boshlab maxfiylik" tamoyilini kriptografik yechimlarning ajralmas qismiga aylantirmoqda. Raqamli kriptografiyaning rivojlanishi nafaqat mutaxassislar, balki butun jamiyat uchun hayotiydir. U shaxsiy ma'lumotlar himoyasini, davlat xavfsizligini, moliya tizimining barqarorligini va global raqamli makonning ishonchligini ta'minlaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Diffie, W., & Hellman, M. (1976). *New directions in cryptography*. IEEE Transactions on Information Theory.

2. Rivest, R. L., Shamir, A., & Adleman, L. (1978). *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Communications of the ACM.

3. NIST. (2001). *Advanced Encryption Standard (AES)*. FIPS PUB 197.

4. Gentry, C. (2009). *A fully homomorphic encryption scheme*. Stanford University PhD Thesis.

5. Chen, L., et al. (2016). *Report on Post-Quantum Cryptography*. NISTIR 8105.

6. Nakamoto, S. (2008). *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*.

7. Menezes, A. J., van Oorschot, P. C., & Vanstone, S. A. (1996). *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press.

MASSIVLARNI TARTIBLASH USULLARINING PYTHON DASTURLASH TILIDAGI TALQINI

Jumayev Jura,
Buxoro davlat universiteti professori
j.jumayev@buxdu.uz
Nematova Mohibegim Fazliddinovna,
Buxoro davlat universiteti dotsenti
Fathiddinov Saidma‘ruf Lazizxo‘ja o‘g‘li,
Buxoro davlat universiteti 1-bosqich magistranti
fathiddinovsaidmaaruf@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada massivlarni tartiblash masalasi va uning dasturlash jarayonidagi ahamiyati yoritilgan. Maqolada tartiblash algoritmlarining asosiy turlari, xususan pufakcha (Bubble Sort), tanlash (Selection Sort) va ajratish (Insertion Sort) metodlari nazariy hamda amaliy jihatdan tahlil qilinadi. Har bir algoritmning ishlash prinsipi, bosqichlari va algoritmik tuzilmasi izchil ravishda tushuntirilgan. Ushbu metodlarning Python dasturlash tilida amalga oshirilishiga oid sodda va tushunarli kod misollari keltirilgan. Shuningdek, algoritmlarning vaqt murakkabligi, xotira resurslaridan foydalanish darajasi hamda ularning samaradorligi o‘zaro solishtirib o‘rganiladi. Maqolada har bir metodning afzalliklari va kamchiliklari aniqlanib, ularni turli hajmdagi ma‘lumotlar bilan ishlash jarayonida qaysi sharoitlarda qo‘llash maqsadga muvofiq ekanligi asoslab berilgan.

Kalit so‘zlar: massiv, massivlarni tartiblash, Sort, Bubble Sort, Selection Sort, Insertion Sort, Python, List, Array, Python dasturlash tili.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДОВ СОРТИРОВКИ МАССИВОВ В ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ PYTHON

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос сортировки массивов и её важность в процессе программирования. Анализируются основные типы алгоритмов сортировки, в частности, пузырьковая сортировка, сортировка выбором и сортировка вставками, с теоретической и практической точек зрения. Последовательно объясняются принцип работы, этапы и алгоритмическая структура каждого алгоритма. Приводятся простые и понятные примеры кода реализации этих методов на языке программирования Python. Также сравниваются временная сложность алгоритмов, уровень использования памяти и их эффективность. В статье определяются преимущества и недостатки каждого метода, и обосновываются условия, при которых целесообразно их использовать при работе с данными различных размеров.

Ключевые слова: массив, сортировка массивов, Sort, Bubble Sort, Selection Sort, Insertion Sort, Python, List, Array, язык программирования Python.

INTERPRETATION OF ARRAY SORTING METHODS IN THE PYTHON PROGRAMMING LANGUAGE

Abstract. This article examines array sorting and its importance in programming. It analyzes the main types of sorting algorithms, including bubble sort, selection sort, and insertion sort, from theoretical and practical perspectives. The operating principle, stages, and algorithmic structure of each algorithm are explained step by step. Simple and clear code examples implementing these methods in Python are provided. The algorithms' time complexity, memory usage, and efficiency are also compared. The article identifies the advantages and disadvantages of each method and substantiates the conditions under which they are appropriate for working with data of various sizes.

Keywords: array, array sorting, Sort, Bubble Sort, Selection Sort, Insertion Sort, Python, List, Array, Python programming language.

Kirish. Zamonaviy axborot texnologiyalari va raqamli tizimlarning jadal rivojlanishi jarayonida katta hajmdagi ma‘lumotlarni qayta ishlash, saqlash va tahlil qilish muhim ilmiy va amaliy masalaga aylanib

bormoqda. Dasturlash sohasida ma'lumotlar bilan ishlashning eng asosiy tuzilmalaridan biri massivlar (ro'yxatlar) bo'lib, ular orqali turli xil hisoblash, qidiruv va tahlil jarayonlari amalga oshiriladi. Massivlar ustida bajariladigan eng muhim va ko'p uchraydigan amallardan biri bu ularni tartiblash hisoblanadi. Tartiblangan ma'lumotlar bilan ishlash dastur samaradorligini oshiradi, qidiruv algoritmlarining tezligini ta'minlaydi hamda umumiy hisoblash jarayonlarini optimallashtirishga xizmat qiladi.

Massivlarni tartiblash muammosi algoritmlar nazariyasining fundamental masalalaridan biri bo'lib, u kompyuter fanlarida keng o'rganilgan. Ushbu muammoni hal etish uchun turli xil tartiblash algoritmlari ishlab chiqilgan bo'lib, ularning har biri bajarilish vaqti, xotira sarfi, murakkabligi va qo'llanish sohasiga ko'ra bir-biridan farq qiladi. Masalan, oddiy algoritmlar kichik hajmdagi ma'lumotlar uchun qulay bo'lsa, murakkab va optimallashtirilgan algoritmlar katta hajmdagi massivlar bilan ishlashda yuqori samaradorlikni ta'minlaydi. Shu sababli, dasturchi yoki tadqiqotchi uchun tartiblash usullarining ishlash prinsiplari va ularni to'g'ri tanlash mezonlarini bilish muhim ahamiyat kasb etadi.

Python dasturlash tili bugungi kunda eng ommabop va keng qo'llanilayotgan tillardan biri hisoblanadi. Uning sodda va tushunarli sintaksisi, yuqori darajadagi abstraksiyalari hamda boy standart kutubxonalari algoritmlarni o'rganish va amaliyotda sinab ko'rish uchun qulay imkoniyatlar yaratadi. Python tilida massivlarni tartiblash nafaqat tayyor funksiyalar yordamida, balki turli algoritmlarni qo'lda amalga oshirish orqali ham o'rganilishi mumkin. Bu esa dasturchining algoritmik fikrlashini rivojlantirish, vaqt va xotira murakkabligini tahlil qilish ko'nikmalarini shakllantirishga yordam beradi.

Ushbu maqolada massivlarni tartiblashning asosiy usullari, ularning nazariy asoslari va Python dasturlash tilidagi amaliy talqinlari batafsil yoritiladi. Har bir tartiblash algoritmining ishlash mexanizmi, afzalliklari va kamchiliklari tahlil qilinib, misollar orqali tushuntirib beriladi. Tadqiqotning asosiy maqsadi — massivlarni tartiblash usullarini tizimli ravishda o'rganish hamda Python dasturlash tilida ularni samarali qo'llash imkoniyatlarini ko'rsatib berishdan iborat. Mazkur maqola dasturlash yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar, yosh tadqiqotchilar hamda algoritmik bilimlarini chuqurlashtirishni istagan mutaxassislar uchun foydali manba bo'lib xizmat qilishi kutiladi.

Adabiyotlar tahlili va metodlar. Massivlarni tartiblash (sorting) algoritmlari algoritmika va dasturlash fanining asosiy mavzularidan biri bo'lib, ular ma'lumotlarni qayta ishlash tezligi va samaradorligini oshirishda muhim ahamiyatga ega. Adabiyotlarda eng ko'p uchraydigan oddiy tartiblash usullariga Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort kiradi[1-5].

Masalan, T. Cormen va boshqalarning "Introduction to Algorithms" kitobida[1] tartiblash algoritmlari vaqt murakkabligi, xotira sarfi va amaliy qo'llanilishi nuqtayi nazaridan tahlil qilingan. Shuningdek, Sedgewick va Wayne'ning "Algorithms" kitobida ushbu algoritmlar sodda bo'lishiga qaramasdan, o'quv jarayonida algoritmik tafakkurni shakllantirish uchun juda qulay ekanligi ta'kidlanadi.

- amalga oshirilishi oson,
- kichik hajmdagi massivlar uchun samarali,
- murakkab algoritmlarni tushunishdan oldin asos bo'lib xizmat qiladi.

Shu sababli ushbu maqolada massivlarni tartiblashning Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort usullari Python dasturlash tilida ko'rib chiqiladi.

1. Bubble Sort (Pufakcha usuli)

Bubble sort massiv bo'ylab yurib, yonma-yon turgan elementlarni solishtiradi. Agar ular noto'g'ri tartibda bo'lsa, joyini almashtiradi. Har bir aylanishda eng katta element oxiriga "suzib" chiqadi, shuning uchun Bubble (pufakcha) deb ataladi.

Ishlash prinsipi:

- 1- va 2-element solishtiriladi.
- Agar birinchisi katta bo'lsa, joyi almashtiriladi.
- Keyin 2- va 3-element, 3- va 4-element ... shu tarzda oxirigacha boriladi.
- Bu jarayon massiv to'liq tartiblanguncha takrorlanadi.

Python kodi:

```
def bubble_sort(arr):
    n = len(arr)
    for i in range(n):
        for j in range(0, n - i - 1):
            if arr[j] > arr[j + 1]:
                arr[j], arr[j + 1] = arr[j + 1], arr[j]
    return arr
massiv = [5, 1, 4, 2, 8]
print(bubble_sort(massiv))
```

2. Selection Sort (Tanlab tartiblash)

Selection Sort (tanlab tartiblash) — bu massivni tartiblashning eng sodda va tushunarli usullaridan biridir. Algoritmning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, har bir qadamda tartiblanmagan qismdan eng kichik element topiladi va u massivning boshiga olib kelinadi.

Ishlash prinsipi:

1. Massivning birinchi elementidan boshlab qaraladi.
2. Qolgan elementlar ichidan eng kichigi topiladi.
3. Shu eng kichik element birinchi element bilan joyi almashtiriladi.
4. Keyin ikkinchi elementdan boshlab yana shu jarayon takrorlanadi.
5. Oxirigacha davom etadi.

Python kodi:

```
def selection_sort(arr):
    n = len(arr)
    for i in range(n):
        min_index = i
        for j in range(i + 1, n):
            if arr[j] < arr[min_index]:
                min_index = j
        arr[i], arr[min_index] = arr[min_index], arr[i]
    return arr
```

```
massiv = [64, 25, 12, 22, 11]
```

```
print(selection_sort(massiv))
```

3. Insertion Sort (Kiritib tartiblash)

Insertion sort kartalarni qo‘lda tartiblashga o‘xshaydi. Har bir yangi elementni oldingi tartiblangan qism ichidan o‘z joyiga “kiritib” boradi.

Ishlash prinsipi:

1. Birinchi element tartiblangan deb olinadi.
2. Keyingi element olinadi.
3. Oldingi tartiblangan qism bilan solishtirib, mos joyiga qo‘yiladi.
4. Shu jarayon oxirigacha davom etadi.

Python kodi:

```
def insertion_sort(arr):
    for i in range(1, len(arr)):
        key = arr[i]
        j = i - 1
        while j >= 0 and arr[j] > key:
            arr[j + 1] = arr[j]
            j -= 1
        arr[j + 1] = key
    return arr
```

```
massiv = [12, 11, 13, 5, 6]
```

```
print(insertion_sort(massiv))
```

Muhokama. Ushbu tadqiqotda massivlarni tartiblashning Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort algoritmlari Python dasturlash tilida ko‘rib chiqildi hamda ularning ishlash prinsipi, vaqt murakkabligi va amaliy samaradorligi tahlil qilindi. Natijalar shuni ko‘rsatadiki, ushbu uchala algoritmlar ham sodda tuzilishga ega bo‘lib, dasturlashni endi o‘rganayotgan talabalar uchun juda qulay hisoblanadi[6].

Bubble Sort algoritmi eng tushunarli usullardan biri bo‘lsa-da, uning samaradorligi past. Har bir elementni ketma-ket solishtirib, o‘rnini almashtirib borishi sababli vaqt murakkabligi $O(n^2)$ ga teng. Bu esa katta hajmdagi massivlar uchun ushbu algoritmni deyarli amaliy jihatdan samarasiz qiladi. Shunga qaramay, algoritmning mantiqiy tuzilishi oddiy bo‘lgani uchun o‘quv jarayonida algoritmlarni tushuntirishda muhim ahamiyatga ega[7].

Selection Sort algoritmi ham $O(n^2)$ murakkablikka ega bo‘lsa-da, Bubble Sortdan farqli ravishda almashishlar (swap) soni kam bo‘ladi. Har bir bosqichda faqat bitta almashish bajariladi. Bu xususiyat ba’zi holatlarda uni nisbatan samaraliroq qiladi, ayniqsa ma’lumotlarni yozish amali qimmat bo‘lgan tizimlarda. Biroq, solishtirishlar sonining ko‘pligi sababli katta massivlarda u ham sekin ishlaydi.

Insertion Sort algoritmi esa uchala algoritmlar ichida eng samaralisi hisoblanadi. Ayniqsa, massiv qisman tartiblangan bo‘lsa, uning ishlash tezligi juda yuqori bo‘lib, vaqt murakkabligi $O(n)$ ga yaqinlashadi. Shu

sababli Insertion Sort real dasturlash amaliyotida kichik hajmdagi yoki deyarli tartiblangan massivlarni qayta ishlashda ko'proq qo'llaniladi. Bu xususiyat uni nafaqat o'quv maqsadlarida, balki amaliy masalalarda ham foydali qiladi[8-9].

Taqqoslash natijalariga ko'ra:

- Bubble Sort – eng sodda, lekin eng sekin algoritmi;
- Selection Sort – almashishlar soni kam, lekin umumiy samaradorligi past;
- Insertion Sort – kichik va qisman tartiblangan massivlar uchun eng maqbul tanlovdir.

Shunday qilib, ushbu algoritmlar asosan o'quv va tushuntirish maqsadlariga xizmat qiladi. Katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda esa Quick Sort, Merge Sort yoki Heap Sort kabi samaraliroq algoritmlardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Biroq Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort algoritmlari murakkab tartiblash usullarini o'rganishdan oldin mustahkam nazariy va amaliy asos yaratib beradi.

Natijalar. O'tkazilgan tajribalar va tahlillar natijasida Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort algoritmlarining ishlash samaradorligi hamda qo'llanish sohasi aniqlab olindi. Python dasturlash tilida yozilgan dasturlar orqali turli o'lchamdagi massivlar ustida sinovlar o'tkazildi va quyidagi natijalarga erishildi.

Birinchiidan, barcha algoritmlar massivni to'g'ri va aniq tartiblab bera olishi isbotlandi. Ya'ni, kiritilgan tartibsiz massivlar har uchala algoritmi yordamida ham o'sish tartibida muvaffaqiyatli saralandi.

Ikkinchiidan, bajarilish tezligi bo'yicha sezilarli farqlar kuzatildi:

• Bubble Sort eng sekin ishlovchi algoritmi bo'lib chiqdi. Elementlar soni oshgani sari bajarilish vaqti keskin ko'paydi.

• Selection Sort Bubble Sortga nisbatan biroz barqarorroq ishladi, ammo umumiy tezlik jihatidan katta ustunlik bermadi.

• Insertion Sort esa kichik va qisman tartiblangan massivlarda eng tezkor algoritmi ekanligi aniqlandi.

Uchinchiidan, almashishlar (swap) soni bo'yicha:

• Bubble Sortda almashishlar soni juda ko'p bo'ldi.

• Selection Sortda har bir bosqichda faqat bitta almashish bajarildi, bu esa uning asosiy ustunligi sifatida qayd etildi.

• Insertion Sortda ko'proq siljitish amallari bajarildi, lekin umumiy ishlash samaradorligi yuqori bo'ldi.

To'rtinchiidan, xotira sarfi bo'yicha uchala algoritmi ham deyarli bir xil natija ko'rsatdi. Ular in-place ishlaydi, ya'ni qo'shimcha xotira talab qilmaydi.

Umumiy natijalarni quyidagicha jamlash mumkin:

Algoritmi	Tezlik darajasi	Samaradorlik sohasi
Bubble Sort	Juda sekin	O'quv maqsadlari uchun
Selection Sort	Sekin, barqaror	Swap kam bo'lishi kerak bo'lgan holatlarda
Insertion Sort	Nisbatan tez	Kichik va qisman tartiblangan massivlarda

Xulosa. Ushbu maqolada massivlarni tartiblashning Bubble Sort, Selection Sort va Insertion Sort algoritmlari Python dasturlash tilida ko'rib chiqildi. Har bir algoritmi ning ishlash prinsipi, afzallik va kamchiliklari hamda amaliy samaradorligi tajriba asosida tahlil qilindi.

O'rganishlar natijasida ma'lum bo'ldiki, Bubble Sort algoritmi tuzilishi jihatidan eng sodda bo'lsa-da, bajarilish tezligi past bo'lib, asosan o'quv jarayonida tushuntirish maqsadida qo'llaniladi. Selection Sort algoritmi almashishlar sonining kamligi bilan ajralib turadi, biroq vaqt murakkabligi yuqori bo'lgani sababli katta hajmdagi massivlar uchun samarali emas.

Insertion Sort algoritmi esa kichik hajmdagi va qisman tartiblangan massivlar bilan ishlashda eng yaxshi natija ko'rsatdi. Uning moslashuvchanligi va tezkorligi uni amaliy masalalarda ham qo'llash imkonini beradi.

Umuman olganda, ushbu uch algoritmi murakkab tartiblash usullarini o'rganishdan oldin muhim nazariy va amaliy asos yaratadi. Katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda esa Quick Sort, Merge Sort va Heap Sort kabi samaraliroq algoritmlardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Shunday qilib, tanlangan tartiblash algoritmi masalaning hajmi va ma'lumotlarning holatiga bog'liq bo'lishi kerak. To'g'ri algoritmi tanlash dastur samaradorligini sezilarli darajada oshiradi.

ADABIYOTLAR:

1. Cormen T. H., Leiserson Ch. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms Second Edition*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England (2003).
2. Shumway R. H., Stoffer D. S. (2017). *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples* (3rd ed.). Springer.
3. McKinney W. (2010). *Data Structures for Statistical Computing in Python*. *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, 51-56.
4. Hunter J. D. (2007). *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90-95.
5. Wes McKinney (2011). *pandas: A Foundational Library for Data Analysis and Statistics*. *Python for Data Analysis*, O'Reilly Media.
6. Oliphant T. E. (2006). *A Guide to NumPy*. Trelgol Publishing.
7. Rahimov A., Sultonov K. (2021). *Imitatsion modellashtirish va uning ta'lim tizimidagi qo'llanilishi*. "Ta'lim va innovatsiyalar" ilmiy-texnik jurnal, 2(1), 45-52.
8. Akhmedov I. (2020). *Kompyuter modellarini ta'lim metodikasiga qo'llash: matematik va imitatsion yondashuvlar*. Toshkent: Sharq Noshirligi.
9. Zakirov T., Bozorov A. (2017). *Kompyuter imitatsion modellarini ta'lim jarayonlariga qo'llash*. *Ta'lim metodikasi va texnologiyasi jurnali*, 1(3), 98-104.

ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННОЙ СОЛНЕЧНОЙ ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ В УЗБЕКИСТАНЕ**Рузимуродов Жалол Турабекович,***Самаркандский государственный университет
имени Шарофа Рашидова
ruzimurodovjalol90@gmail.com***Эшмаматов Сардор Кучкор угли,***Самаркандский государственный университет
имени Шарофа Рашидова
sardor.eshmatatov@mail.ru***Рахматов Машраб Анвар угли,***Самаркандский государственный университет
имени Шарофа Рашидова
mashrabrahmatov10021993@gmail.com*

Аннотация. В данной статье рассматриваются перспективы развития и использования концентрированной солнечной тепловой энергии. Особое место среди технологий ВИЭ занимает концентрированная солнечная тепловая энергия. В отличие от фотоэлектрической солнечной генерации концентрированная солнечная тепловая энергия позволяет не только производить электроэнергию, но и напрямую генерировать высокотемпературное тепло для промышленности, централизованного теплоснабжения, горячего водоснабжения и когенерации. Проанализировано текущее состояние, технологические особенности, экономические и регуляторные барьеры использования солнечной тепловой энергии в Узбекистане, а также предложены реалистичные сценарии её развития до 2035 года.

Ключевые слова: солнечная тепловая энергия, концентрированная солнечная энергия, тепловая аккумуляция энергии, CSP, CST, когенерация, тепловые накопители, зелёная экономика.

O'ZBEKISTONDA KONSENTRLANGAN QUYOSH ISSIQLIK ENERGIYASIDAN FOYDALANISH ISTIQBOLLARI

Аннотация. Ushbu maqolada konsentrlangan quyosh issiqlik energiyasidan foydalanish va rivojlantirish istiqbollari ko'rib chiqiladi. Qayta tiklanadigan energiya manbalari texnologiyalari orasida konsentrlangan quyosh issiqlik energiyasini to'plash alohida o'rin tutadi. Fotovoltaik quyosh generatsiyasidan farqli o'laroq, nafaqat elektr energiyasi ishlab chiqarish imkonini beradi, balki sanoat ehtiyojlari, markazlashgan issiqlik ta'minoti, issiq suv ta'minoti hamda kogeneratsiya uchun to'g'ridan-to'g'ri yuqori haroratli issiqlik hosil qilishga ham imkon yaratadi. O'zbekistonda quyosh issiqlik energiyasidan foydalanishning hozirgi holati, texnologik xususiyatlari, iqtisodiy va tartibga solish sohasidagi to'siqlar tahlil qilingan hamda 2035 yilgacha bo'lgan realistik rivojlanish ssenariylari taklif etilgan.

Калит so'zlar: quyosh issiqlik energiyasi, konsentirlangan quyosh issiqlik energiyasi, CSP, CST, kogeneratsiya, issiqlik to'plovchi materiallar, energiyani issiqlik tarzida akkumulyatsiya qilish, yashil energetika, yashil iqtisodiyot.

PROSPECTS FOR THE USE OF CONCENTRATED SOLAR THERMAL ENERGY IN UZBEKISTAN

Abstract. In this article the correctness the prospects for the development and utilization of concentrated solar thermal energy. Among renewable energy source (RES) technologies, concentrated solar thermal energy holds a special place. Unlike photovoltaic solar generation, concentrated solar thermal energy enables not only electricity production but also the direct generation of high-temperature heat for industry, district heating, hot water supply, and cogeneration. The current state, technological features, economic and regulatory barriers to the use of solar thermal energy in Uzbekistan have been analyzed, and realistic scenarios for its development up to 2035 are proposed.

Keywords: solar thermal energy, concentrated solar energy, CSP, CST, cogeneration, thermal energy storage, thermal storage materials, green economy, Uzbekistan.

Введение и постановка задачи. Современный энергетический переход в Республике Узбекистан является одним из приоритетных направлений устойчивого развития. В соответствии с обновлённым Определяемым на национальном уровне вкладом (ОНУВ 3.0) [1], представленным в 2025 году, страна взяла на себя обязательство сократить интенсивность выбросов парниковых газов на единицу ВВП на 50% к 2035 году по сравнению с 2010 годом. «Стратегия перехода Республики Узбекистан на «зелёную» экономику до 2030 года» [2] предусматривает доведение мощностей возобновляемых источников энергии (ВИЭ) до 25 000 МВт, что должно обеспечить около 54% в национальном энергобалансе.

Особое место среди технологий ВИЭ занимает *концентрированная солнечная тепловая энергия* (Concentrated Solar Thermal – CST, или CSP – Concentrated Solar Power). В отличие от фотоэлектрической солнечной генерации (PV), которая доминирует в текущих проектах Узбекистана, CST позволяет не только производить электроэнергию, но и напрямую генерировать высокотемпературное тепло для промышленности, централизованного теплоснабжения, горячего водоснабжения и когенерации (одновременной выработки тепла и электроэнергии). Это особенно актуально для Узбекистана, где зимой существует значительный спрос на тепло, а тепловые сети характеризуются высокими потерями (до 40%).

Узбекистан обладает одним из лучших в мире ресурсов для развития CST. Среднегодовое значение *прямой нормальной солнечной радиации (DNI)* составляет около 4,44 кВт·ч/м²/сутки [3], а в юго-западных регионах (Кашкадарья, Самарканд, Навои, Бухара, Сурхандарья) достигает 4,9–5,27 кВт·ч/м²/сутки. Более 300 солнечных дней в году, обширные пустынные и малонаселённые территории создают идеальные условия для размещения крупных CST-станций.

Цель статьи — проанализировать текущее состояние, технологические особенности, экономические и регуляторные барьеры использования солнечной тепловой энергии в Узбекистане, а также предложить реалистичные сценарии её развития до 2035 года.

Теоретические основы и технологический ландшафт солнечной тепловой энергии. Концентрированная солнечная тепловая энергия CST представляет собой технологию, позволяющую преобразовывать прямое солнечное излучение в высокотемпературное тепло для последующей генерации электроэнергии, производства промышленного тепла или когенерации. В отличие от фотоэлектрических систем (PV), напрямую генерирующих электричество, CST фокусирует прямое нормальное излучение (DNI) с помощью оптических систем на приёмник. В приёмнике нагревается теплоноситель (синтетическое масло, расплавленные соли, вода или песок), и полученное тепло затем используется в традиционных термодинамических циклах (паровая турбина Ренкина, цикл Стирлинга и др.) [4].

Краткая история развития CST в мире. Истоки технологии уходят в XIX век: в 1866 году французский инженер Огюст Мушо построил первую параболическую солнечную систему для производства пара [5]. В 1913 году в Египте (Меади) был продемонстрирован параболический концентратор мощностью 73 кВт, использовавшийся для ирригационного насоса [6].

Современная эра CST началась в 1980-х годах. Ключевой вехой стало строительство в Калифорнии комплекса SEGS (Solar Energy Generating Systems) в 1984–1991 годах. Эта серия электростанций на параболических желобах общей мощностью 354 МВт оставалась крупнейшей в мире вплоть до 2014 года [7].

Основные типы технологий CST. Технологическое семейство CST включает четыре основные конфигурации, различающиеся по принципу фокусировки и достигаемым параметрам:

1. Параболический концентратор солнечной энергии: наиболее зрелая и коммерчески распространённая технология. Использует линейную фокусировку с коэффициентом концентрации 70–80 раз, нагревая теплоноситель (обычно масло) до ~400°C. На эту технологию до сих пор приходится около 70–95% действующих мощностей CSP в мире [8].

2. Солнечные башни (Solar Power Tower): Системы с точечной фокусировкой, где поле гелиостатов (зеркал) направляет лучи на центральный приёмник, расположенный на вершине башни. Это позволяет достичь концентрации в 300–1000 раз и температур 565–1000°C, что повышает эффективность и делает башни идеальными для работы с высокотемпературными теплоносителями (расплавленные соли) и тепловыми накопителями [9]. Первая крупная демонстрация — проект EURELIOS (1 МВт, Италия, 1981). Ключевые прототипы Solar One/Solar Two (США) в 1990-х годах

доказали эффективность использования расплавленных солей как теплоносителя и аккумулирующей среды.

3. **Линейные отражатели Френеля (Linear Fresnel Reflector):** Упрощённая и более дешёвая версия линейной фокусировки, использующая длинные ряды плоских или слегка изогнутых зеркал. Коэффициент концентрации ниже (25–100 раз), а температуры достигают 300–500°C. Технология известна с 1960-х, но активная коммерциализация началась с 2000-х годов (например, технология Compact Linear Fresnel Reflector) [10].

4. **Параболические тарелки (Dish Stirling):** Системы с параболической тарелкой и двигателем Стирлинга в фокусе. Обеспечивают высочайшую концентрацию (1000–3000 раз) и температуры до 800°C, а также рекордный КПД. Однако из-за высокой стоимости и сложности обслуживания (каждый модуль требует своего двигателя) их коммерческое применение остаётся ограниченным [11].

Глобальный бум строительства CSP пришелся на 2007–2014 годы (Испания, США), после чего наступил спад, вызванный резким падением стоимости фотоэлектрических панелей. Возрождение интереса к технологии с 2020-х годов связано с её уникальной способностью к интеграции тепловых накопителей и гибридизации, особенно в таких странах, как Китай и ОАЭ.

Современные технологии и интеграция с тепловыми накопителями. Ключевое конкурентное преимущество современных CST-станций — интеграция систем теплового аккумулирования энергии (Thermal Energy Storage, TES), которые позволяют сглаживать суточную неравномерность поступления солнечной радиации и обеспечивать диспетчеризуемую генерацию. Основные типы TES включают:

- Двухбачковые системы на расплавленных солях: стандарт для башен и желобов. Используется смесь нитратов натрия и калия (60% NaNO_3 + 40% KNO_3). Горячий бак может достигать 565°C. Такие системы обеспечивают 6–15 часов хранения и имеют эффективность 95–98% [12].

- Твердотельные накопители: более дешёвая альтернатива для среднетемпературных применений, но требуют больших объёмов.

- Накопители на фазовом переходе (PCM, Phase Change Materials): перспективное направление, использующее скрытую теплоту плавления/кристаллизации солей для высокой плотности хранения энергии, однако техническая реализация сложнее [13].

Благодаря TES коэффициент использования установленной мощности (Capacity Factor) CST-станций может достигать 40–80%, что принципиально отличает их от солнечной PV (20–35% без хранения) и приближает к базовым нагрузочным режимам.

Сравнение CST с фотоэлектрической генерацией (PV). CST и PV следует рассматривать не как конкурирующие, а как взаимодополняющие технологии:

- PV: отличается низкой приведённой стоимостью электроэнергии (LCOE ~0,03–0,05 \$/кВт·ч), простотой масштабирования, но производит переменчивую мощность, для балансировки которой требуются дорогие электрохимические накопители (литий-ионные ~100–200 \$/кВт·ч).

- CST: имеет более высокий LCOE (~0,10–0,12 \$/кВт·ч), однако предлагает критические преимущества:

- Когенерация: Возможность одновременной выработки электроэнергии и полезного тепла (пар 400–550°C) для промышленности (текстильной, химической, пищевой).

- Дешёвое тепловое хранение: Стоимость хранения тепловой энергии на порядки ниже стоимости хранения электричества в батареях.

- Системные услуги: высокая инерция вращающихся масс (паровые турбины) обеспечивает стабильность и надёжность энергосистемы.

Таким образом, CST идеально подходит для регионов с высоким спросом на тепло (например, для централизованного теплоснабжения в Центральной Азии) и для создания гибридных энергокомплексов (CSP + PV + газ).

Роль цифровизации, ИИ и блокчейна. Современный этап развития CST неразрывно связан с цифровизацией:

- **Искусственный интеллект (ИИ) и машинное обучение:** используются для прецизионной калибровки и оптимизации трекинга гелиостатов (точность до 0,1 мрад), предиктивного обслуживания оборудования (снижение простоев на 20–50%) и краткосрочного прогнозирования. Нейросетевые модели (LSTM) позволяют в реальном времени оптимизировать расход теплоносителя и диспетчеризацию накопленного тепла.

• **Цифровые двойники (Digital Twins):** создание виртуальных копий электростанций для моделирования режимов работы, калибровки поля и предсказания выработки без остановки реального оборудования.

• **Блокчейн:** может применяться для создания прозрачных систем торговли «зелёными» сертификатами и тепловой энергией на региональных рынках, например, в рамках ШОС, используя смарт-контракты для автоматизации расчетов.

Глобальные лидеры и современное состояние рынка. На сегодняшний день сформировалось несколько центров развития CST:

• **Испания:** исторический лидер по установленной мощности (около 2,3 ГВт). Здесь расположен комплекс Noor Ouarzazate (Марокко) — один из крупнейших в мире, что демонстрирует влияние испанских технологий.

• **Китай:** демонстрирует наиболее динамичный рост. К 2025 году в стране насчитывалось около 27 станций общей мощностью ~1,72 ГВт (годовой рост 107%), а проектов параболического типа превышает 8 ГВт. Ключевые проекты: CGN Delingha (50 МВт, парабола), Shouhang Dunhuang (100 МВт, башня), SUPCON Delingha (50 МВт, башня), Lanzhou Dacheng Dunhuang (50 МВт, Fresnel).

• **Ближний Восток и Северная Африка (MENA):** ОАЭ (Noor Energy 1 — гибридный CSP+PV) и Марокко (Noor Ouarzazate) строят крупные гибридные комплексы с многочасовыми накопителями.

Таким образом, CST является зрелой и стратегически важной технологией, фокус которой сместился в сторону теплового аккумулирования, гибридизации и цифрового управления. Эти свойства делают её идеальным инструментом для достижения целей устойчивого развития стран ШОС и создания основ для региональной энергетической кооперации.

Текущее состояние и потенциал использования солнечной тепловой энергии в Узбекистане

Ресурсная база: выдающийся солнечный потенциал. Узбекистан обладает одним из наиболее благоприятных в мире ресурсов прямой солнечной радиации, что делает страну идеальным кандидатом для развития концентрированной солнечной тепловой энергии (CST/CSP). Согласно данным Global Solar Atlas, среднегодовое значение прямой нормальной излучения (DNI) на территории страны составляет **4,44 кВт·ч/м²/сутки** (в диапазоне от 3,03 до 5,27 кВт·ч/м²/сутки) [5]. Этот показатель сопоставим с ведущими мировыми рынками CSP — юго-западом США (4,76 кВт·ч/м²/сутки) и южными регионами Испании (5,34 кВт·ч/м²/сутки).

Пиковые значения DNI, достигающие **4,9–5,27 кВт·ч/м²/сутки**, фиксируются в юго-западных регионах (Кашкадарья, Самарканд, Навои, Сурхандарья, Бухара). Именно здесь расположены обширные пустынные и полупустынные территории с более чем **300–320 солнечными днями в году**, что создаёт идеальные условия для размещения крупных CST-станций. Международное агентство по возобновляемой энергии (IRENA) подтверждает эти оценки, отмечая, что технический потенциал солнечной энергетики в Узбекистане исчисляется тысячами тераватт-часов, значительная часть которых пригодна именно для технологий концентрации благодаря высокому DNI и низкой облачности [14].

Текущее состояние: доминирование PV и отсутствие крупных CST-проектов. Несмотря на выдающийся ресурс, к началу 2026 года развитие CST в Узбекистане остаётся на начальной стадии. Крупные коммерческие **CST-станции** в стране отсутствуют. Основным фокусом национальной программы по ВИЭ смещён в сторону фотоэлектрической солнечной энергетики (PV) и ветроэнергетики. По данным Министерства энергетики Узбекистана, к концу 2025 года введено в эксплуатацию около **5000 МВт солнечных и ветровых мощностей**, а доля «зелёной» энергии в общей генерации достигла **30%** [15]. Ключевую роль в этом росте сыграли международные инвесторы: Masdar, ACWA Power, TotalEnergies, Voltalia и Aksa Enerji.

В то же время, на мелкокоммерческом уровне солнечная тепловая энергия уже присутствует в виде низкотемпературных солнечных водонагревателей (плоских или вакуумных коллекторов) в домохозяйствах и на небольших объектах. Правительство субсидирует 30% стоимости таких систем, и к 2025 году в рамках целевой программы установлено около **150–200 тысяч единиц** (примерно 2–2,5% домохозяйств). Существуют также пилотные проекты по использованию солнечных коллекторов для горячего водоснабжения в сельской местности, теплицах и на небольших промышленных объектах. Однако полноценные пилотные проекты по генерации электроэнергии и высокотемпературного тепла с помощью CST отсутствуют.

Причины недооценённости CST. Почему же CST остаётся «в тени» PV? Основная причина — приоритет быстрого и экономически эффективного наращивания мощностей ВИЭ. Международные инвесторы фокусируются на PV-проектах мощностью 100–500 МВт, часто в комплексе с системами

накопления энергии на литий-ионных батареях (BESS). Для таких проектов характерны более низкая приведенная стоимость электроэнергии (LCOE) и короткие сроки реализации.

• **Экономические параметры:** По данным Lazard (2025), LCOE для промышленной солнечной PV составляет \$0,03–0,05 за кВт·ч (без хранения), а для PV + BESS — \$0,08–0,12 за кВт·ч. CST без системы хранения оценивается в \$0,10–0,15 за кВт·ч, а с тепловым аккумулятором (на 6–15 часов) — \$0,09–0,12 за кВт·ч. Таким образом, капитальные затраты (CAPEX) на CST в 2–3 раза выше, чем на PV.

• **Технологическая сложность:** CST требует более сложной инфраструктуры (зеркальные поля, системы слежения, теплоносители, паровые турбины) и специализированной экспертизы, которой в стране пока недостаточно.

Однако экономика меняется, если рассматривать не только электричество, но и тепловую энергию. Стоимость тепла, произведённого на CST, может составлять всего \$0,02–0,04 за кВт·ч, что в 2–5 раз дешевле производства тепла из газа в когенерационных установках. С учётом этого фактора, а также потенциальных субсидий и механизмов ГЧП, внутренняя норма доходности (IRR) для CST-проектов может достигать 12–15%.

Стратегические ниши для CST в Узбекистане. Потенциал CST огромен именно там, где PV малоэффективна или неприменима. Ключевые ниши включают:

1. **Централизованное теплоснабжение городов:** крупные города имеют изношенные тепловые сети с потерями, достигающими 40%. CST с тепловыми накопителями может стать низкоуглеродным источником тепла для систем централизованного отопления, особенно в зимний период, замещая миллиарды кубометров газа, ежегодно сжигаемых для этих целей.

2. **Промышленность:** Предприятия текстильной, пищевой и химической промышленности нуждаются в технологическом паре и горячей воде с температурами 100–400°C. CST идеально подходит для когенерации (одновременная выработка тепла и электроэнергии), позволяя снизить энергозатраты на 20–50%.

3. **Гибридные энергокомплексы:** Создание гибридных систем (CST + природный газ/биомасса/PV) для обеспечения круглосуточной стабильной генерации (24/7) в удалённых и изолированных районах, таких как Каракалпакстан или пустынные зоны Навоийской области.

Планы развития и окно возможностей. Действующая «Стратегия перехода Республики Узбекистан на «зелёную» экономику на период до 2030 года» и указ «О мерах по повышению эффективности реформ, направленных на переход Республики Узбекистан к «зелёной» экономике до 2030 года» (№ ПП-436 от 02.12.2022) ставят амбициозные цели: довести долю ВИЭ до 25–40% к 2030 году, а общую мощность ВИЭ — до 25 000 МВт (включая 12–18 ГВт солнечной генерации).

В обновлённом ОНУВ 3.0, представленном в ноябре 2025 года на COP30, Узбекистан подтвердил цель по сокращению интенсивности выбросов парниковых газов на 50% к 2035 году (от уровня 2010 года) и достижению доли ВИЭ в 54% в энергобалансе. Хотя CST упоминается в этих документах лишь косвенно, как часть «солнечной энергии для тепла и электричества», существует реальное окно возможностей для её пилотного внедрения. Международное энергетическое агентство (IEA) рекомендует провести детальные технико-экономические обоснования для CSP-проектов в юго-западных регионах страны [16,17]. Кроме того, с 2025–2026 годов вводится обязательное оснащение новых зданий солнечными панелями и водонагревателями, что создаёт дополнительный спрос на солнечные тепловые технологии.

Выводы и прогноз. Таким образом, потенциал CST в Узбекистане оценивается в сотни МВт к 2035 году. Реалистичный сценарий развития включает запуск пилотных проектов мощностью 50–100 МВт в Навоийской или Бухарской областях с последующим масштабированием для нужд промышленности и централизованного теплоснабжения. Это позволит диверсифицировать структуру ВИЭ, повысить стабильность и маневренность энергосистемы, а также создать основу для интеграции страны в формирующийся общий рынок «зеленой» энергии и тепла в рамках ШОС.

Заключение. Концентрированная солнечная тепловая энергия (CST/CSP) представляет собой одну из наиболее перспективных, но на сегодняшний день недооценённых технологий в рамках энергетического перехода. Проведённый в данной работе всесторонний анализ позволяет утверждать, что Узбекистан и сопредельные государства Центральной Азии обладают уникальным сочетанием факторов, делающих CST не просто жизнеспособной, а стратегически необходимой технологией.

Ключевые выводы исследования

1. **Богатейшая ресурсная база:** Узбекистан располагает выдающимся солнечным потенциалом. Среднегодовые значения прямой нормальной инсоляции (DNI) на уровне 4,4–5,3 кВт·ч/м²/сутки в сочетании с более чем 300 солнечными днями в году и наличием обширных

свободных территорий создают идеальные условия для размещения CST-станций [5]. Этот ресурс сопоставим с лучшими мировыми площадками для CSP в Испании, США и Китае.

2. **Технологическая зрелость и системные преимущества:** CST является зрелой технологией, ключевое преимущество которой — способность обеспечивать управляемую генерацию и когенерацию (тепло + электричество). Благодаря интеграции недорогих тепловых аккумуляторов (TES), CST превосходит фотоэлектрическую генерацию (PV) в задачах промышленного теплоснабжения, районного отопления и обеспечения стабильности энергосистем, что особенно актуально для региона.

3. **Текущее состояние и потенциал в Узбекистане:** в настоящее время CST в Узбекистане практически не представлена. Приоритет энергетической политики и механизмов государственно-частного партнерства (ГЧП) закономерно отдан быстро окупаемым PV-проектам с участием международных инвесторов (Masdar, ACWA Power, Voltaia). Однако огромный нереализованный потенциал CST существует именно в «тепловых» нишах: модернизация теплосетей с потерями, превышающими 40%, обеспечение паром предприятий текстильной и пищевой промышленности, а также создание гибридных энергокомплексов [18].

4. **Барьеры и пути их преодоления:** Основные препятствия носят системный характер и включают: отсутствие специального регулирования и тарифов на тепло от CST в Узбекистане; высокие удельные капитальные затраты (CAPEX); неудовлетворительное состояние инфраструктуры теплоснабжения; разрозненность технических стандартов в странах ШОС; экологические ограничения (водопользование) и социальные риски. Ключ к их преодолению лежит в плоскости гармонизации законодательства, запуске совместных демонстрационных проектов и активном привлечении «длинных» денег от международных финансовых институтов с использованием «зелёных» облигаций [19].

Сценарии и перспективы до 2035 года. Реалистичный сценарий развития CST в регионе до 2035 года может включать следующие этапы:

- Краткосрочный этап (2026–2028 гг.): Запуск первых пилотных CST-станций мощностью 50–100 МВт в Узбекистане с техническим и финансовым участием китайских партнеров.
- Среднесрочный этап (2028–2032 гг.): Масштабирование успешного опыта, доведение суммарной мощности CST в регионе до 0,5–2 ГВт. Создание совместных научно-исследовательских лабораторий и центров компетенций по солнечной тепловой энергии.
- Долгосрочный этап (2032–2035 гг.): Формирование основ общего рынка «зелёной» энергии и тепла, гармонизация стандартов и запуск механизмов трансграничной торговли сертификатами происхождения.

CST как драйвер региональной интеграции. CST способна стать не просто технологией генерации, а мощным катализатором региональной интеграции в рамках Центральной Азии и ШОС. Она создает основу для:

- Снижения зависимости от ископаемого топлива и диверсификации энергобаланса.
- Трансфера технологий и совместного производства высокотехнологичного оборудования.
- Гармонизации технических регламентов и экологических стандартов.
- Трансграничной торговли «зелёным» теплом и электроэнергией.

В контексте задач этой статьи, CST следует рассматривать как приоритетное направление для включения в практическую дорожную карту развития до 2035 года.

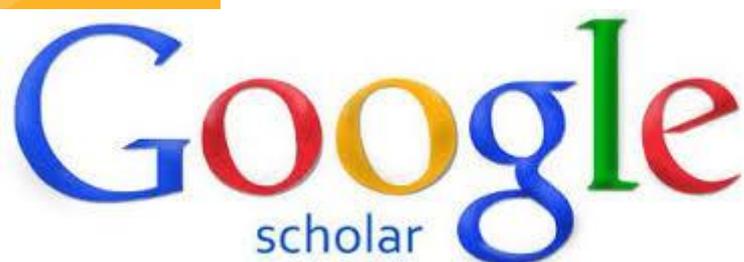
Рекомендации. Настоящий этап требует безотлагательных и скоординированных действий. Исходя из вышеизложенных в данной статье положений, рекомендуется:

1. В ближайшие 1–2 года инициировать запуск пилотных CST-проектов в Узбекистане с привлечением китайских технологий и финансирования по линии ШОС или BRI.
2. Приступить к гармонизации нормативно-правовой базы: разработать единые подходы к тарифообразованию на когенерационную энергию, унифицировать стандарты для тепловых аккумуляторов (TES) и взаимно признавать «зелёные» сертификаты.
3. Создать совместный Центр компетенций ШОС по солнечной тепловой энергии для подготовки кадров, обмена знаниями и проведения прикладных исследований.
4. Разработать экономические и правовые механизмы для будущей трансграничной торговли «зелёным» теплом и энергией на пространстве ШОС.

Только благодаря консолидации усилий государств, академического сообщества, бизнеса и международных финансовых институтов солнечная тепловая энергия сможет перейти из категории «перспективной» в категорию «реализующейся» и внести весомый, практический вклад в устойчивое развитие и энергетическую безопасность Узбекистана и региона Шёлкового пути.

ЛИТЕРАТУРА:

1. <https://unfccc.int/sites/default/files/2025-1/Uzbekistan%20Third%20NDC.pdf>
2. Постановление Президента Республики Узбекистан, от 04.10.2019 г. № ПП-4477. <https://lex.uz/docs/7582760>
3. <https://globalsolaratlas.info/map?c=36.877212,66.054199,6&s=39.781697,66.493652&m=site>
4. Bellamkonda Pragathi, D. P. Kothari. *Concentrated Solar Power Systems. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2025. Online ISBN:9781394272389 |DOI:10.1002/9781394272389.*
5. Baharoon, Dhyia & Abdul Rahman, Hasimah & Wan Omar, Wan Zaidi & Fadhl, Saeed. (2015). *Historical development of concentrating solar power technologies to generate clean electricity efficiently – A review. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 41. 996-1027. 10.1016/j.rser.2014.09.008.*
6. <https://www.egy.com/maadi/solar-energy.pdf>
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_Energy_Generating_Systems
8. https://www.irena.org/-/media/Files/IRENA/Agency/Publication/2024/Sep/IRENA_Renewable_power_generation_costs_in_2023.pdf
9. https://www1.eere.energy.gov/ba/pba/pdfs/solar_tower.pdf
10. Mills, David & Morrison, Graham. (2000). *Compact Linear Fresnel Reflector solar thermal powerplants. Solar Energy. 68. 263-283. 10.1016/S0038-092X(99)00068-7.*
11. G. Barreto, P. Canhoto. *Modelling of a Stirling engine with parabolic dish for thermal to electric conversion of solar energy. Energy Conversion and Management. Volume 132, 2017, Pages 119-135, ISSN 0196-8904. https://doi.org/10.1016/j.enconman.2016.11.011.*
12. Bauer, Thomas & Odenthal, Christian & Bonk, Alexander. (2021). *Molten Salt Storage for Power Generation. Chemie Ingenieur Technik. 93. 10.1002/cite.202000137.*
13. Prieto, Cristina & Cabeza, Luisa F.. (2019). *Thermal energy storage (TES) with phase change materials (PCM) in solar power plants (CSP). Concept and plant performance. Applied Energy. 254. 113646. 10.1016/j.apenergy.2019.113646.*
14. https://www.irena.org/-/media/Files/IRENA/Agency/Publication/2025/Jul/IRENA_DAT_RE_Statistics_2025.pdf
15. <https://gov.uz/en/news/view/108357>
16. <https://www.irena.org/News/pressreleases/2023/Apr/Under-IRENAs-ETAF-Masdar-and-AIIB-Reach-Financial-Close-on-3-Uzbek-Solar-Projects>
17. World Bank. *Powering an Energy-Secure Future Across Central Asia. Washington, D.C.: World Bank Group. https://www.worldbank.org/en/news/immersive-story/2026/02/17/powering-an-energy-secure-future-across-central-asia*
18. IEA (2022), *Solar Energy Policy in Uzbekistan: A Roadmap, IEA, Paris. https://www.iea.org/reports/solar-energy-policy-in-uzbekistan-a-roadmap, Licence: CC BY 4.0.*
19. Постановление Президента Республики Узбекистан, № ПП-100. *О мерах по кардинальному реформированию сферы обеспечения тепловой энергией жилых домов, зданий и сооружений, а также повышению энергоэффективности зданий. г. Ташкент, 11 марта 2025 г. https://lex.uz/uz/docs/7431399.*



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
27.02.2026 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish
Bukhari street, 190 B-house