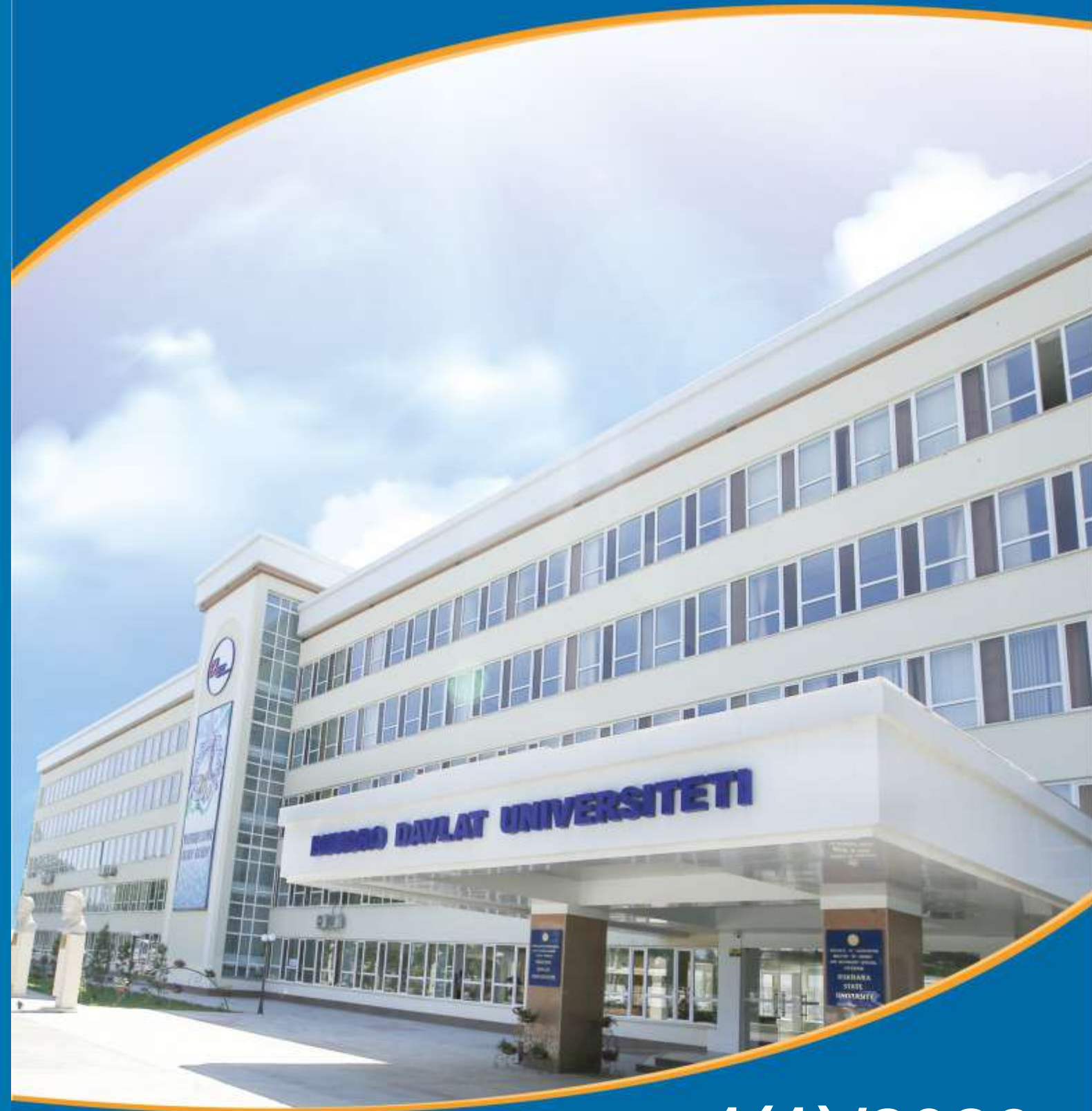




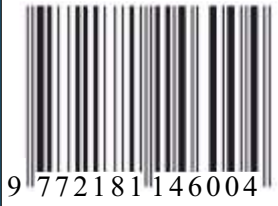
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

1(1)/2026

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



1(1)/2026

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal

2026, № 1, yanvar

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori (DSc), dotsent

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Rasulov To'lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Qurbonova Manzila Bakiyevna, tarix fanlari nomzodi, professor

Ochilov Alisher To'lis o'g'li, tarix fanlari doktori, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

SERIYA: ANIQ VA TABIIY FANLAR

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
Xonkulov U.X.	Trigonometriyani tarixiy kontekstda o'qitish masalalari	3
Baxramova M.G'.	Ko'phadlar ildizlari sonini topish usullari va tatbiqlari	11
Farxodova G.R.	Chekli maydonda keltirilmaydigan ko'phadlarni tekshirishda Batler kriteriyasidan foydalanish	19
Ro'zikov M.M.	Parametrlil masalalarni o'rganishda mantiqiy tahlil: parametrlil modellashtirish	25
Ro'zmetova Y.U.	Funksiya va uning hayotiy tatbiqlari	32
Jumayev J., To'rayev Sh.F., Avazxonova M.A.	Ekstraksiya jarayoni uchun diffuziya tenglamasini analitik va sonli usullar asosida modellashtirish	37
Аббасова М.О., Эргашев Т.Г.	Задачи Неймана для уравнения Лапласа в бесконечных частях евклидова пространства	44
Эргашев А.А., Бектошева Ш.А.	Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа первого рода с нелокальным условием на одной граничной характеристике	51
Жумаев Ж., Янгиева Н.У.	Применение метода двухфакторного эксперимента для исследования влияния факторов на производство продукта	61
Rashidov A.Sh., Qushkulov A.N.	Variatsion hisob masalalarida funksionalning ekstremumi, ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari	66
Imomova Sh.M., Naimova M.Q.	Giperbolik tenglamalarni Mak-Kormack sxemasi bilan yechish	71
Jabborov N.M., Davlatov J.E.	Sovuq plazma modeli va Hopf-Burgers tenglamasi uchun sonli usullar	76
Boltayev A.A., Oltiboyeva D.O., Mirzoyeva S.O.	Moore-Gibson-Thompson tenglamasi uchun noklassik chegaraviy shartli aralash masala	86
Imomova Sh.M., Xayrulloeva O'M.	Chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish	93
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Nasirova N.G., Fayziyev Sh.Sh., Saidov Q.S., Djurayev D.R.	$Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristalli domen strukturasi ga magnit maydon ta'siri	97
Nurumbetova L.R., Saidqulova A.A., Saidqulova Sh.A., Mansurova M.Y., Saparbayev A.A.	$Pm_{6:18}Bo$ faol qatlamlarning optik va strukturaviy xususiyatlari	106

Tursunov S.U.	Sabzi sharbati, uning mahsulotlari va ikkilamchi хом ashysidagi bo‘yoq pigmentlarining spektroskopiyasi	112
Астанов С.Х., Турсунов С.У., Касимова Г.К.	Спектроскопия каротиноидов, входящих в состав абрикосовых порошков, образующих комплексы с молекулярным кислородом	118
Sulaymonov S.X., O‘rinboyev R.R.	Mujassamlangan quyosh nurlanishi ta’sirida rux oksidining karbotermik qaytarilishi	123
Abdullayev L.A., Yusupov D.D.	Nanoto‘ldirgichli polimer kompozitlarning elektr va dielektrik xususiyatlari	127
Esanov N.Q.	Ko‘p jisimli tizimlarda qovushqoq-elastik xususiyatlarni chekli elementlar usuli asosida tahlil qilish	132
Jo‘rayev Sh.I., Karimova S.T., Ixtiyorov S.Z.	Ko‘p qatlamli qovushqoq-elastik sterjenli konstruksiyalarga xos to‘lqinlarni tarqalishi	142
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Zokirov B.U., Xalilov O.S.	Hisorak va Chimqurg‘on suv omborlarining mikroflorasini tadqiq qilish	151
Xolmurodov B.B., Abdusalomova H.A.	Zearalenon bilan zaharlanish	155
EKOLOGIYA *** ECOLOGY *** ЭКОЛОГИЯ		
Романюк Ю.А., Фазилова Р.Б.	Мониторинг динамики водной поверхности Тудакульского водохранилища на основе данных дистанционного зондирования земли	161
INFORMATIKA *** INFORMATICS *** ИНФОРМАТИКА		
Umarov Sh.A.	Blockchainda anomaliyalarni aniqlash uchun mashinali o‘qitish texnologiyalaridan foydalanish	166
Олимов Х.К., Муратов Р.Р., Норбоев К.М., Ахатов А.Т.	Высокопроизводительный вычислительный кластер на базе Open MPI	171
TEXNIKA *** TECHNIQUE *** ТЕХНИКА		
Hamrayev J.H., Botirov O‘.U.	GTL korxonasi da foydalaniladigan avtotermik reforming jarayonining mukammal boshqarish tizimini ishlab chiqish	175
Samiyev S.S., Farxodov S.U., Toshtemirov R.T., Urunov B.J.	Suv xo‘jaligi tizimlarida suv resurslarini taqsimlashni avtomatlashtirilgan boshqarish va optimallashtirish usullari	179
TIBBIYOT *** MEDICINE *** МЕДИЦИНА		
Xamidov D.S., Nurmurodov L.T.	Dental CBCTda nurlanish dozalari va ularni kamaytirish usullari	184

TRIGONOMETRIYANI TARIXIY KONTEKSTDA O‘QITISH MASALALARI

Xonkulov Ulug‘bek Xursanaliyevich,

Farg‘ona davlat universiteti Matematika kafedrası professorı, (PhD)

u_xonkulov@mail.ru

Annotatsiya. Maqolada maktab matematika ta‘limida trigonometriya tushunchalarini shakllantirish jarayoni tarixiy-matematik yondashuv asosida yoritiladi. Maqolada trigonometrik tushunchalarning paydo bo‘lishi insonning amaliy faoliyati - qurilish, yer o‘lchash, dengizchilik va astronomik kuzatuvlar bilan uzviy bog‘liqligi misollar orqali ko‘rsatib berilgan. Tarixiy materiallardan foydalanish o‘quvchilarda tushunchalarning mazmunini chuqur anglash, fanlararo bog‘lanishlarni ko‘rish va bilishga bo‘lgan qiziqishni oshirishga xizmat qilishi asoslanadi. Maqola materiallari trigonometriyani mazmunli va motivatsion o‘qitishda metodik ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar: trigonometriya, trigonometrik nisbatlar, sinus, kosinus, tangens, o‘xshash uchburchaklar.

ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ В ИСТОРИЧЕСКОМ КОНТЕКСТЕ

Аннотация. В статье на основе историко-математического подхода рассматривается процесс формирования тригонометрических понятий в школьном курсе математики. Показано, что возникновение тригонометрических понятий тесно связано с практической деятельностью человека — строительством, землемерием, мореплаванием и астрономическими наблюдениями. Обосновывается, что использование исторического материала способствует более глубокому осмыслению содержания тригонометрических понятий, выявлению межпредметных связей и повышению познавательного интереса учащихся. Материалы статьи имеют методическую значимость для содержательного и мотивационного обучения тригонометрии.

Ключевые слова: тригонометрия, тригонометрические отношения, синус, косинус, тангенс, подобные треугольники.

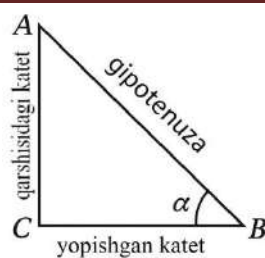
ISSUES IN TEACHING TRIGONOMETRY IN A HISTORICAL CONTEXT

Abstract. The article examines the process of forming trigonometric concepts in school mathematics education on the basis of a historical-mathematical approach. It demonstrates, through illustrative examples, that the emergence of trigonometric concepts is closely connected with human practical activities such as construction, land surveying, navigation, and astronomical observations. The use of historical material is substantiated as a means of promoting a deeper understanding of the conceptual content, revealing interdisciplinary connections, and increasing students’ cognitive interest. The materials of the article have methodological significance for meaningful and motivational teaching of trigonometry.

Keywords: trigonometry, trigonometric ratios, sine, cosine, tangent, similar triangles.

Kirish. Matematika ta‘limida har qanday mavzusini o‘rganishda o‘qituvchini o‘quv jarayonining motivatsion tomoni, ya‘ni o‘quvchilarning bilish faoliyati motivatsiyasi muhim ahamiyatga ega. Motivatsiya o‘qituvchi muayyan matematik tushunchaning qanday paydo bo‘lgani, matematik fakt qanday ochilgani, real hayotdagi qanday masalalar matematik tushunchalarni yuzaga kelishiga olib kelgani va mazkur tushuncha bugungi shaklga yetib kelguncha qanday ilmiy rivojlanganligi haqida tushuntirishga uringan paytda boshlanadi. Boshqacha aytganda, o‘qituvchi o‘quvchining odatiy savoliga javob bera olishi kerak: “Bu matematik tushunchani birinchi bo‘lib kim o‘ylab topgan va nima uchun?” Trigonometriyaga oid tushunchalar dastlab geometriya kursida quyidagi tartibda kiritiladi. To‘g‘ri burchakli uchburchak(1-rasm) qaraladi va quyidagilar ta‘rif shaklida aytiladi:

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB}, \quad \cos \alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{BC}{AC}.$$



1-rasm.

Agar o'qituvchi 1-rasmda keltirilgan quyidagi tayanch so'zlardan foydalansa, o'quvchilar ushbu ta'riflarni osonroq eslab qoladilar

$$\sin \alpha = \frac{\text{qarshisidagi katet}}{\text{gipotenuza}}; \cos \alpha = \frac{\text{yopishgan katet}}{\text{gipotenuza}};$$

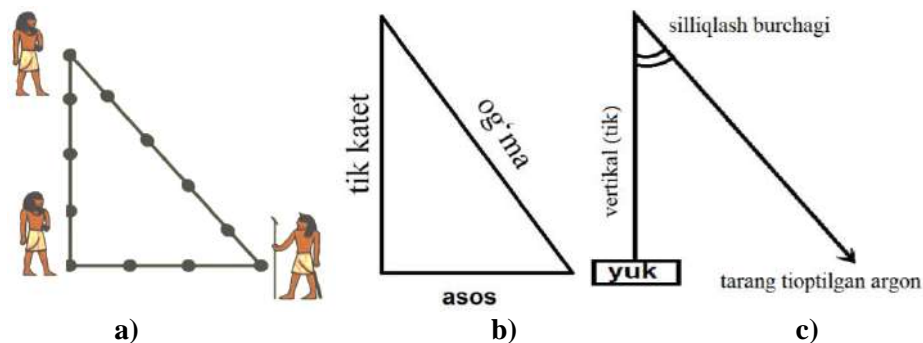
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{qarshisidagi katet}}{\text{yopishgan katet}}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{yopishgan katet}}{\text{qarshisidagi katet}}.$$

Keltirilgan ta'riflar va ular uchun qo'llaniladigan belgilar o'quvchilar uchun noodatiy va murakkab ko'rinadi, shu sababli o'quv materialini puxta o'zlashtirilishi tushunchalarning ichki mohiyatini tasvirlashga bog'liq. Buning uchun matematika tarixiga murojaat qilish foydalidir. Avvalo, bizni quyidagi savollar qiziqtiradi: «Yuqorida berilgan to'g'ri burchakli uchburchak tomonlari nisbatlarini ko'rib chiqish zaruriyati qayerdan kelib chiqqan?» va ta'riflarda qo'llanilgan belgilashlar qanday paydo bo'lgan?» Bu savollarga javobni insonlarning amaliy faoliyatidan izlash lozim. Bu ehtiyoj shunchalik qadimgi davrlarga (ehtimol, miloddan avvalgi uchinchi mingyillikka yoki undan ham oldin) borib taqaladiki, mavjud yozma manbalar aniq javob berish imkonini bermaydi. Shunga qaramay, ayrim ilmiy taxminlarni bildirishimiz mumkin. Trigonometriya boshqa barcha fanlar kabi inson amaliy faoliyati ehtiyojlaridan rivojlangan. Bu ehtiyojlar yuqorida ta'kidlanganidek faqat binokorlik yoki uzoq masofalardagi nuqtalargacha bo'lgan masofalarni aniqlash bilan cheklanmagan. Dengizchilikda kemanding yo'lini yulduzlar bo'yicha aniqlash, sahroda karvonlarning yo'nalishini yulduzlar asosida belgilash, dehqonchilikda aniq taqvim tuzish zarurati va boshqa ko'plab amaliy masalalar trigonometriyaning rivojlanishiga sabab bo'lgan. Trigonometriya rivoji esa o'z navbatida astronomiyaning shakllanishiga olib kelgan. Shuningdek, sferik trigonometriya tekislikdagi trigonometriya bilan yonma-yon rivojlangan. Aslida trigonometriya qadimda astronomiyaning bir bo'limi sifatida paydo bo'lgan. Chunki qadimgi dunyoqarashda koinotning tuzilishi haqidagi yetakchi gipoteza geotsentrik edi: Yer - markazda joylashgan shar, uning atrofidagi osmon sferasi esa o'z o'qi atrofida bir maromda aylanadi deb hisoblangan. Yulduzlar ham shu sferada joylashgan deb qaralgan. Ularning harakatini o'rganishda sferadagi nuqtalar va figuralarning joylashuviga doir masalalar alohida ahamiyat kasb etgan. Bunday masalalarni bag'ishlangan ilmiy ishlar "sferika" deb atalgan. Ayniqsa, sferadagi figuralar gorizont, meridian tekisliklariga proyeksiyalangan va shunday qilib ko'plab astronomik masalalar tekis holatlarga keltirilgan.

Tadqiqot metodologiyasi va adabiyotlarning tahlili. Qadim zamonlarda inshootlar qurilishi hozir kichik uylar yoki xo'jalik imoratlarini qurishda qo'llaniladigan usullar va vositalarga o'xshash tarzda amalga oshirilgan [1,2]. Bunda quruvchi juda oddiy asboblardan - arqon, qoziqchalar va shunga o'xshash vositalardan foydalangan. Qiziqarli tomoni shundaki, qadimgi Misrda maxsus kasb egalari bo'lgan - ularga gorpodonaptlar deyilgan, ya'ni "arqon tortuvchilar". Har qanday qurilish ularning ishidan boshlangan. O'quvchilarga "chiziq" va "ip, arqon-paxta tolasi" so'zlariga e'tibor qaratishni taklif qilamiz.

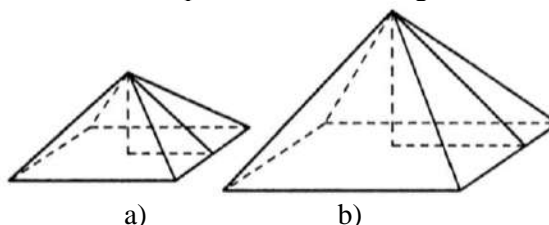
Etimologik lug'atdan foydalanamiz. *Chiziq (linia)*. XVIII asr boshlarida nemis tili orqali lotin tilidan kirib kelgan bo'lib, lotincha linea - "ip", linum esa "arqon" ma'nosini anglatadi [3]. Arqonning yana bir vazifasi - to'g'ri burchak hosil qilish, masalan, bizga tanish to'rtburchak shaklidagi uylarni qurishda qo'llaniladi. Axir bunday uy qurish eng oson bo'lib, boshqa shakldagi uylar qurish esa hozir ham murakkab arxitektura masalasi hisoblanadi. O'quvchilarga ma'lumki, insoniyatning eng muhim kashfiyotlaridan biri g'ildirakdir. Nima uchun? Chunki tabiatda g'ildirakning o'zi mavjud emas. G'ildirak - sof insoniy ixtirodir. Endi boshqa savol qo'yamiz: tabiatda to'g'ri burchak mavjudmi? Albatta, misollar keltirish mumkin (daraxt tanasiga nisbatan perpendikulyar o'sib turgan shox, yerga perpendikulyar o'sayotgan daraxt tanasi va boshqalar), ammo bunday misollarni aniq to'g'ri burchak andozasi sifatida qo'llash qiyin. Qadimdan quruvchilar arqon yordamida to'g'ri burchak hosil qilishni o'rganib olishgan. Qadimgi Misrda quyidagilar ma'lum bo'lgan: agar arqonning bo'ylama uzunligiga teng masofalarda tugunlar qo'yib, arqonni tarang tortib zamonaviy tilda aytganda 3, 4, 5 uzunlikdagi tomonlarga ega uchburchak yasalsa, eng uzun tomon qarshisida yotgan burchak to'g'ri burchak bo'ladi [4,5]. O'sha vaqtdan boshlab tomonlari 3,4,5 uzunlikda bo'lgan

uchburchak *misr uchburchagi* deb atalgan (2-rasm, a). Uchburchakning uchlarida qadimgi misrlik ruhoniylarning tasvirini ko‘ramiz. Ularning qo‘lida hozirgi zamonda ham qo‘llaniladigan uskunalar o‘xshash asboblardan mavjud. Qadimgi Misrda o‘lchov ishlari maxsus bilimga ega bo‘lgan kam sonli kishilar - ruhoniylar zimmasidagi ish bo‘lgan.



2-rasm.

Arqon tortish tarixi bilan bog‘liq yana bir necha qadimiy atamalar mavjud: katet - perpendikulyar, vertikal o‘lchov chizig‘i, gipotenuza esa – og‘ma, tarang tortilgan (arqon) degan ma‘noni bildirgan. To‘g‘ri burchakli uchburchakning ikkinchi kateti esa asos deb yuritilgan (2-rasm, b). Tarang tortilgan arqon bo‘ylab (ya‘ni gipotenuza bo‘ylab) qurilayotgan piramidaning yon qirrasini silliqlash yoki tekislash ishlari olib borilgan. Endi asosiy masalaga kelamiz: “Quruvchilarga piramida qirrasini qaysi burchak ostida silliqilinishi kerakligini qanday tushuntirish mumkin?” Qadimgi Misrda piramida yirik qo‘pol toshlardan qurilgan, keyin esa uni silliqilash yoki shaklni to‘g‘rilash talab etilgan [5]. Buni ifodalashning bir yo‘li - piramidaning balandligi bilan apofemasi nisbatini belgilash, ya‘ni katet bilan gipotenuza nisbatini ko‘rsatish lozim bo‘lgan. Bu esa silliqilash burchagining kosinusi tushunchasining dastlabki ko‘rinishi edi (2-rasm, c). Agar boshqa nisbatlar - masalan, perpendikulyar katetni asosdagi katetga yoki perpendikulyar katetning gipotenuzaga nisbatlari ko‘rib chiqilsa, ular mos ravishda tangens va sinus tushunchalarini ifodalaydi. Bunda uchburchaklarning o‘xshashlikdan foydalanish juda qulay. Masalan, piramida maketida (3-rasm, a) piramida balandligining apofemasiga nisbati 2:3 deb olingan bo‘lsa, haqiqiy piramida uchun ham (3-rasm, b) ushbu nisbat o‘zgarmaydi, chunki katta piramida kichik piramida maketining o‘xshash modeli hisoblanadi.



3-rasm.

Endi quyidagilarni tushunamiz: to‘g‘ri burchakli uchburchak tomonlarining nisbatlarini ko‘rib chiqamiz, o‘xshash to‘g‘ri burchakli uchburchaklarda bu nisbatlar o‘zgarmaydi. Keyinroq o‘quvchilar o‘xshash uchburchaklarning burchaklari teng bo‘lishini bilib oladilar, demak, shu burchaklarning trigonometrik funksiyalari ham teng bo‘ladi. O‘xshash figuralar g‘oyasi insoniyat e‘tiboriga juda qadimdan tushgan. Shakli bir xil, biroq o‘lchami turlicha bo‘lgan figuralar Vavilon va Misr yodgorliklarida uchraydi [4]. Keyingi davrlarda geometriya bo‘yicha bilimlar tobora boyib bormoqda, to‘g‘ri burchakli uchburchaklardagi trigonometrik nisbatlardan esa amaliyotda - masalan, yetib bo‘lmaydigan (mavjud joydan o‘lchab bo‘lmaydigan) obyektlargacha bo‘lgan masofalarni aniqlashda tobora keng foydalanila boshlandi.

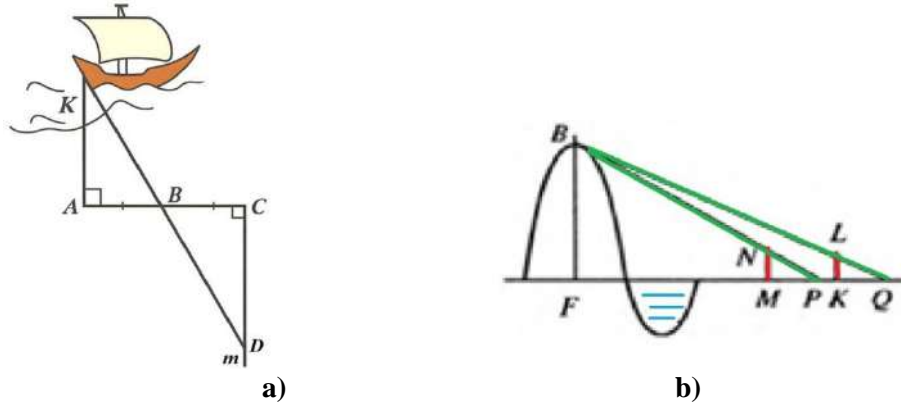
Tahlil va olingan natijalar. Trigonometriyaga oid tarixiy-amaliy masalalarni keltiramiz. Ulardan dars jarayonida foydalanish mumkin. Avval o‘quvchilarga faylasuf va matematik Fales Misr fir‘avni Amazonni o‘zining ajoyib kuzatuvini bilan hayratga solgan ma‘lumotni taqdim etamiz. Fales piramidalardan birining balandligini piramida tashlaydigan soyaga qarab aniqlagan. Fales topqirlik bilan kun davomida bir payt keladiki, har qanday jismning soyasi uning balandligiga teng bo‘lishini aniqlagan. Fales o‘z soyasini isbotlash uchun bo‘yi o‘z soyasi bilan tenglashadigan soniyani kutdi va o‘sha paytda piramidaning soyasini o‘lchab, uning balandligini hisoblab chiqdi.

Endi quyidagi masalani keltriamiz.

1-masala. Dengizda turgan kemadan qirg‘oqqacha bo‘lgan masofani aniqlang.

Yechish. Kema K nuqtada, kuzatuvchi esa qirg‘oqdagi A nuqtada turadi (4-rasm, a). Avval A nuqtada to‘g‘ri burchak hosil qilamiz, so‘ngra qirg‘oq bo‘ylab AC kesmani ajratamiz va uni B nuqta bilan teng ikkiga bo‘lamiz. Keyin C nuqtadan BC ga perpendikulyar m to‘g‘ri chiziq bo‘ylab D nuqtaga yetguncha

harakatlanamiz. Bu nuqtada kema K va B nuqtalarni bir to'g'ri chiziq ustida ko'rish mumkin bo'ladi. Hosil bo'lgan nuqtani D deb belgilaymiz.



4-rasm.

Shunda BCD va BAK to'g'ri burchakli uchburchaklar teng bo'ladi, demak $AK = CD$, ya'ni kema bilan qirg'oq orasidagi masofa CD ga teng bo'ladi. CD kesmani esa joyida o'lchash mumkin.

Yetib bo'lmaydigan obyektlargacha bo'lgan masofalarni aniqlash shuningdek, o'lchash qiyin bo'lgan balandliklarni topish masalalari trigonometrik bilimlarning rivojlanishidagi eng muhim manbalardan biridir. Afsuski, ushbu masalani o'quvchilarga berishda o'qituvchi deyarli hech narsani vizual ko'rsata olmaydi, chunki o'quvchilar u paytda uchburchaklarning o'xshashligi, sinus va kosinus teoremlarini o'rganmagan bo'ladi. Biroq keyingi bosqichlarda bu masalalarga qaytish mumkin. Shu sababli biz yana bir masalani keltiramiz. Uning matni milodiy III asr xitoy matematigi Lyu Xueyning "Dengiz orolidagi matematika" risolasida uchraydi. Risolaning biroz g'ayrioddiy nomi shundan kelib chiqadiki, unda orolda joylashgan, ammo kuzatuv nuqtasi oroldan tashqarida bo'lgan obyektlargacha masofani topishga oid turli masalalar qaralgan.

Quyida Lyu Xuey masalalaridan birini keltiramiz.

2-masala. Dengizdagi uzoq va borib bo'lmaydigan bir orol kuzatilmoqda (4-rasm, b). Buning uchun balandligi ikkita ustun $MN = KL = 6$ qadam uzunlikdagi ustunlar o'rnatilgan. Ustunlar orasidagi masofa $MK = 1000$ qadam. Faraz qilaylik, keyingi ustun KL hamda oldingi ustun MN orol bilan bir to'g'ri chiziqda joylashgan bo'lsin. Agar oldingi ustundan to'g'ri chiziq bo'ylab 123 qadam masofaga (MP) kochirilsa, yerda turgan odamning ko'zi ustunning yuqori uchini orolning cho'qqisi bilan bir nuqtada ustma-ust ko'radi. Xuddi shuningdek, agar keyingi ustundan to'g'ri chiziq bo'ylab 127 qadam masofaga (KQ) ko'chrilsa, yerda turgan odamning ko'zi ustunning yuqori uchini yana orolning cho'qqisi bilan ustma-ust ko'radi. Orolning balandligi FB va undan birinchi ustungacha bo'lgan masofa FM ni toping.

Yechish. Quyidagi o'xshash uchburchak juftliklarini ko'rib chiqamiz:

$$FBP \sim MNP, \quad FBQ \sim KLQ.$$

Ulardan quyidagi munosabatlarni yozamiz: $FB = \frac{6(x+123)}{123}$, $FB = \frac{6(x+127)}{127}$, bu yerda $x = FM$. FB

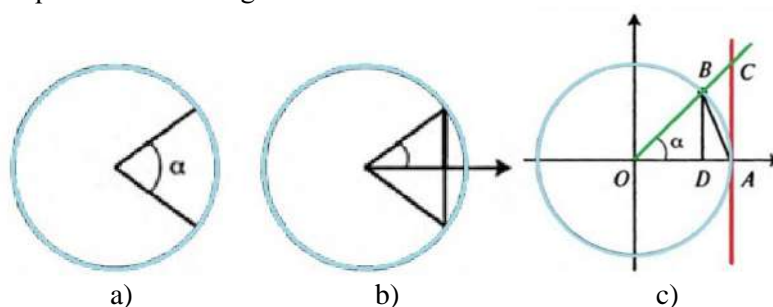
ifodalarni tenglashtiramiz: $\frac{6(x+123)}{123} = \frac{6(x+127)}{127}$. Tenglamani yechib quyidagini topamiz:

$x = 30750$, $FB = 1506$ qadam. Shuni ta'kidlash kerakki, yuqoridagi nisbatlardagi $\frac{6}{123}$ va $\frac{6}{127}$ ifodalar mos ravishda $tg \angle NPM$ hamda $tg \angle LQK$ burchakning qiymatlaridir. Demak, o'xshash uchburchaklar bilan amallar bajarilishi trigonometrik tushunchalarga o'tishning dastlabki asoslarini o'zida mujassam etadi.

Biz tadqiqot natijasida trigonometrik bilimlarning shakllanishiga oid qadimgi tarixiy masalalarni ko'rib chiqdik. Bundan tashqari, ushbu dastlabki tarixiy ma'lumotlar o'quvchilarning ongida bir-biri bilan bog'liq bo'lgan quyidagi bir qator mavzularni yaxlit tasavvur qilishga yordam beradi: to'g'ri burchakli uchburchak bilan tanishish, Pifagor teoremasi, uchburchaklarning o'xshashligi, to'g'ri burchakli uchburchakdagi trigonometrik nisbatlari. Eng muhimi, o'quvchilarda ushbu mavzularga tarixiy va zamonaviy nuqtai nazardan qarash istagi paydo bo'ladi, natijada trigonometriyani o'rganishga bo'lgan qiziqish ortadi. Endi esa trigonometriya tarixiga bevosita murojaat etish mumkin bo'lgan bosqichga o'tamiz. Bu tarixiy matematik ma'lumotlarni o'qituvchi planimetriya kursining o'zida, yoki biroz keyinroq - algebrada, ixtiyoriy burchaklar uchun trigonometrik funksiyalarni o'rganish jarayonida bayon qilishi mumkin.

Trigonometriyaga oid tarixiy ma'lumotlar. Trigonometriyaning ayrim masalalari qadimgi yunon astronomlari tomonidan muvaffaqiyatli yechilgan bo'lsa-da, ular sinus, kosinus va boshqa funksiyalarni emas, balki aylanadagi vatarlarni o'rganishgan. Aniqroq aytganda, yunon astronomlari aslida sinus funksiyasining o'rnini bosuvchi qiymatni ya'ni yarim yoy sinusi sifatida ikkilangan vatar uzunligini qo'llaganlar. Tarixiy manbalarga ko'ra dastlab trigonometriya jadvallarini tuzish usuli quyidagicha bo'lgan. Qadimgi astronomlarning barcha hisoblari diametri berilgan doira asosida bajarilgan. Ushbu doirada markaziy burchakka mos keluvchi yoyni kesib o'tuvchi vatarning uzunligi yagona trigonometrik xarakteristika sifatida qaralgan (5-rasm, a). Masala shundan iborat ediki, ushbu funksiyaning qiymatlar jadvalini imkon qadar aniq va argumentlarning yuqori chastotasi bilan tuzish bo'lgan. Aslida vatar jadvallari sinus jadvallari hisoblanadi. Trigonometrik jadvallarning birinchi namunalarini (yarim vatar jadvallarini), ya'ni hisoblash trigonometriyasiga asos bo'lgan asarlarni miloddan avvalgi II asrda yunon astronomi Gipparx tuzdi. Qadimgi Yunoniston astronomiyasi va trigonometriyasining eng yuksak cho'qqisi esa mashhur astronom Klavdiy Ptolemeyning "Astronomiyaning katta matematika qurilishi" nomli 13 jilddan iborat asari (milodiy II asr) hisoblanadi. Almagestning birinchi kitobida esa tekislikdagi va sferik trigonometriyaga oid ma'lumotlar yoritilgan. Ptolemey yarim vatarni qanday hisoblashni ko'rsatish maqsadida doirani 360 qismga (gradusga) bo'lgan. U tuzgan sinuslar (vatarlar) jadvali bir necha asrlar davomida uchburchaklarga oid masalalarni yechishda yagona asosiy qo'llanma bo'lib xizmat qilgan. Trigonometrik miqdorlar haqidagi ta'limotning shakllanishi Hindistonda milodiy IV–VI asrlardan boshlandi. Hind olimlari birinchi bo'lib sinusni vatarning yarmi sifatida ishlata boshlaganlar va sinusning (yarim vatarning) birinchi trigonometrik jadvallarini tuzganlar. Ularga asosiy trigonometrik ayniyatlar, keltirish formulalari hamda yarim burchak sinusining formulasi ham ma'lum bo'lgan edi. Qiziq jihati shundaki, "vatar" atamasi yunoncha *chorde* so'zidan kelib chiqqan bo'lib, "kamonning tortilgan ipi" degan ma'noni beradi. Hind olimlari birinchi bo'lib yarm vatarning (sinusning) o'zini alohida kattalik sifatida qarashni taklif qilganlar. Ular uni arxa-jiva ("kamon ipining yarmi") deb ataganlar, keyinchalik esa jiva - "kamonning tortilgan ipi" deb atay boshlaganlar. Hind matematiklarining tasavvuri bo'yicha 5-b rasmdagi tasvirda tortilgan kamon va o'qni ko'rmaslikning iloji yo'q. Keyinchalik (VIII asrdan boshlab) matematika fanidagi ushbu bilimlarni egallagan arab olimlari jiva so'zini o'z yozuvida jiba shaklida ifodalaganlar. Bu so'z arab tilidagi "jayb" so'ziga juda o'xshash bo'lib, "o'rka" degan ma'noni anglatadi.

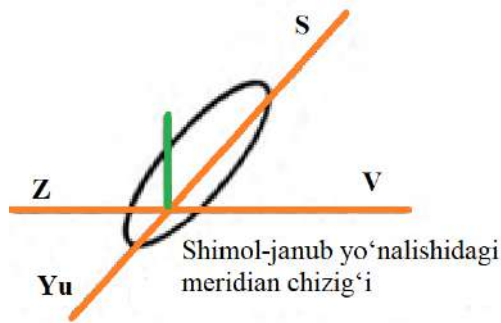
Arablarining trigonometriyada yarim vatar (sinus)ni ifodalash uchun ishlatilgan "o'rka" so'zi X–XII asrlarda Yevropaga yetib keldi. Yevropalik olimlar uni lotin tiliga "sinus" deb tarjima qilganlar. Lotin tili Yevropada keng qabul qilingan ilmiy til hisoblangani sababli, "sinus" atamasi keng tarqaldi va hozirgi kungacha saqlanib qolgan. Qiziq tomoni bu atama faqat matematika sohasida emas, balki tibbiyotda ham ishlatiladi: hozirda burun bo'shliqlarining kasalligi sinusit deb ataladi. Hind olimlari sinus BD va kosinus OD chiziqlarini (5-rasm, c) faqat o'tkir burchaklar uchun ko'rib chiqqanlar. XII–XVI asrlarda yevropalik matematiklar sinusni ko'pincha sinus rectus ("to'g'ri sinus") deb atashgan, trigonometrik doiraning radiusini esa sinus totus, ya'ni "to'liq sinus" deb atashgan.



5-rasm.

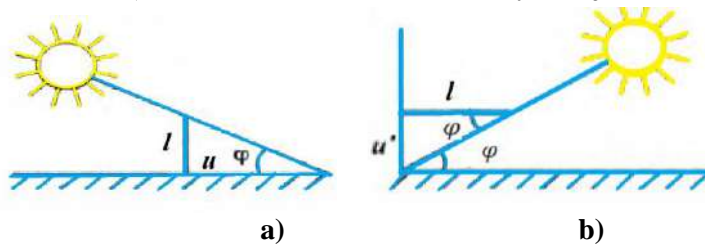
"Kosinus" so'zi lotincha *complement* sinus iborasining qisqartmasi bo'lib, "qo'shimcha sinus" yoki boshqa so'z bilan aytganda, "qo'shimcha yoy sinus" degan ma'noni bildiradi ($\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$). IX–X asrlarda matematika tadqiqotlari markazi, ya'ni trigonometrik bilimlar rivojlanish markazi, Markaziy Osiyoga ko'chdi. Shu yerda arab matematiklari mehnati bilan trigonometriya birinchi marta astronomiyadan ajralib, mustaqil fan sifatida shakllandi. Xususan, Islom mamlakatlari olimlari yangi trigonometrik kattaliklarni - tangens va kotangensni kiritdilar. XIII asrda mashhur olim, ensiklopedist va davlat arbobi Nasiruddin Tusiy "Tekis to'rtburchaklar" asarida tekis va sferik trigonometriyani mustaqil fanlar sifatida bayon qilgan. Taqqoslash uchun aytganda, Yevropada trigonometriya mustaqil fan sifatida faqat XV asrda rivojlanib o'z mustahkam o'rnini topgan. Bu rivojlanishning boshlanishi nemis astronomi va matematik professor Regiomontan tomonidan amalga oshirilgan. Tangens va kotangens tushunchalari, ya'ni ushbu

trigonometrik kattaliklarning dastlabki jadvallari trigonometrik doirani o'rganish natijasida emas, balki quyosh soatlari haqidagi fan -gnomonikadan kelib chiqqan. Quyosh soatlari dastlab yerga tik qo'yilgan ustundan iborat bo'lgan (yunoncha *gnomon* — “aniqlovchi”). Vaqt ushbu ustun tashlagan soyani uzunligi va yo'nalishiga qarab aniqlangan (6-rasm).



6-rasm.

Al-Xorazmiyning zamondoshi IX asr matematigi va astronomi Ahmad al-Mazaviy (al-Habash, al-Hasib - “Hisobchi”) gnomonikani o'rganar ekan, quyosh soatlaridagi gnomonning doimiy uzunligi l ga nisbatan asos uzunligi u quyosh balandligiga bog'liq ravishda o'zgarishini qayd etadi. Bu balandlik φ burchak bilan o'lchanadi. U $l=1$ deb olgan va $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots$ qiymatlarga mos keluvchi soyalar uzunliklari u jadvalini tuzgan, ya'ni: $u = l \operatorname{ctg} \varphi$, yoki $l=1$ bo'lganda: $u = \operatorname{ctg} \varphi$. Bu jadval soyalar uzunligidan kelib chiqib Quyosh balandligini aniqlash imkonini berdi. Soyaning uzunligi bilan ustunning uzunligi nisbati Quyoshning ufq ustidagi balandligini belgilaydi (7-rasm, a). Gorizonttal gnomon vertikal devorga perpendikulyar bo'lgan holatda (7-rasm, b) al-Habash “teskari soyalar” jadvalini tuzadi: $u' = l \operatorname{tg} \varphi$, $u' = \operatorname{tg} \varphi$.



7-rasm.

X asrning oxirida Bag'dodda yashagan Abul-Vafo o'zining “Mukammal kitob” - ya'ni o'z “Almagesti”da trigonometrik chiziqlarni to'g'ri burchakli uchburchak orqali emas, balki umumiy holda aylana yordamida kiritdi. Masalan, u tangensni aylana uchun chizilgan urinma kesmasi sifatida ta'riflagan. Ba'zi joylarda Abul-Vafo aylananing radiusini bir birlik deb olgan. XIV–XV asrlardan boshlab matematik tadqiqotlarning markazi Yevropaga ko'cha boshladi. XIII–XIV asrlarda arab asarlarini lotin tiliga tarjima qilish davomida yangi trigonometrik funksiyalar - kotangens va tangens mos ravishda umbra recta (“to'g'ri soya”) va umbra versa (“teskari soya”) deb atalgan. Ma'lumki, tangens chizig'idan ingliz matematigi Tomas Bradvardin (1290–1349) o'z asarlarida allaqachon foydalangan. “Tangens” atamasi (lotincha tangens — “tegib turgan”, “urinma”) faqat 1583-yilda daniyalik matematik Tomas Fink tomonidan trigonometrik aylana kontekstida kiritilgan. “Kotangens” termini esa “kosinus” so'ziga o'xshatib shakllangan va birinchi bor 1620-yilda ingliz olimi Edmund Gunter asarlarida uchraydi. Yevropada trigonometriya mustaqil matematik fan sifatida talqin qilishga oid birinchi asar 1462–1464-yillarda nemis matematigi va astronomi Regiomontan tomonidan yozildi. U o'z asarini “Turli xil uchburchaklar haqida besh kitob” deb nomlagan. Bu davrda trigonometriya astronomiyaning kuchli ta'siri ostida shakllanib, rivojlanar edi. XV–XVI asrlarda astronomlar uchun zarur bo'lgan trigonometrik funksiyalar jadvallari takomillashtirildi, yangi hisoblash usullari ishlab chiqildi, tekis va sferik uchburchaklarni yechishning yanada murakkab masalalari ko'rib chiqildi, trigonometrik chiziqlar bilan ishlash texnikasi rivojlandi. XVI asrda fransuz matematigi Fransua Viet (1540–1603) trigonometrik usullardan foydalanib kub tenglamani yechish usulini ishlab chiqdi. Uning ba'zi natijalarida trigonometriya bilan algebra o'rtasida bog'liqlik o'rnatildi. Bundan tashqari, u trigonometrik ifodalarda harfiy belgilashlarni qo'llashni boshlab berdi. Shunday qilib, XVII asr arafasida trigonometriyaning rivojida yangi - analitik yo'nalish yuzaga keldi. Agar ilgari trigonometriyaning asosiy maqsadi uchburchaklarni yechish va geometrik figuralarning elementlarini hisoblash, trigonometrik funksiyalar haqidagi ta'limot esa geometrik asosda qurilgan bo'lsa, analitik yo'nalishning shakllanishi natijasida trigonometriya asta-sekin matematik analizning asosiy bo'limlaridan biriga aylanib bordi. Bu

yangilanishlarning boshlanishi ko‘p yillar Peterburgda ishlagan mashhur olim Leonard Eyler (1707–1783) nomi bilan bevosita bog‘liqdir. Eyler trigonometriyaning ham ramziy yozuvi, ham mazmunini tubdan takomillashtirdi. Quyida uning ushbu sohadagi ayrim ishlarini keltiramiz.

1. Eylergacha π dan katta bo‘lgan yoylar uchun trigonometrik funksiyalar deyarli umuman ko‘rib chiqilmagan edi. Faqat uning asarlaridagina trigonometrik funksiyalarning istalgan argument uchun munosabati ishlab chiqildi hamda funksiyalarning har bir chorakdagi ishoralari masalasi birinchi bor aniq bayon etildi.

2. Eyler formulalardan R - “to‘liq sinus”ni (sinus totus) chiqarib tashladi va ($R = 1$) deb qabul qildi. Bu esa trigonometrik yozuvlar va hisob-kitoblarni sezilarli darajada soddalashtirdi.

3. Trigonometrik funksiyaning argumentini nafaqat burchak yoki yoy, balki istalgan sonli miqdor sifatida tushungan Eyler trigonometriyani birinchi bo‘lib tizimli ravishda analitik yo‘l bilan bayon eta boshladi. Ungacha har bir trigonometrik teorema o‘ziga xos geometrik chizma asosida alohida isbotlanar edi. Eyler esa trigonometrik nazariyani umumiy ko‘rinishga keltirdi.

3. Trigonometrik funksiyalarni belgilashda Eyler bugungi kunda ham qo‘llaniladigan $\sin x$, $\cos x$, tgx , $ctgx$ kabi belgilarni joriy etdi. Shuningdek, ABC uchburchakning tomonlari uchun mos ravishda a , b , c kabi belgilashlarini kiritdi. Bu esa trigonometrik yozuvlarda yagona standart simbolikaning paydo bo‘lishiga asos bo‘ldi.

4. Eyler trigonometriyani trigonometrik funksiyalar haqidagi fan sifatida qaray boshladi va unga zamonaviy shakl berdi. Shunday qilib, trigonometrik aylana bilan ishlashni o‘rganayotgan, trigonometrik formulalarni chiqarayotgan, trigonometrik tenglama va tengsizliklarni yechayotgan, trigonometrik funksiyalar xossalarni o‘zlashtirayotgan har bir o‘quvchi avvalo Eyler nomini esda tutishi lozim. Ayni paytda trigonometriya mustaqil matematika bo‘limi sifatida trigonometrik funksiyalar haqidagi ta‘limot - matematik analizda o‘rganiladigan funksiyalar nazariyasining tarkibiy qismidir. Trigonometriyaning boshqa qismi - uchburchaklarni yechish esa geometriyaning bo‘limi sifatida qaraladi.

Bunday tarixiy materiallardan matematika darslarida, ayniqsa trigonometriyani o‘rganish jarayonida samarali foydalanish o‘quvchilarning o‘quv-bilish motivatsiyasini oshirish, matematik tushunchalarning mazmun-mohiyatini chuqur anglash, ularning kelib chiqishi va rivojlanish mantig‘ini tushunish hamda abstrakt bilimlarni real tarixiy kontekst bilan bog‘lash imkonini yaratadi. Natijada o‘quvchilarda fanga nisbatan barqaror qiziqish shakllanib, mantiqiy fikrlash, tahlil qilish va umumlashtirish ko‘nikmalarining rivojlanishiga ijobiy ta‘sir ko‘rsatadi. Tadqiqot natijalariga asoslanib, trigonometriyani o‘rganish jarayonida tarixiy materiallardan foydalanish samaradorligini aniqlash maqsadida tajriba-sinov ishlari tashkil etildi. Ushbu jarayonda trigonometriyaning asosiy tushunchalari va qonuniyatlarini o‘qitishda tarixiy manbalar, buyuk matematik olimlar tomonidan ilgari surilgan g‘oyalar hamda ularning amaliy qo‘llanilish jihatlarini ochib berishga asosiy e‘tibor qaratildi. Shuningdek, tarixiy materiallarni o‘quvchilarning bilim sifati, bilish faolligi va dars jarayonidagi ishtirokiga ta‘siri tizimli ravishda tahlil qilindi. Tajriba-sinov ishlari Farg‘ona davlat universiteti qoshidagi akademik litseyda olib borildi va tadqiqotga aniq fanlar yo‘nalishi bo‘yicha tahsil olayotgan 11-sinfning 52 nafar o‘quvchisi jalb etildi (1-jadvalga qarang).

1-jadval.

Tajriba-sinov jarayonida qatnashgan o‘quvchilarning o‘zlashtirish ko‘rsatkichlari

T/r	Jami o‘quvchilar soni	Tajriba guruhi				Nazorat guruhi					
		O‘quvchi soni	Yuqori	Yaxshi	Qoniqarli	Qoniqar-siz	O‘quvchi soni	Yuqori	Yaxshi	Qoniqarli	Qoniqar-siz
1	52	26	12	8	6	0	26	4	7	12	3

Tajriba-sinov ishlari yakunlariga ko‘ra, tajriba va nazorat guruhlarida o‘quvchilarning trigonometriya bo‘yicha o‘zlashtirish darajalari matematik-statistik usullar asosida tahlil qilindi. Olingan ma‘lumotlarni solishtirma tahlil qilish natijasida tajriba-sinov guruhida o‘rtacha o‘zlashtirish ko‘rsatkichi 82,41 % ni tashkil etgani, nazorat guruhida esa ushbu ko‘rsatkich 69,21 % darajasida bo‘lgani aniqlandi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, tajriba-sinov guruhining o‘zlashtirish darajasi nazorat guruhiga nisbatan 13,2 % ga yuqori bo‘lib, bu farq nisbiy ko‘rsatkichlarda 1,32 barobar ustunlikni tashkil etadi. Mazkur tafovut tajriba-sinov jarayonida qo‘llanilgan metodik yondashuvlarning, xususan, trigonometriya ta‘limida tarixiy materiallardan tizimli va maqsadli foydalanishning samaradorligini statistik jihatdan tasdiqlaydi.

Munozara. Tarixiy yondashuv matematik tushunchalarning shakllanish mantiqini ochib berish orqali abstrakt bilimlarni ongli o‘zlashtirishga xizmat qilgani kuzatildi. Shu bilan birga, natijalar tarixiy

materiallardan foydalanish dars mazmunini boyitib, o'quvchilarning mustaqil va mantiqiy fikrlashini rivojlantirishga ijobiy ta'sir ko'rsatishini ko'rsatdi. Tadqiqot natijalari trigonometriyani o'qitishda tarixiy materiallardan tizimli va maqsadli foydalanish o'quvchilarning o'zlashtirish darajasi va bilish motivatsiyasini oshirishda samarali vosita ekanligini tasdiqladi.

Xulosa. Tajriba-sinov guruhida erishilgan natijalar mazkur yondashuvni umumta'lim va ixtisoslashtirilgan ta'lim muassasalarida trigonometriya ta'limiga joriy etish maqsadga muvofiq ekanini ko'rsatadi. Olingan xulosalar matematika ta'limi metodikasini takomillashtirish hamda o'quvchilarda fan asoslarini ongli va barqaror egallashga xizmat qiluvchi pedagogik texnologiyalarni rivojlantirish uchun ilmiy-amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1. Krantz S.G. *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving.* // *Mathematical Association of America*, 2010. - 381 p.
2. Прасолов В.В. *История математики. Часть 1 (математика до конца 17 века).* - М., 2015. - 364 с.
3. Полякова Т.С. *История математики. Период математики постоянных величин. Математика Древней Греции. Краткий очерк: учебное пособие.* - Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство ЮФУ, 2018. - 102 с.
4. Cow J. *A Short History of Greek Mathematics.* - Cambridge: Cambridge University Press, 2010. — 344 p.
5. Матвиевская Г.П. *Очерки истории тригонометрии: Древняя Греция. Средневековый Восток. Позднее Средневековье.* Изд.2.2012.

KO'PHADLAR ILDIZLARI SONINI TOPISH USULLARI VA TATBIQLARI**Baxramova Mahliyo G'ayrat qizi,***Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti talabasi
bakhramovamath@mail.ru*

Annotatsiya. Ushbu maqolada Furiye-Budan va Shturm teoremasi yordamida ko'phad ildizlarini sonini topish usullari ko'rib chiqilgan. Shuningdek, sirtlaning kesishish yoki urinish haqidagi masalalar ushbu usullar yordamida yechib ko'rsatilgan. Teoremaning amaliy qo'llanilishi asosida matematik masalalarni analiz qilish va ularning yechimlarini topish metodlari taklif etilgan.

Kalit so'zlar: Furiye-Budan teoremasi, Shturm teoremasi, ko'phad ildizlari, sirtlarning kesishishi, ildizlarni ajratish.

МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛА КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Аннотация. В данной работе рассматриваются методы нахождения числа корней многочлена с использованием теорем Фурье–Будана и Штурма. Также с помощью этих методов решаются задачи пересечения или тригонометрии поверхностей. На основе практического применения теоремы предлагаются методы решения задач математического анализа и поиска их решений.

Ключевые слова: теорема Фурье–Будана, теорема Штурма, корни многочленов, пересечение поверхностей, разделение корней.

METHODS AND APPLICATIONS OF FINDING THE NUMBER OF ROOTS OF POLYNOMIALS

Abstract. This paper considers methods for finding the number of roots of a polynomial using the Fourier-Budan and Sturm theorems. Also, problems of intersection or trigonometry of surfaces are solved using these methods. Based on the practical application of the theorem, methods for mathematical analysis problems and finding their solutions are proposed.

Keywords: Fourier-Budan theorem, Sturm theorem, roots of polynomials, intersection of surfaces, separation of roots.

Kirish. Amaliyotda ko'phad ildizlarini topish doim ham oson bo'lmaydi. Shu sababli berilgan oraliqda ko'phadlar ildizlarining sonini topish ham muhim ahamiyatga egadir. Ma'lum oraliqda ko'phad ildizlarining sonini topish haqida bir qancha teoremlar mavjud bo'lib, ushbu maqola shunday teoremlardan hisoblangan Furiye-Budan va Shturm teoremlarini keltiramiz va ushbu teoremlar yordamida ko'phadlar ildizlari sonini topish haqida misollarni batafsil yechamiz. Shuningdek, ushbu keltirilgan usullar tadbiqu sifatida sirtlar kesishishi yoki urinishi haqida masalani hal qilamiz.

Furiye–Budan teoremasi algebraik tenglamalarning haqiqiy ildizlari sonini baholashga oid klassik natijalardan biridir. Teoremaning ildizlari XVIII–XIX asrlardagi algebraik analiz rivoji bilan bog'liq bo'lib, uning asosiy g'oyalari fransuz matematigi Fransua Budan [1] tomonidan 1807-yilda taklif qilingan. Budan polinom qiymatlari ketma-ketligidagi belgi o'zgarishlari orqali berilgan oraliqda polinomning maksimal haqiqiy ildizlar soniga chegaraviy baho berish usulini ishlab chiqqan. Bu yondashuv Dekart belgilar qoidasi bilan o'xshash bo'lsa-da, ancha umumlashgan va aniqroq natijalar beradi.

Keyinchalik fransuz matematik Jan-Batist Furiye [2] Budan g'oyalarini rivojlantirib, polinom derivatsiyalarining ketma-ketligini tahlil qilish orqali oraliqlardagi belgi o'zgarishlarini aniqlash uchun yanada kuchli mezonni shakllantirdi. Furiye polinomlar derivatsiyalari ketma-ketligi haqidagi tasavvurni mukammallashtirib, Budan usulining qo'llanish doirasini kengaytirdi. Shu sababli mazkur natija matematika tarixiga Furiye–Budan teoremasi sifatida kiritilgan.

Teorema XIX asr davomida algebraik tenglamalar nazariyasidagi ildizlarni topish masalalarini rivojlantirishda muhim rol o'ynadi. Uning asosiy afzalligi shundaki, u berilgan oraliqda polinomning haqiqiy ildizlari soniga aniq chegarani beradi va algebraik hamda raqamli metodlar uchun mustahkam nazariy baza yaratadi. Teorema keyinchalik Shturm [3] teoremasi bilan bog'liq bo'lib, polinom ildizlarini aniq yoki taxminiy hisoblash algoritmlarining shakllanishiga sezilarli ta'sir ko'rsatdi.

Shundan so'ng ushbu nazariya bir qancha matematiklar tomonidan rivojlantirildi [4,6]. Bugungi kunda Furrye – Budan teoremasi kompyuter algebra tizimlari, ko'phad ildizlarini lokalizatsiya qilish algoritmlari, raqamli tahlil va matematik mantiqning ba'zi yo'nalishlarida qo'llaniladigan asosiy klassik natijalardan biri hisoblanadi.

Furrye-Budan va Shturm teoremlari. Ushbu maqolada (a, b) oraliqda joylashgan ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini hisoblash yoki hech bo'lmaganda yuqoridan baholash imkonini beruvchi turli teoremlarni muhokama qilamiz. Bunday teoremlarning ifodalari ko'pincha a_0, a_1, \dots, a_n ketma-ketligidagi ishora o'zgarishlari soni tushunchasidan foydalanadi, bu yerda $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Bu son quyidagicha aniqlanadi. Ko'rib chiqilayotgan ketma-ketlikning barcha nol hadlari chiqarib tashlanadi, qolgan noldan farqli hadlari uchun qo'shni hadning turli ishoralarga ega bo'lgan juftliklar soni hisoblanadi.

Teorema (Furrye-Budan). $N(x)$ – funksiya $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ dagi ishora o'zgarishlari soni bo'lsin, bu yerda f – n -darajali ko'phad. U holda a va b oralig'ida joylashgan ($a < b$ va $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$) ko'phadning ildizlari soni $N(a) - N(b)$ dan oshmaydi. Bundan tashqari, ildizlar soni $N(a) - N(b)$ dan faqat juft songa farq qilishi mumkin.

Isbot. x nuqta $[a, b]$ kesmada a dan b tomonga harakat qilsin. $N(x)$ soni faqat $x f^{(m)}$ ko'phadining biror $m \leq n$ uchun ildizidan o'tganda o'zgaradi. Avvalo, x nuqta $f(x)$ ko'phadining 2 karrali x_0 ildizidan o'tayotgan holatini ko'rib chiqaylik. x_0 nuqta atrofida $f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x)$ ko'phadlari taxminan $(x - x_0)^r g(x_0), (x - x_0)^{r-1} r! g(x_0), \dots, r! g(x_0)$ kabi tushadi. Shunday qilib, $x < x_0$ da bu ketma-ketlikda r ta ishora o'zgarishi sodir bo'ladi, $x > x_0$ da esa bu ketma-ketlikda ishora o'zgarishi sodir bo'lmaydi (x nuqta x_0 ga yetarlicha yaqin deb hisoblanadi).

Endi faraz qilaylik, x nuqta $f^{(m)}$ ko'phadining r -karrali x_0 ildizidan o'tmoqda, lekin $f^{(m-1)}$ ko'phadining ildizi emas (bunda x_0 f ning ildizi bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin) x_0 dan o'tganda $f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x), \dots, f^{(m+r)}(x)$ ketma-ketligidagi ishora o'zgarishlari soni manfiy bo'lmagan juft songa o'zgarishini isbotlash talab etiladi. x_0 nuqta atrofida bu ko'phadlar taxminan $F(x_0), (x - x_0)^r G(x_0), (x - x_0)^{r-1} r! G(x_0), \dots, r! G(x_0)$ kabi tushadi. Agar $F(x_0)$ ni chiqarib tashlasak, qolgan ketma-ketlikda $x < x_0$ da aniq r ta ishora o'zgarishi sodir bo'ladi, $x > x_0$ da esa ishora o'zgarishi sodir bo'lmaydi. Dastlabki ikkita had, $F(x_0)$ va $(x - x_0)^r G(x_0)$ ga kelsak, r juft bo'lganda, $x < x_0$ va $x > x_0$ dagi ishora o'zgarishlari soni bir xil bo'ladi, r toq bo'lganda esa, $x < x_0$ dagi ishora o'zgarishlari soni $x > x_0$ dagiga qaraganda 1 ta ko'proq yoki 1 ta kamroq bo'ladi. ($F(x_0)$ va $G(x_0)$ ning ishorasi biz xil yoki har xil ekanligiga qarab). Xulosa qilib, juft r da ishora o'zgarishlari sonining o'zgarishi r ga teng, toq r da esa ishora o'zgarishlari soni $r \pm 1$ ga teng. Ikkala o'zgarishda ham bu o'zgarishlar juft va manfiy emas.

Natija. (Dekart qoidasi). $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ko'phadining musbat ildizlari soni a_0, a_1, \dots, a_n ketma-ketligidagi ishora o'zgarishlari sonidan oshmaydi.

Isloh. Yakobi shuni ko'rsatadiki, Dekart qoidasidan α va β oralig'ida joylashgan ildizlar sonini baholash uchun ham foydalanish mumkin. Buning uchun $y = \frac{x-\alpha}{\beta-x}$ almashtirishni bajarish kerak, ya'ni

$x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}$ va quyidagi ko'phadni ko'rib chiqish kerak:

$$(1 + y)^n f\left(\frac{\alpha + \beta y}{1 + y}\right) = b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n$$

Ushbu ko'phadga Dekart qoidasini qo'llash, α va β oralig'ida joylashgan ildizlar soni uchun baho beradi. Darhaqiqat, $x \alpha$ dan β gacha o'zgarganda, y 0 dan ∞ gacha o'zgaradi.

Endi $f(x)$ va $f_1(x) = f'(x)$ ko'phadlarni ko'rib chiqamiz. Yevklid algoritmi yordamida ularning eng katta umumiy bo'luvchisini topamiz.

$$f = q_1 f_1 - f_2,$$

$$f_1 = q_2 f_2 - f_3,$$

.

.

.

$$f_{n-2} = q_{n-1}f_{n-1} - f_n,$$

$$f_{n-1} = q_n f_n.$$

Ushbu $f, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n$ ketma-ketlik Shturm ketma-ketligi deyildi.

Teorema (Shturm). Agar $\omega(x)$ – ketma ketlikdagi $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ ko‘phadlarning ishorasi o‘zgarishlari soni bo‘lsa, unda f ko‘phadining haqiqiy ildizlari (ko‘paytmalik hisobga olinmagan holda) a va b nuqtalar orasida (bu yerda $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0, a < b$) aniq quyidagiga teng bo‘ladi:

$$N = \omega(a) - \omega(b).$$

Isbot. Avvalo f ko‘phadining takroriy ildizlari yo‘q holni ko‘rib chiqamiz (ya‘ni f va f' umumiy ildizga ega emas). Endi tasavvur qilaylik, f bir ildiz orqali o‘tganda masalan $x = a$. Bu holda ketma-ketlikdagi ishora o‘zgarishlari soni qanday o‘zgaradi, shuni tekshiramiz. Ko‘rib chiqilayotgan holda, qo‘shni ko‘phadlar umumiy ildizga ega emas, ya‘ni agar $f_r(a) = 0$, u holda $f_{r+1}(a) \neq 0$. Shuningdek $f_{r-1} = q_{r-1}f_r - f_{r+1}$ dan $f_{r-1}(a) = -f_{r+1}(a)$ kelib chiqadi.

Demak, $f_{r-1}(a) = -f_{r+1}(a)$. Shuning uchun ketma-ketlikdagi ishora o‘zgarishlari soni $f_{r-1}(a), \varepsilon, f_{r+1}(a)$ uchun $\varepsilon > 0$ hamda $\varepsilon < 0$ holatlarda bir xil, ya‘ni 2 taga teng bo‘ladi. Keyin a dan b gacha harakat qilamiz. Agar biz f ko‘phadining ildizi x_0 dan o‘tsak, u holda $f(x)$ va $f'(x)$ qiymatlari dastlab qarama-qarshi ishorali bo‘ladi. Shunday qilib, Shturm ketma-ketligidagi ishora o‘zgarishlari soni 1 taga kamayadi. Boshqa barcha o‘zgarishlar, ilgari ko‘rsatilganidek, x_0 orqali o‘tganda o‘zgarishsiz qoladi. Endi f ko‘phadi x_0 nuqtada ko‘paytmaligi m bo‘lgan ildizga ega holni ko‘raylik. Bu holda f va f_1 (ya‘ni $f'(x)$) da umumiy bo‘luvchi $(x - x_0)^{m-1}$ mavjud. Ko‘phadlarni f_1, f_2, \dots, f_r yangi ketma-ketlik $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ hosil bo‘ladi. Agar $\varphi(x) = (x - x_0)^m \varphi(x)$, u holda φ ning ildizi takroriy bo‘lmagan bo‘ladi. Demak $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ ketma-ketligidagi ishora o‘zgarishlari soni 1 taga ortadi. Ammo berilgan x uchun f, f_1, \dots, f_r ketma-ketligi $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ dan faqat doimiy sonlar bilan farqlanadi. Shuning uchun ishora o‘zgarishlar soni ikkala ketma-ketlikda bir xil bo‘ladi.

Misollar.

Quyida keltirilgan teoremlarga doir misollarni ko‘rib chiqamiz.

1-misol. Ushbu $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ funksiyaning $[0,3]$ kesmada ko‘pi bilan nechta kritik nuqtalari soni mavjudligini aniqlang.

Yechimi. 1) Ma‘lumki funksiyaning lokal ekstremumga shubhali nuqtalari ushbu tenglikdan topiladi:
 $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 4 = 0$.

2) Endi $f'(x)$ ko‘phadning ildizlari sonini topish uchun Furye-Budan teoremasidan foydalanamiz:

a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4x + 4, \quad f''(x) = 12x^2 - 24x + 4, \quad f'''(x) = 24x - 24,$
 $f^{(4)}(x) = 24.$

b) $x = 0$ da ishoralar o‘zgarishini aniqlaymiz:

$$f'(0) = 4(0) - 12(0) + 4(0) + 4 = 4,$$

$$f''(0) = 12(0) - 24(0) + 4 = 4,$$

$$f'''(0) = 24(0) - 24 = -24,$$

$$f^{(4)}(0) = 24.$$

Demak, ishora o‘zgarishlari: $+, +, -, +$. Bundan ko‘rinadiki, $N(0) = 2$.

c) $x = 3$ da ishora o‘zgarishlarini aniqlaymiz:

$$f'(3) = 4(3)^3 - 12(3)^2 + 4(3) + 4 = 16$$

$$f''(3) = 12(3)^2 - 24(3) + 4 = 40$$

$$f'''(3) = 24(3) - 24 = 48$$

$$f^{(4)}(3) = 24$$

Ishora o‘zgarishlari: $+, +, +, +$. $N(3) = 0$.

Teoremaning xulosasiga asosan, $f(x)$ funksiyaning $[0,3]$ kesmadagi kritik nuqtalari soni ko‘pi bilan $N(0) - N(3) = 2$ ta bo‘lar ekan.

2-misol. Ushbu $\begin{cases} x^2y + xy^2 - 3x - 2y + 1 = 0 \\ \frac{x^2+y^2}{x+y} - 2xy + x - y = 0 \end{cases}$ sistemaning $[\frac{1}{2}, 2]$ kesmadagi haqiqiy yechimlari

sonini toping.

Yechimi. 1) Dastlab sistemadagi ikkinchi tenglamani soddalashtirib olamiz:

$$\frac{(x+y)^2 - 2xy}{x+y} - 2xy + x - y = 0,$$

$$(x+y) - \frac{2xy}{x+y} - 2xy + x - y = 0, \quad x - \frac{xy}{x+y} - xy = 0, \quad x \neq 0,$$

$$1 - \frac{y}{x+y} - y = 0, \quad x = \frac{y^2}{1-y}.$$

Topilgan x ni birinchi tenglamaga qo'yamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(y) = y^4 + y^3 + 2y^2 - 4y + 1.$$

2) Endi $f(y)$ ko'phadning ildizlari sonini topish uchun Furye-Budan teoremasidan foydalanamiz:

a)

$$f(y) = y^4 + y^3 + 2y^2 - 4y + 1,$$

$$f'(y) = 4y^3 + 3y^2 + 4y - 4,$$

$$f''(y) = 12y^2 + 6y + 4,$$

$$f'''(y) = 24y + 6,$$

$$f^{(4)}(y) = 24.$$

b) $y = \frac{1}{2}$ da ishora o'zgarishini aniqlaymiz:

$$f(0,5) = (0,5)^4 + (0,5)^3 + 2(0,5)^2 - 4(0,5) + 1 = -0,3125,$$

$$f'(0,5) = 4(0,5)^3 + 3(0,5)^2 + 4(0,5) - 4 = -0,75,$$

$$f''(0,5) = 12(0,5)^2 + 6(0,5) + 4 = 10,$$

$$f'''(0,5) = 24(0,5) + 6 = 18,$$

$$f^{(4)}(0,5) = 24.$$

Demak, ishora o'zgarishlari: $- , - , + , + , +$. Bundan ko'rinadiki, $N(0,5) = 1$.

c) $y = 2$ da ishora o'zgarishini aniqlaymiz:

$$f(2) = (2)^4 + (2)^3 + 2(2)^2 - 4(2) + 1 = 25,$$

$$f'(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 + 4(2) - 4 = 48,$$

$$f''(2) = 12(2)^2 + 6(2) + 4 = 64,$$

$$f'''(2) = 24(2) + 6 = 54,$$

$$f^{(4)}(2) = 24.$$

Ishora o'zgarishlari: $+ , + , + , + , +$. $N(2) = 0$.

Teoremaning xulosasidan $[\frac{1}{2}, 2]$ kesmada sistemaning ko'pi bilan $N(0,5) - N(2) = 1$ ta ildizi bor ekanligi kelib chiqadi.

Quyida Furye-Budan va Shturm teoremlarining amaliy tadbiri sifatida ikki sirt kesishish nuqtalari sonini topish masalalarini qaraymiz.

3-misol. Quyidagi sirtlar $[1,4]$ kesmada eng ko'pi bilan nechta nuqtada kesishishini toping:

$$z = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 5,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{(z-2)^2}{16} = 1.$$

Yechimi. 1) Masalani yechish uchun dastlab, ushbu sirtlar tenglamasida z o'zgaruvchini yo'qotamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 7)^2}{16} = 1.$$

$y = 0$ deb olamiz va Oxz o'qi bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(2x^2 - 4x - 7)^2}{16} = 1,$$

$$4x^2 - (2x^2 - 4x - 7)^2 = 16,$$

$$(2x^2 - 4x - 7)^2 = 4x^4 - 16x^3 - 12x^2 + 56x = 49.$$

$$f(x) = -4x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 56x - 65.$$

2) Endi $f(x)$ ko'phadning ildizlari sonini topish uchun Furiye-Budan teoremasidan foydalanamiz:

a)

$$f(x) = -4x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 56x - 65,$$

$$f'(x) = -16x^3 + 48x^2 + 32x - 56,$$

$$f''(x) = -48x^2 + 96x + 32,$$

$$f'''(x) = -96x + 96,$$

$$f^{(4)}(x) = -96.$$

b) $x = 1$ da ishora o'zgarishlarini aniqlaymiz:

$$f(1) = -4(1) + 16(1) + 16(1) - 56(1) - 65 = -93,$$

$$f'(1) = -16(1) + 48(1) + 32(1) - 56 = 8,$$

$$f''(1) = -48(1) + 96(1) + 32 = 80,$$

$$f'''(1) = -96(1) + 96 = 0,$$

$$f^{(4)}(1) = -96.$$

Damak ishoralar o'zgarishi: $- , + , + , 0 , -$. Bundan ko'rinadiki, $N(1) = 2$.

c) $x = 4$ da ishoralar o'zgarishini aniqlaymiz:

$$f(4) = -4(4)^4 + 16(4)^3 + 16(4)^2 - 56(4) - 65 = -33,$$

$$f'(4) = -16(4)^3 + 48(4)^2 + 32(4) - 56 = -148,$$

$$f''(4) = -48(4)^2 + 96(4) + 32 = -352,$$

$$f'''(4) = -96(4) + 96 = -288,$$

$$f^{(4)}(4) = -96.$$

Ishora o'zgarishlari: $- , - , - , - , -$. $N(4) = 0$.

Teoremaning xulosasidan yuqoridagi sirtlar OXZ tekisligidagi berilgan oraliqda ko'pi bilan $N(1) - N(4) = 2$ ta nuqtada kesishar ekan.

4-misol. Ushbu $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ko'phadning $[0,2]$ oraliqdagi ildizlar sonini toping.

Yechimi. 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ko'phadning berilgan oraliqdagi ildizlarini topish uchun quyidagi almashtirishlarni olamiz:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{1 + y}, \alpha = 0, \beta = 2, \Rightarrow x = \frac{2y}{1 + y}.$$

2) Almashtirish natijasida hosil bo'lgan ko'phad:

$$g(y) = (1 + y)^3 f\left(\frac{2y}{1 + y}\right),$$

$$f\left(\frac{2y}{1 + y}\right) = \left(\frac{2y}{1 + y}\right)^3 - 2\left(\frac{2y}{1 + y}\right)^2 - \left(\frac{2y}{1 + y}\right) + 2,$$

$$f\left(\frac{2y}{1 + y}\right) = \frac{8y^3}{(1 + y)^3} - \frac{8y^2}{(1 + y)^2} - \frac{2y}{1 + y} + 2,$$

$$g(y) = (1 + y)^3 \frac{8y^3}{(1 + y)^3} - (1 + y)^3 \frac{8y^2}{(1 + y)^2} - (1 + y)^3 \frac{2y}{1 + y} + (1 + y)^3 2,$$

$$g(y) = -6y^2 + 4y + 2.$$

Ko'phadning koeffitsiyentlar ketma-ketligining ishora almashishlar soni: $- , + , +$.

Bundan kelib chiqadiki, $N = 1$.

Demak, yuqoridagi $N = 1$ ta yechim $x = 2$ nuqtadagi, ya'ni chegaradagi yechim, ammo Yakobi usuli chegaralarda ildiz bo'lmasligini talab qilganligi uchun $f(x)$ ko'phadning $[0,2]$ kesmada ildizi yo'q deb olamiz.

5-misol. Ushbu $p(x) = x^4 + (3y - 2z)x^3 - (z^2y^2)x^2 + (4zy - 1)x - y^2$ ko'phadning musbat ildizlari soni ko'pi bilan nechta ekanligini aniqlang.

Yechimi. 1) Faraz qilaylik: $z > 0, y > 0$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3y - 2z, \\ a_2 &= -z^2y^2, \\ a_3 &= 4zy - 1, \\ a_4 &= -y^2. \end{aligned}$$

2) Dekart qoidasiga asosan yuqoridagi ko'phadning musbat ildizlari sonini ko'rsatuvchi koeffitsiyentlari ishoralari orqali topamiz:

a) $3y > 2z$ va $4yz > 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3y - 2z, \\ a_2 &= -z^2y^2, \\ a_3 &= 4yz - 1, \\ a_4 &= -y^2. \end{aligned}$$

Ishoralar almashinuvi: +, +, -, +, -. Bundan ko'rinadiki, musbat ildizlar soni ko'pi bilan 3 ta.

b) $3y < 2z$ va $4yz > 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3y - 2z, \\ a_2 &= -z^2y^2, \\ a_3 &= 4yz - 1, \\ a_4 &= -y^2. \end{aligned}$$

Ishoralar almashinuvi: +, -, -, +, -. Bundan ko'rinadiki, musbat ildizlar soni ko'pi bilan 3 ta.

c) $3y > 2z$ va $4yz < 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3y - 2z, \\ a_2 &= -z^2y^2, \\ a_3 &= 4yz - 1, \\ a_4 &= -y^2. \end{aligned}$$

Ishoralar almashinuvi: +, +, -, -, -. Bundan ko'rinadiki, musbat ildizlar soni ko'pi bilan 1 ta.

d) $3y < 2z$ va $4yz < 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 3y - 2z, \\ a_2 &= -z^2y^2, \\ a_3 &= 4yz - 1, \\ a_4 &= -y^2. \end{aligned}$$

Ishoralar almashinuvi: +, -, -, -, -. Bundan ko'rinadiki, musbat ildizlar soni ko'pi bilan 1 ta.

Demak, yuqoridagi ko'phadning musbat ildizlari soni y va z ga bog'liq o'zgaradi.

6-misol. Quyidagi sirtlarning $y = 2$ tekislikdagi kesimda $[-5,5]$ kesmadagi kesishish nuqtalar sonini toping.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} &= 1, \\ z &= 2x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 2y + 9. \end{aligned}$$

Yechimi. 1) Sirtlarning $y = 2$ dagi kesimini olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} &= 1, y = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0, \\ z^2 &= \frac{16}{9}x^2, z = \frac{4}{3}x \text{ yoki } z = -\frac{4}{3}x, \end{aligned}$$

$$z = 2x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 2y + 9, y = 2 \Rightarrow z = 2x^2 - 10x + 17.$$

2) Kesishish tenglamalarini tuzamiz:

2.1. $z = \frac{4}{3}x$:

$$\frac{4}{3}x = 2x^2 - 10x + 17,$$

$$4x = 6x^2 - 30x + 51,$$

$$6x^2 - 34x + 51 = 0.$$

2.2. $z = -\frac{4}{3}x$:

$$-\frac{4}{3}x = 2x^2 - 10x + 17,$$

$$-4x = 6x^2 - 30x + 51.$$

$$6x^2 - 26x + 51 = 0.$$

3) Yuqoridagi sirtlarning kesishish nuqtalarini topish uchun Shturm teoremasidan foydalanamiz:

3.1.a)

$$p_0(x) = 6x^2 - 34x + 51,$$

$$p_1(x) = p'(x) = 12x - 34,$$

$$p_0 \text{ ni } p_1 \text{ ga bo'lamiz: } 6x^2 - 34x + 51 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{17}{6}\right)(12x - 34) + \frac{50}{3},$$

Demak, $p_2 = -\frac{50}{3}$.

Shturm zanjiri:

$$p_0 = 6x^2 - 34x + 51,$$

$$p_1 = 12x - 34, \quad p_2 = -\frac{50}{3}.$$

b) $x = -5$ da ishoralar almashinuvini topamiz:

$$p_0(-5) = 6(25) - 34(-5) + 51 = 371,$$

$$p_1(-5) = 12(-5) - 34 = -94,$$

$$p_2(-5) = -\frac{50}{3}.$$

Demak ishoralar almashinuvi: +, -, -. Bundan kelib chiqadiki, $V(-5) = 1$.

c) $x = 5$ da ishoralar almashinuvini topamiz:

$$p_0(5) = 6(25) - 34(5) + 51 = 31,$$

$$p_1(5) = 12(5) - 34 = 26,$$

$$p_2(5) = -\frac{50}{3}.$$

Ishroralar almashinuvi: +, +, -. Bundan kelib chiqadiki, $V(5) = 1$.

$$V(-5) - V(5) = 0.$$

3.2.a)

$$p_0(x) = 6x^2 - 26x + 51,$$

$$p_1(x) = 12x - 26,$$

$$p_0 \text{ ni } p_1 \text{ ga bo'lamiz: } 6x^2 - 26x + 51 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{13}{6}\right)(12x - 26) + \frac{110}{3}.$$

Demak, $p_2 = -\frac{110}{3}$.

Shturm zanjiri:

$$p_0 = 6x^2 - 26x + 51, \quad p_1 = 12x - 26, \quad p_2 = -\frac{110}{3}.$$

b) $x = -5$ da ishoralar almashinuvini topamiz:

$$p_0(-5) = 6(25) - 26(x) + 51 = 331, \quad p_1(-5) = 12(-5) - 26 = -86, \quad p_2 = -\frac{110}{3}.$$

Demak ishoralar almashinuvi: +, -, +. Bundan kelib chiqadiki, $V(-5) = 1$.

c) $x = 5$ da ishora almashinuvini topamiz:

$$p_0(5) = 6(25) - 26(5) + 51 = 71,$$

$$p_1(5) = 12(5) - 26 = 34,$$

$$p_2 = -\frac{110}{3}.$$

Ishoralar almashinuvi: +, +, -. Bundan kelib chiqadiki, $V(5) = 1$.

$$V(-5) - V(5) = 0.$$

Teoremaning xulosasidan sirtlar $y = 2$ kesimdagi $[-5,5]$ oraliqda o'zaro kesishmasligi ma'lum bo'ldi.

Xulosa. Mazkur maqolada amaliy jihatdan muhim bo'lgan berilgan oraliqda ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini aniqlash masalasi yoritildi. Bu maqsadda klassik teoremalardan hisoblangan Furrye – Budan va Shturm teoremlari ko'rib chiqildi, hamda ular asosida ko'phad ildizlarining sonini aniqlash bo'yicha misollar batafsil yechib berildi. Ushbu teoremlar ko'phadlarning ildizlarini to'g'ridan-to'g'ri topish murakkab bo'lgan hollarda ishonchli nazariy va amaliy yondashuv sifatida o'z qiymatini saqlaydi.

Shuningdek, teoremlar qo'llanishining amaliy ko'rinishi sifatida sirtlarning kesishishi yoki urinishi bilan bog'liq masalalar ham tahlil qilindi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, Furrye–Budan va Shturm teoremlariga tayangan holda ko'phad ildizlari sonini aniqlash nafaqat nazariy jihatdan, balki geometrik va amaliy masalalarni yechishda ham samarali vosita bo'lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. D. Budan François. *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*. Paris: Courcier, 1807.
2. J.B. Joseph Fourier. *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*. // *Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris*, 1(1820), 156–165.
3. J.Ch. Sturm. *Mémoire sur la résolution des équations numériques*. // *Bulletin des Sciences de Férussac*. 11(1829), 419–425.
4. J.J. Sylvester. *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure*. // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 143 (1853), 407–548.
5. T.J. Miller. *Sturm's theorem for multiple roots*. // *National Mathematics Magazine*. 15:8 (1941), 391–394.
6. L.E. Heindel. *Integer arithmetic algorithms for polynomial real zero determination*. // *Proceedings of the second ACM symposium on Symbolic and algebraic manipulation*. 1(1971), 415.

**CHEKLI MAYDONDA KELITIRILMAYDIGAN KO‘PHADLARNI TEKSHIRISHDA
BATLER KRITERIYASIDAN FOYDALANISH**

*Farxodova Gulnoza Raxmon qizi,
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Differensial tenglamalar kafedrasida talabasi
farxodovagulnoza01@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada chekli maydonda berilgan ko‘phadlarni keltirilmaydigan ko‘phad ekanligini isbotlash haqidagi Batler kriteriyasi ko‘rib chiqilgan. Batler kriteriyasining batafsil isboti va misollar asosida ko‘phadlarning keltirilmaydigan ko‘phad ekanligi ko‘rsatilgan.

Kalit so‘zlar: ko‘phadlar, chekli maydon, Galua maydoni, keltiriladigan ko‘phadlar, keltirilmaydigan ko‘phadlar, Batler kriteriyasi.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЯ БАТЛЕРА ДЛЯ ПРОВЕРКИ НЕПРИВОДИМЫХ
МНОГОЧЛЕНОВ В КОНЕЧНОМ ПОЛЕ**

Аннотация. В статье обсуждается критерий Батлера, доказывающий неприводимость многочленов, заданных в конечном поле. Подробное доказательство критерия Батлера и примеры показывают, что многочлены неприводимы.

Ключевые слова: многочлены, конечное поле, поле Галуа, приводимые многочлены, неприводимые многочлены, критерий Батлера.

**USE OF THE BUTLER CRITERION IN EXAMINING IRREDUCIBLE POLYNOMIALS IN
A FINITE FIELD**

Abstract. This article discusses the Butler criterion, which proves the irreducibility of polynomials defined in a finite field. A detailed proof of the Butler criterion and examples demonstrate that the polynomials are irreducible.

Keywords: polynomials, finite field, Galois field, reducible polynomials, irreducible polynomials, Butler criterion.

Kirish. Keltirilmaydigan ko‘phadlarni aniqlash masalasi algebra va sonlar nazariyasining klassik yo‘nalishlaridan biridir. Keltirilmaslikni tekshirishga oid bir qator yetarli kriteriyalar mavjud bo‘lib, ularning eng qadimgisi va eng ko‘p qo‘llanadiganlaridan biri — Eyzenshteyn kriteriyasi hisoblanadi [1]. 1850-yilda Eyzenshteyn tomonidan isbotlangan ushbu kriteriy koeffitsiyentlar tub son bo‘yicha maxsus bo‘linuvchanlik shartlariga asoslanadi va ko‘plab algebraik konstruksiyalar uchun sodda hamda samarali vosita bo‘lib qolmoqda. Keyinchalik ko‘phadlar keltirilmaydiganligini tekshirishning boshqa yo‘llari ham ishlab chiqilgan. Shulardan biri — Perron kriteriyasi [2], u ko‘phadning bosh koeffitsiyentidan keyingi koeffitsiyentlar modulining kattaligi orqali keltirilmaslikni aniqlaydi. Perronning bu natijasi yuqori darajali butun koeffitsiyentli ko‘phadlar uchun juda qulay bo‘lib, ko‘plab amaliy misollarda qo‘llaniladi. Shuningdek, Kohn kriteriyasi [3] ko‘phad koeffitsiyentlarini biror tub sonning raqamlar ketma-ketligi ko‘rinishi orqali keltirilmaslikni ta‘minlaydi. Bu natija Kohn tomonidan 1962-yilda taklif qilingan bo‘lib, sonlarning raqamli strukturasi tayanadigan o‘ziga xos yondashuv sifatida alohida o‘rin tutadi. Kengroq va chuqurroq umumlashmalar esa Nyuton poligoni (yoki Dumas–Nyuton usuli) orqali beriladi. Bu yondashuv koeffitsiyentlarning p davriy qiymatlariga asoslanadi va Nyuton poligonining geometriyasi orqali polinom keltirilmaydiganligini aniqlashga imkon beradi. Ushbu metodning zamonaviy talqinlari lokal maydonlarda, valuatsiyalangan halqalarda va umumiy integral sohalarda ishlatiladi [4,5]. Zamonaviy tadqiqotlar Eyzenshteyn usulining umumlashmalarini, kombinatsiyalangan kriteriyalar va geometrik yondashuvlarni birlashtiruvchi yangi natijalarni ham rivojlantirmoqda [6,7]. Shu sababli, keltirilmaydigan ko‘phadlar nazariyasi hozirgacha faol rivojlanayotgan matematik yo‘nalishlardan biridir.

Ushbu maqolada yuqoridagi usullardan biri hisoblangan Batler kriteriyasi isboti bilan keltiriladi va ushbu usul yordamida ko‘phadlarni keltirilmaslikka tekshirish misollar yordamida yoritiladi.

Fundamental tushunchalar va Batler kriteriyasi. Dastlab maqolaning asosiy obyekti hisoblangan keltirilmaydigan ko‘phadlar tushunchasini keltiramiz.

1-ta'rif. Agar n darajali $f(x)$ ko'phad P maydon ustida (ya'ni $P[x]$ halqada) darajalari n dan kichik bo'lgan ikkita ko'paytuvchining ko'paytmasi shaklida yozilishi mumkin bo'lsa, ya'ni quyidagi

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ ko'phad P maydonda keltiriladigan deyiladi.

Agar $f(x)$ ni (1) ko'rinishdagi istalgan yoyilmasida ko'paytuvchilardan biri 0 darajali, ikkinchisi esa n darajali ko'phad bo'lsa, $f(x)$ ko'phad P maydonda keltirilmaydigan deyiladi.

Ko'phadning keltiriladigan yoki keltirilmaydiganligi haqida berilgan P maydonga nisbatangina aytish mumkin, chunki bu maydonda keltirilmaydigan ko'phad uning biror \bar{P} kengaytmasida keltiriladigan bo'lib qolishi mumkin. Masalan, butun koeffitsiyentli $x^2 + 1$ ko'phad butun sonlar maydonida ham, ratsional va haqiqiy sonlar maydonida ham keltirilmaydi, ammo \mathbb{Z}_2 (2 modul bo'yicha butun sonlar maydoni) chekli maydonda keltiriladi.

Shuni alohida ta'kidlash lozimki, chekli maydonlar keltirilmaydigan ko'phadlar nazariyasida muhim o'rin tutadi.

Har qanday chekli maydon Galua maydoni deyiladi va $GF(q)$ kabi belgilanadi, bunda q maydon elementlari soni. ($q = p^t, p$ - tub son, $t \in \mathbb{N}$).

1-teorema ([8]). Agar $P = GF(q)$ bo'lsa, u holda har qanday $n \in \mathbb{N}$ uchun P da n -darajali $f(x) \in P[x]$ keltirilmaydigan ko'phad mavjud bo'ladi.

Demak, chekli maydonlarda ham keltirilmaydigan ko'phadlarni aniqlash masalasini qarash mumkin. 1954-yilda amerikalik matematik M.Batler yuqoridagi masala hal qilingan, keyinchalik E.Berlekemp, N.Zirler va boshqalar tomonidan yanada kengaytirilib, qo'shimcha ma'lumotlar bilan boyitilgan.

Biz quyida Batler kriteriyasi va uning isboti bilan tanishamiz, so'ngra bu kriteriyadan foydalanib, ko'phadlarning keltiriladigan yoki keltirilmaydigan ekanligini aniqlashga doir misollar ko'ramiz..

2-teorema (Batler kriteriyasi). $f(x) \in P[x]$ darajasi $n > 0$ bo'lgan ko'phad chekli $P = GF(p^t)$ maydonda keltirilmaydigan bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

a) $EKUB(f, f') = 1$;

b) Ushbu

$$z^{p^t} - z = 0 \quad (2)$$

tenglama $K = P[x]/f(x)$ halqada p^t ta yechimga ega.

Isbot. (2) tenglama K halqada kamida p^t ta yechimga ega Agar K maydon tashkil qilsa, unda p^t ta yechimga ega. Bu to'plamning elementlari quyidagicha bo'ladi:

$$M = \{[a]_{f(x)} \mid a \in P\}.$$

M to'plamning har bir elementi (2) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$[a]_{f(x)}^{p^t} = [a^{p^t}] = [a]_{f(x)}.$$

Shuningdek, M to'plamning elementlari ichida o'zaro tenglari yo'q:

$$\forall a_1, a_2 \in P \text{ uchun } [a_1]_{f(x)} \neq [a_2]_{f(x)}.$$

Buni teskarisini faraz qilish usuli orqali isbotlaymiz. $a_1, a_2 \in P$ bo'lganligi uchun $a_1 \neq a_2$, faraz qilaylik, $[a_1]_{f(x)} = [a_2]_{f(x)}$ bo'lsin. U holda $[a_2 - a_1]_{f(x)} = [0]_{f(x)}$. Bu esa shartga zid. Demak, $[a_1]_{f(x)} \neq [a_2]_{f(x)}$.

Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ ko'phad P maydonda keltirilmaydigan ko'phad bo'lsin. U holda a) va b) shartlarning bajarilishini ko'rsatamiz.

$f(x)$ keltirilmaydigan ko'phad bo'lganligi uchun u P da karrali ko'paytuvchilarga ega emas. Ma'lumki, $f(x)$ ko'phad o'zining hosilasi bilan o'zaro tub bo'lganda va faqat shundagina karrali ko'paytuvchilarga ega bo'lmaydi. Demak, teoremaning 1-sharti bajariladi.

Endi 2-shartning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $f(x)$ keltirilmaydigan ko'phad bo'lganligi uchun $K = P[x]/f(x)$ maydon bo'ladi. Bundan (2) tenglama p^t ta yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarililigi. Endi 1) va 2) shartlar bajarilishidan, $f(x)$ ning keltirilmaydigan ko'phad ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun teskarisini faraz qilib, ya'ni $f(x)$ keltiriladigan ko'phad bo'lsin deb olamiz.

$f(x)$ ko'phad P maydonda darajasi 1 dan katta bo'lgan keltiriladigan (ko'paytuvchilarga ajraladigan) ko'phad bo'lsin, ya'ni:

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Bu yerda $\varphi(x), \psi(x) \quad 1 \leq \deg \varphi(x) < n, 1 \leq \deg \psi(x) < n$ munosabatni qanoatlantiruvchi keltirilmaydigan ko'phadlar. Teoremaning 1-sharti bajarilganligi uchun $EKUB(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ bo'ladi. Demak, $a(x)\varphi(x) + b(x)\psi(x) = 1$ munosabat o'rinli. Bunda $\deg a(x) < \deg \psi(x), \deg b(x) < \deg \varphi(x)$. Yuqoridagi tenglikdan foydalansak, K halqada quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$[a(x)\varphi(x)]_{f(x)} = [1 - b(x)\psi(x)]_{f(x)},$$

$$\begin{aligned} [a(x)\varphi(x)]_{f(x)}^2 &= [a(x)\varphi(x)]_{f(x)} \cdot [1 - b(x)\psi(x)]_{f(x)} = [a(x)\varphi(x)]_{f(x)} - [a(x)b(x)\varphi(x)\psi(x)]_{f(x)} = \\ &= [a(x)\varphi(x)]_{f(x)} - [a(x)b(x)f(x)]_{f(x)} = [a(x)\varphi(x)]_{f(x)}. \end{aligned}$$

Xuddi shunday usul bilan hisoblash natijasida $[a(x)\varphi(x)]_{f(x)}^{p^t} = [a(x)\varphi(x)]_{f(x)}$ tenglikni hosil qilamiz, bu esa $[a(x)\varphi(x)]_{f(x)}$ ning (2) tenglama uchun yechim bo'lishini anglatadi. Ammo bu yechim $0 < \deg(a(x)\varphi(x)) < \deg f(x)$ bo'lganligi uchun M to'plamga qarashli emas. Bu ziddiyat $f(x)$ ni keltiriladigan ko'phad deb olgan farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $f(x)$ keltirilmaydigan ko'phad ekan.

Teorema isbotlandi.

3. Misollar

Teoremani yaxshiroq tushunib olish maqsadida quyidagi misolni qaraylik.

1-misol. $P = GF(2) = \{0,1\}$ maydonda $f(x) = x^2 + x + 1$ ko'phad keltiriladigan yoki keltirilmaydigan ko'phad ekanligini aniqlang.

Yechimi. Dastlab, teoremaning 1-shartini tekshiramiz. Buning uchun $f'(x)$ ni hisoblaymiz, bunda P maydon ustida qaralotganigini inobatga olsak,

$$f'(x) = 1.$$

Endi o'zi va hosilasining eng katta umumiy bo'luvchisini topamiz:

$$EKUB(x^2 + x + 1, 1) = 1.$$

Demak, 1-shart o'rinli ekan.

Endi teoremaning 2-shartini tekshiramiz. Agar $z^2 - z = 0$ tenglama K halqada 2 ta yechimga ega bo'lsa, u holda $P = GF(2)$ maydonda berilgan ko'phad keltirilmaydigandir.

K halqani tuzib olamiz:

$$K = GF(2)[x]/(x^2 + x + 1), \quad K = \{[0], [1], [x], [x + 1]\}.$$

(2) tenglamani $p = 2, t = 1$ hol uchun yozamiz:

$$z^2 - z = 0.$$

K halqadagi har bir elementni yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz:

$$[0]_{f(x)}^2 - [0]_{f(x)} = [0^2]_{f(x)} - [0]_{f(x)} = 0,$$

$$[1]_{f(x)}^2 - [1]_{f(x)} = [1^2]_{f(x)} - [1]_{f(x)} = 0,$$

$$[x]_{f(x)}^2 - [x]_{f(x)} = [x^2]_{f(x)} - [x]_{f(x)} = x + 1 - x = 1 \neq 0,$$

$$[x + 1]_{f(x)}^2 - [x + 1]_{f(x)} = [(x + 1)^2]_{f(x)} - [x + 1]_{f(x)} = x - (x + 1) = 1 \neq 0.$$

K halqada tenglamaning yechimlar soni 2 ta ekan. Bundan kelib chiqadiki, $f(x) = x^2 + x + 1$ $P = GF(2)$ da keltirilmaydigan ko'phad.

Yuqoridagi usuldan foydalanib misollar ishlash $f(x)$ ning darajasi yuqori va berilgan maydonning elementlari soni ko'p bo'lgan hollarda qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun quyida Batler kriteriyasidan amaliyotda foydalanishga qulay bo'lgan usulini ko'rib chiqamiz.

K halqaning ixtiyoriy elementini ushbu

$$[k(x)]_{f(x)} = [k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_{n-1}x^{n-1}]_{f(x)}, k_i \in GF(p^t), i = \overline{0, n-1}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Chunki, $\deg f(x) = n$, qoldiqli bo'lish haqidagi teoreмага ko'ra, $\deg(k(x)) < \deg(f(x))$, demak $k(x)$ $(n-1)$ -darajali ko'phad. Bu ko'phad yechim bo'lishi uchun (2) tenglamani qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$[k(x)]_{f(x)}^{p^t} = [k(x)^{p^t}]_{f(x)} = [k(x)]_{f(x)}.$$

Buni ushbu ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\left[k_0^{p^t} + k_1^{p^t} x^{p^t} + \dots + k_{n-1}^{p^t} x^{(n-1)p^t} \right]_{f(x)} = [k_0 + k_1 x + \dots + k_{n-1} x^{n-1}]_{f(x)},$$

bunda $k_i^{p^t} = k_i, i = \overline{0, n-1}$.

$$\left[k_0 \cdot 0 + k_1 (x^{p^t} - x) + \dots + k_{n-1} (x^{(n-1)p^t} - x^{n-1}) \right]_{f(x)} = [0]_{f(x)}, \quad (3)$$

Endi

$$\left[x^{ip^t} - x^i \right]_{f(x)} = [\sigma_i(x)]_{f(x)}, i = \overline{1, n-1}, \quad (4)$$

ko‘rinishidagi ko‘phadlarni kiritamiz.

Bunda $\sigma_i(x)$ ko‘phad $x^{ip^t} - x^i$ ko‘phadni $f(x)$ ga bo‘lgandagi qoldiqni ifodalaydi. Qoldiqli bo‘lish haqidagi teorema ko‘ra, $\deg(\sigma_i(x)) < \deg(f(x))$ tengsizlik o‘rinli. $\deg(f(x)) = n$ bo‘lganligi uchun $\sigma_i(x)$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sigma_i(x) = \sigma_{0,i} + \sigma_{1,i}x + \dots + \sigma_{n-1,i}x^{n-1} \in GF(p^t)[x], i = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

(4) ni (3) ga qo‘yamiz. Natijada quyidagi tenglik hosil bo‘ladi:

$$\left[k_0 \cdot 0 + k_1 \sigma_1(x) + \dots + k_{n-1} \sigma_{n-1}(x) \right]_{f(x)} = [0]_{f(x)}, \quad (6)$$

bu yerda $\sigma_i(x)$ $i = \overline{1, n-1}$ ko‘phadlarning darajasi $f(x)$ ning darajasidan kichik bo‘lgani uchun, qoldiqli bo‘lish haqidagi teorema ko‘ra, (6) ni quyidagi

$$k_0 \cdot 0 + k_1 \sigma_1(x) + \dots + k_{n-1} \sigma_{n-1}(x) = 0, \quad (7)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

(5) ni (7) tenglamaga qo‘yamiz va natijada ushbu tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$k_0 \cdot 0 + k_1 (\sigma_{0,1} + \sigma_{1,1}x + \dots + \sigma_{n-1,1}x^{n-1}) + \dots + k_{n-1} (\sigma_{0,n-1} + \sigma_{1,n-1}x + \dots + \sigma_{n-1,n-1}x^{n-1}) = 0,$$

$$(0 \cdot k_0 + \sigma_{0,1} \cdot k_1 + \dots + \sigma_{0,n-1} \cdot k_{n-1})x^0 + (0 \cdot k_0 + \sigma_{1,1} \cdot k_1 + \dots + \sigma_{1,n-1} \cdot k_{n-1})x + \dots +$$

$$+ (0 \cdot k_0 + \sigma_{n-1,1} \cdot k_1 + \dots + \sigma_{n-1,n-1} \cdot k_{n-1})x^{n-1} = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^{n-1}.$$

Tenglikning o‘ng va chap tomonlarini tenglashtirsak, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, uning matritsaviy ko‘rinishi quyidagidan iborat bo‘ladi:

$$AK^T = 0^T, \quad (8)$$

Bunda A matritsa quyidagicha aniqlangan:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{01} & \dots & \sigma_{0,n-1} \\ 0 & \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_{n-1,1} & \dots & \sigma_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

(8) chiziqli tenglamalar sistemasi $(p^t)^{n-rang A}$ ta yechimga ega. Shuningdek,

$$(p^t)^{n-rang A} = (p)^{t(n-rang A)};$$

Demak, Batler kriteriyasiga ko‘ra, $f(x)$ ko‘phad $GF(p^t)$ da keltirilmaydigan bo‘lishi uchun

$$rang A = n - 1$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli ekan.

Yuqorida keltirilgan algoritmdan foydalanib, bir nechta misollar qarab chiqamiz.

2-misol. $f(x) = x^4 + 1$ ko‘phad $GF(2)$ da keltiriladigan yoki keltirilmasligini aniqlang.

Yechimi. Dastlab Batler kriteriyasining 1-shartini tekshiramiz. Buning uchun, berilgan ko‘phadning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = 4x^3;$$

$GF(2) = \{0,1\}$ elementlardan tashkil topganligi uchun, $4 \equiv 0 \pmod{2}$, Demak, $f'(x) = 0$ ekan.

$EKUB(x^4 + 1, 0) = x^4 + 1 \neq 1$. Teoremaning 1-sharti bajarilmadi. Bundan $f(x)$ ko‘phad karrali ildizga ega degan xulosaga kelamiz. Darhaqiqat, $x = 1$ $f(x)$ ko‘phadning 4 karrali ildizi bo‘lar ekan, ya‘ni

$$x^4 + 1 = (x + 1)^4;$$

$f(x) = x^4 + 1$ ko‘phad $GF(2)$ maydonda keltiriladigan ko‘phaddan iborat.

3-misol. $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2$ ko‘phadning $GF(3)$ da keltirilmaslikka tekshiring.

Yechimi. Dastlab Batler kriteriyasining 1-shartini tekshirib ko‘ramiz:

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1.$$

$GF(3)$ maydon $\{0,1,2\}$ elementlardan iborat bo'lganligi uchun $4 \equiv 1(mod 3), 3 \equiv 0(mod 3)$. Bularni hisobga olsak, $f'(x)$ funksiya quyigachicha bo'ladi:

$$f'(x) = x^3 + 1.$$

Yevklid algoritmidan foydalanib, $EKUB(f, f') = 1$ ekanligini topamiz. Demak, teoremaning 1-sharti bajarildi.

Endi 2-shartni tekshiramiz:

$$\sigma_i(x) = x^{3i} - x^i, i = 1, 2, 3,$$

$$i = 1: x^3 - x \equiv x^3 + 2x(mod f), \sigma_1(x) = 0 + 2x + 0 \cdot x^2 + x^3,$$

$$i = 2: x^6 - x^2 \equiv x^6 + 2x^2(mod f), \sigma_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$

$$i = 3: x^9 - x^3 \equiv x^9 + 2x^3(mod f), \sigma_3(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2 + 2x^3.$$

A matritsani tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matritsaning rangi 2 ga teng chiqadi, ya'ni $rang A = 2 < 3$. Demak, $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ ko'phad berilgan maydonda keltiriladigan ekan.

4-misol. $f(x) = x^3 + x + 1$ ko'phadni $GF(2)$ maydonda keltirilish yoki keltirilmasligini ko'rsating.

Yechimi. Dastlab berilgan ko'phadning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 = x^2 + 1(mod 2).$$

Endi $EKUB(f, f') = 1$ bo'lganligi uchun teoremaning 2-shartini tekshiramiz.

$$\sigma_i(x) = x^{2i} - x^i, i = 1, 2,$$

$$i = 1: x^2 - x = x^2 + x(mod f), \sigma_1(x) = 0 + x + x^2,$$

$$i = 2: x^4 - x^2 = x^4 + x^2(mod f), \sigma_2(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2.$$

A matritsani tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi matritsaning rangini hisoblaymiz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ko'rinib turibdiki, $rang A = 2 = 3 - 1 = 2$. Demak, $f(x) = x^3 + x + 1$ ko'phad $GF(2)$ maydonda keltirilmaydigan ko'phad ekan.

5-misol. $f(x) = x^3 + 1$ ko'phad $GF(2)$ maydonda keltiriladigan yoki keltirilmaydiganligini aniqlang.

Yechimi.1) $f'(x) = 3x^2 = x^2(mod 2); EKUB(f, f') = 1;$

$$2) \sigma_i(x) = x^{2i} - x^i, i = 1, 2,$$

$$i = 1: x^2 - x \equiv x^2 + x(mod f(x)): \sigma_1(x) = 0 + x + x^2,$$

$$i = 2: x^4 - x^2 \equiv x^4 + x^2(mod f(x)): \sigma_2(x) = 0 + x + x^2.$$

A matritsani tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ko'rinib turibdiki, $rang A = 1 < 2$. Demak, Batler kriteriyasiga ko'ra, $f(x)$ ko'phad keltiriladigan ekan. Haqiqatan ham, $x = 1$ berilgan ko'phadning ildizi bo'ladi, ya'ni

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Bundan ko'rinadiki, $f(x)$ ko'phadni keltirilmaydigan ko'phadlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin ekan.

Xulosa. Ushbu maqolada amaliyotda ko'plab tatbiqlariga ega bo'lgan maydonlar ustida keltirilmaydigan ko'phadlarni aniqlashning Batler kriteriyasi keltirilgan. Dastlab, Batler kriteriyasi isboti bilan aniqlanib, bu kriteriyning amaliyotda qulay bo'lgan yana bir ko'rinishi tavsiflangan. Shuningdek, keltirilgan

usullar yordamida ko‘phadlarni keltirilmaydigan ko‘phad ekanligini aniqlashga doir misollar batafsil yechib ko‘rsatilgan.

ADABIYOTLAR:

1. G. Eisenstein. *Über die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt.* // *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 39(1850), 160-179.
2. O. Perron. *Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen.* // *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*. 132(1907), 288-307.
3. A. Cohn. *A numerical criterion for the irreducibility of polynomials.* // *Amer. Math. Monthly*. 69:3(1962), 163-167.
4. N. Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis.* Springer, 1984.
5. A. Gerboud. *Newton polygons and irreducibility criteria.* // *Acta Arithmetica*. 103(2002), 241-255.
6. M. Filaseta. *Generalizations of Eisenstein’s criterion.* // *Number Theory for the Millennium*. 1(2004), 341-358.
7. D. Augot, G. Moreno. *A study of some recent irreducibility criteria for integer polynomials.* Preprint, 2023.
8. P. Лидл, Г. Нидеррайтер. *Конечные поля.* Москва: Мир, 1988.

**PARAMETRLI MASALALARNI O'RGANISHDA MANTIQIY TAHLIL:
PARAMETRLI MODELASHTIRISH**

*Ro'zikov Maxammadjon Mamirali o'g'li,
Farg'ona davlat universiteti o'qituvchisi*

***Annotatsiya.** Mazkur maqolada parametr tushunchasining matematik mohiyati, uning tenglamalar va tenglamalar sistemalarini yechish jarayonidagi roli hamda funksional-mantiqiy xususiyatlari chuqur tahlil qilinadi. Parametrning mustaqil o'zgaruvchi sifatidagi statusi, yechimlar to'plamini "boshqaruvchi" omil sifatidagi ahamiyati va noma'lum bilan o'zaro munosabati misollar asosida yoritib berilgan. Shuningdek, parametrning masala shartida bevosita berilishi yoki yechim jarayonida paydo bo'lishi bilan bog'liq holatlar ko'rib chiqiladi. Trigonometrik, irratsional va algebraik tenglamalar misolida parametrli modellashtirish usullari tahlil qilinib, o'zgaruvchilar rollarining mantiqiy almashinuvi ilmiy asosda asoslab beriladi. Maqola parametrli masalalar nazariyasini o'rganish va ularni o'qitish metodikasini takomillashtirish uchun muhim nazariy xulosalarni o'z ichiga oladi.*

***Kalit so'zlar:** parametr, parametrli tenglama, yechimlar to'plami, parametrizatsiya, matematik mantiq.*

**ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ИЗУЧЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ:
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

***Аннотация.** В статье проведён углублённый анализ понятия параметра в математике, раскрыта его сущность как независимой переменной и его управляющая роль в формировании множества решений уравнений и систем уравнений. Рассматриваются различные способы появления параметра: как явного элемента условия задачи, так и как величины, возникающей в процессе решения. На примерах алгебраических, иррациональных и тригонометрических уравнений показаны методы параметризации и логическая смена ролей переменных. Особое внимание уделяется разграничению понятий неизвестной, параметра и постоянной величины. Полученные результаты имеют теоретическое значение для развития теории параметрических задач и практическое значение для методики обучения математике.*

***Ключевые слова:** параметр, параметрическое уравнение, параметризация, математическая логика.*

**LOGICAL ANALYSIS IN THE STUDY OF PARAMETER PROBLEMS:
PARAMETER MODELING**

***Abstract.** This paper presents an in-depth analysis of the concept of a parameter in mathematics and examines its role as an independent variable that governs the solution sets of equations and systems of equations. The study explores various ways in which parameters appear, either explicitly in problem statements or implicitly during the solution process. Using examples from algebraic, irrational, and trigonometric equations, the paper demonstrates parameterization techniques and the logical interchange of variable roles. Special attention is paid to distinguishing between unknowns, parameters, and constants within analytical expressions. The results contribute to the theoretical understanding of parametric problems and provide a methodological foundation for improving mathematics instruction.*

***Keywords:** parameter, parametric equation, parameterization, mathematical logic.*

***Kirish.** Maktab va oliy ta'lim amaliyotida parametr ko'pincha intuitiv va soddalashtirilgan tarzda talqin qilinadi. Odatda parametr "harf bilan belgilangan doimiy son" sifatida izohlanadi va bu yondashuv parametrli masalalarni yechish metodlarining ham fragmentar, ya'ni alohida holatlarga xos bo'lishiga olib keladi. Natijada parametrning matematik mohiyati - uning mustaqil o'zgaruvchi sifatidagi roli, yechimlar to'plamini "boshqaruvchi" xususiyati va noma'lum bilan o'zaro mantiqiy aloqasi yetarli darajada ochib berilmaydi [1;2]. Bu esa parametrli tenglama va tengsizliklarni o'rganishda sezilarli metodik qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Parametr tushunchasiga aniq va ilmiy asoslangan ta'rif berilmagan sharoitda parametrli masalalarni umumiy matematik tushunchalar - funksiya, argument, o'zgaruvchi, yechimlar to'plami kabi kategoriyalar bilan bog'lash murakkablashadi.*

Tadqiqot metodologiyasi va adabiyotlarning tahlili. Komponentli tahlil usulining asosiy mazmuni murakkab masalani yoki matematik modelni yaxlit holda emas, balki uni tashkil etuvchi tarkibiy qismlar majmui sifatida ko‘rib chiqishga asoslanadi. Ta’lim jarayonida o‘quvchilarga yechish uchun taklif etiladigan har qanday masala muayyan ichki tuzilishga ega bo‘lgan matematik model sifatida qaraladi va aynan shu usul yordamida uning komponentlari ochib beriladi. Komponentli tahlil qilish natijasida masala sharti mantiqan bog‘langan kichik masalalarga ajratiladi, murakkab tizimlar esa quyi tizimlarga yoki ularni tashkil etuvchi alohida komponentlar majmuasi sifatida talqin etiladi. Bunda har bir ajratilgan komponent alohida tahlil qilinadi va keyinchalik ularning natijalari yagona yechimga integratsiya qilinadi. Boshlang‘ich shartni o‘zgartirishga qaratilgan har qanday algebraik yoki funksional almashtirish, odatda, masala shartini soddalashtirishga xizmat qiladi va bunda bajarilayotgan o‘zgartirishlarning teng kuchlilik qat’iy saqlanishi talab etiladi. Shu sababli istalgan tenglama yoki tengsizlikni yechishning yakuniy natijasi uning yechimlar to‘plamini aniqlashdan iborat bo‘lib, ushbu to‘plam o‘zgaruvchining alohida diskret qiymatlari yoki haqiqiy sonlar to‘plamining elementar qism to‘plamlari birlashmasi ko‘rinishida ifodalanadi. Bunday yondashuv o‘quvchilarda masalaning ichki mantiqiy tuzilmasini anglash, yechimlar xarakterini chuqur tahlil qilish hamda matematik xulosalarni asosli ravishda umumlashtirish ko‘nikmalarini shakllantirishda muhim rol o‘ynaydi. Masalan, algebraning asosiy teoremasi algebraik tenglamalarni haqiqiy sonlar to‘plamida yechish bilan bog‘liq bo‘lgan qismi ushbu tadqiqot doirasida muhim ahamiyat kasb etadi [3;4]. Butun koeffitsiyentli quyidagi n -darajali ko‘phad berilgan bo‘lsin:

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

U holda $p_n(x)$ ko‘phad quyidagi ko‘rinishda yozilishi mumkin.

$$p_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)(x^2 + b_1x + c_1)\dots(x^2 + b_mx + c_m).$$

Bu yerda $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, $k + 2m = n$. Shuning uchun haqiqiy koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan n -darajali butun tenglama kamida n ta haqiqiy ildizga ega bo‘ladi. Bu holat parametrli masalalarni yechish bilan bevosita bog‘liq.

Parametrli masalalarni komponentli tahlil usulidan foydalanib yechishda o‘quvchilarga matematik mantiq belgilaridan foydalanishni o‘rgatish lozim [5]. Masalan, konyunksiya (\wedge), disyunksiya (\vee), implikasiya (\Rightarrow), ikki tomonlama implikasiya (\Leftrightarrow), umumiylik kvantori (\forall) va mavjudlik kvantori (\exists) kabi belgilar masalani aniq va mantiqan to‘g‘ri ifodalashga, shuningdek, yechim jarayonida har bir qadamni izchil va tushunarli tarzda qurishga yordam beradi. Bu belgilar yordamida o‘quvchilar shartlar va ularning o‘zaro bog‘liqligini aniqlashni, shuningdek, murakkab parametrli tenglamalar va tengsizliklarni bir necha sodda qismga ajratib, ularni bosqichma-bosqich yechishni o‘rganadilar. Shu sababli, parametrli masalalarni o‘rgatishda mantiqiy ifodalarni to‘g‘ri qo‘llash o‘quvchilarning mantiqiy fikrlashni rivojlantrishda muhim rol o‘ynaydi.

Quyidagi belgilashni kiritamiz: $p_n(x) \vee 0$, bu yerda \vee belgisi quyidagi belgilaridan biri bo‘lsin: $>, \geq, <, \leq, \neq$.

Butun koeffitsiyentli tenglamalarni yechish. Komponentli tahlil usulida berilgan tenglama teng kuchli eng sodda tenglamalar majmuasiga keltiriladi:

$$p_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, \\ \dots, 1 \leq k \leq n, & p(x_k) = 0, \\ x = x_k \end{cases}$$

yoki $p_n(x) \neq 0, \forall x$ munosabatning to‘g‘riligini isbotlashga olib keladi.

Ratsional tenglamalarni yechish. $\frac{p_n(x)}{q(x)} = 0$ ko‘rinishdagi ratsional tenglama quyidagi ekvivalent teng

kuchli sistemaga keltiladi:

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_n(x) = 0 \\ q_m(x) \neq 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi suratda turgan ko‘phadning ildizlari bo‘lib, ular maxrajdagi ko‘phad ildizlariga kirmaydigan qiymatlar majmuasidan iborat.

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ q(x_1) \neq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x = x_k \\ q(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

Modul ostidagi ifodalar qatnashgan tenglamalarni yechish. Modul ostidagi ifodani o'z ichiga olgan eng sodda tenglama $|F(x)|=G(x)$ ko'rinishga ega bo'lgan tenglamani komponentli tahlil usulida quyidagicha yechish mumkin. Bunda tenglama unga teng kuchli sistemaga yoki sistemalar majmuasiga keltiladi.

$$a) |F(x)|=G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} G(x) \geq 0, \\ F^2(x) = G^2(x) \end{cases}; \quad b) |F(x)|=G(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) \geq 0 \\ F(x) = G(x) \\ F(x) < 0 \\ -F(x) = G(x) \end{cases}$$

Tengsizliklarni yechish. Ma'lumki, ixtiyoriy tengsizlikning kanonik ko'rinishi deb uni quyidagi shaklda ifodalangan holatiga aytiladi:

$$\frac{u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)}{v_1(x)v_2(x)\dots v_k(x)} \geq 0.$$

Bu yerda bu yerda \vee belgisi quyidagi belgilaridan biri bo'lsin: $>, \geq, <, \leq$. Kanonik shakldagi tengsizliklarni yechishda tegishli ko'paytuvchining qiymati emas, balki uning ishorasi qiziqtiradi. Shuni alohida qayd etish lozimki, komponentli tahlil usuli faqat berilgan tengsizlik kanonik ko'rinishga keltirilgandagina qo'llaniladi. Bunda quyidagi tasdiqlardan foydalaniladi

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiyani aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy ikkita argumenti x_1, x_2 uchun $f(x_1) - f(x_2)$ va $x_1 - x_2$ ayirmalar bir xil ishorali (har xil ishorali) bo'lsa, u holda funksiya aniqlanish sohasida monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Ushbu teoremani **mantiqiy sxema** tarzida quyidagicha idodalash mumkin:

$$a) (f(x) \uparrow\uparrow) \Leftrightarrow ((\forall t_1 \in D(f), (\forall t_2 \in D(f))) : (f(t_1) - f(t_2) \vee 0) \Leftrightarrow (t_1 - t_2 \vee 0))$$

$$b) (f(x) \downarrow\downarrow) \Leftrightarrow ((\forall t_1 \in D(f), (\forall t_2 \in D(f))) : (f(t_1) - f(t_2) \vee 0) \Leftrightarrow (t_1 - t_2 \vee 0)).$$

Tengsizlikni tashkil etuvchi sodda ko'paytuvchilarga ajratish va har bir ko'paytuvchining ishorasini alohida tahlil qilinadi. Agar analitik ifoda elementar funksiyalar yordamida ifodalangan bo'lsa, u holda ushbu funksiyalarning ishora saqlanish intervallarini aniqlash, odatda, qiyinchilik tug'dirmaydi. Shu sababli elementar funksiyalar orqali ifodalangan analitik ifodalarni tashkil etuvchi ko'paytuvchilarning deyarli barchasini ishorasini aniqlash mumkin. Shu bilan birga faqat aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlar qabul qiluvchi ko'paytuvchilarni ko'rsatish mumkin. Masalan, $\forall x, e^x > 0$; $\forall x, x^2 + 1 > 0$. Bunday funksiyalar nolga teng bo'lmaydi va o'z ishorasini o'zgartirmaydi, shuning uchun ular tengsizlikning yechim to'plamiga ta'sir ko'rsatmaydi. Agar yechilayotgan tengsizlikning ishorasi o'zgarimas bo'lsa va ko'paytuvchilardan biri barcha mumkin bo'lgan qiymatlar uchun musbat bo'lsa, u holda ushbu ko'paytuvchini tengsizlikdan chiqarib tashlash mumkin. Masalan,

$$(x-1)(x+2)e^x > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0,$$

chunki $\forall x, e^x > 0$. Demak, tengsizliklarni yechishda analitik ifodaning miqdoriy xususiyatlaridan ko'ra uning ishora aniqligi muhimroqdir. Shu bois doimiy ishorali ko'paytuvchilarni chiqarib tashlash yoki (-1) bilan almashtirish tengsizliklarni soddalashtirishning samarali usuli hisoblanadi. Ko'pincha parametrlil masalalarda bunday ko'paytuvchi sifatida diskriminanti manfiy bo'lgan quyidagi ko'rinishdagi kvadratik uchhad uchraydi:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Bu holda uning qabul qiladigan qiymatlari ishorasi bosh koeffitsient a ishorasi bilan mos keladi. Ammo ba'zi hollarda bunday uchhadni uning ozod hadi bilan, ya'ni $c = f(0)$ bilan almashtirish mumkin. Ushbu mulohazani **mantiqiy sxema** shaklida quyidagicha ifodalaymiz:

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0)(f(x) > 0 \forall x) \Leftrightarrow (D < 0) \wedge ((a > 0) \vee (c > 0))$$

Diskriminant manfiy bo'lganda kvadratik uchhad grafigi parametrlarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida absissa o'qiga nisbatan bitta yarimtekislikda joylashadi. Demak, agar kvadratik uchhad barcha x lar uchun musbat qiymatlar qabul qilsa, uning bosh koeffitsiyenti ham musbat bo'ladi va nol nuqtadagi qiymati ham musbatdir. Buni **mantiqiy sxema** shaklida quyidagicha yozamiz:

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0)(f(x) < 0 \forall x) \Leftrightarrow (D < 0) \wedge ((a < 0) \vee (c < 0))$$

Funksiyalarni tekshirishda komponentli tahlil usuli.

a) Quyidagi darajali funksiyani olaylik: $y = x^n, n \in \mathbb{N}$. Natural ko'rsatkichli darajali funksiya manfiy bo'lmagan sonlar to'plamida monoton o'suvchi bo'ladi. Funksiyaning monotonlik xossasi, uzluksizligi mos ko'paytuvchini komponentlarga ajratishni belgilovchi asosiy xossalardan biri hisoblanadi. Shu sababli quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$(x_1^n - x_2^n \vee 0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 \vee 0), (\forall x_1 \geq 0), (\forall x_2 \geq 0), (\forall n \in \mathbb{N})$$

Daraja ko'rsatkichi toq bo'lgan holda:

$$(x_1^{2n-1} - x_2^{2n-1} \vee 0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 \vee 0), (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Yuqoridagilarning bevosita natijasi sifatida quyidagini olamiz:

$$(|x_1| - |x_2| \vee 0) \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2 \vee 0)$$

Darajali funksiyaning manfiy bo'lmagan sonlar to'plamida monoton o'suvchi ekanligidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \geq 0, \\ t_2 \geq 0, \\ t_1 - t_2 \vee 0 \end{cases}$$

b) Ko'rsatkichli funksiya $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ ham monoton funksiyadir. Agar asos $a > 1$ bo'lsa, funksiya monoton o'suvchi; agar $0 < a < 1$ bo'lsa, funksiya monoton kamayuvchi bo'ladi. Biroq tengsizliklarni yechishda alohida holatlarga ajratish shart emas, chunki:

$$(a^x - a^y \vee 0) \Leftrightarrow ((a - 1)(x - y) \vee 0).$$

c) Logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari bo'lgani sababli, asosning xuddi shu qiymatlarida u ham xuddi shu ma'noda monoton bo'ladi: Bu holda ham tengsizliklarni alohida holatlarga ajratish talab etilmaydi:

$$(\log_a x - \log_a y \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \frac{x - y}{a - 1} \vee 0. \end{cases}$$

Shundan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

$$(\log_a x \vee 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{x - 1}{a - 1} \vee 0. \end{cases}$$

Ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning monotonlik xossalari murakkab tengsizliklarni ancha sodda tengsizliklarga keltirish imkonini beradi.

Masalan,

$$1) \begin{cases} a^{f(x)} \vee b \\ b > 0 \end{cases}, \Leftrightarrow \frac{(f(x) - \log_a b)}{(a - 1)} \vee 0;$$

$$2) \log_a f(x) \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ \frac{(f(x) - a^b)}{(a - 1)} \vee 0; \end{cases}$$

$$3) \log_a f(x) + \log_a g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \frac{(f(x)g(x)-1)}{(a-1)} < 0; \end{cases}$$

$$4) \frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{a^{h(x)} - a^{\varphi(x)}} < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x)}{h(x) - \varphi(x)} < 0.$$

Yuqoridagi barcha mantiqiy sxemalar «parametr» tushunchasi bilan bevosita bog‘liq. Parametr - matematik formulaga kiruvchi kattalik bo‘lib, bitta hodisa yoki muayyan xususiy masala doirasida o‘zgarmas qiymatni saqlashi, biroq boshqa hodisaga yoki boshqa xususiy masalaga o‘tilganda o‘z qiymatini o‘zgartirishi inobatga olinsa, matematik nazariyani umumiy qalqinda tushunishga imkon beradi. Parametr-formulalar va ifodalarga kiruvchi kattalik bo‘lib, ko‘rilayotgan masala doirasida uning qiymati o‘zgarmas deb qaraladi, biroq boshqa masalada u o‘z qiymatini o‘zgartiradi. Shuning uchun agar matematik ifodaga noma'lumlardan tashqari harflar bilan belgilangan sonlar ham kirsam, ular parametrlar deb ataladi. Agar masalaga noma'lumlardan tashqari harflar bilan belgilangan sonlar ham kirsam, ular parametrlar deb ataladi. Ko‘rinib turibdiki, harf bilan belgilanish «parametr» tushunchasining muhim belgisi bo‘la olmaydi. Birinchidan, nomlangan o‘zgarmas kattaliklar ham mavjud bo‘lib, ularga ham o‘z nomi berilgan, masalan, π , e va boshqalar. Ikkinchidan, masalada noma'lumdan tashqari boshqa o‘zgaruvchilarning yo‘qligi ham bu masala parametrli emasligini bildiruvchi belgi bo‘la olmaydi. Masalan, trigonometrik tenglamalarda parametrlar bevosita yechish jarayonida paydo bo‘ladi. Demak, parametr - mustaqil o‘zgaruvchi bo‘lib, berilgan masalada uning qiymati qat‘iy belgilangan deb hisoblanadi. Deyarli barcha o‘quv-metodik qo‘llanmalarda ta’limning u yoki bu bosqichida «parametr» tushunchasi kiritiladi, ammo ko‘pchilik darsliklarda, aslida, masala mohiyati shuning o‘zi bilan cheklanib qoladi. Lekin o‘quvchilarni masalani parametrlash yondashuvi asosida yechishga o‘rgatish umummantiqiy tafakkurni rivojlantrishda muhimdir.

Parametrlash tushunchasidan foydalanib masalalarni yechish keng xarakterga ega bo‘lib, bu masalalarning ko‘plab matematik tushunchalar bilan bog‘liqligini saqlaydi. Masalani parametrlash orqali yechishda ba’zida sodda masalalarham deyarli yechish qiyin bo‘lgan masalalarga aylanib qolishi mumkin. Chunki standart masalalarni yechish jarayonida o‘quvchilarning diqqat markazida matematik faktlarni tanlash va ulardan foydalanishga xizmat qiluvchi tafakkur faoliyat emas, balki hisoblash protseduralari asosiy o‘rinda turadi. Buning sababi maktabdagi matematik ta’limning asosiy strategiyasi - ma’lum algoritmlarni bajarishga asoslangan standart masalalar doirasida ko‘nikma va malakalarni shakllantirishdan iboratligi bilan bog‘liq. Parametrli masalalar esa avvalo, ko‘pincha ancha tarmoqlangan mustaqil mantiqiy fikrlashni amalga oshirish qobiliyatini talab qiladi. Shuning uchun standart yechish usullari majmuasini ayrim maxsus metodlar bilan jiddiy boyitish zarur bo‘ladi. Har qanday matematik masalani yechish jarayonida uning sharti ma’lum bir tenglamalar va (yoki) tengsizliklar majmui ko‘rinishida ifodalanadi. Shu sababli, bundan keyin parametrli masala deganda tenglamalar, tengsizliklar yoki ularning turli kombinatsiyalari - sistemalari va hokazolarni tushunamiz. Matematik masalada parametrlar o‘zgaruvchi sifatida erkli va yechimni “boshqaruvchi” xususiyatli, masala shartida aniq belgilanishi va yashirin paydo bo‘lishi mumkin. Biroq mohiyatiga ko‘ra parametrli bo‘lgan, ammo an’anaga ko‘ra bunday masalalar sirasiga kiritilmaydigan masalalar sinfi ham mavjud. Bularga trigonometrik masalalar, minimum va maksimumni topish masalalari, funksiyaning qiymatlar sohasini aniqlash kabi masalalar kiradi. Bunday masalalarda parametr matematik modelni tuzish jarayonida yoki masalani yechish davomida paydo bo‘ladi. Masalan quyidagi misolni olaylik. Shunday to‘g‘ri burchakli uchburchak mavjudmi, uning har ikkala kateti va gipotenuzasi 2 ga oshirilganda, ular mos ravishda boshqa bir to‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari va gipotenuzasiga aylansin? Xuddi shu savol, agar boshlang‘ich uchburchakning uchala tomoni 2 ga oshirilmagan, balki har biri alohida ravishda 2 ga oshirilsa yoki kamaytirilsa, qanday bo‘ladi?»

Mazkur masalaning yechimi quyidagi tenglamalar sistemasiga bog‘liq bo‘ladi.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ (x+2)^2 + (y+2)^2 = (z+2)^2 \end{cases}$$

Aniqroq aytganda, ushbu sistema $0 < x \leq y < z$ shartlarini qanoatlantiruvchi kamida bitta yechimga egami yoki yo‘qligini aniqlash talab etiladi. Bu masalani parametrlash orqali ham ifodalash mumkin: Berilgan sistema musbat yechimlarga ega bo‘ladigan parametrning musbat qiymati mavjudmi? Bu yerda qaysi o‘zgaruvchi parametr sifatida tanlanishi kerakligi ataylab ko‘rsatilmagan. Bu holat nafaqat mos

o'zgaruvchining erkligini, balki parametr sifatida tanlashning o'zi ham erkli ekanini yana bir bor ko'rsatadi. Parametrning paydo bo'lishi ba'zan masala shartiga kiruvchi funksiyalarning xossalari bilan bog'liq bo'ladi.

Masalan, $\sqrt{\cos 2x - 1} + \sin 3x = 1$ tenglama ekvivalent o'zgartirishlar orqali quyidagi sistemaga

$$\text{keltiriladi: } \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Bu yerda ikkita butun sonli parametr k va n mos funksiyalarning davriylik xossasi natijasida paydo bo'lgan. Tenglamaning o'zida parametr mavjud bo'lmasa ham, parametrlash orqali uning paydo bo'lishi bilan bog'liq misolni keltiramiz.

1-misol. Quyidagi tenglamani yeching: $\sin 3x + \cos 5x \cos 2x = \sqrt{3}$.

Yechish: Yechimni topish yo'li masala shartini parametrlashdan iborat. $\cos 5x = p$ deb belgilab, parametrik shartni $\sin 3x + p \cos 3x = \sqrt{3}$ ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, berilgan tenglama parametrning qaysi qiymatlarida yechimga ega bo'lishini aniqlash orqali yechimni davom ettirish mumkin.

Ba'zan yechimning ma'lum bir bosqichida hatto yagona o'zgaruvchi ham parameter xususiyatiga ega bo'lishi mumkin. Quyidagi misolni ko'rib chiqamiz.

2-misol. Quyidagi tenglamani yeching: $\sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x$.

$$\text{Yechish. } \sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5 + \sqrt{5 + x} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ 5 + x = (x^2 - 5)^2 \end{cases}$$

Keyingi bosqichda sistema tenglamasi to'rtinchi darajali tenglamaga keltiriladi:

$$x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0.$$

Bu tenglama ratsional, hatto butun ildizlarga ham ega emas. Uni noma'lum koeffitsiyentlar usuli bilan yechish mumkin, biroq bu yo'l murakkab va ko'p vaqt talab qiladi. Agar ushbu tenglamani 5 belgisi bo'yicha tenglama sifatida qarasaq, ya'ni vaqtincha o'zgaruvchiga parametr maqomini, 5 soniga esa, aksincha o'zgaruvchi maqomini bersak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot 5 - x + 5^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + (x^4 - x) = 0$$

Bu tenglamaning diskriminanti x parametriga bog'liq:

$$D(x) = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Demak, bu tenglama 5 belgisi bo'yicha oson yechiladi. Natijada:

$$\sqrt{5 + \sqrt{5 + x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5 + \sqrt{5 + x} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{5} \\ 5 + x = (x^2 - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \leq x \\ 5 = x^2 - x \\ 5 = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Tenglamani yechishning keyingi bosqichlari sodda va ravshandir.

-Demak, masala shartiga kiruvchi yoki uni yechish jarayonida paydo bo'ladigan, yechimni boshqaruvchi erkli o'zgaruvchi parametr deb ataladi. Shartida yoki yechish jarayonida kamida bitta parametr mavjud bo'lgan masala parametrli masala deb ataladi.

-Masala shartini ifodalovchi analitik ifodaga kiruvchi barcha kattaliklar ikki toifaga bo'linadi: o'zgarimaslar va 'zgaruvchilar. Qiymatlari istalgan masala shartida o'zgarimas bo'lib qoladigan kattaliklar o'zgarimas kattaliklar deb ataladi. O'zgarimas kattaliklar faqat sonlar bilan emas, balki harflar bilan ham belgilanishi mumkin.

-Qaysi erkli o'zgaruvchi noma'lum, qaysilari parametr deb qaralishi masala sharti yoki yechimda qo'llaniladigan metodlar bilan belgilanadi.

-Masala shartini ifodalovchi analitik ifodaga kiruvchi istalgan o'zgaruvchi noma'lum (argument) sifatida e'lon qilinishi mumkin. Qolgan barcha o'zgaruvchilar parametrlar deb qaraladi va ularga, odatda, aniqlanish sohasidan olingan ayrim sonli qiymatlar bo'yicha birlashtiriladi.

Tahlil va olingan natijalar. Mazkur tadqiqot Farg'ona davlat universiteti qoshidagi akademik litseyda tahsil olayotgan 52 nafar o'quvchi ishtirokida olib borildi. Tadqiqotdan ko'zlangan asosiy maqsad parametr tushunchasining aniqlashtirilgan ta'rifi va parametrli masalalarni yechishga yo'naltirilgan mantiqiy-analitik yondashuvning o'quvchilarning bilim darajasi va fikrlash faoliyatiga ta'sirini aniqlashdan iborat bo'ldi. Tajriba ikki bosqichda tashkil etildi. Birinchi bosqichda (diagnostik bosqich) o'quvchilarning

parametrlı tenglamalar va tengsizliklar bo'yicha dastlabki bilimlari an'anaviy yondashuv asosida baholandi. Bu bosqichda o'quvchilarga parametr tushunchasi asosan "harf bilan belgilangan son" sifatida talqin qilingan masalalar taklif etildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, o'quvchilarning katta qismi parametrni noma'lum bilan tenglashtirib yuboradi yoki masala yechimini mexanik algoritmlar asosida bajarishga urinadi. Xususan, 52 nafar o'quvchining 31 nafari (59,6 %) parametrlı masalalarda yechimni holatlar bo'yicha to'liq tahlil qila olmagan, 14 nafari (26,9 %) qisman to'g'ri javob bergan, faqat 7 nafari (13,5 %) masalani to'liq va mantiqan asoslangan holda yecha olgan.

Ikkinchi bosqichda (tajriba bosqichi) o'quvchilarga parametr tushunchasining mustaqil o'zgaruvchi sifatidagi mohiyati, uning yechimlar to'plamini "boshqaruvchi" xususiyati va o'zgaruvchilar rollarining mantiqiy almashinuvi asosida ishlab chiqilgan metodik yondashuv tatbiq etildi. Mashg'ulotlar davomida algebraik, irratsional va trigonometrik tenglamalar misolida parametrning masala shartida bevosita berilishi hamda yechim jarayonida paydo bo'lishi holatlari maxsus tanlangan topshiriqlar orqali tahlil qilindi. Shunday qilib, tajriba natijalari parametr tushunchasining aniqlashtirilgan ta'rifi va unga asoslangan metodik yondashuv parametrlı masalalarni o'zlashtirish samaradorligini sezilarli darajada oshirishini tasdiqladi. Olingan natijalar mazkur yondashuvni akademik litseylar va ixtisoslashtirilgan maktablarda algebra va matematik analiz kurslarida keng joriy etish maqsadga muvofiqligini ko'rsatadi.

Munozara. O'tkazilgan tahlillar shuni ko'rsatdiki, parametr tushunchasining matematik ta'limdagi talqini ko'pincha uning haqiqiy mohiyatini to'liq aks ettirmaydi. Parametrni faqat "harf bilan belgilangan son" sifatida izohlash uni noma'lumdan tashqi belgilar orqali ajratishga olib keladi va masalaning mantiqiy tuzilishini ikkinchi darajaga suradi. Bunday yondashuv parametrlı masalalarni yechishda algoritmik qoliplarga tayanishga majbur qiladi, holbuki bu turdagi masalalar mantiqiy tahlil va umumlashtirishni talab etadi. Maqolada keltirilgan misollar shuni yaqqol tasdiqlaydiki, parametr — bu shunchaki belgi emas, balki yechimlar to'plamini aniqlovchi va "boshqaruvchi" mustaqil o'zgaruvchidir. Parametr masala shartida bevosita berilgan hollarda ham, u yechimning tuzilishini to'liq belgilaydi; ayrim holatlarda esa parametr matematik modelni qurish yoki tenglamani ekvivalent o'zgartirish jarayonida vujudga keladi.

Xulosa. Olingan xulosalar parametrlı masalalar nazariyasini rivojlantirish bilan bir qatorda, ularni o'qitish metodikasini takomillashtirish uchun ham muhim ahamiyatga ega. Xususan, parametr tushunchasining aniq ta'rifi va uning didaktik talqini o'quvchilarda umumlashtirish, holatlar bo'yicha tahlil qilish va mustaqil mantiqiy xulosalar chiqarish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Mazkur yondashuv kelgusida parametrlı masalalarni o'rganishga bag'ishlangan metodik tadqiqotlar uchun mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. DeVries, D., & Arnon, I. (2004). *Solution-What does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. International Group for the Psychology of Mathematics Education.*
2. Epp, S. (2011). *Variables in mathematics education. In Blackburn, Van Ditmarsch, & Soler-Toscano (Eds.), Tools for teaching logic: Third International Congress, TICITL (pp. 54-61). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21350-2_7*
3. Hernández-Zavala, L., Acuña-Soto, C., & Liern, V. (2023). *Los parámetros y las infinitas soluciones en sistemas de ecuaciones lineales [Parameters and infinite solutions in systems of linear equations]. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37, 872-899. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23>*
4. Keene, K. A. (2007). *A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. The Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 230-246. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.003>*
5. Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). *Symbolizing while solving linear systems. The International Journal on Mathematics Education, 51(7), 1183-1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01083-3>*

FUNKSIYA VA UNING HAYOTIY TATBIQLARI

*Ro‘zmetova Yulduz Ulug‘bekovna,
Osiyo xalqaro universiteti magistranti
dostonjumaniyozov5@gmail.com*

Annotatsiya. *Funksiya matematikada ikki o‘zgaruvchi orasidagi aniq, yagona va tartibli bog‘lanishni ifodalovchi asosiy tushuncha bo‘lib, turli jarayonlar va qonuniyatlarni matematik model sifatida tasvirlash imkonini beradi. Funksiyalar yordamida real hayotdagi ko‘plab hodisalar, masalan, vaqt va harorat o‘zgarishi, tezlik va masofa munosabati, iqtisodiy ko‘rsatkichlarning o‘zgarishi, energiya sarfi va texnologik tizimlar faoliyati ilmiy asosda tushuntiriladi. Ta‘lim sohasida funksiyalar o‘quvchilarda mantiqiy fikrlash, tahliliy yondashuv va muammolarni matematik tilga ko‘chirish ko‘nikmalarini rivojlantiradi. Iqtisodiyotda ular talab, taklif, narx, daromad va xarajat kabi ko‘rsatkichlarni baholashda qo‘llanadi. Fizika va muhandislikda funksiyalar harakat, kuch, energiya va issiqlik jarayonlarini modellashtirishga xizmat qiladi, axborot texnologiyalarida esa dasturlash, ma‘lumotlar tahlili va sun‘iy intellekt tizimlarining asosini tashkil etadi. Shu bois funksiya zamonaviy fan va amaliyotning ajralmas tarkibiy qismi hisoblanadi.*

Kalit so‘zlar: *o‘zgaruvchilar, matematik model, jarayon, tahlil, hayotiy misollar, fizika, iqtisodiyot, texnologiya.*

ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ

Аннотация. *Функция - это базовое понятие в математике, представляющее собой чёткую, единообразную и упорядоченную взаимосвязь между двумя переменными и позволяющее описывать различные процессы и законы в виде математических моделей. С помощью функций многие явления реальной жизни, такие как изменения времени и температуры, зависимость скорости от расстояния, изменения экономических показателей, энергопотребление и работа технологических систем, объясняются на научной основе. В сфере образования функции развивают у учащихся логическое мышление, аналитический подход и навыки перевода задач на математический язык. В экономике они используются для оценки таких показателей, как спрос, предложение, цена, доход и издержки. В физике и технике функции служат для моделирования процессов движения, силы, энергии и тепла, а в информационных технологиях они составляют основу программирования, анализа данных и систем искусственного интеллекта. Таким образом, функции являются неотъемлемой частью современной науки и практики.*

Ключевые слова: *переменные, математическая модель, процесс, анализ, примеры из реальной жизни, физика, экономика, технология.*

FUNCTIONS AND THEIR REAL-WORLD APPLICATIONS

Abstract. *A function is a basic concept in mathematics that represents a clear, uniform and orderly relationship between two variables, allowing various processes and laws to be described as mathematical models. With the help of functions, many real-life phenomena, such as changes in time and temperature, the relationship between speed and distance, changes in economic indicators, energy consumption and the operation of technological systems, are explained on a scientific basis. In the field of education, functions develop students' logical thinking, analytical approach and skills in translating problems into mathematical language. In economics, they are used to evaluate indicators such as demand, supply, price, income and costs. In physics and engineering, functions serve to model motion, force, energy and heat processes, and in information technology, they form the basis of programming, data analysis and artificial intelligence systems. Therefore, functions are an integral part of modern science and practice.*

Key words: *variables, mathematical model, process, analysis, real-life examples, physics, economics, technology.*

Kirish. *Funksiya matematikada eng muhim asosiy tushunchalardan biri bo‘lib, u bir to‘plamdagi har bir elementga boshqa to‘plamdan yagona qiymat mos kelishini ta‘minlovchi matematik bog‘lanishni ifodalaydi. Boshqacha aytganda, har bir kirish qiymatiga faqat bitta chiqish qiymati mos tushadi. Ushbu qat‘iy va aniq munosabat funksiyani boshqa matematik tushunchalardan ajratib turadi. Funksiya tushunchasi*

matematikaning nafaqat maktab darajasidagi, balki oliy va ilmiy darajadagi ko‘plab bo‘limlarining rivojlanishida ham asosiy rol o‘ynaydi. Algebra, analiz, geometriya, ehtimollar nazariyasi, statistika va hatto zamonaviy axborot texnologiyalari funksiyaga tayanadi (OpenStax, 2016; Stewart, 2016).

Ta‘lim jarayonida funksiyalarni o‘rganish juda katta ahamiyatga ega. O‘quvchilar funksiyalar yordamida real jarayonlarni matematik tilga ko‘chirishni, grafiklarni tahlil qilishni, bog‘lanishlarni tushunishni va ular orqali muammoni yechishni o‘rganadi. Bu esa ularning mantiqiy fikrlashini, tahliliy yondashuvini, mustaqil qaror qabul qilish qobiliyatini rivojlantiradi. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, funksional fikrlashni chuqur egallagan o‘quvchilar matematika, fizika, informatika va boshqa tabiiy fanlarda yuqori natijalarga erishadi. Shuningdek, funksiyalarni tushunish STEM yo‘nalishidagi kasblar uchun muhim poydevor hisoblanadi (Carlson et al., 2002; OECD, 2019).

Funksiya tushunchasi kundalik hayotda ham keng uchraydi. Masalan, havo haroratining vaqtga nisbatan o‘zgarishi, avtomobilning tezligi va bosib o‘tilgan masofa orasidagi bog‘lanish, elektr energiyasi sarfi bilan yuklama darajasi, telefon batareyasi foizining foydalanish darajasiga bog‘liqligi — bularning barchasi funksional munosabatdir. Shuningdek, tibbiyotda yurak urish chastotasi bilan jismoniy yuklama, iqtisodiyotda narx bilan talab-taklif, demografiyada aholining o‘shish sur‘ati ham funksiyalar orqali ifodalanadi (Ross, 2014). Shu sababli funksiya kundalik hayot hodisalarini tushunishda asosiy ilmiy vosita sifatida xizmat qiladi.

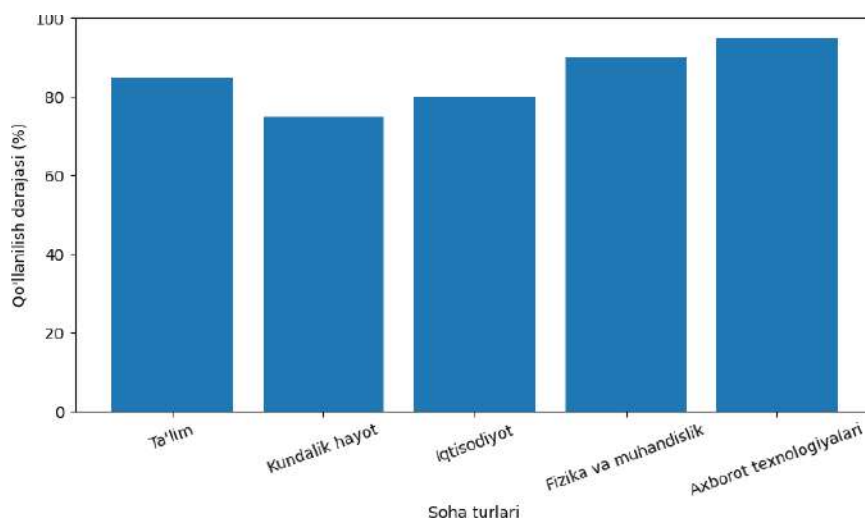
Iqtisodiyotda funksiyaning o‘rni alohida ahamiyatga ega. Talab va taklif funksiyalari bozor mexanizmini tushuntiradi, xarajat, daromad va foyda funksiyalari esa korxonalar faoliyatini tahlil qilishda qo‘llaniladi. Makroiqtisodiy jarayonlarda iqtisodiy o‘shish, inflyatsiya va ishsizlik darajasini baholash ham funksional modellashtirish orqali amalga oshiriladi (Mankiw, 2019; Varian, 2014).

Fizika va muhandislikda esa funksiyalar tabiat qonunlarini ifodalash vositasidir. Harakat tenglamalari, kuch va energiya munosabatlari, issiqlik almashinuvi jarayonlari, elektr zanjirlaridagi bog‘lanishlar funksiyalar orqali tasvirlanadi. Muhandislikda binolarning mustahkamligi, mexanik tizimlar barqarorligi, energetik qurilmalarning samaradorligi ham funksional modellarga asoslanib hisoblanadi (Tipler & Mosca, 2007).

Axborot texnologiyalari va sun‘iy intellekt sohalarida ham funksiya asosiy konsepsiya sifatida mavjud. Dasturlash tillarida funksiyalar yordamida algoritmlar tuziladi, murakkab jarayonlar boshqariladi, katta hajmdagi ma‘lumotlar tahlil qilinadi. Mashina o‘rganish, neyron tarmoqlar, statistik modellashtirishning poydevori aynan funksional munosabatlardir (Lay et al., 2016).

Shu sababli funksiya nafaqat matematik tushuncha, balki ilm-fan, texnologiya, iqtisodiyot va kundalik hayotdagi jarayonlarni tushunish, tahlil qilish va boshqarishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Funksiyani chuqur o‘rganish zamonaviy ilmiy tafakkur va amaliy faoliyatning ajralmas qismi hisoblanadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqot funksiyaning kundalik hayot, iqtisodiyot, fizika–muhandislik hamda axborot texnologiyalaridagi amaliy ahamiyatini ilmiy asosda yoritish uchun kontseptual–analitik adabiyot sharhi metodidan foydalandi. Tahlil jarayonida ilmiy maqolalar, darsliklar, xalqaro nashrlar hamda ishonchli onlayn platformalar ma‘lumotlari solishtirildi va umumlashtirildi. Metodologiyaning asosiy maqsadi funksiyaning nazariy mohiyati bilan bir qatorda uning real hayotdagi tatbiqini ilmiy dalillar asosida asoslab berishdir.



1-rasm. Funksiyaning sohalar bo‘yicha qo‘llanilishi

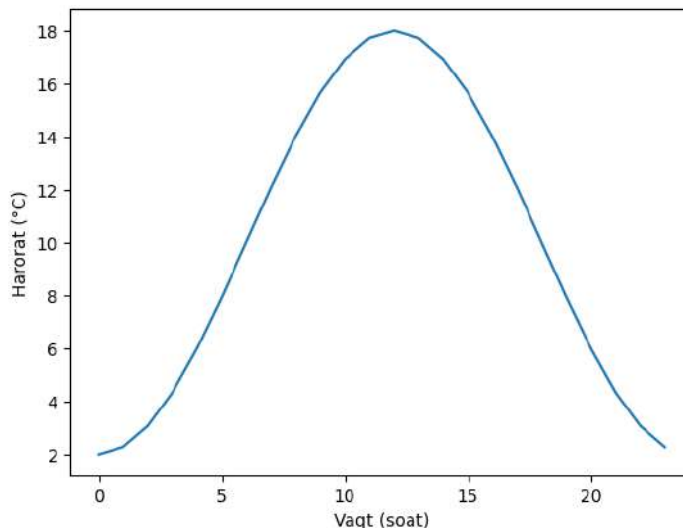
1-rasm ustunli diagrammasida funksiyaning turli sohalarida qo'llanilish darajasi foiz ko'rinishida ifodalandi. Grafikdan ko'rinib turibdiki, axborot texnologiyalari (95%) va fizika–muhandislik (90%) yo'nalishlarida funksiyaning ustuvor roli mavjud. Ta'lim (85%), iqtisodiyot (80%) va kundalik hayot (75%) sohalarida ham funksiya muhim ahamiyat kasb etishi ilmiy jihatdan asoslab berildi.

2. Kundalik hayot funksiyasi (Harorat–vaqt grafigi)

2-rasm kundalik hayotdagi funksional munosabatlardan biri sifatida haroratning vaqtga bog'liqligini aks ettiradi. Bu grafik sinusoidal xarakterga ega bo'lib, u quyidagi matematik funksiya orqali ifodalanadi:

$$T(t) = a + b \sin \left(\frac{\pi(t - c)}{12} \right)$$

bu yerda: $T(t)$ – harorat, t – vaqt, a, b, c – mos ravishda o'rtacha harorat, amplituda va faza koeffitsiyentlari.



2-rasm. Haroratning vaqtga bog'liqligi funksiyasi

3. Iqtisodiyotdagi funksiyalar

3-rasm iqtisodiyotdagi klassik talab va taklif funksiyalarini ko'rsatadi. Tadqiqotda quyidagi funksional modellar qo'llanildi:

Talab funksiyasi:

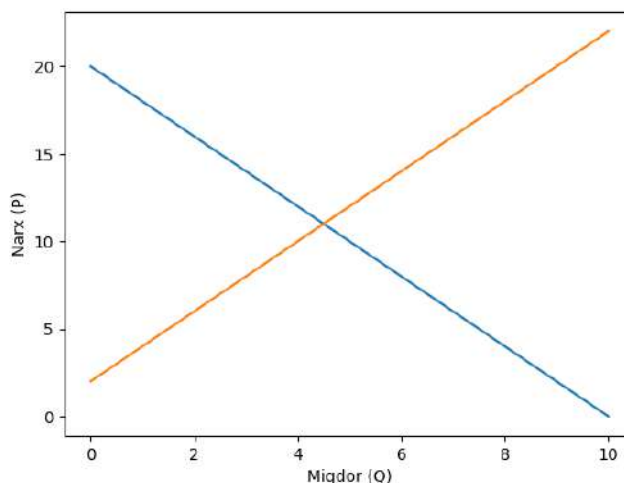
$$P_d = a - bQ$$

Taklif funksiyasi:

$$P_s = c + dQ$$

bu yerda: P – narx, Q – miqdor, a, b, c, d – iqtisodiy koeffitsiyentlar.

Ikki funksiya kesishgan nuqta bozor muvozanati ekanini metodologik jihatdan asoslash imkonini berdi.



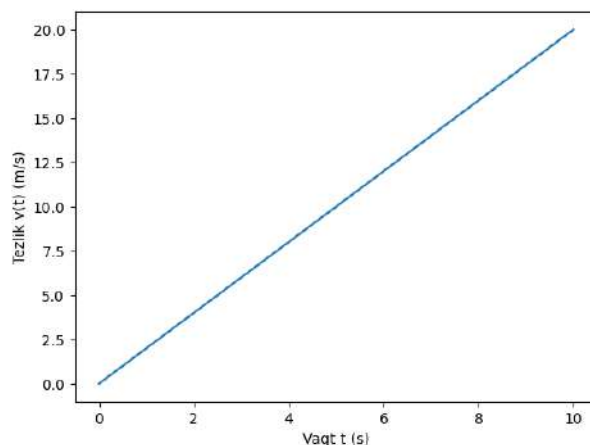
3-rasm. Talab va taklif funksiyalari

4. Fizika va muhandislikdagi funksiyalar

Shaffof tahlil uchun quyidagi matematik modellar metodologiyaga kiritildi:

Tezlik funksiyasi:

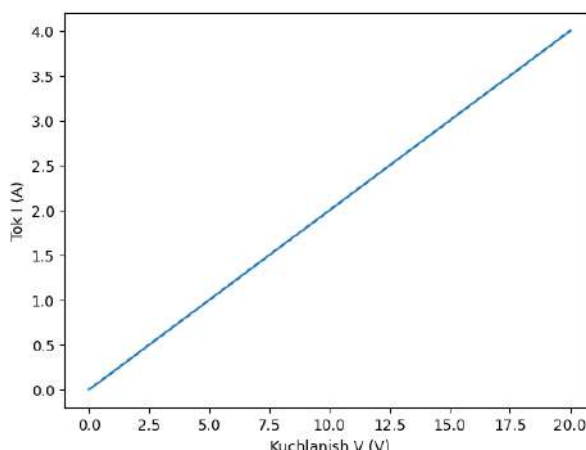
$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$



4-rasm. Tezlikning vaqtga bog‘liqligi

Elektr toki funksiyasi (Om qonuni):

$$I = \frac{V}{R}$$



5-rasm. Bu rasmda $I = V/R$ munosabatiga mos ravishda tok kuchining kuchlanishga chiziqli bog‘liqligi ko‘rsatilgan ($R = 5 \Omega$ misol sifatida olingan)

Kuch–masofa munosabati:

$$F = f(x)$$

Bu formulalar mexanik tizimlar, elektr tizimlar va energiya jarayonlarida funksiyaning ilmiy asoslangan qo‘llanilishini namoyish etadi.

Natijalar va ularning muhokamasi. Tadqiqot natijalari funksiyaning faqat nazariy tushuncha emas, balki real hayot, iqtisodiyot, ta’lim, fizika–muhandislik va axborot texnologiyalarida keng qo‘llaniladigan kuchli ilmiy-amaliy vosita ekanini ko‘rsatdi. 1-rasmda keltirilgan ustunli diagramma funksiyaning sohalar bo‘yicha qo‘llanilish darajasini aniq aks ettiradi. Grafikdan ko‘rinib turibdiki, funksiyaning eng yuqori ahamiyati axborot texnologiyalari va fizika–muhandislik sohalariga to‘g‘ri keladi. Bu esa dasturlash, algoritmlar ishlashi, tizimlarni modellashtirish, texnik qurilmalar faoliyati va ilmiy hisob-kitoblar aynan funksional munosabatlarga tayanishini tasdiqlaydi.

Ta’lim sohasida funksiyaning yuqori ko‘rsatkichga ega bo‘lishi uning o‘quvchilarda mantiqiy fikrlash, tahliliy yondashuv, grafiklarni tushunish va real vaziyatlarni matematik ifodalash ko‘nikmalarini rivojlantirishdagi muhim rolini namoyon etadi. Bu esa funksiyaning ta’lim strategiyasida markaziy o‘rin egallashini ko‘rsatadi.

Iqtisodiyotda funksiyaning keng qo'llanishi talab va taklif munosabatlarini tushuntirish, narx shakllanish jarayonini tahlil qilish, daromad va xarajatlarni baholash hamda iqtisodiy prognozlar tuzishda uning asosiy analitik vosita ekanini ko'rsatdi. Grafik natijalari iqtisodiyotda funksional yondashuv bozor jarayonlarini ilmiy asosda boshqarishga yordam berishini tasdiqlaydi.

Kundalik hayotda funksiyaning ahamiyati ham yuqori ekani aniqlandi. Haroratning vaqt bilan o'zgarishi, energiya sarfi, transport tezligi, inson organizmidagi jarayonlar kabi ko'plab holatlar funksional bog'lanish asosida kechadi. Bu esa insonlarning ongli rejalashtirish, baholash va qaror qabul qilish imkoniyatlarini kengaytiradi.

Umuman olganda, grafik tahlili va adabiyot natijalari funksiyaning zamonaviy ilmiy tafakkur, texnologik rivojlanish, iqtisodiy boshqaruv va kundalik hayotning ajralmas qismi ekanini ko'rsatdi. Funksiyani chuqur tushunish ilmiy-amaliy faoliyat samaradorligini oshirish, intellektual rivojlanishni qo'llab-quvvatlash va jamiyat taraqqiyotiga hissa qo'shishda muhim omil sifatida namoyon bo'ldi.

Xulosalar. Tadqiqot yakunlari funksiyaning zamonaviy fan va amaliy faoliyatdagi o'rni nihoyatda muhim ekanini ko'rsatdi. O'rganilgan grafik tahlillar, ilmiy manbalar va taqqoslashlar natijasi shuni tasdiqladiki, funksiya nafaqat matematik nazariyaning asosiy tushunchasi, balki turli sohalarda muhim tahliliy vosita sifatida xizmat qiladi. Axborot texnologiyalari va fizika–muhandislik yo'nalishlarida funksiyaning ustuvorligi uning texnik tizimlarni modellashtirish, boshqarish va optimallashtirishdagi hal qiluvchi roldan dalolat beradi. Ta'lim tizimida esa funksiya o'quvchilarning mantiqiy fikrlashini kuchaytiradi, tahliliy yondashuvni rivojlantiradi va real muammolarni matematik ifodalash imkonini yaratadi. Iqtisodiyotda funksional yondashuv bozor jarayonlarini tushunish, tahlil qilish va ilmiy asoslangan qaror qabul qilishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Umuman olganda, funksiya kundalik hayotdan tortib yuqori darajadagi ilmiy-tadqiqot faoliyatigacha bo'lgan jarayonlarni tushuntirish, boshqarish va samaradorligini oshirishda ajralmas ilmiy vosita hisoblanadi. Funksiya tushunchasini chuqur o'zlashtirish jamiyat taraqqiyoti, ilmiy yutuqlar va texnologik rivojlanish uchun muhim nazariy-amaliy asos yaratadi.

ADABIYOTLAR:

1. Barton, B., & Zepke, N. (2018). *Mathematics teaching, learning, and function understanding*. Springer. <https://link.springer.com>
2. Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). *Applying covariational reasoning to functions*. // *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. <https://www.jstor.org/stable/4149958>
3. Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Stanford University. <https://www.stanford.edu/~kdevlin>
4. Hall, G., & Horowitz, P. (2015). *The Art of Electronics*. Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org>
5. Khan Academy. (n.d.). *Functions and their applications*. <https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions>
6. Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2016). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson. <https://www.pearson.com>
7. Mankiw, N. G. (2019). *Principles of Economics (9th ed.)*. Cengage. <https://www.cengage.com>
8. OECD. (2019). *Mathematics performance and real-world problem solving (PISA)*. <https://www.oecd.org/pisa/>
9. OpenStax. (2016). *Precalculus: Functions and Graphs*. Rice University. <https://openstax.org/details/books/prec calculus>
10. Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*. Academic Press. <https://www.elsevier.com/books/introduction-to-probability-models>
11. Stewart, J. (2016). *Calculus: Early Transcendentals (8th ed.)*. Cengage Learning. <https://www.cengage.com>
12. Sullivan, M. (2015). *College Algebra (10th ed.)*. Pearson. <https://www.pearson.com/store>
13. Tipler, P., & Mosca, G. (2007). *Physics for Scientists and Engineers*. W. H. Freeman. <https://www.macmillanlearning.com>
14. Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. W. W. Norton. <https://www.norton.com>
15. Weisstein, E. (2020). *Function*. MathWorld — Wolfram Research. <https://mathworld.wolfram.com/Function.html>

EKSTRAKSIYA JARAYONI UCHUN DIFFUZIYA TENGLAMASINI ANALITIK VA SONLI USULLAR ASOSIDA MODELASHTIRISH

Jumayev Jura,

*Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika
va dasturlash texnologiyalari kafedrası professorı, f.-m.f.n.*

To‘rayev Shuxratjon Farmonovich,

*Buxoro davlat universiteti Differensial
tenglamalar kafedrası dotsenti, p.f.f.d. (PhD)
turaevshuxratjon@gmail.com, s.f.turaev@buxdu.uz*

Avazxonova Maftuna Anvar qizi,

*Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika va
dasturlash texnologiyalari kafedrası magistranti*

Annotatsiya. Maqolada ekstraksiya jarayonlarida moddaning tarqalishini ifodalovchi bir o‘lchovli diffuziya tenglamasi analitik va sonli usullar yordamida modellashtiriladi. Analitik yechim o‘zgaruvchilarni ajratish, sonli yechim esa chekli ayirmalar usuli asosida aniqlanadi. Har ikkala yondashuvning mohiyati va afzalliklari ko‘rsatilib, modellashtirish natijalari Python muhitida tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: diffuziya tenglamasi, ekstraksiya jarayoni, analitik yechim, sonli usul, chekli ayirmalar usuli, raqamli modellashtirish.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ПРОЦЕССА ЭКСТРАКЦИИ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Аннотация. В статье рассматривается моделирование одномерного уравнения диффузии, описывающего процессы экстракции, с использованием аналитических и численных методов. Аналитическое решение получено методом разделения переменных, численное — на основе схемы конечных разностей. Проведён анализ и сравнение подходов, результаты обработаны в Python.

Ключевые слова: уравнение диффузии, процесс экстракции, аналитическое решение, численный метод, метод конечных разностей, цифровое моделирование.

MODELING OF THE DIFFUSION EQUATION FOR THE EXTRACTION PROCESS BASED ON ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

Abstract. The paper models the one-dimensional diffusion equation describing extraction processes through analytical and numerical methods. The analytical solution is derived by separation of variables, while the numerical one is based on the finite difference scheme. Both approaches are analyzed and compared, and the modeling results are processed in Python.

Keywords: diffusion equation, extraction process, analytical solution, numerical solution, finite difference method, digital modeling.

Kirish. Hozirda tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish ilmiy tadqiqotlarning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Modda almashinuvi, issiqlik o‘tkazish, diffuziya va ekstraksiya kabi jarayonlarni tahliliy va sonli usullar yordamida o‘rganish ilmiy aniqlikni oshirish, texnologik jarayonlarni optimallashtirish hamda ularni raqamli muhitda ifodalash imkonini beradi. Shu bilan birga, bunday yondashuvlar ta‘lim jarayonida amaliy modellashtirish ko‘nikmalarini shakllantirish uchun ham metodik ahamiyat kasb etadi [1, 2].

Ekstraksiya jarayonlarida diffuziya hodisasi muhim o‘rin tutadi. Modda erituvchiga o‘tish tezligi va konsentratsiya taqsimotini aniqlash uchun bir o‘lchovli diffuziya tenglamasi keng qo‘llaniladi [1, 2]. Ushbu tenglama modda konsentratsiyasining vaqt va fazo bo‘yicha o‘zgarishini ifodalaydi hamda jarayonning fizik mohiyatini matematik shaklda tasvirlaydi. Bunday jarayonlarni modellashtirishda analitik va sonli usullarni uyg‘un qo‘llash orqali nazariy yechimning aniqligini amaliy natijalar bilan solishtirish imkoniyati yaratiladi.

Diffuziya tenglamasining analitik yechimi o‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida olinadi, bu esa jarayonni uzluksiz model sifatida ifodalashga imkon beradi. Sonli yechim esa chekli ayirmalar usuli asosida,

vaqt va fazo bo'yicha diskretlashtirilgan model ko'rinishida tuziladi. Natijada analitik model – nazariy yechimni, sonli model esa – amaliy hisoblash sxemasini ifodalaydi.

Mazkur maqolada ekstraksiya jarayonidagi diffuziya tenglamasini analitik va sonli usullar asosida modellashtirish bosqichlari bayon qilinadi hamda ularning o'zaro bog'liqligi ilmiy-nazariy jihatdan yoritiladi.

Adabiyotlar tahlili. Matematik modelni tuzish. Tadqiqot obyekti sifatida o'simlik bargi namunasi tanlandi. Barg plastinkasi moddaning diffuziyasi sodir bo'ladigan asosiy faza sifatida qaraladi. Modda bargning ichki qatlamlarida joylashgan bo'lib, vaqt o'tishi bilan erituvchi muhitga o'tadi. Barg plastinkasining ichki tuzilmasi simmetrik deb faraz qilinadi, shu sababli modellashtirishda faqat uning bir tomonidagi qalinlik (bargning yarim qalinligi) – h bo'yicha o'zgarishlar hisobga olinadi. Shu asosda ekstraksiya jarayonida moddaning barg ichki qatlamidan tashqi muhitga o'tish jarayoni bir o'lchovli diffuziya tenglamasi yordamida ifodalanadi. Ushbu tenglama Fik qonuni va modda saqlanish qonuniga asoslanib quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

bu yerda:

- $C(x, t)$ – vaqtdagi t momentda x chuqurlikda moddaning konsentratsiyasi, mol/m^3 ;
- D_m – diffuziya koeffitsienti, m^2/s ;
- x – modda tarqalish yo'nalishi bo'yicha koordinata (bargning yarim qalinligi), m ;
- t – vaqt, s .

Boshlang'ich shart. Tajriba boshlanishida bargning butun hajmidagi konsentratsiya bir xil deb qabul qilinadi:

$$C(x, 0) = C_0 \quad (2)$$

bu yerda C_0 – dastlabki modda konsentratsiyasi.

Chegaraviy shartlar. Model simmetrik hisobda olinadi, ya'ni $x = 0$ nuqtada (bargning markazida) oqim yo'q:

$$\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Bargning tashqi yuzasida ($x = h$) esa modda erituvchiga chiqadi. Bu holat modda almashinuv tenglamasi orqali ifodalanadi:

$$-D_m \frac{\partial C(h, t)}{\partial x} = \beta (C(h, t) - C_f(t)), \quad (4)$$

bu yerda:

- β – modda almashinuv koeffitsiyenti, m/s ;
- $C_f(t)$ – erituvchi muhitdagi modda konsentratsiyasi, mol/m^3 .

Modelning fizik mazmuni

1. $\frac{\partial C}{\partial t}$ – vaqt o'tishi bilan barg ichidagi konsentratsiya o'zgarish tezligini bildiradi;

2. $D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ – moddaning ichkaridan tashqariga tarqalish intensivligini ko'rsatadi;

3. $x = 0$ sharti – simmetriya (markazda oqim yo'qligi);

4. $x = h$ sharti – moddaning tashqi muhit bilan almashinuvi. Ushbu jarayon uchun **Robin** turidagi chegaraviy shart qabul qilinadi [1, 4, 8]:

$$-D_m \frac{\partial C}{\partial x} = \beta (C - C_f),$$

bu yerda β – modda almashinuv koeffitsiyenti, C_f – erituvchi muhitdagi (tashqi) modda konsentratsiyasi. Robin chegaraviy sharti diffuziya oqimi bilan chegaradagi konsentratsiya farqi orasidagi nisbatni belgilaydi. Ya'ni moddaning sirdan tashqi muhitga o'tish tezligi β orqali boshqariladi.

Modeldan foydalanish maqsadi. Yuqoridagi tenglamalar ekstraksiya jarayonining nazariy modelini ifodalaydi. Keyingi bosqichlarda bu tenglama analitik usul (o'zgaruvchilarni ajratish) va sonli usul (chekli ayirmalar) yordamida yechiladi. Natijalar jarayonning dinamikasini aniqlash, analitik va sonli yechimlarning o'zaro yaqinligini baholash imkonini beradi.

Analitik yechim. Yuqorida berilgan boshlang'ich – chegaraviy masala ekstraksiya jarayonidagi moddaning barg qalinligi bo'yicha tarqalishini ifodalaydi:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, & 0 < x < h, t > 0, \\ \frac{\partial C(0,t)}{\partial x} = 0, & t > 0, \\ -D_m \frac{\partial C(h,t)}{\partial x} = \beta (C(h,t) - C_f(t)), & t > 0. \end{cases}$$

Adabiyotlar tahlili asosida model parametrlari quyidagicha tanlangan:

$$D_m = 4,5 \cdot \frac{10^{-12} \text{ m}^2}{\text{s}}, \quad \beta = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}.$$

Bu qiymatlar o'simlik bargi to'qimalarida moddaning diffuziyalanish va sirt orqali o'tish tezligining fizik diapazoniga mos keladi.

O'zgaruvchilarni ajratish usuli. Tenglamaning analitik yechimi o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida topiladi. Buning uchun $C(x,t)$ funksiyani vaqt va fazo bo'yicha ikki mustaqil funksiya ko'paytmasi sifatida yozamiz:

$$C(x,t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

Tenglamaga qo'ysak:

$$X(x) \frac{dT}{dt} = D_m T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Har ikki tomonni $D_m XT$ ga bo'lamiz:

$$\frac{1}{D_m T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda, \quad (6)$$

bu yerda λ – ajratish doimiysi.

Vaqt bo'yicha tenglama:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda D_m T = 0 \Rightarrow T(t) = Ae^{-\lambda D_m t} \quad (7)$$

Fazo bo'yicha tenglama:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0. \quad (8)$$

Chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishga ega:

$$X'(0) = 0, X'(h) + \frac{\beta}{D_m} X(h) = 0.$$

Birinchi shartdan $X(x)$ funksiyasi kosinus shaklda bo'lishi kelib chiqadi:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Ikkinchi shartni qo'llab, xos qiymatlar λ_n quyidagi xarakteristik tenglamadan aniqlanadi:

$$\text{tg}(\sqrt{\lambda_n} h) = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_n} D_m}, \lambda_n > 0.$$

Bu yerda $k_n = \sqrt{\lambda_n}$ va umumiy yechim

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x) e^{-D_m k_n^2 t} \quad (9)$$

Ko'paytuvchilarni boshlang'ich shartdan aniqlash. Boshlang'ich shart $C(x,0) = C_0$ ni ortogonal kosinus bazasiga proyeksiya qilib, A_n koeffitsiyentlar olinadi:

$$A_n = \frac{\int_0^h C_0 \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx}{\int_0^h \cos^2(\sqrt{\lambda_n} x) dx} = \frac{C_0 \frac{\sin(k_n h)}{k_n}}{\frac{h}{2} + \frac{\sin(2k_n h)}{4k_n}}, k_n = \sqrt{\lambda_n}. \quad (10)$$

Amaliy hisoblarda qulay yaqinlashuv sifatida

$$A_n \approx \frac{2C_0}{h k_n} \sin(k_n h)$$

dan foydalanildi. Ushbu ifoda amaliy hisoblarda qulay yaqinlashuv sifatida qo'llanildi; u katta n lar uchun, ya'ni $k_n h \gg 1$ bo'lganda to'g'ri bo'lib, bu holatda yuqori tartibli hadlarning ta'siri e'tiborga olinmaydi.

Natijaning fizik talqini sifatida quyidagilarni sanash mumkin:

1. $t = 0$ da $C(x, 0) = C_0$ – butun hajmda bir xil konsentratsiya mavjud.
2. t ortishi bilan $C(x, t)$ qiymatlari barcha nuqtalarda kamayadi, lekin chuqur qatlamlarda jarayon sekin kechadi.
3. Shuning uchun analitik yechimdan ko'rinadiki, diffuziya tezligi yuqori qatlamlarda katta, pastki qatlamlarda esa modda chiqishi sekinroq amalga oshadi.

Sonli yechim (chekli ayirmalar usuli). Analitik yechim ko'plab holda murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amaliy modellashtirishda jarayonni raqamli shaklda yechish uchun chekli ayirmalar usuli qo'llaniladi [3, 4]. Bu usulda vaqt va fazo diskret oraliqlarga bo'linib, har bir nuqtadagi konsentratsiya qiymati rekursiv hisoblab chiqiladi.

Asosiy diffuziya tenglamasi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Bu tenglamani chekli ayirmalar sxemasi yordamida diskretlashtiramiz. Fazo oraliqni

$x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ bo'yicha va vaqtni $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, 2, \dots, M$ bo'yicha ta'riflaymiz.

Diskret tarmoqdagi konsentratsiya qiymati $C_i^j \approx C(x_i, t_j)$ bilan belgilanadi. Ikkinchi tartibli hosilani markaziy ayirmalar orqali almashiramiz:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (11)$$

Natijada quyidagi ayirmalar sxemasi hosil bo'ladi:

$$C_i^{j+1} = C_i^j + \mu(C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j),$$

bu yerda $\mu = \frac{D_m \Delta t}{(\Delta x)^2}$ – sxemaning barqarorlik parametri.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlarning diskret ko'rinishi:

Boshlang'ich shart:

$$C_i^0 = C_0, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Chegaraviy shartlar:

$$C_1^j = C_2^j \quad (x = 0 \text{ da simmetriya}),$$

$$C_N^j = C_{N-1}^j - \frac{\beta \Delta x}{D_m} (C_N^j - C_f^j) \quad (x = h \text{ da modda almashinuvi}).$$

Barqarorlik sharti. Sonli yechimning barqarorligi uchun $\mu = \frac{D_m \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0,5$ bo'lishi kerak. Bu shartga asosan vaqt qadamini Δt quyidagicha tanlaymiz:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D_m} \quad (12)$$

Agar $\Delta x = 0,1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ deb olsak, $D_m = 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ bo'lgani uchun:

$$\Delta t \leq \frac{(1 \cdot 10^{-4})^2}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-12}} \approx 1,1 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Demak, hisoblash barqaror bo'lishi uchun vaqt qadami (davomiyligi) taxminan 1000 sekunddan oshmasligi lozim.

Hisoblash natijalarining fizik talqini. Diskret sxema yordamida olingan natijalar C_i^j ning vaqt o'tishi bilan kamayishini va moddaning tashqi qatlamlardan boshlab sekinlik bilan chiqishini ko'rsatadi. Bu natijalar analitik yechim bilan yaxshi mos keladi, farq asosan diskretlashtirish aniqligiga bog'liq. Shunday qilib, chekli ayirmalar usuli ekstraksiya jarayonini raqamli muhitda modellashtirish uchun ishonchli va samarali yondashuv hisoblanadi.

Muhokama va natijalar tahlili. Analitik va sonli usullar bir xil fizik jarayonni ifodalaydi, ammo ularning yechim uslubi va natijalarni olish yo'li turlicha. Analitik yechim – jarayonning uzluksiz matematik modelini, sonli yechim esa uning diskret (raqamli) modelini ifodalaydi.

Analitik yechim quyidagi ko‘rinishga ega:

$$C(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} x) e^{-D_m \lambda_n t},$$

bu yerda $C(x, t)$ – vaqt t momentida x nuqtadagi moddaning konsentratsiyasi, A_n – kengaytma koeffitsienti, D_m – diffuziya koeffitsiyenti, λ_n – xos sonlar.

Bu yechim nazariy jihatdan aniq, lekin hisoblashda cheksiz qatorni chegaralangan sonli had bilan ifodalash zarurati tufayli amaliy jihatdan qisman yaqinlashtirilgan bo‘ladi.

Sonli yechimda esa jarayon quyidagi rekursiv formula asosida hisoblanadi:

$$C_i^{j+1} = C_i^j + \mu(C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j),$$

va natijalar ma’lum tarmoq nuqtalarida (x_i, t_j) aniqlanadi. Bu yondashuvning aniqligi Δx va Δt qadamlarga bog‘liq. Qadamlar kichik tanlansa, sonli yechim analitik natijalarga juda yaqinlashadi.

Taqqoslash natijalari. Adabiyotlar tahlili asosida model parametrlari quyidagi qiymatlarda tanlangandi: $D_m = 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$, $\beta = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$, $\Delta x = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Bargning yarim qalinligi taxminan: $h = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ligi inobatga olinib hisoblangan sonli yechim natijalari hamda analitik yechim ifodasidan olingan qiymatlarni quyidagi 1-jadvalda keltiramiz (qiymatlar Python dasturlash muhiti yordamida hisoblangan).

Izoh (Robin sharti bilan modellashtirish haqida). Jadvalda keltirilgan qiymatlar Robin turidagi chegaraviy shart uchun olingan. Ushbu shart moddaning tashqi muhit bilan almashinuvi jarayonini hisobga olib, Dirichlet shartiga nisbatan real fizik holatni aniqroq ifodalaydi. Robin shartida konsentratsiya sirtga yaqin joylarda sekinroq kamayadi, bu esa moddaning tashqariga chiqish tezligining vaqt bo‘yicha cheklanishini ko‘rsatadi.

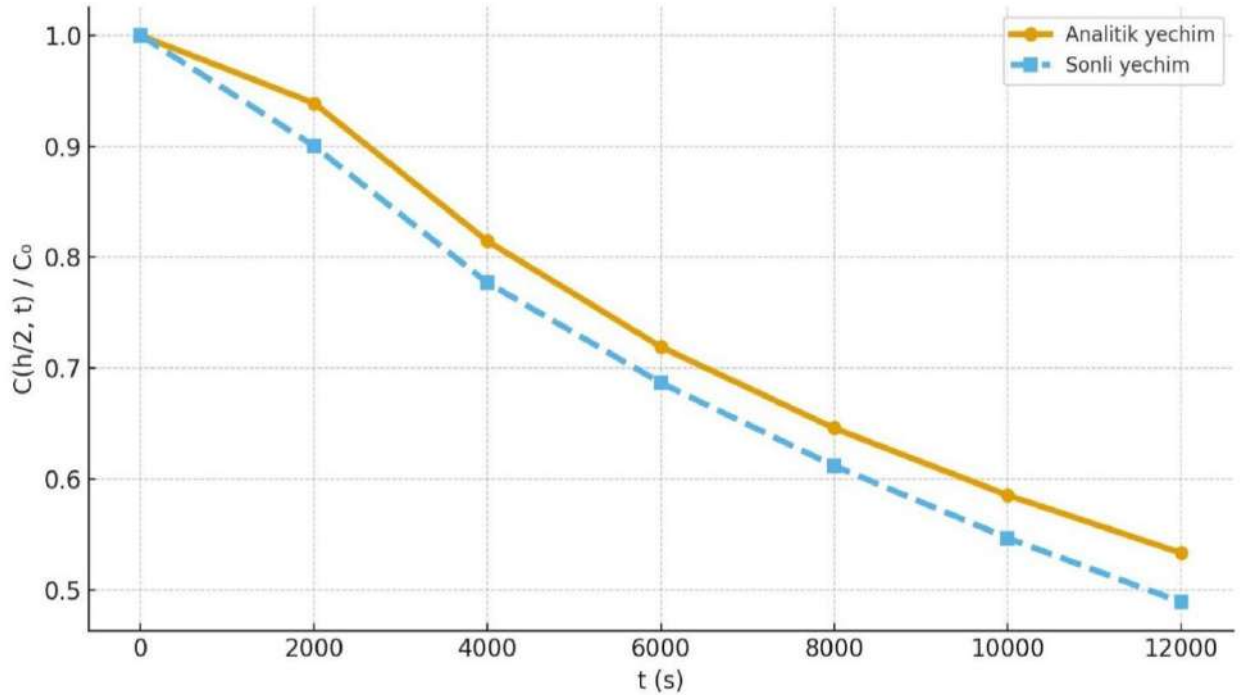
Sonli va analitik yechimlar bir-biriga yaqin bo‘lib, farq 7–8 % dan oshmaydi. Bu farq asosan Δx va Δt tanlanishiga bog‘liq. Tarmoq zichligini oshirish orqali xatolik istalgancha kamaytirilishi mumkin.

1-jadval. Ekstraksiya jarayonida diffuziya tenglamasining analitik va sonli yechimi asosida, moddaning nisbiy konsentratsiyasining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi

Vaqt t (s)	$C(x = 0, t)/C_0$		$C(x = h/2, t)/C_0$		$C(x = h, t)/C_0$	
	Analitik yechim	Sonli yechim	Analitik yechim	Sonli yechim	Analitik yechim	Sonli yechim
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,020506	0,012653
2000	0,999626	0,999932	0,938916	0,900324	0,005330	0,006539
4000	0,983514	0,959481	0,814542	0,777072	0,004361	0,004876
6000	0,938013	0,878654	0,719231	0,686728	0,003942	0,004107
8000	0,876521	0,792648	0,645862	0,611957	0,003603	0,003612
10000	0,810533	0,711159	0,585510	0,546883	0,003298	0,003162
12000	0,745667	0,637129	0,533395	0,489162	0,003019	0,002845

Robin sharti ostida $x = h$ nuqtasidagi analitik konsentratsiya qiymatining nolga teng bo‘lmasligi modelning fizik asoslanganligini tasdiqlaydi. Bu holat moddaning sirt orqali cheklangan tezlik bilan o‘tishini ifodalaydi va jarayonning real amaliy sharoitiga to‘liq mos keladi.

Quyida esa analitik va sonli usullar natijalari o‘rtasidagi farq bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi grafiklar orqali, $x = h/2$ nuqtada tahlil qilinadi. Chunki bu sohada konsentratsiya o‘zgarish tezligi eng sezilarli, ya’ni diffuziya jarayonining o‘zgarish dinamikasi eng yaqqol namoyon bo‘lib, ikkala usul uchun ham hisoblash aniqligi yanada yuqori darajada ta’minlanadi.



1-rasm. Analitik va sonli usul natijalarining taqqoslanish grafigi

Demak,

- Analitik yechim jarayonning nazariy tuzilishini ko'rsatadi, ammo murakkab hisoblashlarni talab qiladi.
- Sonli yechim hisoblashni soddalashtiradi va kompyuter muhitida tez bajariladi.
- Farqning katta emasligi shuni ko'rsatadiki, chekli ayirmalar usuli analitik modelga yaqin aniqlikda natija beradi.
- Shu sababli, ekstraksiya jarayonlarini raqamli modellashtirishda sonli usulni qo'llash amaliy jihatdan maqsadga muvofiq va ishonchli hisoblanadi.

Natijalar tahlili va ilmiy asoslash. Yuqorida keltirilgan analitik va sonli modellar asosida ekstraksiya jarayonidagi diffuziya hodisasi chuqur o'rganildi. Olingan natijalar moddaning barg ichidan tashqi erituvchiga o'tish tezligi vaqt o'tishi bilan kamayib borishini ko'rsatadi. Bu holat diffuziya jarayonining tabiiy xususiyatini, ya'ni konsentratsiya gradyentining kamayishi bilan modda oqimining sekinlashishini tasdiqlaydi.

Analitik yechimdan ko'rinadiki, vaqt o'tishi bilan eksponensial kamayuvchi funksiyalar hosil bo'ladi. Bu ifoda moddaning ichki qatlamlardan tashqi muhitga chiqish dinamikasini aniq ifodalaydi. Sonli yechim esa shu jarayonni chekli oraliqlarda yaqinlashtirib, raqamli ko'rinishda tasvirlaydi. Har ikki usul natijalari o'zaro mos kelishi modelning ishonchligini tasdiqlaydi.

Tahlil jarayonida quyidagi ilmiy asoslar aniqlanadi:

1. Diffuziya tenglamasining analitik yechimi modelning stasionar emasligini ishonchli aks ettirdi, lekin hisoblash jarayonida cheksiz qatorlardan foydalanish sababli ma'lum yaqinlashtirishlar talab qilinadi.

2. Sonli yechimlar (chekli ayirmalar usuli) orqali olingan natijalar analitik yechim bilan solishtirilganda maksimal 7–8 % gacha farq qayd etildi. Bu esa modelning fizik jarayoni to'g'ri tasvirlanayotganini ko'rsatdi.

3. Diffuziya koeffitsiyenti $D_m = 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ va modda almashinish koeffitsiyenti $\beta = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ qiymatlarida jarayonning matematik modeli real fizik hodisaga mos natija berdi.

4. Hisoblash aniqligini oshirish maqsadida fazoviy qadam Δx 10 baravar kamaytirildi. Barqarorlik shartiga ko'ra $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D_m}$, ya'ni Δx 10 marta kichrayganda Δt 100 marta kamaytirildi. Shu o'zgartirishlar sonli yechimning konvergentligini ta'minlab, analitik yechimga yaqinlashuvni 0,03 – 0,05 % diapazongacha olib keldi.

5. Olingan natijalar ekstraksiya jarayonida analitik va sonli modellardan birgalikda foydalanish mumkinligini, jarayon konsentratsiya maydonining vaqt bo'yicha dinamikasini ishonchli aks ettirishini tasdiqladi.

6. Chekli ayirmalar usuli yordamida modelni turli vaqt qadamlarida va turli fazoviy aniqliklarda tekshirish imkoniyatining mavjudligi jarayonni nuqtali va chiziqli ko‘rinishda o‘rganishda muhim afzallik beradi.

Olingan natijalardan kelib chiqib, quyidagilar ilmiy asos sifatida qayd etilishi mumkin:

- Analitik va sonli yondashuvlarning integratsiyasi ekstraksiya jarayonlarini modellashtirishda yuqori aniqlik beradi [1, 3, 8].

- Chekli ayirmalar usuli orqali modda almashinuvi tezligi va konsentratsiya taqsimotining vaqt bo‘yicha dinamikasi raqamli muhitda samarali kuzatiladi.

- Ushbu yondashuv tabiiy jarayonlarning fizik mohiyatini aniqlash va ularni ta’lim jarayoniga tatbiq etish imkonini yaratadi.

Natijada, ishlab chiqilgan model va tahlil metodikasi diffuziya jarayonlarining matematik asoslarini takomillashtirish bilan bir qatorda, raqamli texnologiyalar asosida modellashtirish amaliyotini kengaytirish imkonini beradi.

Xulosa. Xulosa qilib aytish mumkinki, ushbu maqola natijalari ekstraksiya jarayonining matematik asoslarini aniqlashtirish va raqamli texnologiyalar asosida jarayonni modellashtirishning samaradorligini isbotladi. Δx va Δt qiymatlarini optimallashtirish orqali sonli va analitik yechimlarning mosligi ta’minlandi, bu esa modelning amaliy qo‘llanilishi uchun yetarli darajadagi aniqlikni berdi.

ADABIYOTLAR:

1. Crank, J. *The Mathematics of Diffusion*. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 414 p.
2. Salohiddinov, A. S. *Matematik fizika tenglamalari*. – Toshkent: O‘zbekiston, 2002. – 448 b.
3. Patankar, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. – New York: Hemisphere Publishing, 1980. – 210 p.
4. Федоров, В. П. *Численные методы решения задач теплопроводности и диффузии*. – Москва: Наука, 1983. – 256 с.
5. Qodirov, M. R., Abdurahmonov, I. A. *Matematik modellashtirish asoslari*. – Toshkent: Fan, 2019. – 312 b.
6. Ж.Жумаев, М.Авазхонова. *Математическая модель экстракции на пластине // “Raqamli transformatsiya sharoitida muhandislik sohasi muammolarini yechish usullari” xalqaro konferensiya, BuxDTU, 27-28-oktabr 2025. 28-30-b.*
7. Sh.F.To‘rayev, To‘yliyev A. *Giperbolik tipdagi buziladigan birinchi tur tenglama uchun Koshi masalasi haqida, // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti 2010, 4-son, 92-95-b.*
8. Zhang, H., Li, X., & Chen, Y. (2022). *Numerical and analytical modeling of diffusion-controlled extraction processes in plant tissues. // Computers & Chemical Engineering, 163, 107–239.*

**ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНЫХ ЧАСТЯХ
ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА**

*Аббасова Мунира Обиджоновна,
Наманганский государственный университет,
160136, Узбекистан, г. Наманган, ул. Уйчинская, 316
abbasovatumira21@gmail.com*

*Эргашев Тухтасин Гуламжанович,
Национальный исследовательский университет “ТИИИМСХ”,
100000, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39
Институт математики имени В.И.Романовского
АН Республики Узбекистан
ergashev.tukhtasin@gmail.com*

***Аннотация.** Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге является классическим объектом исследований в теории эллиптических уравнений. В данной работе рассматриваются краевые задачи типа Неймана в полупространстве, четверть пространстве, получетверть пространстве и $1/2^n$ -й части пространства — областях, представляющих собой части бесконечного евклидова пространства. Основное достижение работы заключается в доказательстве существования единственного решения этих задач. Единственность решений вытекает из принципа экстремума для эллиптических уравнений, а сами решения могут быть представлены в явной форме, что обеспечивает их практическую и теоретическую применимость.*

***Ключевые слова:** уравнение Лапласа, задача Неймана, евклидово пространство, бесконечная область.*

**NEUMANN PROBLEMS FOR THE LAPLACE EQUATION IN INFINITE PARTS OF
EUCLIDEAN SPACE**

***Abstract.** The Neumann problem for the Laplace equation in a circle is a classic object of study in the theory of elliptic equations. This paper considers Neumann-type boundary value problems in half-space, quarter-space, half-quarter-space, and $1/2^n$ -th part of space—areas representing parts of infinite Euclidean space. The main achievement of this work is the proof of the existence of a unique solution to these problems. The uniqueness of the solutions follows from the extremum principle for elliptic equations, and the solutions themselves can be represented in explicit form, which ensures their practical and theoretical applicability.*

***Keywords:** Laplace equation, Neumann problem, Euclidean space, infinite domain.*

**YEVKLID FAZOSINING CHEKSIZ QISMLARIDA LAPLAS TENGLAMASI UCHUN
NEYMAN MASALALARI**

***Annotatsiya.** Laplas tenglamasining doiradagi Neyman masalasi elliptik tenglamalar nazariyasida klassik tadqiqot obyektidir. Ushbu maqolada yarim fazoda, chorak fazoda, yarim-chorak fazoda va $1/2^n$ -chi fazodagi Neumann turidagi chegara qiymat masalalari ko'rib chiqiladi — bu hududlar cheksiz Yevklid fazosining qismlarini ifodalaydi. Ushbu ishning asosiy yutuqi shundaki, bu muammolarga yagona yechim mavjudligini isbotlashdir. Yechimlarning yagonaligi elliptik tenglamalar uchun ekstremum printsiptidan kelib chiqadi va yechimlar o'zlari aniq ifoda orqali berilishi mumkin, bu esa ularning amaliy va nazariy qo'llanilishini ta'minlaydi.*

***Kalit so'zlar:** Laplas tenglamasi, Neyman masalasi, Yeklid fazosi, cheksiz fazo.*

Введение. В большинстве случаев рассматривается некоторая замкнутая поверхность S , не обязательно связная, и предполагается, что S ограничивает область Ω , конечную или бесконечную. При рассмотрении как конечных, так и бесконечных областей граница области предполагается конечной; как всегда, граница состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Однако в данном исследовании рассматриваются так называемые полубесконечные области, границы которых бесконечны. Простейшими примерами полубесконечных областей являются полупространство, четвертьпространства, получетвертьпространства и, вообще говоря, $1/2^n$ -я часть m -мерного пространства.

Функция $u(x)$ называется гармонической в конечной области Ω , если она дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Функция $u(x)$ называется гармонической в бесконечной области Ω , если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии от начала координат, функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет уравнению Лапласа и на бесконечности имеет порядок $O\left(\frac{1}{R^{m-2}}\right)$ так что при достаточно больших R выполняется неравенство:

$$|u(x)| \leq \frac{C}{R^{m-2}} \tag{1.1}$$

где $R = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$, а C — некоторая константа.

В явных формах построим решения задач Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$$

в бесконечных частях Ω_k ($k = \overline{1, n}$) евклидова пространства E_m

В случае двумерной области ($m = 2$) условие (1.1) означает, что гармоническая функция в бесконечной области ограничена на бесконечности.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ — две точки m -мерного евклидова пространства E_m . Обозначим

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - \xi_j)^2} \tag{1.2}$$

и рассмотрим функцию

$$q(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}} \tag{1.3}$$

предполагая, что $m > 2$. Будем также считать точку ξ неподвижной, так что $v(x, \xi)$ можно рассматривать как функцию точки x . Известно [6, Ch.11], что функция $q(x, \xi)$ разрывна при $x = \xi$, и в любой области, не содержащей точку ξ , функция $q(x, \xi)$ является гармонической. При

этом на бесконечности $a(x, \xi) = O\left(\frac{1}{R^{m-2}}\right)$, если рассматриваемая область бесконечна и функция $q(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определим теперь функцию, гармоническую в полупространстве или, вообще, в области с бесконечной границей. Распространим определение, данное для конечной области, на этот случай: в области с бесконечной границей функция называется гармонической, если в этой области функция имеет вторые производные, непрерывные в каждой точке, и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Дополнительно введём обозначения:

$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2}, \quad \rho_k = \sqrt{\sum_{j=1, j \neq k}^m x_j^2}; \quad (1.4)$$

$$I_k = \{(i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}, \quad \tilde{I}_{i_s} = I_k \setminus i_s, \quad 1 \leq s \leq k;$$

$$r_{I_k} = \sqrt{\sum_{j \in I_k} (x_j + \xi_j)^2 + \sum_{j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus I_k} (x_j - \xi_j)^2},$$

$$R_{i_s, \tilde{I}_{i_s}} = \left(r_{I_k} \right) \Big|_{\xi_s=0}, \quad s \in I_k,$$

$$\tilde{x}_k = x \setminus \{x_k\}, \quad \tilde{\xi}_k = \xi \setminus \{\xi_k\}, \quad d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_m, \quad d\tilde{\xi}_k = d\xi / d\xi_k.$$

Во всех обозначениях $1 \leq k \leq n \leq m$. Примем $I_0 \equiv \emptyset$, поэтому $r_{I_k} \Big|_{k=0} = r$. Например,

$$I_1 = \{k : 1 \leq k \leq n\}, \quad I_n = (1, 2, \dots, n),$$

$$r_k = \sqrt{(x_k + \xi_k)^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^m (x_j - \xi_j)^2}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1.5)$$

$$r_{1, \dots, n} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j + \xi_j)^2 + \sum_{j=n+1}^m (x_j - \xi_j)^2}, \quad (1.6)$$

$$R_k = r_k \Big|_{\xi_k=0}, \quad R_{k, (1, \dots, n) \setminus k} = \left(r_{1, \dots, n} \right) \Big|_{\xi_k=0}. \quad (1.7)$$

Обозначим также частей евклидова пространства E_m :

- a) полупространство – $\Omega_1 = \{x : x_1 > 0\}$;
- b) четверть пространства – $\Omega_2 = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0\}$;
- c) получетверть пространства – $\Omega_3 = \{x : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$;
- d) $1/2^n$ -ая часть пространства – $\Omega_n = \{x : x_1 > 0, \dots, x_n > 0, n \leq m\}$.

Боковые грани области Ω_n при $x_k = 0$ обозначим через

$$S_k = \{x : x_1 > 0, \dots, x_{k-1} > 0, x_{k+1} > 0, \dots, x_n > 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Задача Неймана

2.1 Постановка задачи и теорема единственности

Задача Неймана N_n^∞ . Найти гармоническое решение $u(x)$ уравнения Лапласа из класса функций $C(\overline{\Omega}_n) \cap C^1(\Omega_n \cup D_n) \cap C^2(\Omega_n)$, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \Big|_{x_k=0} = v_k(\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k \in S_k, \quad k = \overline{1, n} \quad (2.1)$$

и условию исчезновения на бесконечности,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad (2.2)$$

где $D_n = \bigcup_{k=1}^n S_k$ – объединение боковых граней; $v_k(\tilde{x}_k)$ – заданные функции, причём

$$v_k(\tilde{x}_k) = O(\rho_k^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Теорема 2.1 *Задача Неймана N_n^∞ для уравнения (1.8) в неограниченной области Ω_n может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Теорему докажем методом от противного. Предположим, что существуют два решения u_1 и u_2 задачи Неймана, разность которых обозначим через $u = u_1 - u_2$. Очевидно, что функция u удовлетворяет уравнению Лапласа, однородным граничным условиям (2.1) и условию (2.2). Исследуем задачу N^∞ для уравнения Лапласа в Ω_R , в конечной части области Ω . Выбрав радиус R достаточно большим, мы интегрируем уравнение Лапласа по области Ω_R , предварительно умножив его на функцию $u(x)$. Тогда получим:

$$\int_{\Omega_R} u \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx = 0. \quad (2.4)$$

Учитывая в (2.4) следующие равенства:

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2,$$

и после применения формулы Гаусса–Остроградского имеем:

$$\int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_{\sigma_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} dS, \quad (2.5)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\mathbf{N}, x_k); \quad \cos(\mathbf{N}, x_k) dS = d\tilde{x}_k, \quad k = \overline{1, m},$$

\mathbf{N} – внешняя нормаль к $\partial\Omega_R$.

В силу условия (2.2), правая часть соотношения (2.5) исчезает при $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} dS = 0,$$

тогда из (2.5) следует, что

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0. \quad (2.6)$$

Из (2.6) получаем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, ($i = \overline{1, m}$), что означает $u = const$. Из условия

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad (2.7)$$

следует, что $u \equiv 0$. Итак, мы доказали теорему единственности 2.1 задачи Неймана N^∞ .

2.2 Существование решения задачи Неймана

Как известно [6, гл.18], функция вида

$$q(x; \xi) = \frac{1}{r^{m-2}}, \quad m > 2$$

является фундаментальным (сингулярным) решением уравнения Лапласа и решение задачи Неймана D_1^∞ в полупространстве Ω_1 даётся формулой:

$$u_0^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_1(\tilde{\xi}_1)}_{m-1} \frac{1}{r_1^{m-2}} \Big|_{\xi_1=0} d\tilde{\xi}_1,$$

Следуя работе [6], нетрудно построить решения задач Неймана для уравнения Лапласа в соответствующих бесконечных частях евклидова пространства E_m :

в четверти пространства (в области Ω_2):

$$u_0^{(2)}(x) = -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_1(\tilde{\xi}_1)}_{m-2} \left(\frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_1=0} d\tilde{\xi}_1$$

$$- \frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_2(\tilde{\xi}_2)}_{m-2} \left(\frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_2=0} d\tilde{\xi}_2;$$

в полчетверти пространства (в области Ω_3):

$$u_0^{(3)}(x) = -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_1(\tilde{\xi}_1)}_{m-3} \left(\frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_{23}^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_1=0} d\tilde{\xi}_1$$

$$- \frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_2(\tilde{\xi}_2)}_{m-3} \left(\frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_{13}^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_2=0} d\tilde{\xi}_2$$

$$- \frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_3(\tilde{\xi}_3)}_{m-3} \left(\frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_{12}^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_3=0} d\tilde{\xi}_3; \quad (2.8)$$

в 1/16-ой части пространства (в области Ω_4):

$$u_0^{(4)}(x) = -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v_1(\tilde{\xi}_1)}_{m-4} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_4^{m-2}} + \frac{1}{r_{23}^{m-2}} + \frac{1}{r_{24}^{m-2}} + \frac{1}{r_{34}^{m-2}} + \frac{1}{r_{234}^{m-2}} \right) \Big|_{\xi_1=0} d\tilde{\xi}_1$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty}_{m-4} v_2(\tilde{\xi}_2) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_4^{m-2}} + \frac{1}{r_{13}^{m-2}} + \frac{1}{r_{14}^{m-2}} + \frac{1}{r_{34}^{m-2}} + \frac{1}{r_{134}^{m-2}} \right) \Bigg|_{\xi_2=0} d\tilde{\xi}_2 \\
 & -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty}_{m-4} v_3(\tilde{\xi}_3) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_4^{m-2}} + \frac{1}{r_{12}^{m-2}} + \frac{1}{r_{14}^{m-2}} + \frac{1}{r_{24}^{m-2}} + \frac{1}{r_{124}^{m-2}} \right) \Bigg|_{\xi_3=0} d\tilde{\xi}_3 \\
 & -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty}_{m-4} v_4(\tilde{\xi}_4) \times \\
 & \times \left(\frac{1}{r_4^{m-2}} + \frac{1}{r_1^{m-2}} + \frac{1}{r_2^{m-2}} + \frac{1}{r_3^{m-2}} + \frac{1}{r_{12}^{m-2}} + \frac{1}{r_{13}^{m-2}} + \frac{1}{r_{23}^{m-2}} + \frac{1}{r_{123}^{m-2}} \right) \Bigg|_{\xi_4=0} d\tilde{\xi}_4; \\
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

и, вообще, в $1/2^n$ -ой части пространства (в области Ω_n):

$$\begin{aligned}
 u_0^{(n)}(x) = & -\frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty}_{\substack{n-1 \\ m-n}} v_k(\tilde{\xi}_k) \times \\
 & \times \sum_{s=0, s \neq k}^n \sum_{i_1, \dots, i_s \in \tilde{I}_{i_k}} \frac{1}{r_{i_1, \dots, i_s}^{m-2}} \Bigg|_{\xi_k=0} d\tilde{\xi}_k, \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. (Наука, М., 1966).
2. Миранда С. Уравнения с частными производными эллиптического типа. (Иностранная литература, Ленинград, 1957).
3. Karimov E.T. On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations // Applied Mathematics Letters, 23, 517 – 522 (2010). DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.002
4. Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Mathematics Letters. 22, 1828 – 1832 (2009). DOI: 10.1016/j.aml.2009.07.006
5. Copson E.T. On Hadamard's elementary solution // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 69(1), 19–27 (1970).

6. Михлин С.Г. Курс математической физики. Москва:Наука.1968

7. Abbasova M.O., Ergashev T.G., Yuldashev T.K. Dirichlet problem for the Laplace equation in the hyperoctant of a multidimensional ball // Lobachevskii Journal of Mathematics 44(3), 1072 – 1079 (2023). DOI: 10.1134/S1995080222030022

8. Аманов Д. Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области // Известия АН УзССР, Серия физ. матем. н. 1, 8 – 13 (1984).

9. Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Applied Mathematics Letters. 22, 1828 – 1832 (2009). DOI: 10.1016/j.aml.2009.07.006

10. Ergashev T.G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 13(1), 48–57 (2020). DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-1-48-57

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО РОДА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

*Эргашев Акрамхон Ахмадходжаевич,
Кокандский государственный университет,
Коканд, Узбекистан
akramkhonergashev@gmail.com
Бектошева Шохсанам Ахроржон кизи,
Кокандский государственный университет,
Коканд, Узбекистан*

***Аннотация.** В теории уравнений смешанного типа очень много работ в ограниченных областях с гладкой границей, ограниченной нормальной кривой для модельных уравнений смешанного типа первого рода. В данной работе для обобщённого уравнения Трикоми со спектральным параметром, которое является уравнением смешанного типа первого рода неограниченной области, эллиптическая часть которой является вертикальной полуполосой, исследуется нелокальная задача со смещением на правой граничной характеристике. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения задачи методом функций Грина и методом интегральных уравнений.*

***Ключевые слова:** задача со смещением, уравнение смешанного типа первого рода, принцип экстремума, метод функции Грина, метод интегральных уравнений, вертикальная полуполоса.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION OF THE FIRST KIND WITH A NONLOCAL CONDITION ON ONE BOUNDARY CHARACTERISTIC

***Abstract.** In the theory of mixed-type equations, there are many works dedicated to bounded domains with a smooth boundary limited by a normal curve for model mixed-type equations of the first kind. In the present work, a nonlocal problem with a shift on the right characteristic boundary is investigated for a generalized Tricomi equation with a spectral parameter, which is a mixed-type equation of the first kind in an unbounded domain where the elliptic part is a vertical semi-strip. The uniqueness of the solution to the problem is proved using the extremum principle, while the existence of the solution is established by the method of Green's functions and the method of integral equations.*

***Key words:** mixed-type equation of the first kind, problem with a shift, extremum principle, Green's function method, integral equations method, vertical semi-strip.*

BIRINCHI TUR ARALASH TENGLAMA UCHUN BIR CHEGARAVIY XARAKTERISTIKADA NOLOKAL SHARTLI CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

***Annotatsiya.** Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasida birinchi tur aralash tipdagi model tenglamalar uchun normal egri chiziq bilan chegaralangan tekis chegarali cheklangan sohalarda ko'plab tadqiqotlar o'tkazilgan. Ushbu ishda elliptik qismi vertikal yarim tasma shaklida bo'lgan cheksiz sohaning birinchi tur aralash tipdagi tenglamasini ifodalovchi spektral parametrli umumlashtirilgan Triкоми tenglamasi uchun o'ng chegaraviy xarakteristikada siljishli nolokal masala o'rganiladi. Masala yechimining yagonaligi ekstremum prinsipi yordamida isbotlanadi, masala yechimining mavjudligi esa Grin funksiyalari usuli va integral tenglamalar usuli orqali ko'rsatiladi.*

***Kalit so'zlar:** siljishli masala, birinchi tur aralash tipdagi tenglama, ekstremum prinsipi, Grin funksiyasi usuli, integral tenglamalar usuli, vertikal yarim tasma.*

Введение. Началом нового важного этапа в развитии теории краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов стали «нелокальные задачи», т.е. задачи с нелокальными краевыми условиями, общее определение и классификация которых даны в работе [1]. К таким задачам, прежде всего, относятся задачи типа Бицадзе-Самарского, впервые предложенные в 1969 году А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [2]. В этих задачах нелокальные условия связывают значения искомого решения в граничных и внутренних точках области рассмотрения уравнения. Изучению таких задач посвящены многочисленные работы, среди которых отметим работы [3-7] и

др. К нелокальным задачам относятся также «задачи со смещением», предложенные А.М. Нахушевым в 1969 году [8]. В этих задачах нелокальные условия связывают значения искомой функции или её производной (вообще говоря, дробного порядка, зависящие от порядка вырождения уравнения), принимаемых на гиперболической части границы области рассмотрения. Такие задачи являются обобщением задачи Трикоми, а также содержат широкий класс локальных краевых задач для уравнений смешанного типа и возникают при изучении различных вопросов прикладного характера, например, вопросов математической биологии, прогнозирования почвенной влаги, математического моделирования процессов излучения лазера, проблем физики плазмы и т.д.

В большинстве работ, где изучены задачи со смещением для уравнений смешанного типа, рассмотрены модельные уравнения или линейные уравнения со специально подобранными коэффициентами при младших производных. Более того, А.М. Нахушевым в 1970 году доказано [9], что коэффициенты уравнения при младших членах существенно влияют на постановку и исследование краевых задач со смещением. Следовательно, можно ожидать, что при постановке и исследовании задач со смещением для уравнений с младшими членами возникают операторы более сложной структуры. Видимо, поэтому малоизученными остались задачи со смещением для уравнений смешанного типа с младшими членами.

В данной работе в смешанной области, эллиптическая часть которой является вертикальной полуполосой, для уравнения

$$\text{sign } y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0 \quad (1)$$

будет поставлена и исследована нелокальная краевая задача, в которой нелокальное условие поточечно связывают значения дробной производной искомой функции в точках правой граничной характеристики. Здесь предположим, что $m, \lambda \in \mathbb{R}$, причём $m = \text{const} > 0$, а $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$. Кроме того в этой работе M, M_1 означают некоторые положительные постоянные, ε – достаточно малое положительное число, а $\beta = m/(2m + 4)$.

2. Постановка задачи. Уравнение (1) рассматривается в области Ω , ограниченной при $y > 0$ полупрямыми $x = 0$, $x = 1$ и при $y \leq 0$ характеристиками

$$AC : x - [2/(m + 2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : \eta = x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C(1/2, -[(m + 2)/4]^{2/(m+2)})$.

Введём обозначения: $AB = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$, $l_1 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < +\infty\}$, $l_2 = \{(x, y) : x = 1, 0 < y < +\infty\}$; $a = 2/(1 + k)$, а k – заданное действительное число, причём $k > 1$;

$$\theta_1(x_0) = \left(\frac{1+x_0}{2}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{1-x_0}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right), \quad \theta_{1k}(x_0) = \left(\frac{k+x_0}{k+1}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{1-x_0}{k+1} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Очевидно, что $\theta_1(x_0)$ и $\theta_{1k}(x_0)$ являются точками пересечения характеристики BC с линиями $x - \frac{2j}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_0$, где $x_0 \in (0,1)$, а $j = 1$ или $j = k$.

Задача T^∞ . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

$$1) u(x, y) \in C(\Omega \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2), \text{ причём } u_y(x, 0)$$

может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow 0$;

$$2) \text{ удовлетворяет уравнению (1) в областях } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2;$$

3) условиям удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y < +\infty; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0 \text{ равномерно при } x \in [0, 1]; \quad (3)$$

$$A_{1x}^{1, \lambda_2} \{D_{1x}^{1-\beta} u[\theta_1(x)]\} + \omega(x) A_{1x}^{1, \lambda_2} \{D_{1x}^{1-\beta} u[\theta_k(x)]\} = \delta(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\omega(x)$, $\delta(x)$ - заданные функции, причём $\varphi_j(y) \in C[0, +\infty)$ и

при достаточно больших y удовлетворяет неравенству $|\varphi_j(y)| \leq M_1 y^{-1-m/2}$

($j = \overline{1, 2}$); где $\omega(x), \delta(x) \in C^2[0, 1]$ - заданные функции, причём

$$\max_{[0, 1]} |\omega(x)| = M < a^{2\beta-1}.$$

Очевидно, что условие (4) связывает значения дробной производной искомого решения в двух точках характеристики BC . В силу обратимости операторов $A_{sx}^{1, \lambda}$ и D_{sx}^δ из задачи T^∞ в частном случае при $\omega(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$ следует задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω , которая имеет самостоятельный интерес.

При исследовании однозначной разрешимости задач T^∞ важную роль играет следующая задача для уравнения (1) в области Ω_1 .

Задача N_B^∞ . Найти регулярное в области Ω_1 решение уравнения(1), непрерывное в области Ω_1 вплоть до границы и удовлетворяющее условиям (2), (3) и

$$\lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $\nu(x)$ - заданная функция, причём $\nu(x) \in C(0, 1)$ и при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow 1$ она может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$.

Отметим, что задача N_B^∞ в области Ω_1 в случае $m = 1$, $\lambda = 0$ исследована в работе [10-13], а в случае $m > 0$ и $\lambda = 0$ в работе [14,15] с помощью преобразования Ханкеля. В данной работе задача N_B^∞ решается методом функций Грина при $m > 0$ и $\lambda \neq 0$, и в области Ω_1 определяется формулой:

$$u(x, y) = -\int_0^1 \nu(\xi) G(\xi, 0; x, y; \lambda_1) d\xi - \int_0^{+\infty} \eta^m \varphi_2(\eta) G_\xi(1, \eta; x, y; \lambda_1) d\eta + \\ + \int_0^{+\infty} \eta^m \varphi_1(\eta) G_\xi(0, \eta; x, y; \lambda_1) d\eta. \quad (5)$$

где $G(\xi, \eta; x, y; \lambda_1)$ является функцией Грина задачи N_B^∞ для уравнения (1) которое строится методом отражения и имеет вид:

$$G(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [q_1(\xi + 2n, \eta; x, y; \lambda_1) - q_1(-\xi + 2n, \eta; x, y; \lambda_1)]. \quad (6)$$

где $q_1(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = k_1 (r_2^2)^{-\beta} H_3(\beta, \beta, 2\beta; \sigma_1; \sigma_2)$ - фундаментальное решение

уравнения(1), $H_3(a, b, c; z_1, z_2)$ - гипергеометрическая функция Горна [16],

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad \sigma_1 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4} (\lambda_1 r_1)^2,$$

$$\left. \begin{matrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{matrix} \right\} = (\xi - x)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(\eta^{\frac{m+2}{2}} \mp y^{\frac{m+2}{2}} \right)^2.$$

3. Исследование задачи T^∞ .

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи T^∞ . Введём обозначения $u(x, 0) = \tau(x)$, $0 \leq x \leq 1$;
 $\lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = \nu(x)$, $0 < x < 1$ и предположим, что $\tau(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$,
 $\nu(x) \in C^2(0, 1)$, причём при $x \rightarrow 0$ функция $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка
 меньше $1 - 2\beta$, а при $x \rightarrow 1$ ограничена. Тогда, функция $u(x, y)$ в области Ω_2 определяется
 формулой [17]:

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau[x + \sigma(2t - 1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1} \left[2\lambda\sigma\sqrt{t(1-t)} \right] dt + \\ + \gamma_2 y \int_0^1 \frac{\nu[x + \sigma(2t - 1)]}{[t(1-t)]^\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[2\lambda\sigma\sqrt{t(1-t)} \right] dt, \quad (7)$$

где $\sigma = [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$.

Из (7), находим

$$u[\theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) (1-x)^{1-2\beta} D_{1x}^{-\beta} B_{1x}^{1, \lambda_2} [\tau(x) (1-x)^{\beta-1}] - \\ - \left[(m+2)/4 \right]^{1-2\beta} \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{1x}^{\beta-1} B_{1x}^{1, \lambda_2} [\nu(x) (1-x)^{-\beta}], \quad (8)$$

$$u[\theta_{1k}(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) [a(1-x)]^{1-2\beta} D_{1x}^{-\beta} B_{1x}^{1, a\lambda} [\tau(x) (1-x)^{\beta-1}] - \\ - \gamma_2 (a(m+2)/4)^{1-2\beta} \Gamma(1-\beta) D_{1x}^{\beta-1} B_{1x}^{1, a\lambda} [\nu(x) (1-x)^{-\beta}].$$

Применяя к обеим частям равенств (8) соответственно операторы $A_{1x}^{1, \lambda} D_{1x}^{1-\beta}$ и $A_{1x}^{1, a\lambda} D_{1x}^{1-\beta}$,
 получим:

$$A_{1x}^{1, \lambda} \left\{ D_{1x}^{1-\beta} u(\theta_1) \right\} = \frac{(1-x)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \Gamma(2\beta) C_{1x}^{1, \lambda} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)} \nu(x) \right\},$$

$$A_{1x}^{1,a\lambda} \left\{ D_{1x}^{1-\beta} u(\theta_{1k}) \right\} = \frac{a^{1-2\beta} (1-x)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \Gamma(2\beta) C_{1(ax+b)}^{1,\lambda} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3 \nu(ax+b)}{\sin(2\beta\pi)} \right\},$$

где $b = 1 - a, \gamma_3 = \Gamma(\beta) (2 - 4\beta)^{2\beta} / [2\Gamma(1 - \beta)\Gamma(2\beta)]$.

Принимая во внимание эти равенства и краевое условие (4), получим функциональное уравнение вида:

$$\Phi(x) + a^{1-2\beta} \omega(x) \Phi(ax + b) = \delta(x), \tag{9}$$

где

$$\Phi(x) = \Gamma(2\beta) C_{0x}^{1,\lambda} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)} \nu(x), \tag{10}$$

$$\Phi(ax + b) = \Gamma(2\beta) C_{1(ax+b)}^{1,\lambda} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)} \nu(ax + b),$$

$$\delta(x) = \Gamma(\beta) (1-x)^\beta \delta(x).$$

Функцию $\Phi(x)$ будем искать в классе функций, ограниченных в точке $x = 1$. Применив метод итерации [18] к решению функционального уравнения (9), для n -ой итерации имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & (-a^{1-2\beta})^n \Phi(a^n x + 1 - a^n) P_n(x) + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} (-a^{1-2\beta})^j P_j(x) \delta_2(a^j x + 1 - a^j), \end{aligned} \tag{11}$$

где $P_n(x) = \omega(x) \omega(ax + 1 - a) \dots \omega(a^{n-1}x + 1 - a^{n-1}), P_0(x) = 1$.

Так как $\max_{[0,1]} |\omega(x)| = M$, то справедливы неравенства:

$$|A_n(x)| \leq M^n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

Переходя в (11) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая $0 < a < 1$, неравенства (12), $0 < M a^{1-2\beta} < 1$ и ограниченность искомой функции $\Phi(x)$ при $x = 1$, получим:

$$\Phi(x) = F_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{13}$$

где

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-a^{1-2\beta})^j P_j(x) \delta(a^j x + 1 - a^j). \tag{14}$$

В силу $0 < a < 1$, (12), $0 < M a^{1-2\beta} < 1$ и условия, наложенные на функций $\omega(x), \delta(x)$, ряд в правой части равенства (14) сходится абсолютно и равномерно на $[0, 1]$ и допускает двукратное дифференцирование в $(0, 1)$. Следовательно, $F_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$.

Учитывая обозначение (10), из (13) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB , принесённое из области Ω_2 :

$$\nu(x) = \gamma_4 C_{1x}^{1, \lambda_2} [\tau(x)] - \gamma_4 \Gamma^{-1}(2\beta) F_1(x), \quad 0 < x < 1. \quad (15)$$

где $\gamma_4 = \Gamma(2\beta) \sin(2\beta\pi) / (\pi\gamma_3)$.

Теорема. Если $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, то задача T^∞ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ решение однородной задачи T^∞ . При этом имеем $F_1(x) \equiv 0$. Поэтому соотношение (15) принимает вид:

$$\nu(x) = \gamma_4 C_{1x}^{1, \lambda_2} [\tau(x)], \quad 0 < x < 1. \quad (16)$$

Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. С этой целью введём в рассмотрение функцию:

$$\nu(x, y) = e^{-|\lambda_2|x} u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AB}. \quad (17)$$

Тогда, относительно $\nu(x, y)$ получим следующую задачу в области Ω_1 :

$$y^m \nu_{xx} + \nu_{yy} + 2|\lambda_2| \cdot |y|^m \nu_x - (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \nu = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1; \quad (18)$$

$$\nu(0, y) = \nu(1, y) = 0, \quad 0 \leq y < +\infty; \quad (19)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \nu(x, y) = 0 \text{ равномерно при } x \in [0, 1]; \quad (20)$$

$$e^{|\lambda_2|x} \nu_y(x, 0) = \gamma_4 C_{0x}^{1, \lambda_2} [e^{|\lambda_2|x} \nu(x, 0)], \quad 0 < x < 1. \quad (21)$$

Докажем, что $\nu(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_1 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AB}$. Предположим противное. Тогда существует такая область $\Omega_{1\rho} = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < \rho\}$, в которой $\nu(x, y) \not\equiv 0$. Следовательно, $\sup_{\overline{\Omega_{1\rho}}} |\nu(x, y)| > 0$ и это значение достигается в некоторой точке $(\xi, \eta) \in \overline{\Omega_{1\rho}}$.

Введём обозначение $\partial\Omega_{1\rho} = AB \cup BD \cup DP \cup PA$, где

$$AB = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad BD = \{(x, y) : x = 1, 0 < y < \rho\},$$

$$DP = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = \rho\}, \quad PA = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < \rho\}.$$

Так как $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 \geq 0$, то согласно принципу экстремума для эллиптических уравнений [19], из (18) следует, что $(\xi, \eta) \notin \Omega_{1\rho}$. В силу условия (19), $(\xi, \eta) \notin \overline{BD} \cup \overline{PA}$. Тогда $(\xi, \eta) \in \overline{AB} \cup \overline{DP}$.

Пусть $(\xi, \eta) \in \overline{AB}$, т.е. $\sup_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |\nu(x, y)| = \sup_{\overline{AB}} |\nu(x, y)| = |\nu(\xi, 0)| > 0$, $0 < \xi < 1$. Тогда, если $\nu(\xi, 0) > 0$ (< 0), то есть $(\xi, 0)$ является точкой положительного максимума (отрицательного минимума) функции $\nu(x, y)$, то согласно теореме 1.4 [20], из (21) следует $\nu_y(\xi, 0) > 0$ (< 0). С другой стороны, в силу принципа Заремба-Жиро [19], $\nu_y(\xi, 0) < 0$ (> 0).

Из полученного противоречия следует, что $(\xi, \eta) \notin \overline{AB}$. Следовательно, $(\xi, \eta) \in \overline{DP}$, т. е. $\sup_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |\nu(x, y)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\nu(x, \rho)| > 0$.

Взяв произвольное число $\rho_1 > \rho$, таким же методом получим $\sup_{\overline{\Omega}_{1\rho_1}} |\nu(x, y)| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |\nu(x, \rho_1)| > 0$. Так как $\Omega_{1\rho} \subset \Omega_{1\rho_1}$, то $\sup_{\overline{\Omega}_{1\rho_1}} |\nu(x, y)| \geq \sup_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |\nu(x, y)| > 0$, т.е. $\sup_{0 \leq x \leq 1} |\nu(x, \rho_1)| \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} |\nu(x, \rho)| > 0$. Отсюда следует $\lim_{y \rightarrow +\infty} \nu(x, y) \neq 0$,

что противоречит условию (20). Следовательно, $\nu(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \Omega_1 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AB}$. Отсюда, в силу (17) следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_1 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AB}$. Так как $u(x, 0) = \tau(x) \equiv 0$, то из (16) что $v(x) \equiv 0$. Тогда, согласно формуле (8), $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \Omega \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$, откуда следует утверждение теоремы.

Переходим к доказательству существования решения задачи T^∞ . С этой целью, полагая $y = 0$, из (5) получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ на \overline{AB} , принесённое из области Ω_1 :

$$\tau(x) = -\int_0^1 v(t) H_1(x, t) dt - \int_0^1 v(t) H_2(x, t) dt + F_2(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (22)$$

где

$$H_1(x, t) = k_1 \left\{ |x-t|^{-2\beta} - (x+t)^{-2\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n-x+t)^{-2\beta} - (2n-x-t)^{-2\beta} + (2n+x-t)^{-2\beta} - (2n+x+t)^{-2\beta} \right] \right\},$$

$$H_2(x, t) = k_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|x-t|^{2k-2\beta} - (x+t)^{2k-2\beta} + (2n-x+t)^{2k-2\beta} - (2n-x-t)^{2k-2\beta} + (2n+x-t)^{2k-2\beta} - (2n+x+t)^{2k-2\beta} \right],$$

$$F_2(x) = \int_0^{\infty} \eta^m \varphi_1(\eta) G_\xi(0, \eta; x, 0) d\eta - \int_0^{\infty} \eta^m \varphi_2(\eta) G_\xi(1, \eta; x, 0) d\eta.$$

Переходим к доказательству существования решения задачи T^∞ . Из выше доказанных следует, что для этого надо решать систему уравнений $\{(15), (22)\}$. С этой целью, исключая функцию $\tau(x)$ из функциональных соотношений (15) и (22), получаем сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $v(x)$, эквивалентное задаче T^∞ :

$$v(x) + \gamma_5 \int_0^1 v(t) K_1(x, t) dt = \int_0^1 v(t) L(x, t) dt + F_3(x), \quad 0 < x < 1, \quad (23)$$

где

$$K_1(x, t) = \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{t-x} + \left(\frac{1+t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{t+x} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2n+t-1}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{2n-x+t} - \left(\frac{2n-t-1}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{2n-x-t} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2n-t+1}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{2n+x-t} - \left(\frac{2n+t+1}{1-x} \right)^{1-2\beta} \frac{1}{2n+x+t} \right\},$$

$$L(x, t) = \frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)[1 + \sin(\beta\pi)]} \left\{ \frac{d}{dx} \int_x^1 (\xi - x)^{2\beta-1} [H_1(\xi, t) [1 - \bar{J}_\beta[\lambda(x - \xi)]] + \right.$$

$$\left. + H_2(\xi, t) \bar{J}_\beta[\lambda(x - \xi)]] d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^2}{2(1 + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} \int_x^1 (\xi - x)^{2\beta} \bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x - \xi)] [H_1(\xi, t) + H_2(\xi, t)] d\xi \right\},$$

$$F_3(x) = \frac{\gamma_4}{1 + \sin(\pi\beta)} \left\{ C_{1x}^{1, \lambda} [F_2(x)] - \frac{1}{\Gamma(2\beta)} F_1(x) \right\}.$$

$$\gamma_5 = \cos(\pi\beta) / [\pi + \pi \sin(\beta\pi)]$$

Учитывая, что $1 - \bar{J}_\beta[\lambda_2(x - \xi)] = (x - \xi)^2 Q(x, \xi)$, где $Q(x, \xi) \in C^2([0, 1] \times [0, 1])$, можно показать, что $L(x, t)$ имеет логарифмическую особенность при $x = t$ и неподвижную особенность порядка 2β при $t = 1$. В силу предположения относительно заданных функций $\varphi_j(y)$ и свойств оператора $C_{sx}^{1, \lambda} [f(x)]$ следует, что $C_{1x}^{1, \lambda_2} [F_2(x)] \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Если учесть это и свойства функции $F_1(x)$, то получаем $F_3(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$.

Рассуждая аналогично, как и работе [21], из (23) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью, эквивалентное (в смысле разрешимости и в классе искомых функций) задаче T^∞ :

$$v(x) + \int_0^1 v(t) K_2(x,t) dt = F_4(x), \quad 0 < x < 1, \quad (24)$$

где

$$K_2(x,t) = \gamma_6 \left[\gamma_5 \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} \Delta K(x,t) - L_2(x,t) \right] - \\ - \gamma_7 \int_0^1 \left[\operatorname{ctg}(\pi x/2) / \operatorname{ctg}(\pi t/2) \right]^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} K_0(x,\xi) [\gamma_5 \Delta K(\xi,t) + L_2(\xi,t)] d\xi,$$

$$F_4(x) = \gamma_6 F_1(x) - \gamma_7 \int_0^1 \left[\operatorname{ctg}(\pi x/2) / \operatorname{ctg}(\pi t/2) \right]^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1-t}{1-x} \right)^{1-2\beta} K_0(x,t) F_1(t) dt,$$

$$\Delta K(x,t) = K_0(x,t) - K_1(x,t).$$

$$K_0(x,t) = \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x} - \frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right) \\ \gamma_6 = [1 + \sin(\pi\beta)]/2, \quad \gamma_7 = \cos(\pi\beta)/(2\pi).$$

Нетрудно доказать, что $\Delta K(x,t)$ – ограничена на квадрате $0 \leq x, t \leq 1$.

Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (24), в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи T^∞ . После того как найдено $v(x)$ из (24), функция $\tau(x)$ находится по формуле (22). Затем решение задачи T^∞ в областях Ω_1 и Ω_2 находится по формулам (5) и (8) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – Москва, 1969, Т. 185. №4,6. – С. 739-740.
3. Алимов Ш. А. Об одной спектральной задаче типа задачи Бицадзе-Самарского // ДАН СССР. – Москва, 1986. Т.287. – №6. – С.1289-1290.
4. Андреев А.А., Рябов А.В. Некоторые краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для обобщенного уравнения Трикоми в неограниченных областях // Межвузовский сборник трудов по физико – математическим наукам «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Куйбышев, 1975. вып. 2. – С. 9-15.
5. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1999. Т. 35. №8. – С. 1167-1172.
6. Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – Минск, 2001. Т. 37. №11. – С. 1565-1567.
7. Салахитдинов М.С., Толпиков А.О., О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1973. Т. 9. №1. – С. 142-148.
8. Нахушев А.М. О некоторых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1969. Т. V. №1. – С. 44-59.
9. Нахушев А.М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений на плоскости // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1970. Т. 6. №1. – С. 191-195.
10. Овсянников Л.В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука. – Ленинград: Труды ЛКВВИА, 1950. Вып. 33. – С. 25-51.

11. Севостьянов Г.Д. Краевая задача Трикоми для полуполосы и четверти плоскости // *Волжский математический сборник*. – Куйбышев, 1965. №3. –С. 312-320.
12. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. - 304 с.
13. Фалькович С.В. Об одном случае решения задачи Трикоми // В сборнике «Трансзвуковые течения газа». – Саратов, 1964. – С. 3-8.
14. Коржавина М.В. Задачи Трикоми для обобщенного Трикоми в случае бесконечной полуполосы // *Волжский математический сборник*. – Куйбышев, 1971. №8. –С. 114-119.
15. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой - полуполоса // *Дифференциальные уравнения*. – Минск, 1996. Т. 32. №4. – С. 37-43.
16. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука. 1965.- 296 с.
17. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа // *Математический сборник*. – Москва, 1952. – Т.30 (72) . №1. – С. 11-38.
18. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. - Ташкент: ФАН, 1974. - 156 с.
19. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. - 204 с.
20. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент. ФАН, 1997. – 166 с.
21. Зуннунов Р.Т. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Узбекский Математический журнал*.-Ташкент, 2001. №2. –С. 39-43.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДВУХФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НА ПРОИЗВОДСТВО ПРОДУКТА

Жумаев Жура,

профессор Бухарского государственного университета

j.jumaev@bukdu.uz

Янгиева Нозима Уткиржон кизи,

магистрант Бухарского государственного университета

Аннотация. В данной статье эффективность факторов, используемых в производстве, оценивается с помощью метода полного факторного эксперимента. Для этого использовались экспериментальные данные, полученные с помощью метода активного эксперимента. В соответствии с процедурой метода были закодированы факторы, построена матрица планирования, рассчитаны уравнения регрессии, определены коэффициенты уравнений регрессии и проведён анализ адекватности.

Ключевые слова: регрессионные модели, факторы, производство сополимеров, метод наименьших квадратов, метод факторного эксперимента, кодирование факторов, матрица планирования, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

MAHSULOT ISHLAB CHIQARISHGA TA'SIR ETUVCHI OMILLARNI O'RGANISH UCHUN IKKI OMILLI EKSPERIMENT USULINI QO'LLASH

Annotatsiya. Ushbu maqolada ishlab chiqarishda qo'llaniladigan omillarning samaradorligi to'liq omilli tajriba usuli yordamida baholanadi. Buning uchun faol tajriba usuli orqali olingan tajriba ma'lumotlaridan foydalanildi. Usul jarayoniga muvofiq omillar kodlandi, rejalashtirish matritsasi tuzildi, regression tenglamalar hisoblab chiqildi, regression tenglama koeffitsiyentlari aniqlandi va muvofiqlik tahlili o'tkazildi.

Kalit so'zlar: regression modellar, omillar, sopolimerlar ishlab chiqarish, eng kichik kvadratlar usuli, omilli tajriba usuli, omillarni kodlash, rejalashtirish matritsasi, dispersiya, o'rtacha kvadratlik og'ish.

APPLICATION OF THE TWO-FACTOR EXPERIMENT METHOD TO STUDY THE INFLUENCE OF FACTORS ON PRODUCT PRODUCTION

Abstract. In this article, the efficiency of factors used in production is assessed using the full factorial experiment method. Experimental data obtained using the active experiment method were used. Following the method's procedure, factors were coded, a planning matrix was constructed, regression equations were calculated, regression equation coefficients were determined, and an adequacy analysis was conducted.

Keywords: regression models, factors, production of copolymers, least squares method, factor experiment method, factor coding, planning matrix, variance, standard deviation.

Введение. В практических приложениях часто применяются регрессионные модели для нахождения связывающих уравнений факторов с зависящими от них величинами. Для этого есть средства моделирования посредством метода наименьших квадратов, метода полного факторного эксперимента и т.д. [1-3]. В последнее время ввиду наглядности и надёжности исследователи часто прибегают к методу полного факторного эксперимента.

В [4] оценка эффективности влияния основных факторов на сушку проводилась с использованием метода полного факторного эксперимента. Для этого переменные были закодированы, была составлена матрица планирования эксперимента, рассчитаны уравнения регрессии, уравнение было проверено на адекватность, и проведён апостериорный анализ.

В [5] математически моделирован процесс дробления щебня с использованием полного факторного эксперимента. С помощью полученного уравнения определена степень влияния каждого исследуемого фактора на конечный результат, который необходим для оптимизации процесса.

Вышеприведённый анализ показывает, что применение факторного анализа даёт приемлемые результаты для моделирования технологических процессов.

Методика. Пусть даны некоторые факторы, которые влияют на выход продукта. Для исследования влияния этих технологических факторов на выход продукта были поставлены эксперименты по плану ПФЭ 2^2 , причём каждый эксперимент повторялся по три раза (смотрите таблицу 1). Пусть граничные значения факторов, влияющие на производительность продукта, выбраны следующие:

$$Z_1 - \text{первый фактор, } Z_1^- = 60, \quad Z_1^+ = 80;$$

$$z_2 - \text{второй фактор, } Z_2^- = 0,3, \quad Z_2^+ = 0,7;$$

Кодирование факторов.

Построим исходную матрицу планирования ПФЭ 2^2 по полученным экспериментальным данным эксперимента, который был проведён три раза. Рассчитаем средние выборочные результаты для каждого эксперимента [7-9]:

$$\bar{y}_i = \frac{(y_{1i} + y_{2i} + y_{3i})}{3}$$

Построим матрицу планирования с учётом всех взаимодействий и средних значений отклика (таблица 1.)

Таблица 1. Матрица планирования для обработки результатов

№	Начальные значения		Кодовые значения		Y: значения эксперимента			Y Сред- ная
	°C	%	X ₁	X ₂	Y1	Y2	Y3	
1	60	0,3	-1	-1	45,7	46,2	47,0	46,3
2	80	0,7	+1	+1	55,8	55,2	57,3	56,1
3	80	0,3	+1	-1	46,4	47,3	47,9	47,2
4	60	0,7	-1	+1	50,6	52,1	52,7	51,8

Таким образом, кодирование факторов имеет следующий вид (таблица 2):

Таблица 2. Кодирование факторов

Факторы	Верхний уровень $+i$	Нижний уровень $-i$	Центр Z_i^0	Интервал варьирования λ_i	Зависимость кодированной переменной от натуральной
z_1	80	60	70	10	$X_1 = \frac{Z_1 - 70}{10};$
z_2	0,7	0,3	0,5	0,2	$X_2 = \frac{Z_2 - 0,5}{0,2};$

Расчёт коэффициентов модели

Осуществим поиск эмпирической зависимости по следующему выражению:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 \tag{1}$$

Коэффициенты модели рассчитываем по формуле [4]

$$b_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y_k \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^N x_{1j} y_j}{\sum_{j=1}^N x_{1j}^2};$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^N x_{2j} y_j}{\sum_{j=1}^N x_{2j}^2}; \quad b_{12} = \frac{\sum_{j=1}^N x_{1j} x_{2j} y_j}{\sum_{j=1}^N x_{1j}^2 x_{2j}^2};$$

Вставляя данные в эти формулы, получим:

$$b_0 = \frac{1}{4} (46,3 + 56,1 + 47,2 + 51,8) = 50,35$$

$$b_1 = \frac{1}{4} (-46,3 + 56,1 + 47,2 - 51,8) = 1,3$$

$$b_2 = \frac{1}{4} (-46,3 + 56,1 - 47,2 + 51,8) = 3,6$$

Уравнение имеет вид:

$$y = 50,35 + 1,3 \cdot X_1 + 3,6 \cdot X_2 \quad (2)$$

Проверка значимости коэффициентов модели:

Для этого вычислим дисперсию единичного измерения, дисперсию среднего значения функции отклика и соответствующее ей среднеквадратическое отклонение [10-11]:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k^2 = \frac{1}{4} (0,43 + 1,17 + 0,57 + 1,17) = 0,835$$

$$S_{\bar{y}} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = \frac{0,835}{3} = 0,278 \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{0,278} = 0,528$$

Для проверки на значимость зададимся доверительной вероятностью $P_1 = 0,975$ и рассчитаем число степеней свободы $f = 4 \cdot (3 - 1) = 8$. На основании этого по таблицам определим критическое значение критерия Стьюдента: $t_T = 2,31$.

Рассчитаем теперь значение критерия Стьюдента для каждого из факторов по формуле $t_{iP} = \frac{|b_{i1}| \cdot \sqrt{N}}{S_{\bar{y}}}$ и сравним с табличным значением:

$$t_{p0} = \frac{50,35 \cdot \sqrt{4}}{0,528} = 190,9 > 2,31; \quad t_{p1} = \frac{1,3 \cdot \sqrt{4}}{0,528} = 4,93 > 2,31;$$

$$t_{p2} = \frac{3,6 \cdot \sqrt{4}}{0,528} = 13,65 > 2,31;$$

Отсюда видно, что все коэффициенты модели значимы, поэтому окончательное уравнение регрессии в кодовых переменных приобретает следующий вид:

$$y = 50,35 + 1,3 \cdot X_1 + 3,6 \cdot X_2 \quad (3)$$

Известно, что величина коэффициента уравнения регрессии – количественная мера его влияния. О характере влияния факторов говорят знаки коэффициентов. Знак «плюс» свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора величина параметра оптимизации растет, а при знаке «минус» – убывает. На основании полученного уравнения регрессии можно сделать следующие выводы:

На выход продукции положительно влияют оба фактора, коэффициент при первом факторе меньше коэффициента второго фактора, но фактическое значение первого фактора и меньше второго фактора.

Проверим полученное уравнение (3) на адекватность по критерию Фишера. Так как дисперсия воспроизводимости найдена в предыдущем пункте, то для определения расчётного значения критерия $F_{расч}$ необходимо вычислить остаточную дисперсию $S_{ост}^2$.

Для этого найдём значения изучаемого параметра по полученному уравнению регрессии $\tilde{y}_j, j = 1..4$, подставляя +1 или -1 вместо x_i в соответствии с номером j эксперимента из таблицы.

Остаточную дисперсию $S_{ост}^2$ вычисляем по формуле:

$$S_{ост}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^N (\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2 = 1,445$$

Расчётное значение критерия Фишера $F_{расч}$ определяем по формуле:

$$F_{расч} = \frac{S_{ост}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{1,445}{0,8350} = 1,73$$

Для определения табличного значения критерия Фишера зададимся допустимой вероятностью: $PF = 0,95$. С учётом этого, а также числа степеней свободы числителя $f_{ад} = 1$ и знаменателя $f = 8$ по таблице определяем критическое значение критерия Фишера: $F_T = 5,32$.

Так как $F_{расч} = 1,73 < F_T = 5,32$, то уравнение регрессии (3) адекватно.

Обсуждение. Выписываем уравнение регрессии (3) в натуральных переменных

$$y = 50,35 + 1,3 \cdot \frac{Z_1 - 70}{10} + 3,6 \cdot \frac{Z_2 - 0,5}{0,2}$$

Получим

$$y = 32,25 + 0,13z_1 + 18z_2 \quad (4)$$

Интерпретация регрессионного уравнения в натуральных переменных идентична уравнению в кодированных переменных.

Свойства полученного уравнения регрессии можно видеть в следующем графике (рисунок 1) [12].

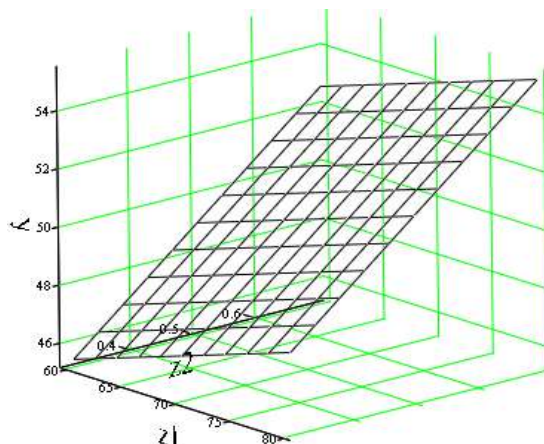


Рисунок 1. График функции $y = 32,25 + 0,13z_1 + 18z_2$.

Из графика видно, что оба фактора положительно влияют на производительность продукта.

Заключение. Полученное эмпирическое уравнение позволяет с достаточной точностью определять выход продукции в исследуемом диапазоне изменения факторов. С помощью этих уравнений можно выявить степень влияния каждого исследуемого фактора на конечный результат, что необходимо для оптимизации процесса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Григорьев Ю. Д. Методы оптимального планирования эксперимента. Линейные модели. М. Лань, 2015. 320 с.
2. Ермаков С. М., Бродский В. З., Жигляевский А. А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1983. 392 с.
3. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 302 с.
4. A.A. Kholikov, J. Jumaev, D.N. Hikmatov, Kh. Kuvvatov. Optimization of onion drying process parameters using the full factorial experiment method// IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 848 (2021). doi:10.1088/1755-1315/848/1/012010
5. L. Akobirova, K. Gafurov, J. Jumayev, F. Kuldasheva, D. Xikmatov. Experimental study of crushing process of the crushed stone// E3S Web Conf. Volume 264, 2021. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126404093>
6. Тимофеев В.С. Принципы технологии основного органического и нефтехимического синтеза// учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2003. – 536 с.
7. Жураев Х., Гафуров К., Ж. Жумаев, Мирзаева Ш. Математическое моделирование процесса сверхкритической экстракции биологически активных веществ из лакричного корня // Universum. Технические науки. Выпуск 10(79). Октябрь 2020. <https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10822>
8. Х.Ф. Джураев, К.Х. Гафуров, Б.Т. Мухаммадиев, Ж. Жумаев, Ш.У.Мирзаева. The influence of technological parameters on the process of CO₂-extraction of biologically active substances from licorice root. // The American journal of applied science, Volume 2, 2020. P. 273-286. <https://usajournalshub.com/index.php/tajas/article/view/1067>
9. Sh.U. Mirzaeva. Extraction of Glycyrrhizic Acid from Licorice Root using CO₂. // International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Volume 6, Issue 4, April 2019, India, - P. 8939-8946.
10. К.Х. Гафуров, Б.Т. Мухаммадиев, Ш.У. Мирзаева. Сверхкритическая [СК] CO₂ экстракция глицирризиновой кислоты из местных лакричных корней. // Бултеровские сообщения №1, том 49. 2017, Татарстан, С. 108-114.

11.К.Х. Гафуров, Б.Т. Мухаммадиев, К.Э. Рузиева, В.Н. Ахмедов, Ш.У. Мирзаева. Моделирование разных режимов экстракции системой растворителей этанол+CO₂. // Ученый XXI века 1-3, 2017, С. 44-47.

12.Жумаев Ж., Опокина Н.А. Решение математических задач в пакетах математических программ Maxima и MathCAD. Учебное пособие. Казань: КФУ, 2021. – 228 с. <https://dspace.kpfu.ru/xmlui/handle/net/163784>

VARIATION HISOB MASALALARIDA FUNKSIONALNING EKSTREMUMI,
EKSTREMUMNING ZARURIY VA YETARLI SHARTLARI

Rashidov Anvarjon Sharipovich,

Buxoro davlat pedagogika instituti dotsenti,

Osiyo xalqaro universiteti dotsenti

anvar.rashidov@bk.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6424-3277>

Qushkulov Abbas Nurmat o‘g‘li,

Osiyo xalqaro universiteti Ijtimoiy fanlar va texnika fakulteti

70540101-Matematika mutaxassisligi 1-kurs magistranti

qushkulovabbos@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada variatsion hisob nazariyasining fundamental masalalari tizimli ravishda o‘rganilgan. Xususan, chiziqli normalangan fazolarda aniqlangan funktsionallar uchun birinchi va ikkinchi variatsiyalar tushunchalari Freşe va Lagranj ma‘nolarida yoritilgan. Funktsional ekstremumining zaruriy va yetarli shartlari qat‘iy matematik asosda isbotlangan. Shuningdek, Eyler–Lagrange tenglamasi variatsion masalalarning asosiy yechim mezonini sifatida keltirib chiqarilgan. Tadqiqot natijalari variatsion hisob va optimal boshqaruv masalalarini nazariy jihatdan asoslashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so‘zlar: variatsion hisob, funktsional, variatsiya, Eyler–Lagrange tenglamasi, ekstremum.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛА, НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Аннотация. В статье систематически изучены фундаментальные вопросы теории вариационного исчисления. В частности, понятия первой и второй вариации для функционалов, определенных в линейно нормированных пространствах, рассмотрены в смысле Фреше и Лагранжа. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала доказаны строго на математической основе. Также выведено уравнение Эйлера-Лагранжа в качестве основного критерия решения вариационных задач. Результаты исследования имеют важное значение для теоретического обоснования задач вариационного исчисления и оптимального управления.

Ключевые слова: вариационное исчисление, функционал, вариация, уравнение Эйлера-Лагранжа, экстремум.

EXTREMUM OF A FUNCTIONAL IN VARIATIONAL CALCULUS PROBLEMS,
NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR AN EXTREMUM

Abstract. The article systematically examines the fundamental problems of variational calculus theory. In particular, the concepts of the first and second variations for functionals defined in linearly normed spaces are elucidated in the sense of Fréchet and Lagrange. The necessary and sufficient conditions for the extremum of a functional are rigorously proven on a strict mathematical basis. Additionally, the Euler-Lagrange equation is derived as the main criterion for solving variational problems. The research results are of significant importance for the theoretical foundation of variational calculus and optimal control problems.

Keywords: variational calculus, functional, variation, Euler-Lagrange equation, extremum.

Kirish. Chiziqli va kvadratlik funktsionallar. Funktsionalning variatsiyalari. Funktsionalning variatsiyasi ta‘rifini berishdan oldin chiziqli va kvadratlik funktsionallar tushunchalarini eslatib o‘tamiz.

Agar biror chiziqli normalangan W fazoda aniqlangan $J[u]$ funktsional bir jinsli va additiv bo‘lsa, ya‘ni:

$$1) J[cu] = cJ[u], \quad \forall u \in W, \quad c\text{-ixtiyoriy o'zgarmas.}$$

$$2) J[u_1 + u_2] = J[u_1] + J[u_2], \quad \forall u_1, u_2 \in W;$$

shartlar bajarilsa, $J[u]$ -chiziqli funktsional deyiladi. Masalan, agar $p(x)$ va $q(x)$ lar $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsa,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y(x) + q(x)y'(x)]dx$$

tenglik orqali aniqlangan $J[y]$ funktsional $W=C^1[x_0, x_1]$ da chiziqli funktsional bo‘ladi.

W – chiziqli normalangan fazo, $J=J[u,v]$ funksional har bir o'zgaruvchisi bo'yicha chiziqli bo'lsin. Agar $u=v$ deb olsak, hosil bo'lgan $J[u,u]$ funksionalga *kvadratik funksional* deyiladi. Masalan, agar $a(x)$ - $[x_0,x_1]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$J[u,v] = \int_{x_0}^{x_1} a(x)u(x)v(x) dx$$

funksional $W=C[x_0,x_1]$ fazoda har bir $u=u(x)$ va $v=v(x)$ elementlar bo'yicha chiziqli funksionaldir. Bu yerda $u=v$ deb olib, $C[x_0,x_1]$ da aniqlangan

$$J[u,u] = \int_{x_0}^{x_1} a(x)u^2(x) dx$$

kvadratik funksionalga ega bo'lamiz.

1-t a' r i f. Agar $J[y]$ funksional W chiziqli normalangan fazoda berilgan bo'lsa,

$$\Delta J = J[y+h] - J[y], \quad h \in W$$

ayirmaga $J[y]$ funksionalning *orttirmasi* deyiladi.

2-t a' r i f. Agar W chiziqli normalangan fazoda berilgan $J[y]$ funksionalning ΔJ orttirmasi uchun,

$$J[y+h] - J[y] = L[y,h] + \beta[y,h] \tag{1}$$

yoyilma o'rinli bo'lib, bunda $L[y,h]$ -h ga nisbatan chiziqli funksional, $\beta[y,h]$ esa, $\|h\| \rightarrow 0$ da

$\beta[y,h]/\|h\| \rightarrow 0$ munosabatni qanoatlantirsa, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada *differensiallanuvchi* yoki *birinchi variatsiyasiga ega* deyiladi.

(1) yoyilmaning bosh qismidan iborat $L[y,h]$ ga esa, $J[y]$ funksionalning *birinchi variatsiyasi* deyiladi va u $\delta J = \delta J[y,h]$ kabi belgilanadi: $\delta J = L[y,\delta y]$.

Keltirilgan ta'rif bo'yicha variatsiyaga ega funkcionallarga adabiyotlarda *Freshe ma'nosida* (yoki *kuchli ma'noda*) differensiallanuvchi funkcionallar ham deyiladi.

3- t a' r i f. W chiziqli normalangan fazoning y elementi va uning ixtiyoriy $h \in W$ elementi uchun, funksionalning ΔJ orttirmasi,

$$J[y+h] - J[y] = L_1[y,h] + \frac{1}{2} L_2[y,h] + \beta_1(y,h) \tag{2}$$

ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lsin, bu yerda $L_1[y,h]$ -h ga nisbatan chiziqli funksional, $L_2[y,h]$ esa, δy ga nisbatan kvadratik funksional, $\beta_1(y,h)/\|h\|^2 \rightarrow 0, \|h\| \rightarrow 0$. U holda, $J[y]$ funksional $y \in W$ nuqtada *ikkinchi variatsiyaga ega* deyiladi. h ga nisbatan kvadratik funksional $L_2[y,h]$ esa, $J[y]$ funksionalning *ikkinchi variatsiyasi* deyiladi hamda bu variatsiya $\delta^2 = \delta^2 J[y,h]$ kabi belgilanadi: $\delta^2 = L_2[y,h]$.

M i s o l. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^2(x) dx$ bo'lsin.

Bu funksional uchun (17) yoyilma

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)h dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, yuqorida keltirilgan ta'riflarga ko'ra,

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} 2y(x)h dx, \quad \delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2h^2 dx.$$

Funksionalning *Freshe bo'yicha kuchli ma'noda differensiallanuvchiligi* bilan bar qatorda Lagranj bo'yicha *kuchsiz ma'noda differensiallanuvchiligi* tushunchasi ham mavjud.

W chiziqli normalangan fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin. V to'plam yoki $M(y) = \{h \in W : y+h \in V\}$ to'plam W ning chiziqli qism fazosi bo'lsin.

4-t a' r i f. $J[y]$ funksionalning $y \in W$ nuqtadagi *Lagranj bo'yicha birinchi variatsiyasi* deb, $\varphi(\alpha) = J[y+\alpha h]$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtadagi hosilasiga aytiladi:

$$\varphi J = \varphi'(0) = \left. \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h] \right|_{\alpha=0}.$$

$\varphi(\alpha)$ funksiyaning $\alpha = 0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasiga esa, $J[y]$ funksionalning *Lagranj bo'yicha ikkinchi variatsiyasi* deyiladi:

$$\delta^2 J = \varphi''(0) = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h] \right|_{\alpha=0}$$

Misol. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [y^2(x) + y'^2(x)] dx$

Bu funksional $W = C^1[x_0, x_1]$ da aniqlangan. Uning Lagranj bo'yicha birinchi va ikkinchi variatsiyalarini hisoblaymiz.

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha h] = \int_{x_0}^{x_1} [(y + \alpha h)^2 + (y' + \alpha h')^2] dx$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\delta J = \left. \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha h] \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2y(x)h - 2y'h') dx,$$

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} J[y + \alpha h] \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} (2h^2 - 2h'^2) dx$$

Funksionalning Freshe bo'yicha differensiallanuvchiligidan, Lagranj bo'yicha ham differensiallanuvchiligi kelib chiqadi va bunda mos variatsiyalar o'zaro tengdir

Funksionalning ekstremumi. Ekstremining zaruriy va yetarli shartlari.

Yuqorida ta'kidlaganidek, funkcionallarning eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topishga keltiriluvchi amaliy masalalar juda ko'p uchraydi va matematikaning bunday masalalarni o'rganadigan bo'limi – variatsion hisobdir. Endi funksionalning ekstremumi tushunchasining aniq matematik ta'rifini keltiramiz va funksional variatsiyasidan foydalanib, ekstremumning umumiy ko'rinishidagi zaruriy hamda yetarli shartlarini bayon qilamiz.

Cheksiz o'lchovli W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $y \in V$ uchun $J[y^*] \leq J[y]$ ($J[y^*] \geq J[y]$) tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning V to'plamidagi global minimum (maksimum) nuqtasi, $J[y^*]$ esa funksionalning minimal (maksimal) qiymati deyiladi:

$$J[y^*] = \min_{y \in V} J[y] \quad (J[y^*] = \max_{y \in V} J[y])$$

Funksionalning minimum va maksimum nuqtalarini, umumiy nom bilan, ekstremum nuqtalari deb ataymiz.

Masalan, $W = C[0, 1]$ da aniqlangan

$$J[y] = \int_{x_2}^{x_1} [1 - y(x)]^2 dx$$

$$J[y] \geq 0 = J[y^*], \quad \forall y \in C[0, 1].$$

Endi W – chiziqli normalangan fazo, $J[y]$ funksional $V \subset W$ to'plamda aniqlangan bo'lsin deb faraz qilamiz.

6-ta'rif. Agar biror $\varepsilon > 0$ son topilib, $\|y - y^*\|_W < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $y \in V$ nuqtaga $J[y^*] \leq J[y]$ ($J[y^*] \geq J[y]$) tengsizlik bajarilsa, $y^* \in V$ nuqtaga $J[y]$ funksionalning V to'plamdagi lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan funksionalning global ekstremumi uning lokal ekstremumi ham bo'lishi kelib chiqadi. Bu tasdiqning aksinchasi esa, to'g'ri emas.

Misol. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 (y^2 - 1) dx$, funksionalni qaraymiz. U, $W = C^1[0, 1]$ da aniqlangan.

Shu funksional $V = \{y \in C^1[0,1]: y(x)=0\}$ to'plamda global maksimumga ega emas: $\sup J[y] = +\infty$.
Haqiqatan ham, agar $y_n = nx, n=0,1, \dots (y_n \in V)$ funksiyalarni qarasak,

$$J[y_n] = \int_{x_0}^{x_1} n^2(n^2x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}n^4 - n^2 \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty.$$

Ammo $y^* = 0$ funksiya, $J[y]$ funksional uchun lokal maksimum nuqtasi bo'ladi.

Haqiqatan ham: $J[y^*] = 0, \|y - y^*\|_{C[0,1]} < \varepsilon (0 < \varepsilon < 1)$ bo'lganda, $y^2 - 1 \leq 0$, shuning uchun,

$$J[y] = \int y'^2(y^2 - 1)dx \leq 0 = J[y^*]. \quad \forall y \in V.$$

$J[y]$ funksionalning cheksiz o'lchovli W fazoning V qism to'plamidagi minimumini (yoki maksimumini) topish haqidagi masala, cheksiz o'lchovli ekstremal masaladir. Bu masalani *variatsion masala* deb ataymiz va

$$J[y] \rightarrow \min (\max), \quad y \in V \tag{3}$$

yoki

$$J[y] \rightarrow \text{extr}, \quad y \in V$$

ko'rinishda belgilaymiz.

Keyingi ma'ruzalarda qaraladigan variatsion masalalarda $J[y]$ funksional, W fazo va uning V to'plami aniqlashtiriladi. Odatda, V to'plam funksiyalar (yoki ularning geometrik talqini sifatida chiziqlar, sirtlar) to'plamidan iborat bo'ladi.

Shuning uchun, (3) ekstremal masalada V to'plam elementlariga *joyiz funksiyalar* (chiziqlar, sirtlar) deb ataymiz.

Chiziqli normalangan W fazoning biror V to'plamida aniqlangan $J[y]$ funksional berilgan bo'lsin ($V=W$ bo'lishi ham mumkin). V – chiziqli qism fazo yoki biror $y_0 \in V$ uchun qurilgan $M(y_0) = \{h \in W: y+h \in V\}$ to'plam chiziqli qism fazodan iborat bo'lsin.

Shu farazlarda, (3) masalalarda ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari quyidagi teoremlarda ifodalangan.

1- t e o r e m a. Agar $y_0 \in V$ nuqta $J[y]$ funksionalning lokal minimum (maksimum) nuqtasi bo'lsa va shu nuqtada δJ birinchi variatsiya hamda $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiya mavjud bo'lsa,

$$\delta J = 0 \quad \delta^2 J \geq 0 (\delta^2 J \leq 0) \tag{4}$$

shartlar bajariladi.

I s b o t i. Isbotni minimum uchun keltiramiz. Maksimum uchun ham shunga o'xshash isbotlanadi.

$J[y]$ funksionalning $y_0 \in V$ nuqtada δJ variatsiyaga ega ekanligidan,

$$J[y_0 + th] - J[y_0] = t \delta J[y_0, h] + O(t), \quad t \in R \tag{5}$$

tenglik bajariladi, bu yerda $O(t)h \rightarrow 0, t \rightarrow 0, y_0$ - lokal minimum nuqtasi bo'lganligidan, yetarli kichik $t > 0$ uchun, (5) dan,

$$\delta J + \frac{O(t)}{t} \geq 0$$

yoki $t \rightarrow +0$ da limitga o'tib, $\delta J \geq 0$ munosabatni olamiz. Xuddi shuningdek, (5) yoyilmadan yetarli kichik $t < 0$ uchun foydalanib, $\delta J \leq 0$ munosabatni olamiz. Demak, $\delta J = 0$.

Endi $J[y]$ funksionalning y_0 nuqtada $\delta^2 J$ ikkinchi variatsiyasining mavjudligini va birinchi variatsiya $\delta J = 0$ ekanligini hisobga olib,

$$J[y_0 + th] - J[y_0] = \frac{t^2}{2} \delta^2 J[y_0, h] + O(t^2), \quad t \in R \tag{6}$$

yoyilmaga ega bo'lamiz, bu yerda $O(t^2)h^2 \rightarrow 0, t \rightarrow 0, y_0$ - lokal minimum nuqtasi bo'lganligi uchun, (6) dan,

$$\frac{1}{2} \delta^2 J + \frac{O(t^2)}{t^2} \geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $t \rightarrow 0$ da limitga o'tib, $\delta^2 J \geq 0$ munosabatni olamiz. Teorema isbotlandi.

2-t e o r e m a. Agar $J[y]$ funksional $y_0 \in V$ nuqtada birinchi va ikkinchi variatsiyalarga ega bo'lib, ular

$$\delta J, \delta^2 J \geq \alpha h^2 \quad (\delta^2 J \leq -\alpha h^2), \quad \forall h \in W \quad (7)$$

(bu yerda $\alpha > 0$ – biror o'zgarimas) shartlarni qanoatlantirsa, y_0 – lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo'ladi.

Isboti. (7) munosabatlardan va ikkinchi variatsiya ta'rifidan foydalanib,

$$\begin{aligned} J[y_0 + h] - J[y_0] &= \frac{1}{2} \delta^2 J + o(\|h\|^2) \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|^2 + \\ &+ o(\|h\|^2) \geq \|h\|^2 \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

munosabatni olamiz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

bo'lgani uchun, $\alpha > 0$ ni hisobga olib, (8) dan, yetarli kichik $\|h\|$ larda,

$$J[y_0 + h] - J[y_0] > 0$$

munosabatga ega bo'lamiz. Demak, y_0 – lokal minimum nuqtasidir. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Mazkur maqolada variatsion hisob nazariyasining asosiy tushunchalari va fundamental masalalari cheksiz o'lchovli chiziqli normalangan fazolar doirasida batafsil tahlil qilindi. Xususan, funksionalning birinchi va ikkinchi variatsiyalari tushunchalari Freşe va Lagranj ma'nolarida qat'iy matematik asosda yoritildi hamda ularning o'zaro bog'liqligi ko'rsatib berildi. Bu esa funksional differensiallanuvchanligini aniqlashda variatsiyalar nazariyasining muhim o'rin tutishini tasdiqlaydi. Tadqiqot natijasida funksional ekstremumining zaruriy sharti sifatida birinchi variatsiyaning nolga teng bo'lishi asoslab berildi, shuningdek, ikkinchi variatsiya yordamida lokal minimum va maksimumning yetarli shartlari aniq ifodalandi. Ushbu shartlar cheksiz o'lchovli fazolarda qo'yilgan variatsion masalalarning umumiy yechim mezonlarini belgilash imkonini beradi. Natijalar funksional ekstremumini aniqlash jarayonini qat'iy matematik mezonlar asosida amalga oshirishga xizmat qiladi.

Shuningdek, maqolada Eyler–Lagrange tenglamasining keltirib chiqarilishi variatsion masalalarni yechishda asosiy zaruriy shart sifatida qaraldi. Mazkur tenglama orqali klassik variatsion masalalarning yechimlarini topish va ularning xossalarini tahlil qilish imkoniyati mavjudligi ko'rsatildi. Bu esa variatsion hisobning mexanika, fizika, texnika va iqtisodiyotdagi ko'plab amaliy masalalar bilan uzviy bog'liqligini yana bir bor tasdiqlaydi. Olingan natijalar variatsion hisob va optimal boshqaruv nazariyasida qo'llaniladigan murakkab optimallashtirish masalalarini nazariy jihatdan asoslashda muhim ahamiyat kasb etadi. Kelgusida ushbu tadqiqot natijalaridan funksional cheklolarga ega variatsion masalalar, ko'p o'lchovli funksionallar hamda nochiziqli optimal boshqaruv masalalarini o'rganishda samarali foydalanish mumkin. Shu jihatdan, mazkur maqola variatsion hisob sohasidagi keyingi ilmiy izlanishlar uchun mustahkam nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of Variations*. — New York: Dover Publications, 2000.
2. Elsgolts L. E. *Differensial tenglamalar va variatsion hisob*. — Moskva: Nauka, 1974. (MDH davlatlari kutubxonalarida va elektron resurslarda mavjud)
3. Liberzon D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. — Princeton: Princeton University Press, 2012.
4. Evans L. C. *Partial Differential Equations*. — Providence: American Mathematical Society, 2010.
5. Zeidler E. *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. — New York: Springer, 1995.
6. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I*. — New York: Wiley-Interscience, 1989.

GIPERBOLIK TENGLAMALARNI MAK-KORMACK SXEMASI BILAN YECHISH

Imomova Shafolat Mahmudovna,
Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika
va dasturlash texnologiyalari kafedrasida dotsenti

s.m.imomova@buxdu.uz

Naimova Maxzuna Quvondiq qizi,
Buxoro davlat universiteti
Amaliy matematika mutaxassisligi magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada giperbolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarni (QDT) yechish uchun qo'llaniladigan nisbatan oddiy, ayni paytda ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo'lgan MacCormack (Mak-Kormak) sxemasi atroflicha tahlil etiladi. Avval giperbolik tenglamalarning nazariy xususiyatlari, qo'llanish doiralari va ularning chekli ayirmalar usulidagi diskretizatsiya prinsiplari bayon qilinadi. Keyingi bo'limlarda MacCormack sxemasining matematik formulasi, Predictor-Corrector bosqichlari, turg'unlik (stability) hamda aniqlik (accuracy) masalalari chuqur yoritiladi. Yakuniy qismda sxemaning bir o'lchamli transport tenglamasiga tadbiq etilishi algoritmi va dasturning tuzilishi misolida ko'rsatilib, ilmiy-amaliy xulosalar keltiriladi.

Kalit so'zlar: giperbolik tenglama, MacCormack sxemasi, chekli ayirmalar, transport tenglamasi, turg'unlik, aniqlik, Predictor-Corrector, CFL sharti.

РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМЫ МАК-КОРМАКА

Аннотация. В данной статье подробно анализируется относительно простая, но обладающая точностью второго порядка схема MacCormack (Мак-Кормак), применяемая для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) гиперболического типа. Вначале излагаются теоретические особенности гиперболических уравнений, области их применения и принципы их дискретизации методом конечных разностей. В последующих разделах подробно рассматриваются математическая формулировка схемы MacCormack, этапы Predictor-Corrector, вопросы устойчивости и точности. В заключительной части демонстрируется применение схемы к одномерному уравнению переноса на примере алгоритма и структуры программы, приводятся научно-практические выводы.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, схема MacCormack, конечные разности, уравнение переноса, устойчивость, точность, Predictor-Corrector, условие CFL.

SOLVING HYPERBOLIC EQUATIONS USING THE MACCORMACK SCHEME

Abstract. This article thoroughly analyzes the relatively simple yet second-order accurate MacCormack scheme used to solve hyperbolic-type partial differential equations (PDEs). First, the theoretical properties of hyperbolic equations, their scope of application, and the principles of their discretization using the finite difference method are described. In the following sections, the mathematical formulation of the MacCormack scheme, its predictor-corrector stages, stability, and accuracy issues are discussed in detail. In the final part, the application of the scheme to the one-dimensional transport equation is demonstrated through an example of algorithm and program structure, and scientific-practical conclusions are presented.

Keywords: hyperbolic equation, MacCormack scheme, finite differences, transport equation, stability, accuracy, Predictor-Corrector, CFL condition.

Kirish. Matematik fizika, injenerlik va texnika sohalarining juda ko'p masalalari giperbolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar (QDT) orqali ifodalanadi. Misol sifatida to'lqin jarayonlari, transport (adveksiya) jarayonlari, elastik va elektromagnit tebranishlarni keltirish mumkin. Bunday tenglamalarni analitik usulda yechish ko'p hollarda juda murakkab yoki imkonsiz bo'lib chiqadi. Shu bois kompyuter texnikasi rivojlanishi bilan turli sonli usullar, xususan, chekli ayirmalar usuli keng qo'llana boshladi.

Chekli ayirmalar usulining klassik sxemalari (explicit yoki implicit) giperbolik tenglamalar yechimlarini tugun (grid) nuqtalarida hisoblashga imkon beradi. Explicit sxemalar sodda va tez bo'lsa-da, turg'unlik nuqtayi nazaridan vaqt bosqichining kichik bo'lishini talab qiladi. Implicit sxemalar esa katta vaqt bosqichlarida ham turg'unroq, biroq har bir bosqichda matritsali sistemani yechishni taqozo etadi.

Adveksiya (transport) tipidagi giperbolik tenglamalar uchun kuchli, oddiy va tez ishlaydigan usullardan biri — “MacCormack sxemasi”. Ushbu maqolada MacCormack sxemasining nazariy asoslari, turg'unlik shartlari, qo'llanish misollari va ustunlik-kamchiliklari ko'rib chiqiladi.

Tahlil va natijalar. Xususiy hosilali differensial tenglamalar (PDE) elliptik, parabolik va giperbolik kabi turlarga bo'linadi. “Giperbolik tur” odatda to'lqin yoki transport hodisasini ifodalovchi xossaga ega bo'ladi. Eng sodda ko'rinishlaridan biri:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

bu yerda $a = \text{const}$ bo'lgan transport tenglamasidir. Shuningdek, “to'lqin tenglamasi”:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

keng tarqalgan misoldir. Bu tenglamalar fazoda cheksiz yoki cheklangan oraliqda beriladi va vaqt bo'yicha rivojlanadi. Xususiy hosilali differensial giperbolik tenglamalarning o'ziga xos tomoni – ular bo'ylab tezlik yoki to'lqinlar tarqalishi, chegaraviy signallarni uzatishi, xabarning ma'lum cheklangan tezlikda yurishi va h.k.

Giperbolik tenglamalar quyidagi sohalarda ishlatiladi:

- Akustika: Ovozni tarqalishi, aks-sado modellari.
- Elektromagnit to'lqinlar: Maxwell tenglamalari, radio-to'lqinlar, optik jarayonlar.
- Elastiklik nazariyasi: Turli elastik moddalarda to'lqinlar tarqalishi, strukturalarning tebranishi.
- Gidrodinamika: Shallow Water tenglamalari, suv to'lqinlari.
- Gaz dinamikasi: Euler tenglamalari, zarbli to'lqin (shock waves) jarayonlari va h.k.

Chekli ayirmalar usuli. Chekli ayirmalar usulida erkli o'zgaruvchilar (x, t) bo'yicha chekli sondagi nuqtalar majmui tanlanadi:

- Fazoviy parametrlar bo'yicha (1D holda): $x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N.$
- Vaqt bo'yicha: $t^n = t_0 + n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, M.$

Bu to'rda yechimni: $u_i^n \approx u(x_i, t^n)$ deb belgilash mumkin. Giperbolik tenglamalarni yechishda odatda explicit sxemalar yuqori tezlikda hisoblash imkonini beradi, biroq CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) sharti bajarilishini nazorat qilish zarur:

$$|a|(\tau/h) \leq 1, \text{ (bir o'lchamli transport masalasida)}$$

yoki umumiy holda, maksimal fazoviy tezliklarga nisbatan bosqichlar mos ravishda tanlanishi lozim.

Chekli ayirmalar operatorlari

-Birinchi tartibli xosila:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) | (x_i, t^n) \approx (u_{i+1}^n - u_i^n)/h \text{ (o'ng ayirmali hosila),}$$

Yoki $(u_i^n - u_{i-1}^n)/h$ (chap ayirmali hosila),

yoxud $(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)/(2h)$ (markaziy ayirmali hosila).

Vaqt bo'yicha xosila:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) | (x_i, t^n) \approx (u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau \text{ (o'ng ayirmali hosila),}$$

yoki boshqa turdagi differenslar.

Ikkinchi tartibli xosila:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) | (x_i, t^n) \approx (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)/h^2$$

MacCormack sxemasi. MacCormack sxemasi 1969-yilda R. W. MacCormack tomonidan taklif qilingan Predictor–Corrector (oldindan baholash va keyin aniqlashtirish) prinsipi asosida tuzilgan explicit sxema hisoblanadi. Asosan adveksiya (transport) masalalari, Shallow Water sistemalari kabi giperbolik PDE'larda ikkinchi tartibli aniqlik bilan ishlaydi.

Matematik formulalar (1D transport tenglamasi misolida)

Bir o'lchamli transport tenglamasini ko'raylik,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

($a > 0$ deb qaraymiz).

Oqim (flux) funksiyasi: $f(u) = a \cdot u$.

Predictor bosqichi

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \lambda [f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)],$$

bu yerda $\lambda = \frac{\tau}{h}$.

Corrector bosqichi

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} [u_i^n + \tilde{u}_i^{n+1}] - \lambda/2 [f(\tilde{u}_i^{n+1}) - f(\tilde{u}_{i-1}^{n+1})].$$

Shu ikki bosqich tufayli xosilarning o'ng va chap ayirmali hosilari uyg'unlashadi, bu esa ikkinchi tartibli aniqlikka sabab bo'ladi.

Aniqlik va turg'unlik. Aniqlik: Silliq yechimlar uchun diskret xatolik $O(h^2 + \tau^2)$ tartibda kamayadi.

Turg'unlik: EksPLICIT usul sifatida MacCormack sxemasiga ham CFL sharti ta'sir ko'rsatadi:

$$|a|(\tau/h) \leq 1.$$

Bunda a maksimal tezlik (yoki ko'p o'lchamli muammolarda fazoviy tezlik vektori)dan kelib chiqadi.

Sakrash nuqtalari (discontinuity) va dispersiya

Keskin o'tish (discontinuity) bo'lgan joylarda MacCormack sxemasida "ringing" yoki "overshoot" kabi sun'iy tebranishlar ro'y berishi mumkin. Bu masalalarda TVD (Total Variation Diminishing) limiterlar, ENO/WENO (Essentially Non-Oscillatory) metodlari bilan birgalikda MacCormack sxemasini kuchaytirish mumkin.

Ikki yoki ko'p o'lchamli kengaytirish

MacCormack sxemasini ikki o'lchamli adveksiya masalalariga ham qo'llash mumkin. Bunda har bir o'lcham bo'yicha predictor-corrector bosqichlari ketma-ket yoki bo'lib-bo'lib (operator splitting) bajariladi. Hisoblash murakkabligi ortadi, ammo prinsipi o'xshash.

Bir o'lchamli transport tenglamasi

Quyidagi bir o'lchamli transport tenglamasini ko'rib chiqamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{boshlang'ich shart}),$$

$$u(0, t) = g(t), \quad (\text{chegaraviy shart, chapdan oqim keladi}).$$

Bu yerda $a > 0$ doimiy transport tezligi. Boshlang'ich shart $\varphi(x)$ oraliq bo'yicha berilgan, masalan, $u(x, 0) = \sin(x)$ yoki noldan farqli biror funksiya. Chapdagi chegara ($x=0$) dan kirmoqda: $u(0, t) = g(t)$.

Diskretizatsiya

Fazoviy to'r: $x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{L}{N}$.

Vaqt to'r: $t^n = n \cdot \tau, \quad n = 0, 1, \dots, M$.

Diskret yechim: $u_i^n \approx u(x_i, t^n)$

MacCormack sxemasini qo'llash algoritmi.

1) Boshlang'ich shart: $u_i^0 = \varphi(x_i)$ ni barcha i uchun hisoblash.

2) Chegaraviy shart: Agar $a > 0$ bo'lsa, har bir vaqt bosqichda chap chekka $i = 0$ da $u_0^n = g(t^n)$ qilib yangilanadi.

3) CFL sharti: $\lambda = a \frac{\tau}{h} \leq 1$. bo'lishini tekshirish. Bajarilmasa, τ ni kamaytirish yoki h ni mos ravishda o'zgartirish zarur.

4) Predictor bosqichi:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \lambda [a \cdot u_{i+1}^n - a \cdot u_i^n], \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

(Nodon chegara yoki yondosh nuqta yetishmasa, u_{i+1}^n ni $i=N$ da qo'llash qiyin bo'lishi mumkin, xususan, maxsus formula yoki "outflow" shart bilan yechiladi).

5) Corrector bosqichi:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} [u_i^n + \tilde{u}_i^{n+1}] - \left(\frac{\lambda}{2}\right) \cdot [a \cdot \tilde{u}_i^{n+1} - a \cdot \tilde{u}_{i-1}^{n+1}], \quad i = 1, \dots, N.$$

($i=1$ dan boshlash sababi $-\tilde{u}_{i-1}^{n+1}$ ni chaqiryapmiz; $i=0$ da esa chegaraga bog'liq holda maxsus formula kerak).

6) Chegaralarni mos ravishda yangilash: $i=N$ bo'lsa, agar devor ($u=N$ bartaraf) yoki "outflow" ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$) bo'lishi mumkin.

7) $n \leftarrow n + 1$ qilib, vaqt bo'yicha navbatdagi bosqichga o'tamiz.

Dasturiy amalga oshirish.

Tili: C++, Fortran, Python va h.k.

Strukturasi:

(a) Kiritish ($L, N, \tau, T, \max, a, \varphi, g(t)$).

(b) Tarmoqni yaratish: x, t bo'yicha massiv.

(c) Boshlang'ich shartni o'rnatish, chegaralarni sozlash.

(d) "For n in [0..M-1]" tsikli \rightarrow Predictor \rightarrow Corrector bosqichlari.

(e) Natijalarni saqlash, grafik ekranga chiqarish (masalan, $t=t_{end}$ bo'yicha).

Natijalarning taxminiy tahlili. Agar $\varphi(x) = \sin(x)$ bo'lsa va $a > 0$, MacCormack sxemasi sin to'liqini x bo'ylab chapdan o'ngga harakatlantiradi. Kichik h va τ tanlanganda, xatolik kamayadi va yechim $\sin(x - a \cdot t)$ shaklini yaqinroq ifodalaydi.

Agar discontinuity (masalan, boshlang'ich shart "qadam" bo'lsa), keskin o'tish zonalarida ozroq sun'iy tebranish paydo bo'lishi mumkin.

MacCormack sxemasining afzalliklari va kamchiliklari

Afzalliklari:

1) Ikkinchi tartibli aniqlik: Silliq yechimlarda xatolik $O(h^2 + \tau^2)$ tartibda kamayadi.

2) Oddiy dasturiy tuzilish: Predictor-Corrector bosqichlarida eksplisit formula, har bosqichda matritsali sistemani yechish shart emas.

3) Transport masalalarida samarador: Ko'p hollarda adveksiya jarayonini aniq modeli.

Kamchiliklari:

1) CFL cheklovi: τ va h orasidagi qat'iy cheklov; real vaqtning katta oralig'ida uzoq ishlashga to'g'ri keladi.

2) Discontinuity zonalaridagi osillatsiyalar: Shock to'liqin yoki keskin o'tishlar bo'lsa, sun'iy tebranish kuzatiladi. Buni TVD yoki limiterlar bilan yumshatish lozim.

3) Ko'p o'lchamli holda qimmatlashish: 2D yoki 3Dga kengaytirilganda har bosqichda har bir o'lcham bo'yicha predictor-corrector qo'llash, xotira va vaqt xarajatlarini oshiradi.

Turg'unlik tahlili. Turg'unlikni tekshirish uchun odatda Fourier tahlili (von Neumann method) qo'llanadi. MacCormack sxemasida diskret operatorning kuchayish omili G dalil qilinib, $|G| \leq 1$ bo'lganda turg'unlik ta'minlanadi. Bu jarayon " $|a|(\tau/h) \leq 1$ " (bir o'lchamli) degan natijaga olib keladi. Shunday qilib, CFL sharti turg'unlikning asosiy talabi bo'lib qoladi.

Xulosa. Ushbu maqolada giperbolik tenglamalarni sonli yechishdagi muhim usullardan biri — MacCormack sxemasi — atroflicha tahlil qilindi. Sxema adveksiya tipidagi muammolarda, masalan, transport jarayonlari, Shallow Water sistemalari kabi masalalarda ikkinchi tartibli aniqlikni ta'minlaydi. Shu bilan birga, eksplisit xususiyati sababli har bosqichda turg'unlik talablari (CFL) bajarilishi lozim. MacCormack sxemasining asosiy afzalligi — oddiy dasturiy tuzilish va nisbatan yuqori aniqlik; kamchiligi esa discontinuity zonalarida sun'iy tebranish paydo bo'lishi, hamda qat'iy CFL cheklovi tufayli vaqt bosqichini juda kichik tanlash zaruriyati. Amaliy masalalarda ushbu sxemaning TVD-limiter yoki ENO/WENO yondashuvlari bilan uyg'unlashtirilishi yaxshiroq natija beradi. Kelgusida ushbu sxemani ko'p o'lchamli fizik jarayonlarga kengaytirish, parallel hisoblash muhitida tezlashtirish, shuningdek, lokal adaptiv to'rlar (AMR) bilan birlashtirish orqali murakkab muammolarni samarali yechish mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. LeVeque, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.

2. Toro, E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009.

3. Strikwerda, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, 2004.

4. Morton, K. W., Mayers, D. F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. Cambridge University Press, 2005.

5. MacCormack, R. W. *The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering*. AIAA Paper, 1969.

6. Fletcher, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics (Vol.1, 2)*. Springer, 1991.

7. Laney, C. B. *Computational Gasdynamics*. Cambridge University Press, 1998.

8. LeVeque, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, 1990.

9. *Imomova Shafoat Mahmudovna, Naimova Maxzuna Quvondiq qizi. Giperbolik Differensial Tenglamalarni Yechishda Lax-Vendroff Sxemasining Sonli Tahlili// Miasto Przyszłości, Vol. 59 (2025), C.64-67.*
10. *Imomova Shafoat Mahmudovna. Matematikani o'qitishda matematik tizimlardan foydalanish // Pedagogik mahorat. Maxsus son (2022 yil, dekabr),2022, C.77-80.*
11. *Imomova Shafoat Mahmudovna, Zarnigor Bahodirovna Rahmonqulova. Funktsiyalarni mathcad muhitida sonli integrallash // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 4, 2023, C.9-14.*
12. *Imomova Shafoat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullari va tadbiqlari // Educational Research in Universal Sciences. VOLUME 3 | SPECIAL ISSUE 2 | 2024, C.397-404*
13. *A. Hayotov, S. Babaev, N.Olimov, and Sh.Imomova, "The error functional of optimal interpolation formulas in $W_2(\sigma,1)$ space," AIP Conference Proceedings 2781, 020044 (2023), <https://doi.org/10.1063/5.0144752>.*
14. *Samandar Babaev, Nurali Olimov, Shafoat Imomova, and Bekhruzjon Kuvvatov, "Construction of Natural L Spline in $W_2(2\sigma,1)$ Space", AIP Conf. Proc. 3004, 060021 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0199595>*
15. *Imomova Sh.M., Amonova N.A. Chekli elementlar usullar i// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 3, 2024, C.73-81.*
16. *Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan Mathcad muhitida sonli yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 5, 2024, C.30-35.*
17. *Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Koshi masalasini taqribiy yechish // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 9, 2024, C.39-46.*
18. *Eshankulov, K., Sayidova, N., Zaripova, G., Imomova, S., Fayziyeva, D., "Mathematical Model for Information Monitoring System of Fat and Oil Enterprises," AIP Conference Proceedings, 3004(1), 060009, 2024.*

SOVUQ PLAZMA MODEL I VA HOPF–BURGERS TENGLAMASI UCHUN SONLI USULLAR

Jabborov Nasriddin Mirzoodilovich,

*Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti professori
jabborovnasridin@gmail.com*

Davlatov Jasurbek Eshqo‘ziyevich

*Belarus-O‘zbekiston qo‘shma tarmoqlararo amaliy-texnik
kvalifikatsiyalar instituti tayanch doktoranti
jasurbek.davlatov@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada Hopf–Burgers turidagi chiziqsiz differensial tenglama hamda sovuq plazma modeli uchun sonli yechim usullari batafsil o‘rganildi. Tadqiqot davomida konveksiya va diffuziya jarayonlarini birlashtiruvchi chiziqsiz modellarni sonli modellashtirishda ayirmalar sxemalarining ahamiyati va ularning fizik jarayonlarga mosligi ko‘rsatib berildi.

Kalit so‘zlar: Hopf–Burgers, chegaraviy shart, chekli ayirma, tenglama, sonli usul.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ И УРАВНЕНИЯ ХОПФ–БУРГЕРСА

Аннотация. В данной статье подробно рассматриваются методы численного решения для нелинейного дифференциального уравнения типа Хопфа–Бюргерса и модели холодной плазмы. В ходе исследования показано значение разностных схем в численном моделировании нелинейных моделей, объединяющих процессы конвекции и диффузии, и их совместимость с физическими процессами.

Ключевые слова: Хопф–Бюргерс, граничное условие, конечная разность, уравнение, численный метод.

NUMERICAL METHODS FOR THE COLD PLASMA MODEL AND THE HOPF–BURGERS EQUATION

Abstract. In this article, numerical solution methods for the nonlinear Hopf–Burgers type differential equation and the cold plasma model are studied in detail. In the course of the study, the significance of difference schemes in the numerical modeling of nonlinear models combining convection and diffusion processes and their compatibility with physical processes were shown.

Keywords: Hopf–Burgers, boundary condition, finite difference, equation, numerical method.

Kirish. Chiziqsiz differensial tenglamalar zamonaviy amaliy matematika va nazariy fizikaning muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Bunday tenglamalar ko‘plab real fizik jarayonlarni, jumladan, to‘lqinlarning tarqalishi, konveksiya va diffuziya jarayonlari, energiyaning muhit bo‘ylab uzatilishi kabi hodisalarni matematik jihatdan tavsiflash imkonini beradi. Ayniqsa, konveksiya va diffuziya hadlarini birlashtiruvchi modellar murakkab nolinear xatti-harakatlarga ega bo‘lib, ularni o‘rganish ilmiy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega. Shunday modellar qatoriga Hopf–Burgers tenglamasi kiradi. Ushbu tenglama dastlab Hopf va Burgers tomonidan turbulentslik va nolinear to‘lqin jarayonlarini soddalashtirilgan holda tavsiflash maqsadida taklif qilingan. Hopf–Burgers tenglamasi konveksiya va viskozlik (diffuziya) jarayonlarining o‘zaro ta‘sirini ifodalaydi va vaqt o‘tishi bilan shok-to‘lqinlarning hosil bo‘lishi, ularning harakati hamda viskozlik ta‘sirida yumshatilishi kabi jarayonlarni namoyon qiladi.

Hopf–Burgers tenglamasining analitik yechimlari faqat ayrim maxsus holatlar uchun ma‘lum bo‘lib, umumiy holatda ularni topish juda murakkabdir. Ayniqsa, viskozlik koeffitsienti kichik bo‘lgan holatlarda yechimlarda keskin gradientlar va shok-to‘lqinlar paydo bo‘ladi. Shu sababli, bunday tenglamalarni tadqiq qilishda sonli modellashtirish usullari asosiy vosita hisoblanadi. Sonli usullar yordamida yechimning vaqt bo‘yicha evolyutsiyasi, shok-to‘lqinlarning shakllanish mexanizmi va viskozlikning roli aniqroq o‘rganiladi. Sonli yechimlarni qurishda qo‘llaniladigan ayirmalar sxemalari barqarorlik, aniqlik va fizik moslik talablarini qanoatlantirishi lozim. Xususan, eksplisit ayirmalar sxemalari sodda tuzilishga ega bo‘lib, amaliy hisoblarda tez bajarilishi bilan ajralib turadi. Biroq bunday sxemalar uchun vaqt va fazoviy qadamlar orasidagi bog‘lanishni belgilovchi CFL shartining bajarilishi muhim ahamiyatga ega. Aks holda, sonli yechimda sun‘iy tebranishlar yoki beqarorliklar yuzaga kelishi mumkin.

Plazma fizikasi masalalarida ham sonli modellashtirish muhim o‘rin tutadi. Plazma — bu ionlangan gaz bo‘lib, unda zaryadlangan zarrachalarning kollektiv harakati kuzatiladi. Soddalashtirilgan hollarda sovuq plazma modeli qo‘llanilib, unda elektronlarning issiqlik harakati e‘tiborga olinmaydi. Bunday model

elektronlar tezligi va elektr maydoni o'rtasidagi o'zaro bog'lanishni ifodalovchi chiziqli differensial tenglamalar tizimi orqali tavsiflanadi. Sovuq plazma modeli oddiy garmonik tebranishlarga olib keladi va u plazma tebranishlarining asosiy fizik xususiyatlarini o'rganishda qulay model hisoblanadi. Ushbu model uchun ham analitik yechimlar mavjud bo'lsa-da, sonli usullar yordamida yechimning xatti-harakati, energiya saqlanishi va fazaviy portretlari batafsil tahlil qilinadi. Ayniqsa, Runge–Kutta usullari va markaziy ayirma sxemalari plazma modellarini yechishda keng qo'llaniladi.

Mazkur maqolada Hopf–Burgers tenglamasi va sovuq plazma modeli uchun sodda, ammo barqaror sonli usullar taklif etiladi. Hopf–Burgers tenglamasi uchun eksplisit ayirmalar sxemasi qurilib, uning barqarorligi CFL sharti va energiyaviy baho orqali tahlil qilinadi. Sovuq plazma modeli uchun esa to'rtinchi tartibli Runge–Kutta hamda energiyani saqlovchi markaziy ayirma sxemalari qo'llaniladi. Sonli tajribalar orqali olingan natijalar grafiklar yordamida tahlil qilinib, usullarning fizik jarayonlarga mosligi ko'rsatib beriladi.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Chiziqsiz differensial tenglamalar nazariyasi va ularning sonli yechimlari amaliy matematika va fizikada muhim ilmiy yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Xususan, konveksiya va diffuziya jarayonlarini tavsiflovchi Hopf–Burgers tenglamasi ko'plab fizik modellar uchun asos bo'lib xizmat qiladi. Ushbu tenglama dastlab J. M. Burgers tomonidan turbulentslik jarayonlarini soddalashtirilgan holda modellashtirish maqsadida taklif qilingan bo'lib, keyinchalik E. Hopf tomonidan uning matematik xossalari chuqur o'rganilgan.

Hopf–Burgers tenglamasi uchun analitik yechimlar faqat ayrim maxsus holatlar uchun ma'lum. Shu sababli, ushbu tenglamani o'rganishda sonli modellashtirish usullari keng qo'llaniladi. Klassik ishlar orasida ayirmalar usullariga asoslangan yondashuvlar alohida o'rin tutadi. R. J. LeVeque va J. C. Strikwerda ishlarida konveksiya-diffuziya tenglamalari uchun barqaror va aniqligi yuqori bo'lgan sonli sxemalar batafsil tahlil qilingan.

Hopf–Burgers tenglamasi yechimlarining muhim xususiyatlaridan biri shok-to'lqinlarning hosil bo'lishidir. Bu jarayon nolinear konveksiya hadining ustunligi bilan bog'liq bo'lib, viskozlik mavjud bo'lgan holatlarda shok-to'lqinlar yumshatilgan (viscous shock) shaklga ega bo'ladi. Ushbu hodisa ko'plab tadqiqotlarda, jumladan, konveksiya ustuvor bo'lgan modellarni o'rganishga bag'ishlangan ishlarda keng yoritilgan. Plazma fizikasi sohasida esa sovuq plazma modeli elektronlar va elektr maydon o'rtasidagi o'zaro ta'sirni soddalashtirilgan holda tavsiflash uchun qo'llaniladi. Bunday model plazma tebranishlarining asosiy xususiyatlarini o'rganishda muhim ahamiyatga ega. F. F. Chen va boshqa mualliflar ishlarida sovuq plazma modeli uchun analitik va sonli yondashuvlar keltirilgan bo'lib, garmonik tebranishlar va energiya saqlanishi asosiy xususiyat sifatida ko'rsatiladi.

Shu bilan birga, mavjud adabiyotlarda Hopf–Burgers tenglamasi va sovuq plazma modelini bir maqola doirasida, yagona sonli yondashuvlar nuqtayi nazaridan taqqoslab o'rganishga bag'ishlangan ishlar nisbatan kam uchraydi. Ayniqsa, eksplisit ayirmalar sxemalari va energiyani saqlovchi markaziy farqlar sxemalarini birgalikda tahlil qilish masalasi yetarlicha yoritilmagan. Mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, Hopf–Burgers tenglamasi va sovuq plazma modeli uchun turli sonli yondashuvlar taklif etilgan bo'lsa-da, ularni yagona, soddalashtirilgan va fizik jihatdan mos sxemalar asosida birgalikda tahlil qilish masalasi yetarlicha yoritilmagan. Shu munosabat bilan, mazkur maqolada quyidagi masalalar qo'yiladi.

1. Masalaning qo'yilishi

Maqolada quyidagi matematik modellar va ularga mos sonli masalalar ko'rib chiqiladi.

Birinchi masala sifatida konveksiya va diffuziya jarayonlarini ifodalovchi Hopf–Burgers tenglamasi qaraladi:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T],$$

bu yerda $u(x, t)$ — izlanayotgan funksiya, $\varepsilon > 0$ — viskozlik koeffitsienti. Tenglama uchun boshlang'ich shart

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

va periodik yoki nol qiymatli chegaraviy shartlar berilgan deb hisoblanadi.

Ushbu masalaning asosiy maqsadi Hopf–Burgers tenglamasi uchun eksplisit ayirmalar sxemasini qurish, uning barqarorlik shartlarini aniqlash hamda viskozlik parametrining yechim xatti-harakatiga ta'sirini sonli tajribalar orqali o'rganishdan iborat.

Ikkinchi masala sifatida sovuq plazma modeli uchun differensial tenglamalar tizimi qaraladi:

$$\begin{cases} u'(t) = E(t), \\ E'(t) = -u(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

bu yerda $u(t)$ — elektronlar tezligi, $E(t)$ — elektr maydon kuchlanganligi. Boshlang'ich shartlar $u(0) = u_0$, $E(0) = E_0$ ko'rinishida beriladi.

Mazkur masalaning maqsadi sovuq plazma modelining garmonik tebranish xususiyatlarini sonli jihatdan tadqiq qilish, Runge–Kutta va markaziy ayirma sxemalarining barqarorligi hamda energiya saqlanishiga ta'sirini taqqoslashdan iborat.

Umumiy holda, maqolada qo'yilgan masalalar quyidagi vazifalarni bajarishga qaratilgan:

- Hopf–Burgers tenglamasi uchun barqaror eksplisit sonli sxemani qurish;
- CFL sharti va energiyaviy baho asosida sxemaning barqarorligini asoslash;
- sovuq plazma modeli uchun energiyani saqlovchi sonli yondashuvlarni tahlil qilish;
- sonli tajribalar va grafiklar yordamida nazariy xulosalarni tasdiqlash.

2. Hopf–Burgers tenglamasi va ayirmalar sxemasi

Hopf–Burgers tenglamasi konveksiya va diffuziya jarayonlarini birlashtiruvchi chiziqsiz qisman differensial tenglama bo'lib, quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

bu yerda $u(x, t)$ — izlanayotgan funksiya, $\varepsilon > 0$ — viskozlik (diffuziya) koeffitsienti, x — fazoviy o'zgaruvchi, t — vaqt.

Ushbu tenglama chiziqsiz bo'lib, bunga konveksiya hadining uu_x ko'rinishida berilishi sabab bo'ladi. Mazkur had to'lqinlarning o'z qiymatiga bog'liq tezlik bilan fazo bo'ylab siljishini ifodalaydi. Natijada yechim profili vaqt o'tishi bilan egilib, ma'lum sharoitlarda keskin o'zgarishlarga olib keladi. Tenglamaning o'ng tomonidagi εu_{xx} hadi viskozlik yoki diffuziya ta'sirini hisobga olib, yechimdagi keskin fazoviy o'zgarishlarni tekislash rolini bajaradi. Bu had gradientlarning cheksiz o'sishini cheklab, shok-to'lqinlarning fizik jihatdan real bo'lgan silliqashtirilgan shaklini hosil qiladi. Agar $\varepsilon = 0$ bo'lsa, tenglama sof konveksiya tenglamasiga aylanadi va bunda to'lqinlarning turli qismlari turli tezliklarda harakatlanishi sababli yechimda matematik shoklar yuzaga keladi. Bunday holatda yechim klassik ma'noda mavjud bo'lmay, u faqat zaif yechim tushunchasi orqali aniqlanadi. [1]

2.1. Konservativ ko'rinish

Hopf–Burgers tenglamasini quyidagi konservativ ko'rinishda yozish mumkin:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = \varepsilon u_{xx}.$$

Konservativ ko'rinish sonli hisoblashlarda muhim ahamiyatga ega, chunki u fizik kattaliklarning (masalan, impuls yoki energiya) to'g'ri uzatilishini ta'minlaydi. Ayniqsa, shok-to'lqinlar mavjud bo'lgan hollarda konservativ sxemalar yechimning fizik jihatdan ma'noli bo'lishini kafolatlaydi.

2.2. Fazoviy va vaqt panjaralari

Fazoviy oraliq $[0, L]$ bir jinsli panjara bilan bo'linadi:

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

bu yerda $h = \frac{L}{N}$ — fazoviy qadam.

Vaqt intervali $[0, T]$ esa quyidagicha bo'linadi:

$$t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_t,$$

bu yerda $\tau = \frac{T}{N_t}$ — vaqt qadami.

Sonli yechim $u(x_j, t^n)$ qiymatlarining yaqinlashganlari u_j^n bilan belgilanadi. [3]

2.3. Ayirmalar sxemasini qurish

Hosilalarni markaziy farqlar yordamida yaqinlashtiramiz. Vaqt bo'yicha hosila uchun oldinga farq, fazo bo'yicha hosilalar uchun esa markaziy farqlar qo'llaniladi. Natijada quyidagi eksplisit ayirmalar sxemasi olinadi:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{4h} = \varepsilon \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

Sxema eksplisit bo'lgani sababli har bir vaqt qatlamida yechimni hisoblashda faqat oldingi qatlam qiymatlaridan foydalaniladi. Bu hisoblash jarayonini sodda va tez bajariladigan qiladi.

2.4. Chegaraviy shartlar

Amaliy hisoblarda quyidagi chegaraviy shartlar keng qo'llaniladi:

Periodik chegaraviy shartlar:

$$u_0^n = u_N^n, \quad u_{N+1}^n = u_1^n.$$

Bu shartlar to'liqlarning uzluksiz tarqalishini va yopiq muhitni matematik jihatdan qulay tasvirlaydi.

Nol qiymatli chegaraviy shartlar:

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0.$$

Ushbu maqolada asosan periodik chegaraviy shartlar qabul qilinadi, chunki ular shok-to'liqlarning harakatini sun'iy cheklovlersiz kuzatish imkonini beradi.

2.5. Sxemaning fizik talqini

Qurilgan ayirmalar sxemasi Hopf–Burgers tenglamasining asosiy fizik xususiyatlarini to'g'ri aks ettiradi. Chiziqsiz konveksiya hadi to'liqin frontining keskinlashuviga olib keladi, diffuziya hadi esa ushbu keskinlikni yumshatib, fizik jihatdan real bo'lgan *viscous shock layer* hosil qiladi.

Viskozlik koeffitsienti ε ning qiymati yechim xatti-harakatiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Katta ε qiymatlarida yechim silliq bo'lib qoladi, kichik ε qiymatlarida esa shok-to'liqlarga yaqin jarayonlar yuzaga keladi. Shu sababli, ε ning turli qiymatlarida olingan sonli natijalar alohida qiziqish uyg'otadi va keyingi bo'limda batafsil tahlil qilinadi.

3. Barqarorlik va CFL sharti

Hopf–Burgers tenglamasi uchun qurilgan eksplisit ayirmalar sxemasining muhim xususiyatlaridan biri uning barqarorligidir. Sonli sxema barqaror bo'lmasa, hisoblash jarayonida yechimda sun'iy tebranishlar, portlashlar yoki fizik jihatdan ma'nosiz qiymatlar yuzaga kelishi mumkin. Shu sababli, vaqt va fazoviy qadamlar orasidagi bog'lanishni aniqlovchi barqarorlik shartlarini o'rganish alohida ahamiyatga ega.

3.1. CFL shartining kelib chiqishi

Eksplisit ayirmalar sxemalari uchun barqarorlik sharti Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) sharti bilan ifodalanadi. Ushbu shart sonli axborot tarqalish tezligi fizik jarayondagi axborot tarqalish tezligidan oshib ketmasligini talab qiladi. Hopf–Burgers tenglamasida axborot tarqalish tezligi konveksiya hadiga bog'liq bo'lib, u yechimning maksimal qiymati bilan aniqlanadi. Shu sababli, konveksiya hadi uchun CFL sharti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\tau \leq C_1 \frac{h}{\max |u|},$$

bu yerda $C_1 < 1$ — xavfsizlik koeffitsienti.

Diffuziya hadi uchun esa vaqt qadami va fazoviy qadam orasida quyidagi cheklov bajarilishi lozim:

$$\tau \leq C_2 \frac{h^2}{\varepsilon},$$

bu yerda $C_2 < \frac{1}{2}$.

Amaliy hisoblarda ushbu ikki cheklov birgalikda hisobga olinib, vaqt qadami quyidagi shartni qanoatlantiradigan qilib tanlanadi:

$$\tau \leq \min \left(C_1 \frac{h}{\max |u|}, C_2 \frac{h^2}{\varepsilon} \right).$$

Bu tanlov sxemaning barqaror ishlashini ta'minlaydi. [6]

3.2. Diskret energiya tushunchasi

Sxemaning barqarorligini chuqurroq tahlil qilish uchun diskret energiya funksiyasi kiritiladi. Quyidagi kvadratik funktsiya sonli yechim energiyasi sifatida qaraladi:

$$E^n = h \sum_{j=0}^N (u_j^n)^2.$$

Bu ifoda uzluksiz holatdagi energiya integralining diskret analogi bo'lib, yechim amplitudasining umumiy o'lchovini beradi.

3.3. Energiyaviy baho

Qurilgan ayirmalar sxemasini u_j^n ga ko'paytirib, barcha fazoviy indekslar bo'yicha yig'indiga o'tamiz. Markaziy farqlar yordamida yozilgan konveksiya hadi yig'indida o'zaro kompensatsiyalanadi, ya'ni umumiy energiyaga ta'sir ko'rsatmaydi. Bu xususiyat konservativ sxemalarga xos bo'lib, chiziqsiz had energiyani sun'iy ravishda oshirib yubormasligini ta'minlaydi.

Diffuziya hadi esa quyidagi manfiy ifodani hosil qiladi:

$$-\varepsilon\tau h \sum_{j=0}^N \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right)^2 \leq 0.$$

Natijada diskret energiya uchun quyidagi baho olinadi: $E^{n+1} \leq E^n$.

Bu tengsizlik sonli sxemaning energiyani kamaytiruvchi yoki kamida saqlovchi xususiyatga ega ekanini ko'rsatadi. Shu bilan sxemaning barqarorligi matematik jihatdan asoslanadi.

3.4. Barqarorlikning fizik talqini

Energiyaviy baho fizik nuqtayi nazardan ham muhim ahamiyatga ega. Hopf–Burgers tenglamasida viskozlik energiyaning so'nishiga olib keladi. Sonli sxemada ham aynan shu xususiyat saqlanib, yechim amplitudasi sun'iy ravishda ortib ketmaydi. Agar CFL sharti buzilsa, konveksiya yoki diffuziya hadlari sonli sxemada haddan tashqari kuchayib, yechimda fizik bo'lmagan tebranishlar paydo bo'lishi mumkin. Shu sababli, vaqt qadamini tanlashda CFL shartiga qat'iy rioya qilish talab etiladi.

4. Sovuq plazma modeli uchun sonli usul

Sovuq plazma (cold plasma) modeli plazmadagi zaryadlangan zarrachalarning kollektiv tebranish jarayonini soddalashtirilgan ko'rinishda tasvirlaydi. "Sovuq" atamasi bu yerda elektronlarning issiqlik (termik) harakati e'tiborga olinmasligini, ya'ni modelda asosiy rolni elektr maydon va elektronlar tezligi o'rtasidagi o'zaro ta'sir egallashini anglatadi. Ushbu model plazma tebranishlari (plasma oscillations) ning eng sodda, lekin fizik jihatdan mazmunli matematik tavsiflaridan biridir.

Maqolada quyidagi differensial tenglamalar tizimi ko'rib chiqiladi:

$$\begin{cases} u'(t) = E(t), \\ E'(t) = -u(t), \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

bu yerda:

- $u(t)$ — elektronlar tezligi (yoki shunga proporsional kattalik),
- $E(t)$ — elektr maydon kuchlanganligi (yoki shunga proporsional kattalik).

4.1. Modelning umumiy xususiyatlari va analitik talqin

Tizim fizik ma'noda shuni bildiradiki:

- elektr maydon $E(t)$ elektronlarni tezlashtiradi (shuning uchun $u'(t) = E(t)$),
- elektronlarning kollektiv siljishi esa qarshi yo'nalgan elektr maydonni hosil qiladi (shuning uchun $E'(t) = -u(t)$).

Bu ikki tenglama bir-biriga bog'liq bo'lib, umumiy holda garmonik tebranishga olib keladi. Haqiqatan ham, birinchi tenglamani t bo'yicha yana bir marta differensiallab, ikkinchi tenglamadan foydalanamiz:

$$u''(t) = E'(t) = -u(t),$$

ya'ni:

$$u''(t) + u(t) = 0.$$

Bu oddiy garmonik osillator tenglamasi bo'lib, yechimlari sinus va kosinus funksiyalaridan iborat:

$$u(t) = u_0 \cos t + E_0 \sin t,$$

$$E(t) = -u_0 \sin t + E_0 \cos t,$$

bu yerda $u_0 = u(0)$, $E_0 = E(0)$ — boshlang'ich qiymatlar.

Energiya saqlanishi. Ushbu tizim uchun quyidagi energiya funksiyasi aniqlanadi:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} (u(t)^2 + E(t)^2).$$

Hosila olamiz:

$$\mathcal{H}'(t) = u(t)u'(t) + E(t)E'(t) = u(t)E(t) + E(t)(-u(t)) = 0.$$

Demak,

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0) = \text{const.}$$

Bu natija juda muhim: **to'g'ri sonli usul tanlansa, amplituda sun'iy so'nmasligi yoki oshib ketmasligi kerak.** Shuning uchun biz sonli sxemani tanlashda aynan energiya saqlanishiga e'tibor beramiz.

4.2. Vaqt panjarasi va notatsiya

Vaqt intervali $[0, T]$ bir jinsli bo'linadi:

$$t^n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

bu yerda $\tau = \frac{T}{N}$ — vaqt qadami.

Sonli yaqinlashuvlar quyidagicha belgilanadi:

$$u^n \approx u(t^n), \quad E^n \approx E(t^n).$$

4.3. Runge–Kutta 4-tartibli (RK4) usuli

Sovuq plazma modeli chiziqli bo'lsa-da, yuqori aniqlikda yechim olish va grafiklarni “silliq” chiqarish uchun amaliy hisoblarda RK4 usuli juda qulay hisoblanadi. Tizimni vektor ko'rinishda yozamiz:

$$y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ E(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = F(y) = \begin{pmatrix} E \\ u \end{pmatrix}.$$

RK4 sxemasi:

$$k_1 = F(y^n),$$

$$k_2 = F\left(y^n + \frac{\tau}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = F\left(y^n + \frac{\tau}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = F\left(y^n + \tau k_3\right),$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Bu yerda $y^n = (u^n, E^n)^T$.

Cheklovi: RK4 nazariy jihatdan energiyani aynan saqlamaydigan usul, ammo amalda τ yetarlicha kichik bo'lsa, energiya juda sekin o'zgaradi va xatolik kichik bo'ladi.

4.4. Energiyani saqlovchi markaziy ayirma sxemasi

Plazma tebranishlarida energiya saqlanishi asosiy fizik xususiyat bo'lgani uchun energiyani yaxshiroq saqlaydigan sxema ham kiritamiz. $u'' + u = 0$ tenglama uchun markaziy farqlar sxemasi:

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + u^n = 0,$$

bundan:

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} - \tau^2 u^n = (2 - \tau^2)u^n - u^{n-1}.$$

Bu sxema:

- 2-tartibli aniqlikka ega,
- osillatorlar uchun “fizik” (amplituda yaxshi saqlanadi),
- hisoblashda juda tez.

Boshlang‘ich qiymatlar masalasi. Sxema u^{n-1} ni ham talab qiladi, shuning uchun u^1 ni alohida hisoblab olish kerak. Taylor yoyilmasidan foydalanib:

$$u(\tau) = u(0) + \tau u'(0) + \frac{\tau^2}{2} u''(0) + O(\tau^3).$$

Bu yerda:

$$u(0) = u^0 = u_0,$$

$$u'(0) = E(0) = E_0,$$

$$u''(0) = -u(0) = -u_0.$$

Demak:

$$u^1 = u_0 + \tau E_0 - \frac{\tau^2}{2} u_0.$$

Keyin u^2, u^3, \dots yuqoridagi rekurrent formula bilan topiladi.

Elektr maydonni hisoblash. Modeldan $E(t) = u'(t)$, shuning uchun markaziy farq bilan:

$$E^n \approx \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}.$$

Bu formula ham 2-tartibli aniqlikka ega va fazaviy portretni to‘g‘ri beradi.

4.5. Barqarorlik sharti va energiya xatti-harakati

Markaziy ayirma sxemasi uchun barqarorlik sharti mavjud. Klassik natijaga ko‘ra:

$$\tau \leq 2$$

shart bajarilganda sxema barqaror ishlaydi va yechim amplitudasi portlab ketmaydi.

Fizik jihatdan bu shuni anglatadiki: vaqt qadami juda katta bo‘lsa, sonli sxema tebranish jarayonini noto‘g‘ri “tezlikda” qayta ishlab, sun‘iy energiya ortishiga olib keladi.

4.6. Hisoblash algoritmi (amaliy ko‘rinishda)

Quyida sovuq plazma modeli uchun hisoblash algoritmi soddalashtirilgan bosqichlar bilan keltiriladi.

A) RK4 algoritmi

1. Parametrlarni berish: T, τ, u_0, E_0 .
2. $n = 0$ dan boshlab:
 - k_1, k_2, k_3, k_4 ni hisoblash,
 - u^{n+1}, E^{n+1} ni yangilash.
3. Natijalarni saqlash: $u(t), E(t), \mathcal{H}(t)$.

B) Markaziy ayirma algoritmi

1. Parametrlar: T, τ, u_0, E_0 .
2. $u^0 = u_0$,

$$u^1 = u_0 + \tau E_0 - \frac{\tau^2}{2} u_0.$$

3. $n = 1, 2, \dots$ uchun

$$u^{n+1} = (2 - \tau^2)u^n - u^{n-1}.$$

4. Har bir n da elektr maydon:

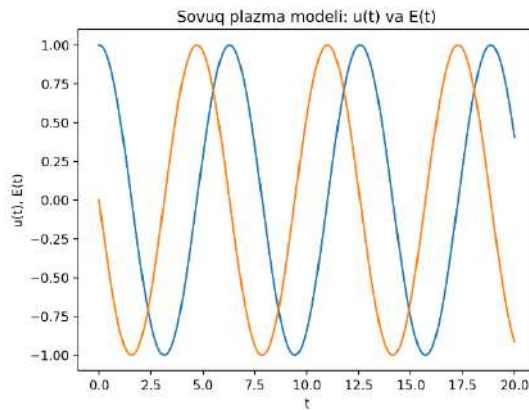
$$E^n = \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau}.$$

5. Sonli tajribalar va grafik natijalar

Ushbu bo‘limda Hopf–Burgers tenglamasi va sovuq plazma modeli uchun o‘tkazilgan sonli tajribalar natijalari keltiriladi. Hisoblashlar oldingi bo‘limlarda qurilgan sonli sxemalar asosida amalga oshirilib, natijalar grafiklar va fazaviy portretlar yordamida tahlil qilinadi. Sonli tajribalar sxemalarning barqarorligi, fizik jarayonlarga mosligi hamda viskozlik parametrining yechim xatti-harakatiga ta’sirini yaqqol namoyon etadi.

5.1. Sovuq plazma modeli uchun sonli natijalar

Sovuq plazma modeli uchun hisoblashlar 4-bo‘limda bayon qilingan Runge–Kutta 4-tartibli va markaziy ayirma sxemalari yordamida bajarildi. Boshlang‘ich shartlar sifatida $u(0) = u_0$, $E(0) = E_0$ qiymatlar qabul qilindi.

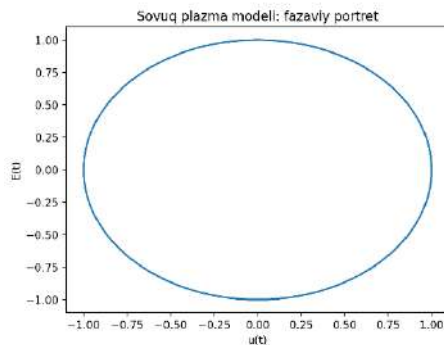


1-rasm. $u(t)$ va $E(t)$ funksiyalarining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi

Izoh (rasm ostiga): Rasmda elektronlar tezligi $u(t)$ va elektr maydoni $E(t)$ funksiyalarining vaqt bo‘yicha garmonik tebranishlari tasvirlangan. Ko‘rinib turibdiki, har ikkala funksiya amplitudasi vaqt davomida deyarli o‘zgarmaydi. Bu holat sovuq plazma modelining analitik yechimiga to‘liq mos bo‘lib, qo‘llanilgan sonli usullarning barqarorligini tasdiqlaydi.

Ilmiy tahlil:

Grafiklar shuni ko‘rsatadiki, $u(t)$ va $E(t)$ o‘zaro faza siljishiga ega bo‘lib, biri maksimumga erishgan paytda ikkinchisi nolga yaqin qiymatlarni qabul qiladi. Bu klassik garmonik osillator xatti-harakatiga xos bo‘lib, plazma tebranishlarining fizik mohiyatini to‘g‘ri aks ettiradi.



2-rasm. Sovuq plazma modeli uchun fazaviy portret $u(t), E(t)$

Izoh:

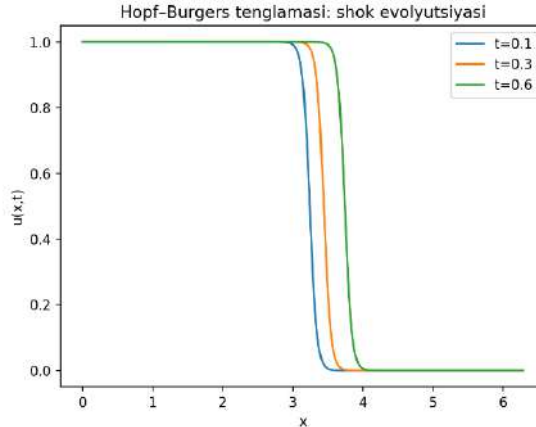
Fazaviy portret yopiq egri chiziq — deyarli doira shaklida bo‘lib, tizim energiyasining vaqt bo‘yicha saqlanishini ko‘rsatadi.

Ilmiy tahlil:

Agar sonli sxema energiyani saqlamaganida, fazaviy portret spiral ko‘rinishiga ega bo‘lar edi (ichkariga yoki tashqariga qarab). Ushbu rasmda esa bunday hodisa kuzatilmaydi, bu esa markaziy ayirma sxemasi va RK4 usulining sovuq plazma modeli uchun mosligini tasdiqlaydi.

5.2. Hopf–Burgers tenglamasi uchun to‘lqin evolyutsiyasi

Hopf–Burgers tenglamasi uchun hisoblashlar fazoviy oralqida periodik chegaraviy shartlar asosida bajarildi. Boshlang‘ich funksiya sifatida sinusoidal yoki keskin razryvga ega bo‘lgan profil qabul qilindi.



3-rasm. Hopf–Burgers tenglamasi uchun $u(x,t)$ yechimining vaqt bo‘yicha evolyutsiyasi

Izoh:

Rasmda boshlang‘ich silliq profil vaqt o‘tishi bilan keskinlashib borishi va viskozlik ta‘siri natijasida shok-to‘lqinning yumshatilgan shakli hosil bo‘lishi ko‘rsatilgan.

Ilmiy tahlil:

Chiziqsiz konveksiya hadi yechim gradientining ortishiga olib keladi, diffuziya hadi esa bu keskinlikni cheklaydi. Natijada fizik jihatdan real bo‘lgan viscous shock layer hosil bo‘ladi. Ushbu jarayon Hopf–Burgers tenglamasining asosiy xususiyatlaridan biri hisoblanadi.

5.3. Viskozlik parametrining ta‘siri

Hopf–Burgers tenglamasi uchun viskozlik parametrining ta‘siri sonli hisoblashlar orqali tadqiq qilindi. Hisoblashlar bir xil boshlang‘ich va chegaraviy shartlar ostida $\epsilon=0.1$, $\epsilon=0.01$ va $\epsilon=0.001$ qiymatlar uchun bajarildi. Olingan sonli natijalar shuni ko‘rsatdiki, ϵ kamaygani sari yechim profili fazoviy jihatdan keskinlashib, shok-to‘lqinga yaqin xatti-harakat namoyon etadi. Katta ϵ qiymatlarida esa diffuziya ta‘siri ustun bo‘lib, yechim silliq holatda saqlanadi.

5.4. Riemann masalasi uchun sonli tajribalar

Hopf–Burgers tenglamasi uchun klassik Riemann masalasi quyidagi boshlang‘ich shart bilan qaraldi:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < \pi, \\ 0 & x > \pi. \end{cases}$$

Bu boshlang‘ich profil keskin uzilishga ega bo‘lib, shok-to‘lqinlarning hosil bo‘lishini o‘rganish uchun qulay test hisoblanadi.

Xulosa va takliflar. Ushbu maqolada Hopf–Burgers turidagi chiziqsiz differensial tenglama hamda sovuq plazma modeli uchun sonli yechim usullari batafsil o‘rganildi. Tadqiqot davomida konveksiya va diffuziya jarayonlarini birlashtiruvchi chiziqsiz modellarni sonli modellashtirishda ayirmalar sxemalarining ahamiyati va ularning fizik jarayonlarga mosligi ko‘rsatib berildi.

Hopf–Burgers tenglamasi uchun eksplisit ayirmalar sxemasi qurildi va uning barqarorligi Courant–Friedrichs–Lewy sharti hamda diskret energiyaviy baho orqali asoslandi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, vaqt va fazoviy qadamlar CFL shartiga muvofiq tanlanganda sonli sxema barqaror ishlaydi va yechimda sun‘iy tebranishlar yuzaga kelmaydi. Diffuziya hadi energiyaning kamayishiga olib kelib, shok-to‘lqinlarning fizik jihatdan real bo‘lgan yumshatilgan (viscous shock) shaklini hosil qiladi.

Sovuq plazma modeli uchun olib borilgan tadqiqotlar elektronlar tezligi va elektr maydoni o‘rtasidagi garmonik bog‘lanishni aniq aks ettirdi. Runge–Kutta 4-tartibli usuli yuqori aniqlikdagi yechimlar olish imkonini bersa, markaziy ayirma sxemasi energiyani saqlovchi xususiyati bilan ajralib turdi. Fazaviy portretlarning yopiq egri chiziq (deyarli doira) ko‘rinishida bo‘lishi sovuq plazma tebranishlarining asosiy fizik xususiyati — energiya saqlanishini sonli jihatdan tasdiqladi.

Olingan natijalar suyuqliklar mexanikasi, plazma fizikasi va boshqa chiziqsiz muhitlarda to'liq jarayonlarini o'rganish masalalarida qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Burgers J. M. *The nonlinear diffusion equation: asymptotic solutions and statistical problems.* — Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1974. — 174 p.
2. Hopf E. *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$,* // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1950. — Vol. 3, No. 3. — P. 201–230.
3. LeVeque R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws.* — Basel: Birkhäuser Verlag, 1992. — 214 p.
4. Strikwerda J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations.* — 2nd ed. — Philadelphia: SIAM, 2004. — 404 p.
5. Toro E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* — 3rd ed. — Berlin: Springer, 2009. — 724 p.
6. Evans L. C. *Partial Differential Equations.* — 2nd ed. — Providence: American Mathematical Society, 2010. — 749 p.
7. Chen F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2nd ed. — New York: Springer, 1984. — 421 p.
8. Birdsall C. K., Langdon A. B. *Plasma Physics via Computer Simulation.* — New York: McGraw-Hill, 1985. — 512 p.
9. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics.* — New York: Dover Publications, 1990. — 765 p.
10. Samarskiy A. A. *The Theory of Difference Schemes.* — New York: Marcel Dekker, 2001. — 761 p.

MOORE-GIBSON-THOMPSON TENGLAMASI UCHUN NOKLASSIK CHEGARAVIY SHARTLI ARALASH MASALA

Boltayev Asliddin Askar o'g'li,
Buxoro davlat universiteti dotsenti
asliddinboltayev@mail.ru

Oltiboyeva Dilnora Orifjonovna,
Buxoro davlat universiteti magistranti
oltiboyevadilnora66@gmail.com

Mirzoyeva Surayyo Oybek qizi,
Buxoro davlat universiteti tayanch doktoranti
asliddinboltayev6@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda noxiziqli ultratovush tarqalishi model tenglamasi uchun noklassik chegaraviy shartli aralash masala o'rganiladi. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligini ko'rsatishda Furye usulidan foydalaniladi. Ko'rilgan masalaning spektral qismi o'z-o'ziga qo'shma bo'lmaganligi sababli qo'shma spektral masala olib, Riss bazislarini tuzib olinadi. Noma'lum funktsiyaning Furye koeffitsiyentlariga nisbatan integral tenglamalar olinib, ular yordamida aprior baholar olinadi. Masala yechimining mavjud va yagona bo'lishi uchun berilganlarga yetarlicha silliqlik shartlari olinadi.

Kalit so'zlar: Moore-Gibson-Thompson tenglamasi, noklassik chegaraviy shart, boshlang'ich chegaraviy masala, Riss bazislari, funksional qatorlar.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МУРА-ГИБСОНА-ТОМПСОНА

Аннотация. В данной работе исследуется смешанная задача с неклассическими граничными условиями для модельного уравнения, описывающего нелинейное распространение ультразвука. Для доказательства существования и единственности решения используется метод Фурье. Поскольку спектральная часть рассматриваемой задачи не является самосопряжённой, вводится сопряжённая спектральная задача, и строятся базисы Рисса. Получены интегральные уравнения для коэффициентов Фурье неизвестной функции, с помощью которых выводятся априорные оценки. Для обеспечения существования и единственности решения накладываются достаточные условия гладкости на заданные данные.

Ключевые слова: уравнение Мура-Гибсона-Томпсона, неклассическое граничное условие, начальнo-краевая задача, базисы Рисса, функциональные ряды.

A MIXED PROBLEM WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS FOR THE
MOORE-GIBSON-THOMPSON EQUATION

Abstract. In this paper, we investigate a mixed problem with nonclassical boundary conditions for a model equation describing nonlinear ultrasound propagation. The Fourier method is employed to establish the existence and uniqueness of the solution. Since the spectral part of the problem is not self-adjoint, the corresponding adjoint spectral problem is introduced, and Riesz bases are constructed. Integral equations for the Fourier coefficients of the unknown function are derived, which allow us to obtain a priori estimates. Sufficient smoothness conditions on the given data are imposed to guarantee the existence and uniqueness of the solution.

Keywords: Moore-Gibson-Thompson equation, nonclassical boundary condition, initial-boundary value problem, Riesz bases, functional series.

Malaning kelib chiqishi va qo'yilishi. Moore-Gibson-Thompson (MGT) tenglamasi suyuqliklar mexanikasi bilan bog'liq ayrim tajribalar asosida kelib chiqqan uchinchi tartibli differensial tenglamadir. Keyinchalik, ushbu tenglama III-tur issiqlik o'tkazuvchanlik modeliga relaksatsiya parametrini kiritish orqali olingani sababli, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi sifatida ham qarala boshlandi [1,2]. MGT tenglamasi qattiq jismlarda yuzaga keladigan issiqlik o'tkazuvchanlik va massa diffuziyasi jarayonlarini tavsiflovchi tenglamalarni aniqlaydi.

MGT tenglamasining keltirib chiqarilishi Lasiecka va Wangning [3,4] ishlarida, hamda u yerdagi berilgan adabiyotlarda ko‘rib chiqilgan. Ushbu tenglamalar yuqori intensivlikdagi ultratovush to‘lqinlarining tibbiyot va sanoat sohalaridagi keng qo‘llanilishi sababli so‘nggi yillarda olib borilayotgan ko‘plab tadqiqotlarning mavzusi hisoblanadi.

[5] ishda mos funksional fazolar va boshlang‘ich-chegaraviy shartlarda chiziqshastirilgan MGT tenglamasining korrekt qo‘yilganligi hamda energiyasining bir jinsli so‘nishi o‘rganilgan. [6] ishda MGT tenglamasidan koeffitsiyentni aniqlashga doir teskari masala tadqiq etilgan bo‘lib, unda yechimning yagonaligi isbotlangan hamda Karleman baholashlari yordamida turg‘unlik baholari olingan. D.K. Durdiyevning [7-9] ishlarida MGT tenglamasi uchun turlicha masalalar qaralgan. Xususan. ishlarda yadro funksiyasini aniqlash masalasi lokal va global yechiluvchanligi o‘rganilgan.

Ushbu maqolada MGT tenglamasi uchun qo‘yilgan odatiy boshlang‘ich shart va Ionkin chegaraviy shartli aralash masala qaralgan. Yechimning lokal mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Quyidagi

$$u_{ttt} + u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} + \int_0^t g(t - \tau) \cdot u_{xx}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (1)$$

tenglamani quyidagi boshlang‘ich shartlar:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \phi(x) \quad (2)$$

va

$$u(0, t) = 0, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad (4)$$

chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraylik. Odatda ushbu masala to‘g‘ri yoki boshlang‘ich-chegaraviy masala deb yuritiladi.

Yechimning mavjudligi va yagonaligi. (1)-(4) masalaning yechimini Furiye metodi yordamida topamiz. Bunda yechimni quyidagi

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad X(x) \neq 0, \quad T(t) \neq 0$$

ko‘rinishida izlaymiz.

Natijada,

$$X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (5)$$

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad (6)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \Rightarrow X'(0) = X'(1) \quad (7)$$

spektral masala hosil bo‘ladi. (5)-(7) spektral masala o‘z-o‘ziga qo‘shma emas. Shu sababli mazkur masala uchun unga mos quyidagi qo‘shma masalani ko‘rib chiqamiz:

$$Y''(x) + \bar{\lambda} \cdot Y(x) = 0 \quad (8)$$

$$Y'(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1), \quad (9)$$

(5) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

ko‘rinishda olinadi. (6) shartdan $C_1 = 0$, (7) shartdan esa $\cos\sqrt{\lambda} = 1$ kelib chiqadi, ya‘ni $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Shunday qilib, xos qiymatlar $\lambda_k = (2\pi k)^2$ ga teng bo‘lib, mos xos funksiyalar:

$$X_0 = x, \quad X_{2k-1} = x \cos(2\pi kx), \quad X_{2k} = \sin(2\pi kx) \quad (10)$$

ko‘rinishida ifodalanadi.

(5)-(7) spektral masalaga mos keluvchi (8), (9) qo‘shma masalaning xos soni $\bar{\lambda}_k = \lambda_k = (2\pi k)^2$ va ushbu xos sonlarga mos xos funksiyalar yechimi quyidagicha ifodalanadi [10,11]:

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1 - x)\sin(2\pi kx). \quad (11)$$

1-lemma: (10), (11) funksiyalar ketma-ketligi (0,1) intervalda biortogonal sistemani tashkil qiladi, ya‘ni ixtiyoriy i, j nomerlar uchun [10]

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i \cdot Y_j dx = \delta_{ij} \quad (12)$$

tenglik o‘rinli. δ_{ij} - Kroneker simvoli.

Ushbu lemmaning isbotini integralni hisoblash orqali keltirishimiz mumkin.

(1) tenglamani ikkala tomonini $Y_i(x)$ ga ko'paytirib, $[0,1]$ kesmada integrallab, (12) tenglikni inobatga olsak, $u_i(t)$ koeffitsiyentlar uchun oddiy differensial va integro-differensial tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Birinchi navbatda $i = 0$ da

$$\begin{cases} u_0'''(t) + u_0''(t) = 0, \\ u_0(0) = \varphi_0, \\ u_0'(0) = \psi_0, \\ u_0''(0) = \phi_0. \end{cases} \quad (13)$$

Koshi masalasiga ega bo'lamiz, bu yerda

$$u_0 = \int_0^1 u(x,t)Y_0(x)dx,$$

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)Y_0(x)dx, \quad \psi_0 = \int_0^1 \psi(x)Y_0(x)dx, \quad \phi_0 = \int_0^1 \phi(x)Y_0(x)dx.$$

(13) Koshi masalasining umumiy yechimi

$$u_0(t) = \varphi_0 - \phi_0 + (\psi_0 + \phi_0) \cdot t + \phi_0 \cdot e^{-t} \quad (14)$$

ko'rinishida bo'ladi.

(1) tenglamani $Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx)$ ga ko'paytirib, $[0,1]$ kesmada integrallab, (12) tenglikni inobatga olamiz va

$$u_{2k-1}''' + u_{2k-1}'' + \lambda_k u_{2k-1}' + \lambda_k u_{2k-1} - \lambda_k \int_0^t g(t-\tau)u_{2k-1}(\tau)d\tau = 0 \quad (15)$$

integro-differensial tenglamaga ega bo'lamiz. (2) boshlang'ich shartlardan foydalanib, (15) oddiy differensial tenglama uchun quyidagicha boshlang'ich shartlarni olamiz:

$$u_{2k-1}(0) = \int_0^1 u(x,0) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \int_0^1 \varphi(x) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \varphi_{2k-1}, \quad (16)$$

$$u_{2k-1}'(0) = \int_0^1 u_t(x,0) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \int_0^1 \psi(x) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \psi_{2k-1}, \quad (17)$$

$$u_{2k-1}''(0) = \int_0^1 u_{tt}(x,0) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \int_0^1 \phi(x) \cdot Y_{2k-1}(x)dx = \phi_{2k-1}. \quad (18)$$

(15)-(18) Koshi masalasi ushbu

$$\begin{aligned} u_{2k-1}(t) = & \frac{1}{\lambda_k + 1} \cdot (\lambda_k \cdot e^{-t} + \sqrt{\lambda_k} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k}t) + \cos(\sqrt{\lambda_k}t)) \cdot \varphi_{2k-1} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k}t) \cdot \psi_{2k-1} + \frac{1}{\lambda_k + 1} \cdot F_k \cdot \phi_{2k-1} - \\ & - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 1} \int_0^t F_k(t-\tau) \int_0^\tau g(\tau-s) \cdot u_{2k-1}(s)dsd\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamaga ekvivalent, bu yerda

$$F_k = e^{-t} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k}t) - \cos(\sqrt{\lambda_k}t).$$

Oson ko'rish mumkinki,

$$Y_{2k}''(x) = -2\sqrt{\lambda_k} \cdot Y_{2k-1} - \lambda_k \cdot Y_{2k} \quad (20)$$

munosabat o'rinli.

(1) tenglamani ikkala tomonini $Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx)$ funksiyaga ko'paytiramiz. Hosil bo'gan tenglikda $u_{xxx}(x,t)$ had qatnashgan qismi uchun ikki marta bo'laklash qilib, (20) tenglikdan foydalanamiz. Hisoblashlar natijasida quyidagi tenglamani hosil bo'ladi:

$$u_{2k}'''(t) + u_{2k}''(t) + \lambda_k u_{2k}'(t) + \lambda_k u_{2k}(t) = -2\sqrt{\lambda_k} u_{2k-1}'(t) - 2\sqrt{\lambda_k} u_{2k-1} + \int_0^t g(t-\tau)[2\sqrt{\lambda_k} u_{2k-1} + \lambda_k u_{2k}]d\tau =: \Phi_{2k}. \quad (21)$$

Mos ravishda ushbu

$$u_{2k}(0) = \int_0^1 u(x,0)Y_{2k}(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)Y_{2k}(x)dx = \varphi_{2k}, \quad (22)$$

$$u_{2k}'(0) = \int_0^1 u_t(x,0)Y_{2k}(x)dx = \int_0^1 \psi(x)Y_{2k}(x)dx = \psi_{2k}, \quad (23)$$

$$u_{2k}''(0) = \int_0^1 u_{tt}(x,0)Y_{2k}(x)dx = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k}(x)dx = \phi_{2k} \quad (24)$$

boshlang'ich shartlarni olamiz. (21)-(24) masalani ushbu ekvivalent integral tenglamaga olib kelamiz:

$$u_{2k} = \frac{1}{\lambda_k + 1} \cdot [\lambda_k \cdot e^{-t} + \sqrt{\lambda_k} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k}t) + \cos(\sqrt{\lambda_k}t)] \cdot \varphi_{2k} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_k}t) \cdot \psi_{2k} + \frac{1}{\lambda_k + 1} \cdot F_k \cdot \phi_{2k} + \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\lambda_k + 1} \int_0^t F_k(t-\tau) \left[\int_0^\tau g(\tau-s) \cdot [\sqrt{\lambda_k} u_{2k}(s) - 2u_{2k-1}(s)]ds d\tau + - \frac{2\sqrt{\lambda_k}}{\lambda_k + 1} \int_0^\tau F_k(t-\tau) \cdot [u_{2k-1}'(\tau) - u_{2k-1}(\tau)]d\tau. \quad (25)$$

(1)-(6) aralash masalaning yechimini quyidagi qator ko'rinishida bo'ladi:

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x). \quad (26)$$

Yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlash uchun $u_i(t)$ koeffitsiyentlar va ularning hosilalari uchun baholar olishimiz zarur. u_0 hadning bahosi

$$|u_0(t)| \leq \varphi_0 + \psi_0 \cdot T + (2 + T) \cdot \phi_0 \quad (27)$$

ko'rinishida bo'ladi.

u_{2k-1} hadlar uchun (19) tenglik va Granolla-Bellman tengsizligidan foydalanib,

$$|u_{2k-1}(t)| \leq \left[2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot |\psi_{2k-1}| + \frac{2}{\lambda_k} \cdot |\phi_{2k-1}| \right] \cdot e^{\|g\| \cdot t^2} \quad (28)$$

apprior bahoni hosil qilamiz.

(19) tenglikdan foydalanib, u_{2k-1} hadlardan mos hosilalarni olamiz va (30) bahodan foydalanib, ushbu

$$|u_{2k-1}'(t)| \leq 2|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot |\phi_{2k-1}| + \sqrt{\lambda_k} \cdot \|g\| \cdot t^2 \cdot \left[2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k-1}| + \frac{3}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot |\phi_{2k-1}| \right] \cdot e^{\|g\| \cdot t^2}, \quad (31)$$

$$|u_{2k-1}''(t)| \leq 3\sqrt{\lambda_k} |\varphi_{2k-1}| + \sqrt{\lambda_k} |\psi_{2k-1}| + 2|\phi_{2k-1}| + \sqrt{\lambda_k} \|g\| t^2 \left[2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k-1}| + \frac{3}{\sqrt{\lambda_k}} |\phi_{2k-1}| \right] e^{\|g\| t^2}, \quad (32)$$

$$|u_{2k-1}'''(t)| \leq 2\lambda_k \cdot |\varphi_{2k-1}| + \lambda_k \cdot |\psi_{2k-1}| + 2\sqrt{\lambda_k} \cdot |\phi_{2k-1}| + \lambda_k \|g\| t (1 + \sqrt{\lambda_k} \cdot t) \left[2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k-1}| + \frac{3}{\lambda_k} |\phi_{2k-1}| \right] e^{\|g\| \cdot t^2} \quad (33)$$

baholashlarga ega bo‘lamiz. Ko‘rish osonki, u_{2k} koeffitsiyentlarning tarkibida u_{2k-1} hadlarning mos hosilari qatnashadi. (28), (30) va (31) munosabatlardan foydalanib, Granolla-Belman tengsizligini qo‘llab, quyidagi

$$|u_{2k}| \leq \left[2|\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot |\psi_{2k}| + \frac{2}{\lambda_k} \cdot |\phi_{2k}| \right] e^{\|g\| \cdot t^2} + 8e^{2\|g\|t^2} \left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{\lambda_k} |\phi_{2k-1}| \right) \left(\frac{\|g\|t^2}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{t}{\sqrt{\lambda_k}} + t^3 \|g\| \right) \quad (34)$$

munosabat hosil qilinadi.

(28) integral tenglikdan hosila olib, (30) va (31) baholardan foydalanib, u'_{2k} had uchun

$$|u'_{2k}| \leq 2\sqrt{\lambda_k} (\|g\|t^2 + 2) |\varphi_{2k-1}| e^{\|g\|t^2} + (1 + \|g\|t^2) |\psi_{2k}| e^{\|g\|t^2} + 8t \left(1 + \frac{\|g\|t^2}{\sqrt{\lambda_k}} + \|g\|t^2 \right) e^{2\|g\|t^2} (|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|) + \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} (1 + \|g\|t^2) |\phi_{2k-1}| e^{\|g\|t^2} + \frac{16t}{\sqrt{\lambda_k}} \left(\frac{\|g\|t}{\sqrt{\lambda_k}} + \|g\|t^2 \right) |\phi_{2k-1}| e^{2\|g\|t^2}. \quad (35)$$

bahoni hosil qilamiz.

u''_{2k} va u'''_{2k} uchun ham yuqoridagilarga o‘xshash, λ_k kattalikka bog‘liq bo‘lgan baholar olinadi:

$$|u''_{2k}| \leq 2\sqrt{\lambda_k} (1 + t^2 \|g\| e^{\|g\|t^2}) |\varphi_{2k}| + \sqrt{\lambda_k} (1 + t^2 \|g\| e^{\|g\|t^2}) |\psi_{2k}| + 2(1 + t^2 \|g\| e^{\|g\|t^2}) |\phi_{2k}| + [\lambda_k t^5 \|g\|^2 + \sqrt{\lambda_k} t^4 \|g\|^2 + \sqrt{\lambda_k} t^3 \|g\| + \sqrt{\lambda_k} t^2 \|g\| + \lambda_k \|g\|] 8e^{2\|g\|t^2} |\varphi_{2k-1}| + [\lambda_k t^5 \|g\|^2 + \sqrt{\lambda_k} t^4 \|g\|^2 + \lambda_k t^3 \|g\| + \lambda_k t^2 \|g\| + \|g\|] 8e^{2\|g\|t^2} |\psi_{2k-1}| + \left[\sqrt{\lambda_k} t^5 \|g\|^2 + t^4 \|g\|^2 + t^3 \|g\| + t^2 \|g\| + \frac{\|g\|}{\sqrt{\lambda_k}} + 1 \right] 12e^{2\|g\|t^2} |\phi_{2k-1}|, \quad (36)$$

$$|u'''_{2k}| \leq \lambda_k |\varphi_{2k}| + \lambda_k |\psi_{2k}| + 2\sqrt{\lambda_k} |\phi_{2k}| + \lambda_k \|g\| t (1 + \sqrt{\lambda_k} t) \left\{ 2|\varphi_{2k}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k}| + \frac{2}{\lambda_k} |\phi_{2k}| + 8e^{\|g\|t^2} \left(\frac{\|g\|t^2}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{t}{\lambda_k} + \|g\|t^3 \right) \left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{\lambda_k} |\phi_{2k-1}| \right) \right\} e^{\|g\|t^2} + 4\lambda_k (1 + t) (1 + \|g\|t) \left\{ 2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k-1}| + \frac{2}{\lambda_k} |\phi_{2k-1}| \right\} e^{\|g\|t^2} + 4\lambda_k (1 + t) \left\{ 2|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{2}{\sqrt{\lambda_k}} |\phi_{2k-1}| + \sqrt{\lambda_k} \|g\| t^2 \left[2|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\psi_{2k-1}| + \frac{3}{\lambda_k} |\phi_{2k-1}| \right] e^{\|g\|t^2} \right\}. \quad (37)$$

Baholarni inobatga oladigan bo‘lsak, $u(x, t)$ yechimning obraziga (Furye koeffitsiyenti) nisbatan quyidagicha lemmaga ega bo‘lishimiz mumkin:

2-lemma: Ixtiyoriy $t \in [0, T]$ va $k \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$|u_0^{(i)}| \leq \alpha_0 (|\varphi_0| + |\psi_0| + |\phi_0|), i = 0, 1, 2, \dots$$

$$|u_{2k-1}| \leq \alpha_1 \left(|\varphi_{2k-1}| + \frac{1}{k} |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{k^2} |\phi_{2k-1}| \right),$$

$$|u_{2k}| \leq \alpha_2 \left(|\varphi_{2k}| + \frac{1}{k} |\psi_{2k}| + \frac{1}{k^2} |\phi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{k} |\phi_{2k-1}| \right),$$

$$|u'_{2k-1}| \leq \alpha_2 \left(k |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{k} |\phi_{2k-1}| \right),$$

$$\begin{aligned}
 |u'_{2k}| &\leq \alpha_4 \left(k|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}| + \frac{1}{k}|\varphi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}| + \frac{1}{k}|\phi_{2k-1}| \right), \\
 |u''_{2k-1}| &\leq \alpha_5 (k^2|\varphi_{2k-1}| + k|\psi_{2k-1}| + |\phi_{2k-1}|), \\
 |u''_{2k}| &\leq \alpha_6 (k^2|\varphi_{2k}| + k|\psi_{2k}| + |\phi_{2k}| + k^2|\varphi_{2k-1}| + k^2|\psi_{2k-1}| + k|\phi_{2k-1}|), \\
 |u''_{2k-1}| &\leq \alpha_7 (k^3|\varphi_{2k-1}| + k^2|\varphi_{2k-1}| + k|\phi_{2k-1}|), \\
 |u''_{2k}| &\leq \alpha_8 (k^3|\varphi_{2k}| + k^2|\psi_{2k}| + k|\phi_{2k}| + k^2|\varphi_{2k-1}| + k^2|\psi_{2k-1}| + k|\phi_{2k-1}|)
 \end{aligned}$$

tengsizliklar o‘rinli, bunda $\alpha_i, (i = \overline{0,8})$ – biror $\varphi(x), \psi(x), \phi(x), g(t)$ va T ga bog‘liq musbat son.

Endi (26) tenglik orqali aniqlangan cheksiz hadli qatordan $u_{tt}, u_{ttt}, u_{xx}, u_{xxt}$ hosilalarni formal ravishda olamiz va ushbu

$$u_{tt} = u''_0 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u''_{2k-1} X_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} u''_{2k} X_{2k}, \quad (38)$$

$$u_{ttt} = u'''_0 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u'''_{2k} X_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} u'''_{2k} X_{2k}, \quad (39)$$

$$u_{xx} = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_{2k} X_{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1} (2\sqrt{\lambda_k} X_{2k} + \lambda_k X_{2k-1}), \quad (40)$$

$$u_{xxt} = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u'_{2k} X_{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} u'_{2k-1} (2\sqrt{\lambda_k} X_{2k} + \lambda_k X_{2k-1}) \quad (41)$$

qatorlarni hosil qilamiz. 2-lemmadan ko‘rinib turibdiki (35)-(38) funksional qatorlar quyidagi sonli qator bilan $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ sohada majarantalanadi:

$$\begin{aligned}
 \alpha \sum_{k=1}^{\infty} [k^3(|\varphi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}|) + k^2(|\psi_{2k}| + |\psi_{2k-1}|) + k(|\phi_{2k}| + |\phi_{2k-1}|)] + \\
 + |\varphi_0| + |\psi_0| + |\phi_0|, \quad (39)
 \end{aligned}$$

bu yerda, $\alpha = \max_{0 \leq i \leq 8} \alpha_i$. (39) sonli qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun berilgan funksiyalarga qo‘yiladigan silliqlik talablarini oshiramiz. φ, ψ, ϕ funksiyalarining Furrye koeffitsiyentlari uchun quyidagi lemma o‘rinli.

3-lemma: Faraz qilaylik, quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsin:

$$\begin{aligned}
 &\varphi(x) \in C^3[0,1], \quad \varphi^{IV}(x) \in L^2[0,1]; \\
 &\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \varphi''(0) = 0, \quad \varphi'''(0) = \varphi'''(1); \\
 &\psi(x) \in C^2[0,1], \quad \psi'''(x) \in L^2[0,1]; \\
 &\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1), \quad \psi''(0) = 0; \\
 &\phi(x) \in C^1[0,1], \quad \phi''(x) \in L^2[0,1]; \\
 &\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = \phi'(1).
 \end{aligned}$$

U holda shunday $C > 0$ soni mavjudki, ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ lar uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinli:

$$|\varphi_k| \leq \frac{C}{k^4} (|A_k^1| + |A_k^2|), \quad |\psi_k| \leq \frac{C}{k^3} (|B_k^1| + |B_k^2|), \quad |\phi_k| \leq \frac{C}{k^2} (|C_k^1| + |C_k^2|). \quad (40)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned}
 A_k^i &= \int_0^1 \varphi^{IV}(x) Y_{2k-i}(x) dx, \quad B_k^i = \int_0^1 \psi'''(x) Y_{2k-i}(x) dx, \\
 C_k^i &= \int_0^1 \psi''(x) Y_{2k-i}(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Ushbu 3-lemmaning shartlari qanoatlantirilsin, φ_{2k} va φ_{2k-1} koeffitsiyentlarni to‘rt marta, ψ_{2k} va ψ_{2k-1} koeffitsiyentlarni uch marta, hamda ϕ_{2k} va ϕ_{2k-1} koeffitsiyentlarni ikki marta bo‘laklab integrallaymiz. (39) tengsizlikda (40) dan foydalanib, dastlab Koshi tengsizligidan, keyin Bessel tengsizligidan foydalanamiz. Ko‘rinadiki, (39) sonli qatorni 3-lemma shartlari o‘rinli bo‘lganda yaqinlashuvchi qilishimiz mumkin. Demak, berilgan funksiyalar 3-lemmadagi shartlar bajarilganda (38)-(41) funksional qatorlar $D = (0,1) \times (0, T]$ sohada tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi. Quyidagi asosiy teorema o‘rinli.

Xulosa. *1-teorema:* Faraz qilaylik, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalar lemmadagi shartlarni qanoatlantirsin, bundan tashqari $g(t) \in C[0, T]$ bo'lsin. U holda (1)-(6) boshlang'ich-chegaraviy masalaning $C_{x,t}^{2,3}(D) \cap C_{x,t}^{1,2}(\bar{D})$ funksioanal sinfga qarashli yagona klassik yechimi mavjud.

ADABIYOTLAR:

1. Thompson P.A., *Compressible-Fluid Dynamics* // USA, McGraw-Hill, 1972.
2. Green A.E., Naghdi P.M., *On Undamped Heat Waves in an Elastic Solid* // *Journal of Thermal Stresses*, 1992, 15(2), pp. 253–264.
3. Lasiacka I., Wang X., *General decay rate of Moore-Gibson-Thompson equation with memory-part II* // *Journal Diff. Equations*, 2015, 259(12), pp. 7610–7635.
4. Lasiacka I., Wang X., *Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I: exponential decay of energy* // *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, 67(17), pp. 1-23.
5. Kaltenbacher B., Lasiacka I., Marchan R., *Wellposedness and Exponential Decay Rates for the Moore-Gibson-Thompson Equation Arising in High Intensity Ultrasound* // *Control and Cybernetics*, 2011, 40(4), pp. 971–988.
6. Liu S., Triggiani R., *An Inverse Problem for a Third Order PDE Arising in High-Intensity Ultrasound: Global Uniqueness and Stability by One Boundary Measurement* // *Jour. of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2013, 21(6), pp. 825–869.
7. Boltaev A.A., Durdiev D.K., Rahmonov A.A., *Inverse Problem for Moore-Gibson-Thompson equation with integral overdetermination condition* // *Quaestiones Mathematicae*, 2025, 48(11), pp. 1559-1577.
8. Durdiev D.K., Boltaev A.A., *Global solvability of an inverse problem for a Moore-Gibson-Thompson equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions* // *Eurasian journal of mathematical and computer applications*, 2024, 12(2), pp. 35-49.
9. Boltaev A. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A., *Kernel determination problem in the third order 1D Moore-Gibson-Thompson Equation with Memory* // *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, 26(4), pp. 55–65.
10. Ионкин Н.И., *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // *Дифф. уравнения*, 1977, 13(2), 294-304
11. Mehraliyev Y.T., *On an inverse boundary value problem for the second order elliptic equation with additional integral condition* // *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2013, 15(4), pp. 30-43.

CHIZIQSIZ ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINI SONLI YECHISH

Imomova Shafolat Mahmudovna,

*Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika
va dasturlash texnologiyalari kafedrası dotsenti
s.m.imomova@buxdu.uz*

Xayrulloeva O‘g‘iloy Mehriddin qizi,

*Buxoro davlat universiteti
Amaliy matematika mutaxassisligi magistranti*

Annotatsiya. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi – bu haroratning vaqt va fazodagi o‘zgarishini ifodalovchi parabolik turdagi differensial tenglama bo‘lib, issiqlik energiyasining modda ichida qanday tarqalishini modellashtiradi. Ushbu maqolada chiziqsiz issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun ayirmali sxemalar yordamida sonli yechim topish usullari o‘rganiladi. Chiziqsizlikning ta’siri, ayirmali sxemalarning turg’unligi va yaqinlashuv shartlari, hamda ularni amaliy masalalarga tatbiq etish yoritilgan.

Kalit so‘zlar: chiziqsiz, issiqlik o‘tkazuvchanlik, matematik model, ayirmali sxema, oshkor ayirmali sxema, oshkormas ayirmali sxema, sonli usul, turg’unlik, yaqinlashish, iteratsion usul, differensial tenglama.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация. Уравнение теплопроводности — это дифференциальное уравнение параболического типа, описывающее изменение температуры во времени и пространстве, моделирующее процесс распространения тепловой энергии внутри вещества. В данной статье рассматриваются численные методы решения нелинейного уравнения теплопроводности с использованием разностных схем. Освещается влияние нелинейности, устойчивость и сходимость разностных схем, а также их применение к практическим задачам.

Ключевые слова: Нелинейный, теплопроводность, математическая модель, разностная схема, явная разностная схема, неявная разностная схема, численный метод, устойчивость, сходимость, итерационный метод, дифференциальное уравнение.

NUMERICAL SOLUTION OF THE NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION

Abstract. The heat conduction equation is a parabolic-type differential equation that describes the variation of temperature over time and space, modeling the process of heat energy propagation within a substance. This article examines numerical methods for solving the nonlinear heat conduction equation using finite difference schemes. The influence of nonlinearity, the stability and convergence of the difference schemes, as well as their application to practical problems are discussed.

Keywords: nonlinear, heat conduction, mathematical model, finite difference scheme, explicit finite difference scheme, implicit finite difference scheme, numerical method, stability, convergence, iterative method, differential equation.

Kirish. Issiqlik o‘tkazish tenglamasi – universal fizika modeli bo‘lib, turli sohalarda issiqlik tarqalishini aniqlash, nazorat qilish va oldindan baholash imkonini beradi. Bu tenglama orqali energiya samaradorligi, xavfsizlik, dizayn optimalligi va ko‘plab boshqa muhim masalalar yechiladi.

Issiqlik o‘tkazish tenglamasining qo‘llanilish sohalari

Issiqlik o‘tkazish tenglamasi muhandislik sohasida issiqlikni boshqarish va tahlil qilishda keng qo‘llaniladi:

- Issiqlik almashinuvi apparatlari dizayni (masalan, radiator, issiqlik almashtirgich).
 - Qozon va turbinalardagi issiqlik oqimini hisoblash.
 - Energiya tizimlarida issiqlik tarqalishini modellashtirish.
 - Elektron qurilmalarda (kompyuter protsessorlari, mikrochiplar) sovitish tizimlarini loyihalash.
- Binolarni issiqlik izolyatsiyasi va energiya samaradorligini oshirishda:
- Devor, tom va poydevorlardan issiqlik yo‘qolishini tahlil qilish.
 - Isitish va shamollatish tizimlarini loyihalash.

Quyosh energiyasidan foydalanishni hisoblash. Issiqlikning moddalarda qanday harakatlanishini tushunish va modellashtirishda:

- Yangi materiallar (keramikalar, polimerlar)ning issiqlik xossalari tadqiq qilish.
- Fazaviy o'tishlar (muzning erishi, metallarning suyuqlanishi)ni modellashtirish.
- Nanozarralar va mikrostrukturaviy tizimlardagi issiqlik tarqalishi.

Issiqlik o'tkazish tenglamasi biologik to'qimalar va odam tanasidagi issiqlik harakatini o'rganishda ishlatiladi:

- Tana haroratining taqsimoti (masalan, gipotermiya, isitma holatlarida).
- Lazerli terapiya va MRI qurilmalarida to'qimalardagi issiqlik ta'sirini aniqlash.
- Biotibbiy qurilmalardagi issiqlik xavfsizligi.

Atmosferadagi yoki Yer yuzasidagi issiqlik harakatini o'rganishda: 1. Iqlim modellashtirish (yer, okean va atmosfera tizimi). 2. Yer osti issiqlik oqimlari (masalan, geotermal energiya manbalari). 3. Qor va muz qoplaminin erish jarayonlari.

Avtomobil va aviatsiya sanoati: 1. Dvigatel bloklarining haroratini nazorat qilish. 2. Aerodinamika sohasida havo va yuzalar orasidagi issiqlik almashinuvi. 3. Raketalarda issiqlik qalqoni dizayni (reentry issiqlik modellarida).

Kimyo va neft sanoati:

- Kimyoviy reaktorlardagi ekzotermik/ endotermik reaksiyalarni modellashtirish.
- Quvurlardagi issiqlik oqimi va izolyatsiya masalalari.
- Katalizatorlarda issiqlik taqsimotini hisoblash.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi fizikada keng qo'llaniladigan matematik model bo'lib, haroratning vaqt va fazodagi o'zgarishini ifodalaydi. Ko'pgina amaliy holatlarda issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi chiziqsiz ko'rinishga ega bo'ladi, bu esa uning analitik yechimini sezilarli darajada murakkablashtiradi. Shu sababli sonli usullardan, xususan ayirmali sxemalardan asosiy yechim vositasi sifatida foydalaniladi.

Eng sodda bir o'lchovli chiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

bu yerda:

$u(x, t)$ — harorat funksiyasi (x joyda, t vaqtda),

α — issiqlik tarqalish (diffuziya) koeffitsienti, $\alpha = \frac{k}{\rho c}$

k — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti,

ρ — zichlik,

c — issiqlik sig'imi.

Asosiy qism.

Masalaning qo'yilishi.

Bir o'lchovli chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t)$$

Bu yerda $u(x, t)$ — harorat funksiyasi, $k(u)$ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti, $f(x, t)$ — tashqi manba funksiyasi.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha ifodalangan:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t)$$

Endi ayirmali sxema qurish bilan shug'ullanamiz.

$[0, L]$ oraliq bo'yicha h qadam bilan, vaqt bo'yicha esa τ qadam bilan to'r hosil qilamiz:

$$x_i = ih, \quad t^n = n\tau, \quad u_i^n \approx u(x_i, t^n)$$

Oshkor ayirmali sxema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [k(u_{i+1}^n)(u_{i+1}^n - u_i^n) - k(u_i^n)(u_i^n - u_{i-1}^n)] + f_i^n$$

Oshkormas ayirmali sxema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [k(u_{i+1}^{n+1})(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - k(u_i^{n+1})(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})] + f_i^{n+1}$$

Yechish algoritmi quyidagicha:

1. Boshlang'ich shart: $u_i^0 = \phi(x_i)$
2. Har bir vaqt qatlamida:
 - Oshkor sxema bo'lsa: bevosita hisoblash.
 - Oshkormas sxema bo'lsa: iteratsion usul bilan larni topish.
3. Chegara shartlarini har bir qatlamda qo'llash.

Turg'unlik va yaqinlashish. Oshkor sxema uchun turg'unlik sharti mavjud: $\tau \leq \frac{h^2}{2 \cdot \max(k(u))}$.

Oshkormas sxema shartsiz turg'un, yaqinlashish esa to'rni zichlashtirish bilan ta'minlanadi.

Natijalar.

Misol.

Quyidagi chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini ayirmali sxemalar yordamida yechamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + u^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, t > 0$$

Boshlang'ich shart:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

Chegaraviy shartlar:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u) = 1 + u^2$ haroratga bog'liq.

To'r parametrlarini tanlaymiz.

- Fazoviy qadam: $h = \frac{1}{10} = 0.1$
- Vaqt qadami: $\tau = 0,05$
- Tugallovchi vaqt: $T = 0,05$, ya'ni 10 vaqt qadam

Ayirmali sxema (Oshkor ayirmali sxema)

Soddalashtirilgan oshkor ayirmali sxema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2} \left[k_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - k_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right]$$

Bu yerda:

$$k_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1 + (u_i^n)^2 + 1 + (u_{i+1}^n)^2}{2} = \frac{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}{2}$$

Shunday qilib, har bir vaqt qatlamida u_i^{n+1} qiymatlari to'g'ridan-to'g'ri hisoblanadi.

Masalani yechish algoritmi

1. $u_i^0 = \sin(\pi x_i)$ ni boshlang'ich shart sifatida belgilaymiz.
2. Har bir n vaqt qatlamida: har bir i uchun yuqoridagi formulaga ko'ra u_i^{n+1} ni hisoblaymiz.
3. Chegarada:

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0 \quad (\text{har doim})$$

Oshkor ayirmali sxema **chiziqsiz tenglamalar uchun** turg'un bo'lishi uchun **(h, τ) kichik qadamlar** talab qiladi.

Masala yechimi uchun Pythonda kod: import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

Parametrlar

L = 1

T = 0.05

h = 0.1

tau = 0.005

x = np.arange(0, L + h, h)

t = np.arange(0, T + tau, tau)

N = len(x)

Boshlang'ich shart

u = np.zeros((len(t), N))

u[0, :] = np.sin(np.pi * x)

Hisoblash (oshkor ayirmali sxema)

```

for n in range (0, len(t) - 1):
    for i in range (1, N - 1):
        k_plus = 0.5 * (2 + u[n, i]**2 + u[n, i+1]**2)
        k_minus = 0.5 * (2 + u[n, i]**2 + u[n, i-1]**2)
        u[n+1, i] = u[n, i] + (tau / h**2) * (k_plus * (u[n, i+1] - u[n, i]) - k_minus * (u[n, i] - u[n, i-1]))
# Natijani chizish
for j in range(0, len(t), 2):
    plt.plot (x, u[j, :], label=f't={j*tau:.3f}')
plt.title ("Chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel ("u(x,t)")
plt.legend ()
plt.grid (True)
plt.show ()

```

Xulosa. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi quyidagi sohalarda keng qo'llaniladi:

- Qurilishda issiqlik izolyatsiyasi hisoblarida
- Elektronika (mikrochiplar qizishini modellashtirish)
- Energetika (issiqlik almashinuvchilar)
- Tibbiyot (termoterapiya modellari)
- Kosmik va aviatsiya texnologiyalari

Chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining sonli yechimida ayirmali sxemalar juda muhim o'rin tutadi. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar har xil afzalliklarga ega. Oshkormas ayirmali sxemalar oshkor ayirmali sxemalarga qaraganda turg'unroq bo'lib, yuqori aniqlikka ega, lekin hisoblashda ko'proq amal talab qiladi. Modellashtirishda ayirmali sxema tanlashda aniqlik, vaqt, va amallar sonini inobatga olish lozim.

ADABIYOTLAR:

1. Samarskiy A. A. "Ayirmali sxemalar nazariyasi", Moskva, 2001.
2. Morton K. W., Mayers D. F. – "Numerical Solution of Partial Differential Equations", 2005.
3. Imomova Shafolat Mahmudovna. Matematikani o'qitishda matematik tizimlardan foydalanish // Pedagogik mahorat. Maxsus son (2022 yil, dekabr), 2022, C.77-80.
4. Imomova Shafolat Mahmudovna, Zarnigor Bahodirovna Rahmonqulova. Funktsiyalarni mathcad muhitida sonli integrallash // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 4, 2023, C.9-14.
5. Imomova Shafolat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullari va tadbirlari // Educational Research in Universal Sciences. VOLUME 3 | SPECIAL ISSUE 2 | 2024, C.397-404.
6. A. Hayotov, S. Babaev, N.Olimov, and Sh.Imomova, "The error functional of optimal interpolation formulas in $W_2(,2\sigma,1)$ space," AIP Conference Proceedings 2781, 020044 (2023), <https://doi.org/10.1063/5.0144752>.
7. Samandar Babaev, Nurali Olimov, Shafolat Imomova, and Bekhruzjon Kuvvatov, "Construction of Natural L Spline in $W_2(,2\sigma,1)$ Space", AIP Conf. Proc. 3004, 060021 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0199595>
8. Imomova Sh.M., Amonova N.A. Chekli elementlar usullari // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 3, 2024, C.73-81.
9. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan Mathcad muhitida sonli yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 5, 2024, C.30-35.
10. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Koshi masalasini taqribiy yechish // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, № 9, 2024, C.39-46.
11. Ilin A. M. "Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamalari va ularning sonli yechimlari", Toshkent, 2010.
12. Eshankulov K., Sayidova N., Zaripova G., Imomova S., Fayzieva D. "Mathematical Model for Information Monitoring System of Fat and Oil Enterprises," AIP Conference Proceedings, 3004(1), 060009, 2024.

Fe₅Ga₆Gd₂YZr KRISTALLI DOMEN STRUKTURASIGA MAGNIT MAYDON TA'SIRI*Nasirova Nargiza Gayratovna,**Buxoro davlat universiteti tayanch doktoranti**n.g.nasirova@buxdu.uz**Fayziyev Shaxobiddin Shavkatovich,**Buxoro davlat universiteti Fizika kafedrasida dotsenti**s.s.fayziyev@buxdu.uz**Saidov Qurbon Sayfulloyevich,**Buxoro davlat universiteti Fizika kafedrasida dotsenti**q.s.saidov@buxdu.uz**Djurayev Davron Raxmonovich,**Buxoro davlat universiteti professori,**fizika-matematika fanlari doktori**d.r.djurayev@buxdu.uz*

Annotatsiya. Ushbu ishda Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristallidagi domenlar tuzumining magnit maydon ta'siri o'zgarishi o'rganilgan bo'lib, Fe₅Ga₆Gd₂YZr namunaga tashqi magnit maydonini effektiv qiymatlarida domenlarning o'zgarishi qayt qilib borilgan. Tashqi magnit maydon induksiyasi Gelmgolts g'altagi orqali boshqarilib, effektiv magnit maydon induksiyasini namunaga ta'sir etish burchagi o'zgartirib borilgan. Effektiv magnit maydon induksiyasining turli qiymatlarida domenlar tasviri olinib, domen yuzalari tahlil qilingan. Fe₅Ga₆Gd₂YZr namuna domen tuzilishlari solishtirib ko'rsatilgan B(S) diagramma hamda mos tashqi maydonlaridagi S(φ) bog'lanishlar o'rganildi. Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristallida magnit maydon qo'yilishi hamda bir o'qli anizotropiya bilan kvazistatik magnitlanishni teskari yo'nalish bo'yicha eksperimental tadqiqot o'tkazildi. Faradey effektidan foydalanadigan magnit-optik qurilma yordamida magnit maydon vektori yo'nalishlari qiyin magnitlanish o'qiga yaqin bo'lgan tor sohalarda magnit kristallning bir xil magnitlanish holatida uzilishlar mavjudligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: domen tuzilmalar, magnit maydon induksiyasi, fazoviy burchak, domen devorlari, sirt energiyasi, fotomagnit effekt, magnitlanish, Gelmgolts halqalari.

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДОМЕННУЮ СТРУКТУРУ КРИСТАЛЛА**Fe₅Ga₆Gd₂YZr**

Аннотация. В данной работе исследовано изменение структуры доменов в кристалле Fe₅Ga₆Gd₂YZr под воздействием магнитного поля, и это изменение повторялось при эффективных значениях внешнего магнитного поля, приложенного к образцу Fe₅Ga₆Gd₂YZr. Индукция внешнего магнитного поля контролировалась катушкой Гельмгольца, и изменялся угол воздействия индукции эффективного магнитного поля на образец. Были получены изображения доменов при различных значениях индукции эффективного магнитного поля, и проанализированы поверхности доменов. Изучена диаграмма B(S), сравнивающая доменные структуры образца Fe₅Ga₆Gd₂YZr, и связи S(φ) в соответствующих внешних полях. Проведено экспериментальное исследование приложения магнитного поля к кристаллу Fe₅Ga₆Gd₂YZr и перемагничивания квазистатической намагниченности с одноосной анизотропией. С помощью магнитооптического устройства, использующего эффект Фарадея, было обнаружено наличие разрывов в однородном состоянии намагниченности магнитного кристалла в узких областях, где направления вектора магнитного поля близки к оси жёсткой намагниченности.

Ключевые слова: доменные структуры, индукция магнитного поля, телесный угол, доменные стенки, поверхностная энергия, фотомагнитный эффект, намагниченность, кольца Гельмгольца.

EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON THE DOMAIN STRUCTURE OF THE Fe₅Ga₆Gd₂YZr CRYSTAL

Abstract. In this work, we investigated the change in the domain structure in the Fe₅Ga₆Gd₂YZr crystal under the influence of a magnetic field, and repeated this change at effective values of the external magnetic field applied to the Fe₅Ga₆Gd₂YZr sample. The induction of the external magnetic field was

controlled by a Helmholtz coil, and the angle of influence of the effective magnetic field on the sample was varied. Domain images were obtained at different values of the effective magnetic field induction, and the domain surfaces were analyzed. The $B(S)$ diagram comparing the domain structures of the $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ sample and the $S(\varphi)$ bonds in the corresponding external fields were studied. An experimental study of the application of a magnetic field to the $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ crystal and the magnetization reversal of quasi-static magnetization with uniaxial anisotropy was carried out. Using a magneto-optical device that utilizes the Faraday effect, the presence of discontinuities in the uniform state of magnetization of a magnetic crystal was detected in narrow regions where the directions of the magnetic field vector are close to the axis of rigid magnetization.

Key words: domain structures, magnetic field induction, solid angle, domain walls, surface energy, photomagnetic effect, magnetization, Helmholtz rings.

Kirish. Dunyo aholisining o'sishi energiya resurslariga bo'lgan ehtiyoj tobora ko'proq bosim o'tkazmoqda, bu esa inson faoliyatini qo'llab-quvvatlash uchun energiyaga yuqori talabni keltirib chiqarmoqda. Ishlab chiqarilgan energiyani talab va taklifni muvozanatlash uchun saqlash jiddiy muammo tug'diradi. Energiyani saqlash nafaqat katta muammo, balki ma'lumotlarni saqlash ham katta muammodir. Dunyo, ayniqsa, sun'iy intellekt sohasiga ulkan investitsiyalar kiritilishi bilan, yuqori sig'imli, kichikroq o'lchamli va yuqori energiya samaradorligiga ega saqlash qurilmalariga bo'lgan ehtiyoj sezilib bormoqda. Bunday holatlar, ayniqsa chuqur o'rganish, real vaqt rejimida tahlil qilish va ilg'or til modellarning rivojlanishi bilan qayta ishlanadigan hajmni sezilarli darajada oshirish orqali ma'lumotlarni saqlashga sezilarli ta'sir ko'rsatdi. Faqat elektron zaryadidan foydalanadigan an'anaviy elektronikadan farqli o'laroq, elektronning spinidan foydalanadigan yangi soha bo'lgan Spintronika bu ehtiyojlarni qondirish uchun ideal yechim sifatida paydo bo'lmoqda [1].

Spintronika zaryadlash o'rniga elektron spini yordamida ma'lumotni saqlaydigan, uzatadigan va o'qiydigan qurilmalarni ishlab chiqishga qaratilgan. An'anaga ko'ra, ferromagnit materiallar spintronik qurilmalarning asosini tashkil etgan, chunki ular o'zlarining spontan magnitlanishiga ega bo'lib, bu tashqi maydonlar yoki tok orqali magnit holatlarni samarali boshqarish imkonini beradi. Bu imkoniyat magnitoresistiv tasodifiy kirish xotiralari va yuqori samarali magnit sensorlar kabi texnologik yutuqlarga turtki bo'ldi [2].

Ying Chen va boshqalar [3] Tasodifiy polikristalli Fe-Ga qotishmalarida katta magnitostriksiyaga erishishda magnit domenni qayta tekislash va yog'ingarchilikning sinergik ta'sirini o'rganishgan. Yuqori aniqlikdagi va yuqori sezgirlikdagi magnitostriktiv qurilmalar uchun yuqori samarali magnitostriktiv materiallar juda talabga ega. Biroq yuqori samarali magnitostriktiv materiallarni ishlab chiqarish o'tmishda monokristallarni o'stirish va keyinchalik domenga moslashtirishga juda bog'liq bo'lib, bu nafaqat maxsus asbobda qat'iy ishlov berish nazoratini, balki qurilmalarning murakkab strukturaviy dizaynini ham talab qilishini ko'rsatishgan.

Hussein A. Elsayed va boshqalar [4] Aniq magnit maydonni aniqlash uchun yuqori sezgir nuqsonga asoslangan 1D fononik kristall sensorini loyihalashtirgan. Tekshirilgan natijalar raqamli ravishda olinganiga qaramay, dizayn hozirgi mikrofabrikatsiya texnikalari bilan mos keladi va keyingi avlod kichik magnit sensorlar uchun hayotiy platformani ta'minlaydi. Bundan tashqari, dizaynning soddaligi, sozlanishi va material mosligi tufayli taklif qilingan struktura ilg'or fononik va akustoelektronik ilovalarda ixcham, mustahkam va samarali magnit maydon sensorlarini ishlab chiqish uchun katta istiqbolga ega.

C. Backes va boshqalar [5] o'z tadqiqotlarida yo'naltirilmagan elektr po'lati va donga yo'naltirilgan elektr po'latining charchoq xususiyati turli yuklanish sharoitlarida o'rganildi. Keyin stress bilan boshqariladigan charchoq yuklarining MDS va magnit xususiyatlariga ta'sirini tushunish uchun tsiklik yuklangan namunalarning magnit domen tuzilishining tavsifi o'rganishgan.

L.J. Zhao hamda S. Ebusular [6] α - Sm_2S_3 monokristallida elektr qarshiligining anomal ortishi va tiklanishi hamda ularning namunaga bog'liq magnit maydon tomonidan bostirilishni o'rganishgan. Elektr qarshiligining anizotropiyasi ham o'lchangan va magnitlanishning oson o'qi yo'nalishi bo'yicha elektr qarshiligi o'lchangan harorat oralig'ida sezilarli darajada past ekanligi aniqlangan. Shu asosda, T_{CI} dan past haroratlarda asosiy magnit domen strukturasiidagi magnit domen devorlarining yo'nalishi bo'yicha bitta gipoteza taklif qilingan.

Pengcheng Li va boshqalar [7] Turli ferromagnit materiallar uchun magnit maydonning makroskopik gisterez va mikroskopik magnit domenlarga ta'sirini o'rganishgan. Fazali maydon usuliga asoslanib, yumshoq, qattiq va to'rtburchak ferromagnit materiallar uchun magnit maydonlarining makroskopik gisterezis va mikroskopik magnit domenlarga ta'siri o'rganilgan. Ferromagnit materiallarning har bir toifasi uchun ikkita vakillik material tanlangan va ularning gisterezis halqalari nazariy jihatdan hisoblab chiqilgan.

Uch toifadagi materiallarning gisterezis halqalari mos ravishda tor, keng va to'rtburchak xususiyatlarini namoyish etadi, bu esa tajriba natijalariga miqdoriy jihatdan mos keladi. Bundan tashqari, uch toifadagi materiallar uchun turli xil energiya atamalarining nisbati tahlili o'tkazilgan.

Ankush Saxena va boshqalar [8] Mn asosidagi tetradimit magnit topologik izolyatorlar oilasining yangi a'zosi bo'lgan $Mn_2BiSbTe_5$ ning keng qamrovli tadqiqoti olib borganlar. Yuqori sifatli monokristallar strukturaviy, spektroskopik va transport zondlari yordamida o'stirilgan va tavsiflangan. Raman spektroskopiyasi kristall simmetriyasiga mos keladigan tebranish rejimlarini ochib beradi, rentgen fotoelektron spektroskopiyasi (XPS) esa kimyoviy tarkib va element valentlik holatlarini tasdiqlaydi. Magnitlanish va magnit-transport o'lchovlari 20 K dan past magnit o'tishni aniqlaydi, magnitlanish hosilasida o'tkir anomaliya uzoq masofali tartibning boshlanishini belgilaydi. Nol maydonli sovutilgan va maydonli sovutilgan magnitlanish o'rtasidagi bifurkatsiya klaster spin-shisha xatti-harakatlarini ko'rsatadi. Xoll qarshilik o'lchovlari real fazoviy spin xiralligi va trivial bo'lmagan topologik transportga bog'liq bo'lgan topologik Xoll effektini yanada ochib beradi. Magnit tartiblash va topologik javob o'rtasidagi sozlanishi mumkin bo'lgan o'zaro ta'sir $Mn_2BiSbTe_5$ ni aksion izolyator fazalarini, anomal kvant Xoll holatlarini va topologiyaga asoslangan spin transportini amalga oshirish uchun istiqbolli platforma sifatida belgilaydi, kvant elektronikasi va spintronika uchun ommaviy MTI larni ishlab chiqishni ilgari suraganlar.

Biz ushbu izlanishimiz doirasida shuni aniqlandiki $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristall namunani o'rganib, ushbu namuna ham spintronika qurilmalari uchun asos bo'lib xizmat qiladi [9], [10]

Nazariy qism. Ferromagnit moddalarning energetik holati ularning ichki tuzilishiga, domenlarning joylashishiga va tashqi ta'sir omillariga bog'liq bo'ladi. Moddaning umumiy energiyasi asosan domenlarning o'zaro ta'siri, kristall panjaraning anizotropiyasi, tashqi magnit maydon ta'siri hamda yorug'lik energiyasi bilan belgilanadi.

Agar modda yorug'lik nuri bilan yoritilsa, bu elektronlarning energiya holatini o'zgartiradi, natijada domen devorlari harakatchanligi ortadi, anizotropiya energiyasi esa kamayadi. Shu bilan bir qatorda tashqi magnit maydon berilganda, yorug'lik va maydonning birgalikdagi ta'siri domenlarning qayta yo'nalishiga olib keladi.

Ferromagnit moddalarning umumiy energiyasi bir necha komponentlardan ya'ni E_{mag} – tashqi magnit maydon bilan o'zaro ta'sir energiyasi; E_{an} – kristall panjaraning magnit yo'nalishga nisbatan turg'unligi; E_{dom} – domen devorlari sirt energiyasi; E_{st} – ichki magnit maydonlararo o'zaro ta'sir energiyasi hamda E_{elias} – magnitostriksion (magnit-deformatsion) energiyalardan tashkil topgan bo'ladi:

$$E_{um} = E_{mag} + E_{an} + E_{dom} + E_{st} + E_{elias} \quad (1)$$

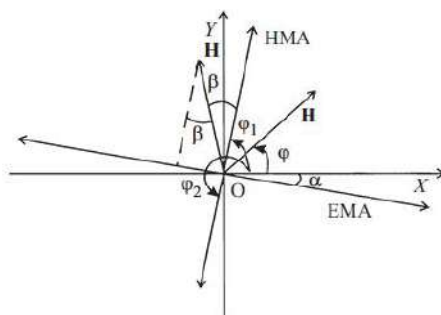
Kristall panjaraning magnit yo'nalishga nisbatan turg'unligi magnit anizotropiya energiyasi bilan tavsiflanadi:

$$E_{an} = K(I, H) \sin^2 \theta \quad (2)$$

Tashqi magnit maydon kuchiga bog'liq anizotropiya konstantasi K ning qiymati o'zgaradi. (2) ifodadagi θ –bu magnitlanish yo'nalishi bilan kristall o'qi orasidagi burchak bo'lib, magnitlanish kristall o'qiga parallel bo'lganda energiya minimal qiymatga; agar magnitlanish kristall o'qiga perpendikulyar bo'lsa, energiya maksimal qiymatga ega bo'ladi.

Tajribamizda biz tashqi magnit moydonini yengil magnitlanish o'qiga nisbatan turli burchak ostida ta'sir ettiramiz. Ta'sir etuvchi effektiv maydonni ham turli qiymatlarida tajribalar olib boramiz.

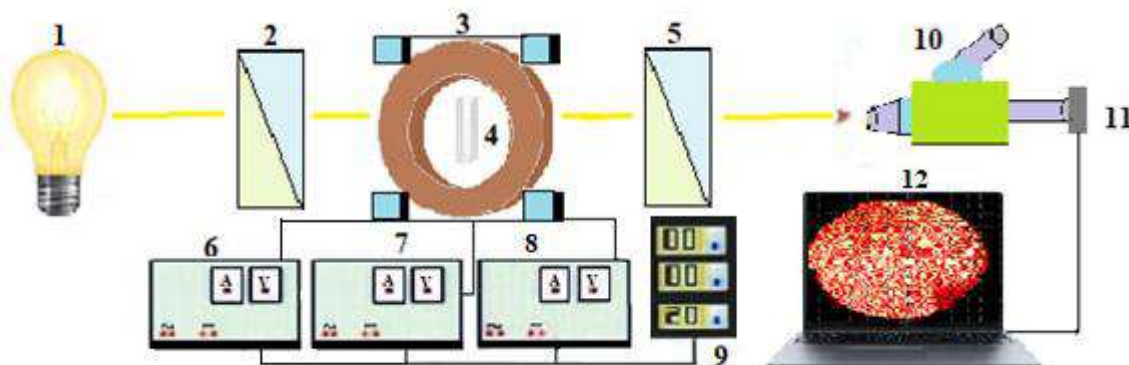
Buning natijasida esa domen devorlari harakatchanligi oshadi, domenlarning yo'nalishi va o'lchamlari qayta taqsimlanadi, magnitlanish darajasi va koersitiv kuch o'zgaradi, moddaning umumiy energiya minimumi yangi muvozanat holatida hosil bo'ladi. Umumiy qilib aytganda, ferromagnit moddaning magnit xossalari o'zgaradi. Bu esa magnit holatni boshqarish imkonini beradi.



1-rasm. Magnit maydon kuchlanish vektori H ning aylanishi o‘lchanadigan gorizontol X o‘qiga nisbatan yengil (EMA) va og‘ir (HMA) magnitlanish o‘qlarining yo‘nalishi

Eksperimental qurilma. Tajriba natijalarini visual kuzatish uchun sxema yig‘ildi (2-rasm).

Yorug‘lik manbai sifatida 12 V kuchlanish uchun mo‘ljallangan 55 Vt quvvatga ega galogen lampa ishlatilgan. Namuna Gelmgolts halqalari ichida joylashgan kriostatga joylashtirilgan. Gelmgolts halqalari boshqaruvi elektron bloki tomonidan amalga oshirildi. Polyarizator yorug‘lik yo‘nalishi bo‘yicha o‘rnatilib, qutblangan yorug‘lik namunadan o‘tib, so‘ng yorug‘lik analizator orqali “Metam P-1” mikroskopi obyektiviga tushdi. Olingan tasvirlar DC1355 F050 kamerasing okulyari orqali noutbukka uzatilgan.



2-rasm. Domen tuzilmalarni o‘rganish qurilmasi

1 – yorug‘lik manbai; 2 – polyarizator; 3 – Gelmgolts g‘altaklari; 4 – namuna; 5 – analizator; 6–; 7–; 8 – tok manbai bloklari; 9 – Gelmgolts g‘altaklari quvvatini boshqaruvchi elektron blok; 10 – «Metam P-1» mikroskopi; 11- DC1355 F050 kamera; 12 – noutbuk.

Tajriba natijalari va muhokamalar. Mazkur ishda tadqiqot obyekti sifatida 0.6mm qalinlikdagi $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristalli olindi [6]. Biz namunani kreostatga shunday joylashtirdikki unda yengil magnitlanish o‘qi Y o‘qi yo‘nalishida hamda og‘ir magnitlanish o‘qi esa X o‘qi yo‘nalishida joylashtirildi. Unga yengil magnitlanish yo‘nalishiga nisbatan turli burgak ostida tashqi magnit maydon ta‘sir ettirilib, namunadagi domenlar o‘zgarishi qadamba – qadam tasvirga olindi. Tajribalar 300 K o‘zgarimas haroratda olib borildi. Domenlar o‘zgarishini magnit maydon induksiyasi o‘zgartirish orqali amalga oshirildi.

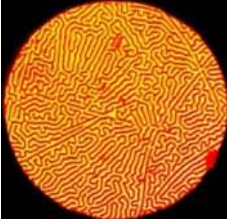
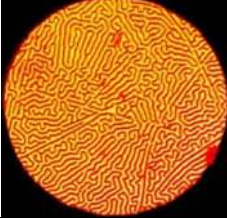
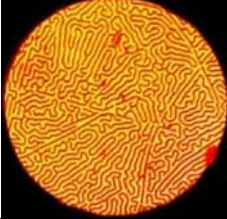
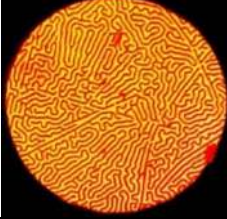
O‘rganilgan $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristalldagi magnit anizotropiya holatlari sxemasi 2 rasmda keltirilgan qurilmada tadqiq qilindi. Namunaning yengil magnitlanish o‘qi sifatida Y o‘qi tanlandi. 1-jadvalda shu yo‘nalishdagi magnit maydon uchun domen strukturasi o‘zgarishi keltirilgan. Bir vaqt momentida X , Y , Z o‘qlari bo‘yicha magnit maydon berilishi gelmgolts g‘altaklari orqali ta‘minlandi. Magnit maydon qiymatlari turli kombinatsiyasida natijaviy maydonning doimiy 3,7417 mT qolish holatlari aniqlandi. Tajriba ko‘rsatishicha natajivay B radius-vektorning XZ tekisliklarida o‘zgarishi magnit strukturaga ta‘sir qiladi. B natijaviyning Y o‘qiga nisbatan buralishi domen strukturalarga ta‘sir qildi. Bu ta‘sirlashish namunaning geometrik o‘lchamlariga bog‘liqdir. Yengil magnitlanish o‘qiga perpendikulyar yo‘nalishdagi magnit maydon domen strukturaga (kristallning magnitlanishiga) deyarli ta‘sir qilmaydi. Keyinchalik tashqi maydonning yengil magnitlanish o‘qiga nisbatan (Y) ba‘zi burchaklarida magnitlanishning o‘zgarishi tadqiq qilindi. Jadvaldan ko‘rinadiki, magnit maydon yo‘nalishi yengil o‘qga yaqinlashishi sari domen strukturada domenlar kattalashib boradi (S). Bu esa magnitlanish oshib borishidan dalolat beradi.

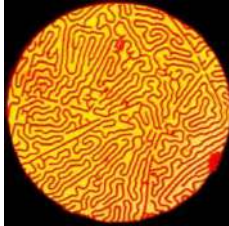
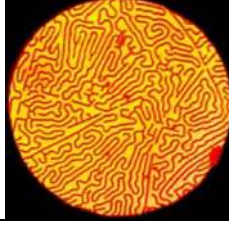
3-rasmdan ko‘rinib turibdiki, magnit maydon induksiyasining belgilangan qiymatida $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristallining oson magnitlanish o‘qi va tashqi magnit maydonning S domen maydoniga yo‘nalishi orasidagi φ burchak bog‘liqligi ko‘rsatilgan. Ushbu bog‘liqlikni tahlil qilish bizga kvazistatik magnitlanishning teskari

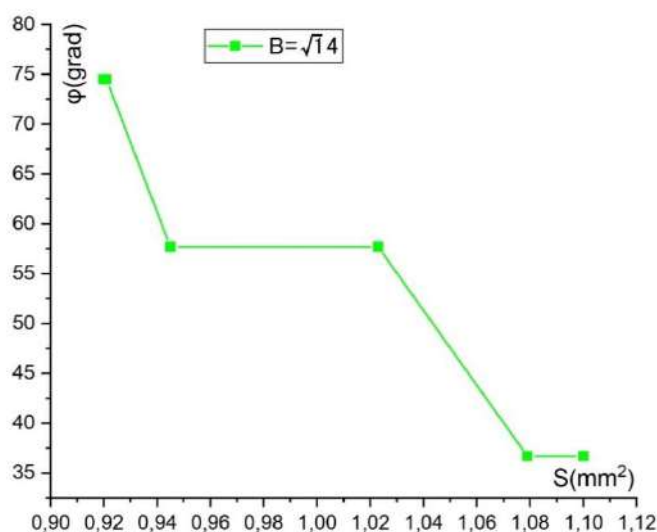
aylanishi sharoitida labirint domen tuzilishini qayta qurish xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Labirintli domen tuzilishi almashinuv o‘zaro ta’siri, magnitostatik energiya va magnitokristal anizotropiya o‘rtasidagi energiya muvozanati muntazam chiziqli domenlarning shakllanishiga olib kelmaydigan materiallarga xosdir. Bu holda, domen chegaralari murakkab, tarmoqlangan shaklga ega va domen tuzilishini qayta tashkil etish jarayonini etarli darajada aks ettiruvchi asosiy miqdoriy parametr domen devorining kengligi emas, balki domen maydoni hisoblanadi. Domen maydoni $S \approx 1.0-1.02 \text{ mm}^2$ gacha oshgani sayin, φ burchagi deyarli o‘zgarmas bo‘lib qoladigan plato mintaqasi kuzatiladi ($\varphi \approx 58^\circ$). Bu xatti-harakatlar kvazi-barqaror holatdagi domen strukturasi qayta tashkil etish rejimini ko‘rsatadi, bunda domen mintaqalarining qayta taqsimlanishi asosan magnitlanish yo‘nalishida keskin o‘zgarishsiz domen chegaralarining siljishi va qisman yo‘q qilinishi tufayli sodir bo‘ladi. Bu diapazonda Zeeman energiyasi va anizotropiya o‘rtasidagi energiya balansi muvozanatga yaqin bo‘lib qoladi. Domen maydonining yanada oshishi ($S \approx 1.08-1.10 \text{ mm}^2$) φ burchagining taxminan $36-37^\circ$ qiymatlarga keskin pasayishi bilan birga keladi. Bu tizimning Zeeman energiyasi magnitokristal anizotropiya ustidan hukmronlik qila boshlaydigan holatga o‘tishini ko‘rsatadi. Natijada, tashqi magnit maydon yo‘nalishi bo‘ylab yo‘naltirilgan domenlar kattalashadi va labirint domen tuzilishi bostiriladi. $S(\varphi)$ ning bu o‘zgarish naqshlari orientatsiya domenining tartiblanishining boshlanishini va ma’lum bir maydon induksiyasida tizimning to‘yinganlikka yaqinlashishini ko‘rsatadi. Shunday qilib, olingan $S(\varphi)$ bog‘liqlik tashqi magnit maydon ta’sirida $\text{Fe}_5\text{Ga}_6\text{Gd}_2\text{YZr}$ kristalining labirint domen tuzilishining qayta joylashuvining chiziqli bo‘lmagan xususiyatini aks ettiradi. Magnitlanishning oson o‘qi va magnit induksiya yo‘nalishi orasidagi burchakning kamayishi domen mintaqalarining qo‘pollashishiga va domen tuzilishining tarmoqlanish darajasining pasayishiga olib kelishi aniqlandi. Bu o‘rganilayotgan kristalning kvazistatik magnitlanishning teskari jarayonlarida magnit anizotropiya va maydon yo‘nalishi muhim rolini tasdiqlaydi.

1-jadval.

Natijaviy maydon o‘zgarmas saqlangan holda turli burchak ostida ta’sir ettirish

B_Y (mT)	B_X (mT)	B_Z (mT)	B (mT)	φ	Domen tasvirlari
1	2	3	3,7417	74,50	
1	3	2	3,7417	74,50	
2	1	3	3,7417	57,69	
2	3	1	3,7417	57,69	

3	1	2	3,7417	36,70	
3	2	1	3,7417	36,70	

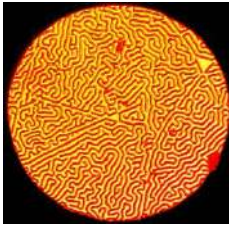
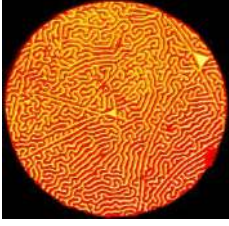


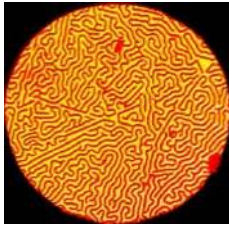
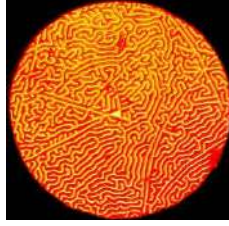
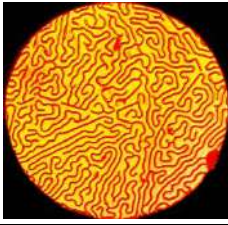
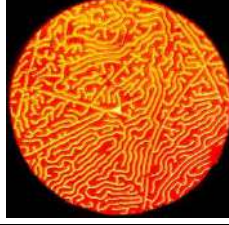
3-rasm. O'zgaras tashqi maydon ta'siridagi domen yuzasini o'zgarishini maydon burchagiga bog'liqligi

Doimiy $\varphi = 57^\circ$ da kristallga 3 ta o'q bo'yicha mos ravishda 1 qiymatli magnit maydon qo'yildi. Bunda Y yengil magnitlanish o'qi deb olindi. Tasvir magnit maydonning 2 xil oriyentatsiyasida qayd qilindi. Magnitlanishning o'zgarishida magnitlanish jarayonida anizotropiya kuzatildi. Shuningdek, doimiy burchakda yengil magnitlanish o'qi bo'ylab magnit maydon induksiyasi domen strukturasi yuzasiga bog'liqligi munosabati olindi. Natija 4-rasmda keltirilgan. Shu jarayonning magnit maydonning teskari yo'nalishida olingan natija 5- rasmda keltirilgan.

2-jadval.

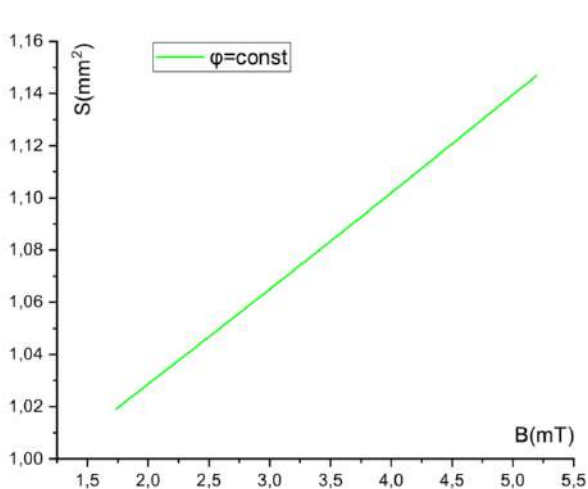
Tashqi magnit maydon ta'sir burchagi o'zgaras saqlangan holdagi domen strukturalari.

B (Y)	B (X)	B (Z)	B	Maydon yo'nalishi to'g'ri	Maydon yo'nalishi teskari
1	1	1	1,7321		

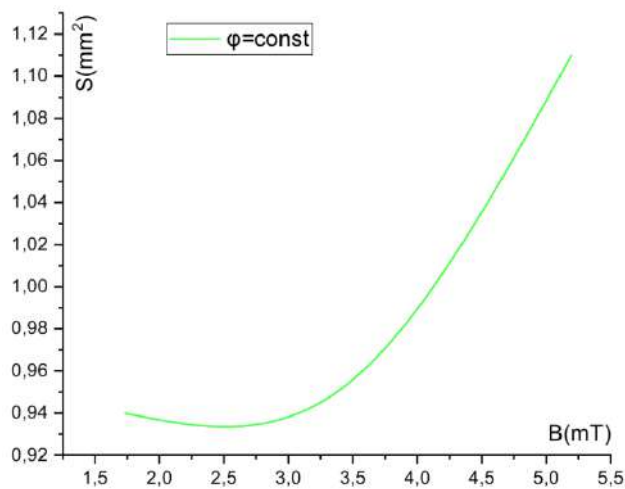
2	2	2	3,4641		
3	3	3	5,1962		

Grafiklardan magnitlanish jarayoning anizotropiyasini kuzatish mumkin. Domenlar yuzasining ortishi asosan domen chegaralarining siljishi va qisman yo‘qolishi, shuningdek labirintsimon domen strukturasi magnit momentlarning qayta taqsimlanishi hisobiga sodir bo‘ladi. Grafikda keskin sakrashlar yoki nochiziqli xususiyatlarning kuzatilmasligi $\varphi = 57^\circ$ da tizim magnitkristall anizotropiya ustun bo‘lgan holat bilan magnit maydon ta’sirida orientatsion tartiblanish kuchaygan holat o‘rtasidagi oraliq energetik rejimda ekanligini ko‘rsatadi.

$\varphi = 57^\circ$ doimiy burchakda olingan $S(B)$ bog‘lanishi tashqi magnit maydon kuchayishi $\text{Fe}_5\text{Ga}_6\text{Gd}_2\text{YZr}$ kristalida domen sohasining boshqariladigan va barqaror yiriklashuviga (katta domenlarga aylanishi) olib kelishini tasdiqlaydi. Bu natijalar kvazistatik qayta magnitlanish jarayonlarida magnit maydon yo‘nalishining muhim rolini ko‘rsatadi hamda magnit maydon geometriyasi o‘zgarmagan sharoitda ham labirint domen strukturasi fazoviy tashkil topishi sezilarli darajada o‘zgarishi mumkinligini namoyon etadi.



4-rasm. Yengil magnitlanish o‘qi yo‘nalishida ta’sir etganda domen yuzasini o‘zgarishini maydonga bog‘liqligi



5-rasm. Tashqi maydon yengil magnitlanish o‘qiga teskari yo‘nalishida ta’sir etganda domen yuzasini o‘zgarishini maydonga bog‘liqligi

5-rasmda $\text{Fe}_5\text{Ga}_6\text{Gd}_2\text{YZr}$ kristalida domen strukturalari yuzasi S ning tashqi magnit maydon induksiyasi B ga bog‘liqligi, oson magnitlanish o‘qi bilan magnit induksiya yo‘nalishi orasidagi burchak $\varphi = \text{const}$ bo‘lgan sharoitda va Gelmgolts g‘altaklarida tokning teskari yo‘nalishida olingan natijalar keltirilgan. To‘g‘ri tok yo‘nalishida kuzatilgan holatdan farqli ravishda, ushbu bog‘lanish aniq nochiziqli xarakterga ega bo‘lib, domen strukturasi qayta tashkil topish jarayonida assimetriya mavjudligini ko‘rsatadi. Kuchsiz magnit maydonlar sohasida ($B \approx 1.6\text{--}2.5$ mT) domenlar yuzasining biroz kamayishi kuzatiladi, bu esa $S(B)$ egri chizig‘ida zaif minimum paydo bo‘lishi bilan namoyon bo‘ladi. Mazkur hodisa magnit xotira va qoldiq magnitlanish effektlari bilan bog‘liq bo‘lib, bunda labirintsimon domen strukturasi avvalgi magnitlanish bosqichida shakllangan konfiguratsiyani saqlab qoladi. Ushbu sohada magnitkristall anizotropiya energiyasi va domen devorlari o‘zaro ta’siri Zeeman energiyasiga nisbatan ustun bo‘ladi va domen tizimining tezkor qayta tashkil topishini cheklaydi. Magnit maydon induksiyasining keyingi ortishi (B

> 2.5–3.0 mTl) bilan domenlar yuzasining keskin oshishi kuzatiladi. Bu domen chegaralarining faol siljishi va qisman yo‘qolishi, shuningdek magnit maydonning yangi yo‘nalishi bo‘ylab orientatsiyalangan domen sohalarining tezkor yiriklashuvi bilan izohlanadi. Mazkur rejimda Zeeman energiyasi magnitkristall anizotropiya energiyasidan ustun kela boshlaydi va labirintsimon domen strukturasi tezlashtirilgan qayta tashkil topishiga olib keladi.

Teskari tok yo‘nalishida olingan S(B) bog‘lanishining noxiziqli ko‘rinishi Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristalida kvazistatik qayta magnitlanish jarayonlarida gisterezis effektlarining mavjudligini tasdiqlaydi. Magnit maydonning to‘g‘ri va teskari yo‘nalishlarida domenlar yuzasining o‘zgarishidagi farqlar domen jarayonlarining qisman qaytmasligini, shuningdek domen devorlarining mahkamlanishi va kristall panjaradagi ichki nuqsonlarning muhim rol o‘ynashini ko‘rsatadi.

Shunday qilib, teskari yo‘nalishdagi magnit maydon ta‘sirida Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristalida domen strukturasi evolyutsiyasi Zeeman energiyasi, magnitkristall anizotropiya va magnit xotira effektlarining murakkab o‘zaro ta‘siri bilan belgilanadi. Bu esa domenlar yuzasining tashqi magnit maydon induksiyasiga bog‘liq ravishda assimetrik va noxiziqli o‘zgarishiga olib keladi hamda tadqiq etilgan tizimda kvazistatik qayta magnitlanish jarayonlarining gisterezisli xarakterini yaqqol namoyon etadi.

Xulosa. Ushbu ishda Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristalida tashqi magnit maydon ta‘sirida domen strukturasi qayta tashkil topish jarayonlari tajribaviy ravishda tahlil qilindi. O‘tkazilgan kuzatishlar kvazistatik magnitlanish sharoitida domenlar evolyutsiyasi magnit maydonning yo‘nalishi va induksiyasiga sezilarli darajada bog‘liq ekanligini ko‘rsatdi.

Labirint domen strukturasi ega bo‘lgan Fe₅Ga₆Gd₂YZr kristall uchun domenlar yuzasi ularning holatini tavsiflovchi asosiy parametr sifatida namoyon bo‘ldi. Domenlar yuzasi bilan magnit maydon yo‘nalishi orasidagi burchak o‘rtasidagi bog‘lanish noxiziqli xarakterga ega bo‘lib, bu holat magnitkristall anizotropiya va Zeeman energiyasi o‘rtasidagi raqobat bilan izohlanadi. Magnit maydon yo‘nalishining o‘zgarishi domen sohalarining fazoviy tashkil topishiga bevosita ta‘sir ko‘rsatishi aniqlandi.

Doimiy burchakda olingan natijalar magnit maydon kuchayishi domen sohalarining bosqichma-bosqich yiriklashuviga olib kelishini ko‘rsatdi. Shu bilan birga, magnit maydon yo‘nalishi o‘zgartirilganda domen strukturasi qayta tashkil topishida assimetriya va gisterezis effektlari kuzatildi, bu esa domen devorlarining mahkamlanishi va qoldiq magnitlanishning muhim rol o‘ynashini tasdiqlaydi.

Olingan natijalar murakkab ferromagnit kristallarda domen strukturasi tashqi magnit maydon orqali boshqarish imkoniyatlarini namoyon etadi hamda magnitoptik qurilmalar va funksional magnit materiallarni ishlab chiqishda amaliy ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. F. El Aissaoui et al., “Exploring the structural , electronic , magnetic and optical properties of new halide double perovskites Li₂RbMX₆ (M = Fe , V , Sc ; X = Br , F): Insights for spintronic and photovoltaic applications,” *Next Mater.*, vol. 9, no. August, p. 101185, 2025, doi: 10.1016/j.nxmate.2025.101185.
2. A. Hirohata et al., “Journal of Magnetism and Magnetic Materials Review on spintronics : Principles and device applications,” vol. 509, no. January, 2020, doi: 10.1016/j.jmmm.2020.166711.
3. Y. Chen, T. Yang, J. Gou, R. Qiao, Y. Zhang, and T. Ma, “Materials & Design Synergistic effects of magnetic domain re-alignment and precipitation on achieving large magnetostriction in random polycrystalline Fe-Ga alloys,” vol. 256, no. June, 2025.
4. H. A. Elsayed et al., “Design of a highly sensitive defect-based 1D phononic crystal sensor for precise magnetic field sensing,” *J. Mater. Res. Technol.*, vol. 39, no. September, pp. 7335–7345, 2025, doi: 10.1016/j.jmrt.2025.11.075.
5. C. Backes, M. Smaga, and T. Beck, “High cycle fatigue behavior and magnetic domain structure of non-oriented and grain-oriented electrical steels at $R\sigma = 0.1$ and $R\sigma = -1$,” *Int. J. Fatigue*, vol. 202, no. August 2025, p. 109251, 2026, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2025.109251.
6. L. J. Zhao and S. Ebisu, “Anomalous increasing and recovery of the electrical resistivity and their sample-dependent suppression by the magnetic field in a -Sm₂S₃ single crystal,” vol. 620, no. February, pp. 1–2, 2025.
7. P. Li, J. Zhang, Y. Gao, X. Xia, and G. J. Weng, “Effect of magnetic field on macroscopic hysteresis and microscopic magnetic domains for different ferromagnetic materials,” *J. Mater. Res. Technol.*, vol. 31, no. April, pp. 458–471, 2024, doi: 10.1016/j.jmrt.2024.06.029.
8. A. Saxena, S. Huang, C. Yu-chung, I. Huang, and M. Chou, “Materials & Design Signatures of magnetic and topological hall effects in Mn₂BiSbTe₅: an anomalous low-temperature transition,” *Mater.*

PHYSICS

Des., vol. 259, no. July, p. 114888, 2025, doi: 10.1016/j.matdes.2025.114888.

9. N. G. Nasirova, S. S. Fayziyev, Q. S. Saidov, B. E. Niyazxonova, and D. R. Dzhuraev, "The Influence of Temperature and Magnetic Field on the Magnetic Structure of Domains of the $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ Crystal," *Brazilian J. Phys.*, vol. 55, no. 6, 2025, doi: 10.1007/s13538-025-01874-y.

10. N. Nasirova, D. Djurayev, and S. Fayziyev, " $Fe_5Ga_6Gd_2YZr$ kristallidagi magnit tartiblanishiga temperaturaviy va magnit ta'sirlar.," *Sci. Bull. Phys. Math. Res.*, vol. 7, pp. 33–46, 2025.

PM6:L8-BO FAOL QATLAMLARNING OPTIK VA STRUKTURAVIY XUSUSIYATLARI

Nurumbetova Lobar Rimbayevna,
Toshkent davlat transport universiteti
lobar.nurumbetova@gmail.com)

Saidqulova Adolat Axmedjan qizi,
U.A. Arifov nomidagi Ion plazma va Lazer texnologiyalari instituti
adolatsaidqulova08@gmail.com)

Saidqulova Shaxlo Axmedjan qizi,
U.A. Arifov nomidagi Ion plazma va Lazer texnologiyalari instituti
shaxlosaidqulova@gmail.com)

Mansurova Mavjuda Yuldashevna,
Toshkent davlat transport universiteti
mansurova19672203@gmail.com

Saparbayev Aziz Adamovich,
U.A. Arifov nomidagi Ion plazma va
Lazer texnologiyalari instituti yetakchi ilmiy xodimi
saparbaevaziz83@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tadqiqotda tetra-ftorofenil azid modifikatsiyasiga ega suyuq kristall polimer (PFFA) donor materiali PM6 ga va perftoropolimer asosidagi suyuq modifikator (PFF) akseptor materiali L8-Bo ga qo'shildi. Ushbu modifikatorlarning qo'shilishi donor-akseptor tizimining morfologiyasini yaxshiladi, yorug'lik yutilish diapazonini kengaytirdi hamda fotoinduksiyalangan zaryad tashuvchilarning ajralishi va tashilishini samarali amalga oshirishga yordam berdi. Natijada faol qatlarning optik, elektr va mexanik xususiyatlari sezilarli darajada yaxshilandi. Olingan ilmiy natijalar PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ kompozitsiyasi asosida tayyorlangan polimer quyosh elementlarining energiya o'zlashtirish samaradorligi 19,2% ga yetdi va kelajakda moslashuvchan fotovoltaiq qurilmalar yaratishda amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatdi.

Kalit so'zlar: PM6, L8-Bo, PFFA, PFF, polimer quyosh elementlar, morfologiya, yutilish.

ОПТИЧЕСКИЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА АКТИВНЫХ СЛОЁВ PM6:L8-BO

Аннотация. В данном исследовании жидкокристаллический полимер, модифицированный тетрафторфенил-азидом (PFFA), был добавлен к донорному материалу PM6, а жидкая добавка на основе перфторполимера (PFF) была введена в акцепторный материал L8-Bo. Введение этих модификаторов улучшило морфологию донорно-акцепторной системы, расширило диапазон поглощения света и способствовало эффективному образованию и транспорту фотоиндуцированных носителей заряда. В результате были существенно улучшены оптические, электрические и механические свойства активного слоя. Полученные научные результаты показали, что полимерные солнечные элементы на основе композиции PM6-PFFA₁₀:L8-BO-PFF₂₀ достигли эффективности преобразования энергии 19,2% и обладают высоким потенциалом для применения в гибких фотоэлектрических устройствах будущего.

Ключевые слова: PM6, L8-Bo, PFFA, PFF, полимерные солнечные элементы, морфология, поглошение.

OPTICAL AND STRUCTURAL PROPERTIES OF PM6:L8-BO ACTIVE LAYERS

Abstract. In this study, a liquid crystalline polymer modified with tetrafluorophenyl azide (PFFA) was incorporated into the donor material PM6, while a perfluorinated polymer-based liquid additive (PFF) was introduced into the acceptor material L8-Bo. The incorporation of these additives improved the morphology of the donor-acceptor system, broadened the light absorption range, and enhanced the generation and transport of photoinduced charge carriers. As a result, the optical, electrical, and mechanical properties of the active layer were significantly improved. The obtained results demonstrated that polymer solar cells based on the PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ composite achieved a power conversion efficiency of 19.2% and possess high potential for future application in flexible photovoltaic devices.

Key words: PM6, L8-Bo, PFFA, PFF, polymer solar cells, morphology, absorbtion.

Kirish. Polimer asosidagi organik fotovoltaik tizimlar yorug'likni elektr energiyasiga aylantirishda istiqbolli yo'nalish hisoblanadi, ularning samaradorligi esa donor va akseptor komponentlarining optik va morfologik tavsiflariga bevosita bog'liqdir. Ayniqsa, PM6 polimeri yuqori yorug'lik yutilishi va zaryad tashuvchilarning kovak komponentini yuqori darajada o'tkazish xususiyatiga ega. L8-Bo yuqori elektron harakatchanlikka ega bo'lgan istiqbolli akseptor materiali hisoblanadi. Biroq PM6:L8-Bo asosida shakllangan faol qatlamda fazaviy ajralish darajasi va morfologik barqarorlik yetarli darajada optimal bo'lmagani sababli, zaryad tashish jarayonlarida yo'qotishlar kuzatiladi va natijada qurilmaning umumiy samaradorligi cheklanadi. Organik fotovoltaik tizimlarda faol qatlamning molekulyar tartibi, interfeys zonalari va zaryad tashuvchi yo'llarning optimallashtirilishi yuqori samaradorlikka erishishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli donor va akseptor fazalarining ichki tuzilishini nazorat qilish maqsadida maxsus funksional qo'shimchalardan foydalanish dolzarb ilmiy yo'nalish hisoblanadi. Tetra-ftorofenil azid modifikatsiyasiga ega suyuq kristall polimer (PFFA)ni donor materiali PM6 tarkibiga kiritish polimer zanjirlarining fazaviy moslashuvchanligini oshiradi hamda konjugatsiyalangan tizimdagi optik faol hududlarni kengaytiradi. Shuningdek, perftoropolimer asosidagi suyuq modifikator (PFF)ning akseptor materiali L8-Bo bilan qo'shilishi molekulararo " π - π stacking" tartibini kuchaytiradi va elektron transport yo'llarining barqarorligini ta'minlaydi.



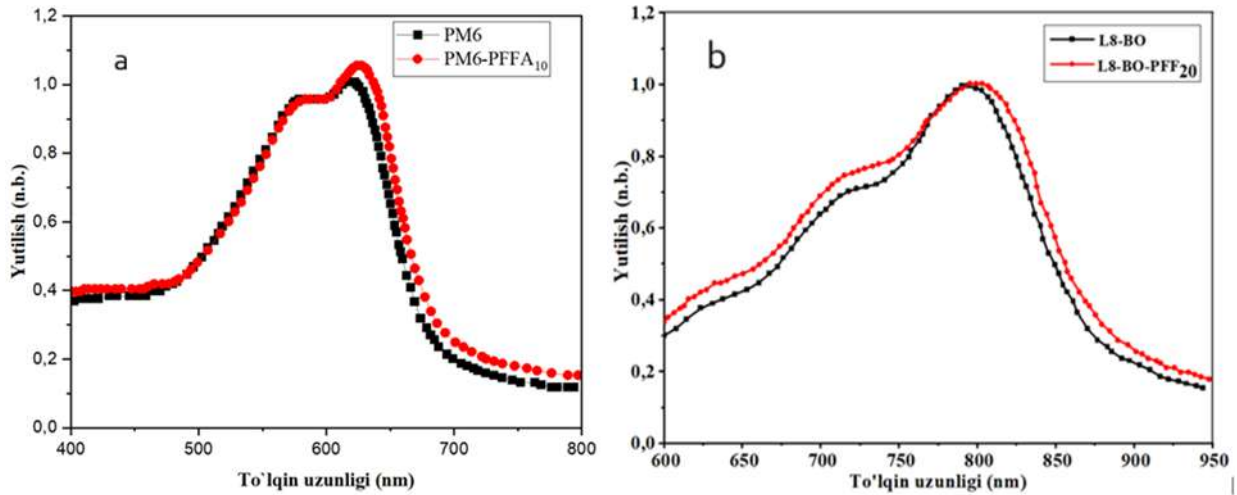
1-rasm. PFFA va PFF modifikatorlarining optik xususiyatlarga ta'sir etuvchi kimyoviy tuzilmalari

1-rasmda ko'rsatilganidek, PFFA va PFF qo'shimchalari perftorlangan zanjirli suyuq kauchuk moddalaridir. Ular mos ravishda donor va akseptor fazalariga kimyoviy moslikni ta'minlagan holda kiritiladi. PFFA molekulasida joylashgan azid ($-N_3$) funksional guruhi PM6 polimeridagi qo'sh bog'lar bilan ultrabinafsha nurlanish ta'sirida kimyoviy bog'lanish hosil qila oladi. Bu jarayon donor fazasidagi molekularning tartiblanishini yaxshilab, uning fazaviy barqarorligini oshiradi. Shuningdek, PFF modifikatori akseptor komponenti L8-Bo bilan ftor-ftor va ftor-oksigen o'zaro ta'sirlari orqali fizika-kimyoviy uyg'unlikni kuchaytiradi. Natijada, faol qatlam ichida fazaviy ajralish silliqlashadi, yorug'lik yutilishi kuchayadi, va zaryad tashuvchilar samarali ajraladigan interfeys hosil bo'ladi. Bunday molekulyar tuzilma natijasida yaratilgan faol qatlamlar nafaqat yuqori optoelektron samaradorlik, balki egilish va cho'zilish kabi mexanik deformatsiyalarga nisbatan ham bardoshlilik ko'rsatadi.

Tadqiqot usuli. Tadqiqotda qatlam-qatlam usulida tayyorlangan (PQE) tarkibida PM6 donor va L8-Bo akseptor materiallari asos sifatida tanlandi. Mexanik va optoelektron xossalarni yaxshilash maqsadida ularning tarkibiga mos ravishda 10% PFFA (PM6 bilan) va 20% PFF (L8-Bo bilan) qo'shildi. Substrat tayyorlashda quyosh elementlari uchun ITO (ITO - indiy qalay oksidi) bilan qoplangan shisha substratlar ketma-ket ravishda detergent, deionlangan suv, aseton va izopropanol bilan ultratovushli tozalashdan o'tkazildi. Quritilgan substratlar ustiga PEDOT:PSS qatlam spin-coating usuli bilan surtilib, 150 °C da 15 daqiqa davomida issiqlikda qizdirildi. Bu qatlam kovak tashuvchi qatlam sifatida xizmat qiladi. **Donor qatlami tayyorlash:** PM6 polimeri asosiy modda sifatida olinib, unga **PM6 molekulalariga nisbatan 10 foiz miqdorida PFFA modifikatori qo'shilgan holda** eritma tayyorlandi. Ushbu eritma xlorbenzolda 10 mg/mL konsentratsiyada tayyorlanib, PEDOT:PSS qatlamining ustiga spin-coating usuli orqali surildi. **Akseptor qatlami tayyorlash esa** L8-Bo molekulasi asosiy modda sifatida olinib, unga **L8-Bo molekulalariga nisbatan 20 foiz miqdorida PFF modifikatori qo'shilgan holda** eritma tayyorlandi. Ushbu eritma xlorofromda 10 mg/mL konsentratsiyada tayyorlanib, donor qatlam ustiga spin-coating orqali surildi. Tayyor LBL faol qatlam 85 °C da 5 daqiqa davomida issiqlik bilan ishlov berildi. Natijada PM6:L8-Bo va PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ faol qatlamlar hosil qilindi:

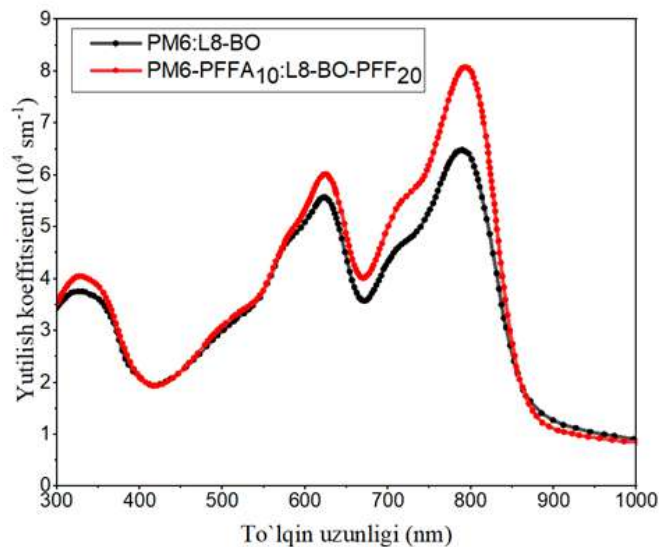
Tayyorlangan faol qatlamlar optik xossalarni baholash uchun yutilish spektrlari o'lchandi. O'lchovlar Hitachi U-4100 UV-Vis spektrofotometri yordamida 300 - 1000 nm to'liq uzunligi oralig'ida amalga oshirildi. O'lchovlar faol qatlam holatida olib borilgan bo'lib, har bir namunadagi yutilish darajasi orqali ularning yorug'likni qamrab olish xususiyatlari tahlil qilindi. Bu natijalar keyinchalik fotovoltaik

samaradorlik bilan bog‘liq bo‘lgan asosiy omillarni tushunishga yordam beradi. 2a-rasmda PM6-PFFA₁₀ qatlamida esa yutilish piklari nafaqat intensivlik jihatidan yuqori, balki to‘lqin uzunligi sohasi bo‘yicha biroz kengaygan. Bu natija PFFA modifikatorining polimer zanjirlari orasidagi fazoviy tartibni yaxshilashi, optik zichlikni oshirishi va foton yutilish samaradorligini keng spektr sohasida ta‘minlaganidan dalolat beradi. Natijada, PFFA qo‘shimchasi yorug‘likni kuchliroq yutishi va yuqori fotoinduksiyalangan zaryad hosil bo‘lishiga sharoit yaratgan. PM6:PFFA₁₀ qatlamdagi yuqori va kengaygan yutilish piklari optik muhitning yaxshilanganligini, bu esa o‘z navbatida fotovoltaiik samaradorlikni oshirishga sezilarli hissa qo‘shishini anglatadi.



2-rasm. a) PM6 sof faol qatlamsi va PM6-PFFA qatlamining, b) L8-Bo sof qatlami va L8-Bo:PFF qatlamining yutilish spektrlari

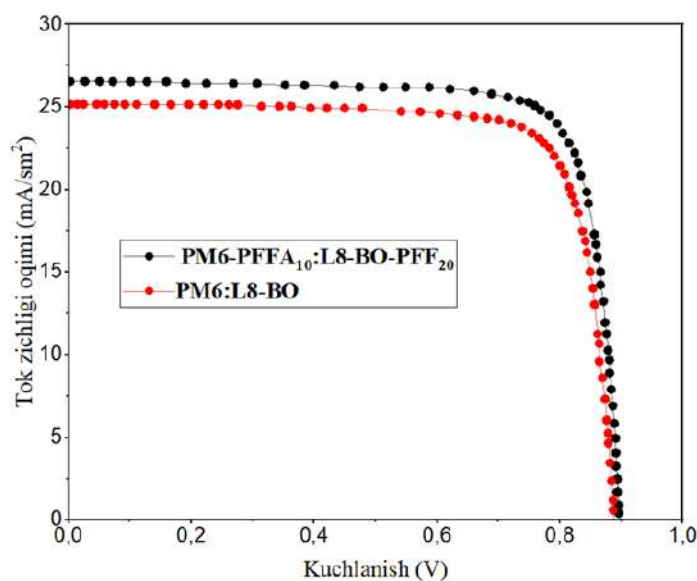
1b-rasmda esa sof L8-Bo akseptor qatlami va unga 20% PFF modifikatori kiritilgan aralash qatlamning yutilish spektrlari berilgan. Sof L8-Bo qatlami asosan 700–850 nm oralig‘ida yorug‘likni yutadi, bu akseptor materialining infraqizilga yaqin sohada faol ekanini ko‘rsatadi. L8-Bo:PFF₂₀ qatlamida esa yutilish intensivligi bu sohada sezilarli oshgan va yutilish spektri yanada kengaygan. Bu PFF molekulari akseptor fazasida molekulararo o‘zaro ta‘sirlarni optimallashtirib, kristallik darajasini yaxshilashi va optik zichlikni oshirishi natijasidir. Bunday optik yaxshilanish akseptor fazasida foton yutilishi va zaryad ajralish jarayonini kuchaytiradi, bu esa umumiy fotoelektrik samaradorlikning ortishiga olib keladi. L8-Bo:PFF₂₀ qatlamining yuqori yutilish ko‘rsatkichlari akseptor fazasining optik faoliyatini yaxshilab, yorug‘likdan maksimal foydalanish imkonini yaratganini tasdiqlaydi. PFF modifikatori fazaviy muvozanatni optimallashtirgan va fotogeneratsiya jarayonining samaradorligini oshirgan.



3-rasm. PM6:L8-Bo va PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ faol qatlamlarning yutilish spektrlari

3-rasmda ikki faol qatlam ko‘rsatilgan bo‘lib bular qora chiziqda PM6:L8-Bo va qizil chiziqda esa PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ faol qatlamlarning yutilish spektrlari ko‘rsatilgan bo‘lib, PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-

PFF₂₀ faol qatlam PM6:L8-Bo faol qatlamga qaraganda barcha to‘lqin uzunliklarida ko‘proq yorug‘lik yutmoqda. Ayniqsa 700–850 nm oralig‘ida sezilarli darajada yuqori yutilish bor bu L8-Bo akseptorining yutilish zonasiga to‘g‘ri kelmoqda. Piklar haqida gapiradigan bo‘lsak, 525 nm atrofida bu pik PM6 donor polimerining yutilish piki bo‘lib, fotonlarni qamrab olishdagi o‘rnini bildiradi. ~ 810 nm atrofida pik esa L8-Bo akseptor komponentining yutilish piki bo‘lib, to‘lqin uzunligi jihatdan chuqurroq nurni o‘zlashtirish qobiliyatini bildiradi. Ikkala material birgalikda keng spektrli yutilishni ta‘minlaydi, bu esa yuqori fotozaryad hosil bo‘lishiga yordam beradi. Qizil spektrning kuchliroq bo‘lishi, faol qatlam tarkibiga qo‘shilgan PFFA (donor tomonida) va PFF (akseptor tomonida) qo‘shimchalarning muhim ro‘lini ko‘rsatadi. Ularning vazifalari, fazaviy ajralishni tartibga soladi, donor–akseptor chegaralarida optimal interfeys hosil qiladi va molekullararo tartibni kuchaytiradi, bu esa foton yutilishini samaraliroq bo‘lishiga yordam beradi. Ushbu yutilish spektri tahlili shuni ko‘rsatadiki, **ikkilamchi suyuq modifikatorlar integratsiyasiga asoslangan strukturaviy optimizatsiya yondashuvi** orqali yaratilgan PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ faol qatlam yorug‘likni ancha samarali yutadi. Bu esa keyingi bosqichlarda yuqoriroq fotoelektron tok hosil bo‘lishi va umumiy fotoelektrik samaradorlikning oshishiga olib keladi.



4-rasm. PM6:L8-Bo va PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ asosidagi qurilmalarning yorug‘lik ostida tok–kuchlanish xarakteristikallari

4-rasmda PM6 donor va L8-Bo akseptoriga asoslangan, turlicha modifikatorlar qo‘shilgan PQE qurilmalarining yorug‘lik ostida, **standart quyosh nurlanishi sharoitida - ya‘ni Air Mass 1,5 Global (AM 1,5G) spektri bo‘yicha 100 mW/cm² intensivlikdagi standart quyosh yoritilishi ostida** o‘lchangan tok - kuchlanish xarakteristikallari keltirilgan. Grafikdan ko‘rinib turibdiki, **ikki tomonlama suyuq modifikator integratsiyasiga asoslangan kompozitsion optimizatsiya yondashuvi** orqali ishlab chiqilgan PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ tizimi, oddiy PM6:L8-Bo qurilmasiga nisbatan ancha yuqori fotovoltaiik samaradorlikni namoyish qiladi. Ushbu strukturaviy optimizatsiya asosidagi faol qatlamda qisqa tutashuv tok zichligining sezilarli oshishi - qurilmaning keng spektrda ko‘proq fotonlarni yutilishi, ularning samarali dissotsiatsiyasi va zaryad tashuvchilarni yo‘qotishsiz tashish qobiliyati ortganini bildiradi. Bu yutuq PFFA va PFF molekullarining fazaviy moslashuvni yaxshilashi, fazalararo interfeyslarni barqarorlashtirishi va morfologik tartibni oshirishi bilan bog‘liq. Xususan, PFF molekullarining L8-Bo akseptori bilan kuchli o‘zaro ta’sirlari yaxshilangan kristallik tartibni hosil qiladi, bu esa elektronlarning transport yo‘llarini silliqashtirib beradi. Yutilish spektrida 700 - 850 nm diapozondagi intensivlik oshishi esa qisqa tutashuv tok zichligining ko‘tarilishiga bevosita sabab bo‘ladi. Ochiq zaryad kuchlanishi 0,898 V gacha ortishi, mazkur modifikatsiya tufayli rekombinatsiya jarayonlarining kamayganini ko‘rsatadi. Donor - akseptor chegarasida PFFA va PFF tomonidan shakllantirilgan tartibli interfeyslar elektron va teshiklarning ajralish jarayonini tezlashtiradi. Natijada ichki elektr maydon kuchayadi va kuchlanish ortadi. Shuningdek, energetik darajalarning yaxshiroq mosligi ham V_{oc} ni oshiruvchi muhim omillardandir. To‘ldiruvchi faktor (FF) 80,3% gacha yetishi - qurilma

ichidagi zaryad tashish yo‘llarining kam qarshilikka ega ekanini va tashish samaradorligining yuqoriligini bildiradi. PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ tizimida molekullarning tartibli joylashuvi GIWAXS tahlillari orqali ham tasdiqlangan bo‘lib, aynan shu omil FF ning yuqoriligiga kuchli hissa qo‘shadi. Bundan tashqari,

PEDOT:PSS va PDINN qatlamlari bilan hosil bo'lgan energetik va morfologik moslik ham tashish jarayonlarini yaxshilab, FF ning ortishiga yordam beradi. Umuman olganda, bu tizimda donor va akseptor fazalaridagi modifikatorlar - PFFA va PFF - orqali hosil bo'lgan ftor-ftor va ftor-oksigen o'zaro ta'sirlari fazaviy ajralishni optimallashtirib, interfeyslarni mustahkamlaydi va zaryad tashish jarayonlarining samaradorligini sezilarli oshiradi.

1-jadvalda keltirilgan ma'lumotlarga asoslanib, PM6:L8-Bo va PM6-PFFA₁₀:L8-BO-PFF₂₀ faol qatlamlari asosidagi PQEning fotovoltaiik xususiyatlari tahlil qilindi. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, PFF₂₀ qo'shimchasi yordami bilan tayyorlangan qurilmada barcha asosiy fotovoltaiik parametrlar yaxshilangan.

1-jadval.

PM6:L8-Bo va PM6-PFFA₁₀:L8-Bo-PFF₂₀ asosida PQE uchun fotovoltaiik ko'rsatkichlar

Faol qatlam	V _{oc} , (V)	J _{sc} , (mA/cm ²)	FF, (%)	EO'S, (%)
PM6:L8-BO	0,889	25,3	78,6	17,7
PM6-PFFA ₁₀ :L8-BO-PFF ₂₀	0,898	26,6	80,3	19,2

Avvalo, yorug'lik yutilish spektrida kuzatilgan yutilish intensivligi ortishi, PFF₂₀ modifikatori faol qatlam ichida fazaviy tuzilmani optimallashtirib, yorug'likni kengroq spektrda qamrab olishga imkon berganini ko'rsatadi. Bu esa o'z navbatida fotoinduksiyalangan zaryad tashuvchilarning (elektron va kovaklar) sonini ko'paytirgan. Shu sababli, qisqa tutashuv toki zichligi (J_{sc}) PM6:L8-BO qurilmasida 25,3 mA·cm⁻² bo'lsa, PM6-PFFA₁₀:L8-BO-PFF₂₀ qurilmasida bu ko'rsatkich 26,2 mA·cm⁻² ga yetgan. ≈ 0,9 mA·cm⁻² lik o'sish yorug'lik yutilish va zaryad ajralish samaradorligining ortganidan dalolat beradi. Ochiq tutashuv kuchlanishi (V_{oc}) esa mos ravishda 0,889 V dan 0,897 V gacha ya'ni ≈ 8 mV ga o'sgan. Bu kichik o'sish energiya sathlarining bir-biriga yaxshiroq mos kelishi va zaryad tashuvchilarning rekombinatsiya ehtimoli kamayganini anglatadi. FF 78,6% dan 79,8% ga oshgan. Bunday yaxshilanish kontakt interfeyslaridagi elektr yo'qotishlarning kamayganidan, zaryadlarning to'liqroq yig'ilishidan dalolat beradi. Barcha asosiy parametrlarning yaxshilanishi natijasida energiya o'zgarish samaradorli (EO'S) 17,7% dan 18,7% gacha ko'tarilgan. Ushbu natijalar PFF₂₀ modifikatorining optik, elektr va morfologik jihatdan samarali bo'lganini ko'rsatadi. Aynan PFF₂₀ modifikatsiyasi fazaviy tuzilmani barqarorlashtirib, yorug'lik yutilish va zaryad ajralish imkoniyatlarini yaxshilagan. Bu esa umumiy samaradorlikka bevosita ijobiy ta'sir ko'rsatgan bo'lib, PM6-PFFA₁₀:L8-BO-PFF₂₀ tizimining kelajakdagi yuqori samarali va moslashuvchan quyosh elementlari uchun istiqbolli platforma ekanligini isbotlaydi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda PM6 donor materiali va L8-Bo akseptor materiali tarkibiga mos ravishda qo'shilgan PFFA va PFF modifikatorlarining polimer quyosh elementlari samaradorligiga ta'siri o'rganildi. Natijalar modifikatorlar donor-akseptor tizimining morfologiyasini yaxshilab, yorug'lik yutilish sohasini kengaytirishi, zaryad tashuvchilarning ajralishi va transportini kuchaytirishini ko'rsatdi. Buning natijasida barcha asosiy fotovoltaiik parametrlar yaxshilanib, qurilmaning energiya o'zlashtirish samaradorligi 19,2% ga yetdi. Ushbu yondashuv organik fotovoltaiik qurilmalar uchun yuqori samarali va moslashuvchan faol qatlamlar yaratishda istiqbolli yo'nalish ekanini ko'rsatdi.

Minnatdorchilik. Ushbu maqoladagi olingan natijalar O'zRFA U. Arifov nomidagi Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti bazaviy moliyalashtirish mablag'lari ko'magida bajarilgan.

ADABIYOTLAR:

1. J. Hou, O. Ingans, R. H. Friend and G. Feng, *Nature Mater.*, 2018, 17, 119–128.
2. H. Liang, Y. Wang, X. Guo, D. Yang, X. Xia, J. Wang, L. Zhang, Y. Shi, X. Lu.
3. W. Gao, F. Qi, Z. Peng, F. R. Lin, K. Jiang, C. Zhong, W. Kaminsky, Z. Guan, C.-S. Lee, T. J. Marks, H. Ade and A. K.-Y. Jen, *Adv. Mater.*, 2022, 34, 2202089.
4. D. Qian, Z. Zheng, H. Yao, W. Tress, T. R. Hopper, S. Chen, S. Li, J. Liu, S. Chen, J. Zhang, X. K. Liu, B. Gao, L. Ouyang, Y. Jin, G. Pozina, I. A. Buyanova, W. M. Chen, O. Inganas, V. Coropceanu, J. L. Bredas, H. Yan, J. Hou, F. Zhang, A. A. Bakulin and F. Gao, *Nat. Mater.*, 2018, 17, 703–709.
5. N. D. Eastham, J. L. Logsdon, E. F. Manley, T. J. Aldrich, M. J. Leonardi, G. Wang, N. E. Powers-Riggs, R. M. Young, L. X. Chen, M. R. Wasielewski, F. S. Melkonyan, R. P. H. Chang and T. J. Mark, *Adv. Mater.*, 2018, 30, 1704263.
6. S. Song, K. T. Lee, C. W. Koh, H. Shin, M. Gao, H. Y. Woo, D. Vak and J. Y. Kim, *Energy Environ. Sci.*, 2018, 11, 3248–3255.
7. T. Lu and F. Chen, *J. Comput. Chem.*, 2012, 33, 580–592.

8. T. Liu, L. Huo, S. Chandrabose, K. Chen, G. Han, F. Qi, X. Meng, D. Xie, W. Ma, Y. Yi, J. M. Hodgkiss, F. Liu, J. Wang, C. Yang and Y. Sun, *Adv. Mater.*, 2018, 30, 1707353.
9. M. Jiang, H. Bai, H. Zhi, L. Yan, H. Y. Woo, L. Tong, J. Wang, F. Zhang and Q. An, *Energy Environ. Sci.*, 2021, 14, 3945–3953.
10. J. Qin, Z. Chen, P. Bi, Y. Yang, J. Zhang, Z. Huang, Z. Wei, C. An, H. Yao, X. Hao, T. Zhang, Y. Cui, L. Hong, C. Liu, Y. Zu, C. He and J. Hou, *Energy Environ. Sci.*, 2021, 14, 5903–5910.
11. J. Ge, L. Hong, H. Ma, Q. Ye, Y. Chen, L. Xie, W. Song, D. Li, Z. Chen, K. Yu, J. Zhang, Z. Wei, F. Huang and Z. Ge, *Adv. Mater.*, 2022, 34, 2202752.
12. Y. Chang, X. Zhu, Y. Shi, Y. Liu, K. Meng, Y. Li, J. Xue, L. Zhu, J. Zhang, H. Zhou, W. Ma, Z. Wei and K. Lu, *Energy Environ. Sci.*, 2022, 15, 2937–2947.
13. D. Liu, J. Wang, C. Gu, Y. Li, X. Bao and R. Yang, *Adv. Mater.*, 2018, 30, 1705870.
14. Q. Wang, S. Lei, M. Luo, J. Liang, D. Zhou, L. Zhang and J. Chen, *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 2021, 13, 36080–36088.
15. H. Bin, J. Yao, Y. Yang, I. Angunawela, C. Sun, L. Gao, L. Ye, B. Qiu, L. Xue, C. Zhu, C. Yang, Z.-G. Zhi, H. Ade and Y. Li, *Adv. Mater.*, 2018, 30, 1706361.

SABZI SHARBATI, UNING MAHSULOTLARI VA IKKILAMCHI XOM ASHYOSIDAGI BO'YOQ PIGMENTLARINING SPEKTROSKOPIYASI

Tursunov Sardor Uyg'unovich,

Buxoro davlat texnika universiteti tayanch doktoranti

Annotatsiya. Jismoniy jarayonlarga asoslangan konsentrlangan sabzi sharbatini ishlab chiqarish texnologiyasi ishlab chiqilgan va qo'llanilgan. Jarayon rejimi xom ashyo tarkibidagi rang pigmentlari va biologik faol moddalarni maksimal darajada saqlash uchun mo'ljallangan. Spektroskopik tadqiqotlar sabzi sharbatidagi asosiy rang pigmentlari β -karotin, flavonoid hosilalari va antosiyaninlar ekanligini aniqladi. Eksperimental ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, mahsulotlar va yarim tayyor mahsulotlar uchun rangni saqlash juda muhimdir. $40\div 70^{\circ}\text{C}$ haroratning keng diapazonida $30\div 60$ minut davomida konsentrlangan sabzi sharbati rangining pasayishi molekulyar kislorodni azot (N_2) bilan tozalash va antioksidantlardan foydalanish orqali neytrallash bilan bog'liq.

Kalit so'zlar: yutilish spektri, reflektorlik, massa spektri, sabzi sharbati, tiniq sharbat, koagulyatsiyalangan oqsillar, karotinooidlar, fazali ajralishlar, antosiyaninlar va flavonlar.

СПЕКТРОСКОПИЯ КРАСЯЩИХ ПИГМЕНТОВ В МОРКОВНОМ СОКЕ, ЕГО ПРОДУКТАХ И ВТОРИЧНОМ СЫРЬЕ

Аннотация. Разработана и внедрена технология производства концентрированного морковного сока, основанная на физических процессах. Режим процесса рассчитан на максимальное сохранение цветových пигментов и биологически активных веществ, содержащихся в сырье. Спектроскопические исследования показали, что основными цветовыми пигментами морковного сока являются β -каротин, производные флавоноидов и антоцианы. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что сохранение цвета имеет большое значение для готовой продукции и полуфабрикатов. Снижение интенсивности окраски концентрированного морковного сока в широком диапазоне температур $40\text{--}70^{\circ}\text{C}$ в течение $30\text{--}60$ минут связано с нейтрализацией молекулярного кислорода путём продувки азотом (N_2) и использованием антиоксидантов.

Ключевые слова: спектр поглощения, отражательная способность, масс-спектр, морковный сок, осветлённый сок, коагулированные белки, каротиноиды, фазовые разделения, антоцианы и флавоны.

SPECTROSCOPY OF COLOR PIGMENTS IN CARROT JUICE, ITS PRODUCTS, AND SECONDARY RAW MATERIALS

Abstract. A technology for producing concentrated carrot juice based on physical processes has been developed and implemented. The process conditions are designed to ensure maximum preservation of color pigments and biologically active compounds present in the raw material. Spectroscopic studies have shown that the main color pigments in carrot juice are β -carotene, flavonoid derivatives, and anthocyanins. Experimental data indicate that color retention is of great importance for finished products and semi-finished products. The decrease in color intensity of concentrated carrot juice over a wide temperature range of $40\text{--}70^{\circ}\text{C}$ for $30\text{--}60$ minutes is associated with the neutralization of molecular oxygen by nitrogen (N_2) purging and the use of antioxidants.

Keywords: absorption spectrum, reflectance, mass spectrum, carrot juice, clarified juice, coagulated proteins, carotenoids, phase separations, anthocyanins, and flavones.

Kirish. Mualliflar fenolik guruhga mansub rangli pigmentlar bo'lgan antosiyaninlar va antosiyanidinlarga katta e'tibor berishgan. Antosiyanin pigmentlari an'anaviy ravishda tabiiy oziq-ovqat bo'yoqlari sifatida ishlatilgan. Bu pigmentlarning rangi va barqarorligi erituvchilarning pH, yorug'lik oqimi, harorat va pigmentlarning tuzilishiga bog'liq. Kislotali holatda antosiyaninlar qizil ko'rinadi, ammo erituvchining pH darajasi oshishi bilan ko'k rangga aylanadi. Xromatografiya asosan antosiyaninlarni olish, ajratish va miqdorini aniqlashda qo'llanilgan. Tabiiy rang beruvchilar sifatida antosiyanidinlar va antosiyaninlardan foydalanishga qo'shimcha ravishda, bu rangli pigmentlar salomatlikka turli xil foydali ta'sir ko'rsatadigan potentsial farmatsevtik ingredientlardir [1]. Ushbu ishda ko'rinadigan va yaqin infraqizil

(Vis - NIR) spektroskopiyasida qiyosiy tahlil va mashinani o'rganish algoritmlari yordamida namlik nisbatini bashorat qilish amalga oshirildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, yopiq soyali quritish kichik R qiymatiga ega (4,58). Quyosh bilan quritish (4.40) va mikroto'lqinli quritish (3.33) ishlatilgan. Mikroto'lqinli quritish texnikasi (10,67) qiymati bilan eng kam rang o'zgarishini berdi. Soyani quritish spektrlardagi eng past yorug'lik aks ettirilishiga olib keldi, bu esa quritish vaqtining oshishi bilan mahsulot rangining qorayishiga olib keldi. Eng yuqori R qiymatlari MLP va RF ga tegishli bo'lgan MR tomonidan bashorat qilingan, mos ravishda 0,9997 va 0,9968. O'rganilgan atributlarga kelsak, mikroto'lqinli pechda quritish meva bo'laklarini quritishning istiqbolli usuli hisoblanadi [2]. Mualliflar [3] meva sifatini baholash uchun Vis / NIR spektroskopik qurilmasidan foydalanganlar. Vis/NIR spektroskopik asboblari ma'lumotlarni olish va bir o'lchovli yoki ko'p o'lchovli ma'lumotlarni tahlil qilish uchun ishlatiladigan modellardan foydalanadi. Mashinani o'rganish meva sifatini sifatli va miqdoriy baholashga erishish uchun ma'lumotlarga asoslangan o'rganish va bashorat qilish uchun statistik algoritmlardan foydalanadi. Mualliflar [4] mevalarning sifatini namunalar yuzasida yo'q qilmasdan aniqladilar. Ushbu maqolada optik, akustik, elektromagnit va dielektrik xususiyatlarning printsiplari, qo'llanilishi, afzalliklari va kamchiliklari muhokama qilinadi. [5] da mualliflar ichki omillarni o'rganib chiqib, azotga asoslangan pigmentlar bo'lgan beta-aloinlarni o'rganishdi. Maqolada ichki omillar sifatida kimyoviy tuzilish, izomerizatsiya va pigmentatsiyaning roli ta'kidlangan. Karotenoidlarning barqarorligiga ta'sir qiluvchi mahsulotlardagi harorat va molekulyar kislorod va namlik darajasining rangi muhokama qilinadi. Mualliflar [6] oziq-ovqat ranglarini etiketlash oziq-ovqat mahsulotlarining asosiy ko'rsatkichi ekanligini ta'kidladilar. Mualliflarning ta'kidlashicha, zamonaviy texnologiyalar yuqori bosimli sharbatni qayta ishlash, impulsli elektr maydoni, ultratovush va sovuq plazmani o'z ichiga oladi, ular istiqbolli issiqlik bo'lmagan jarayonlar hisoblanadi. Ko'rib chiqilgan jarayonlar oziq-ovqat pigmentlarini saqlashni yaxshilash, shuningdek mahsulotlar uchun barqaror, barqaror va funktsional tizimlar bilan oziq-ovqat ranglarini olish. Mualliflar [7] asosiy bo'yoqlarni aniqladilar va ko'p o'zgaruvchan chiziqli bo'lmagan regressiya modelini (MNL) o'rgandilar. Quyidagi qiymatlar bo'lgan fikokeritrin, fikosiyenin, allokofosiyenin va xlorofilning tarkibini aniqlash: $1,499 \div 8,882 \text{ mg / g}$; $1,402 \div 7,634 \text{ mg/g}$; $0,315 \div 1,623 \text{ mg/g}$ va $0,340 \div 2,160 \text{ mg/g}$. Ushbu pigmentlarni aniqlashda nisbiy xatolar $10 \div 20\%$ oralig'ida ekanligi aniqlandi.

1. Eksperimental metodologiya va tadqiqot obyektlari.

Tadqiqot ob'ekti sifatida "Mirzoi Red 228" navli sabzi ishlatilgan. Quruq moddalar va rang beruvchi moddalar konsentratsiyasi mos ravishda refraktometrik va spektroskopik usullar yordamida aniqlandi. Mono- va disaxaridlar darajasi saxarometr (SU 35, Rossiya) yordamida, faol kislotalilik esa pH o'lchagich (Seven Compact S220, XL-25) yordamida o'lchandi. Tayyor mahsulotlarning zichligi ularning massasi va hajmini o'lchash yo'li bilan aniqlandi. Elektron yutilish spektrlari Specord 50 SA spektrofotometri yordamida o'lchandi. va EMC -30 PC - UV (Analytikjena, Germaniya) 190-1100 nm oralig'ida optik zichlikni o'lchash imkonini beradi. Mahsulotlarning aks ettirish qobiliyati spektrometrdan (SF-18) aniqlandi, massa spektrlari olindi (MAT-1 AQS).

Olingan bog'liqliklardan ($R = f(1)$) quyidagicha formula qilingan: sabzi sharbatining aks ettirish spektri flavonoidlar, karotinoidlar, antosiyaninlar va xlorofillar hosilalari bilan bog'liq $\lambda = 350\text{--}650 \text{ nm}$ to'lqin uzunligi diapazonida keng diapazonga ega.

Piyoz qobig'i ekstrakti antioksidant sifatida. Shu bilan birga, piyoz qobig'ining barglariga ma'noli o'rik daraxti karxlari qo'shildi

20 ml distillangan suv 2-3% M tarqalgan tuproq qobig'iga qo'shildi. Piyoz po'stlog'i barglarini ajratib olish jarayonida bir-biriga yopishib qolmasligi uchun qobig'i ishlatilgan. Bundan tashqari, qobig'i ekstraktining assimilyatsiya chizig'i piyoz qobig'i ekstraktining elektron spektriga yaxshi mos kelishi aniqlandi. Ekstraksiya jarayoni $35\text{--}40^{\circ}\text{S}$ haroratda magnit aralashtirgich yordamida amalga oshirildi. Sharbatdagi bu stabilizatorlar ham yarim tayyor mahsulot, ham sharbatning o'zi sifatini yaxshilaydi. Sabzi sharbatiga stabilizatorlar qo'shilishi uning rangini 16% va 21% ga oshiradi. Mualliflar antioksidant sifatida riboflavinning suvli eritmasidan ham foydalanganlar.

2. Konsentrlangan sharbat olish texnologiyasi.

Ishlarda [8] Sharbatni 70°S haroratgacha qizdirish sharbatning o'rganilayotgan hajmida fazalarni ajratish jarayoniga yordam berishi ta'kidlandi. Tajribani o'tkazish uchun texnologik rejim yaratildi va konsentratsiyasi $45 \div 50\%$ M bo'lgan 1 litr hajmdagi sharbat olindi va o'rnatishning ichki tsilindriga quyildi (1-rasm). Shu bilan birga, sharbat hajmi 25 soat davomida saqlanganligi sababli, uning rangi 88% ga kamayadi, bu sabzi sharbatining R aks ettirish spektrlaridan aniqlanadi (1-jadval). Olingan sharbatda rang beruvchi pigmentlarni yo'q qilish ulushini kamaytirish uchun biz $C = 2 * 10^{-4}$ konsentratsiyasi bo'lgan riboflavinning suvli eritmasi ko'rinishidagi sharbat stabilizatoridan foydalandik. mol, natijalari 1-jadvalda keltirilgan.

Saqlash vaqtiga va suvli riboflavin eritmasining qo‘shilgan massasiga qarab to‘lqin uzunligi $\lambda = 480 \text{ nm}$ bo‘lgan yarim tayyor sabzi mahsulotining aks ettirish qobiliyati (R) %

Saqlash vaqti	R	R qo‘shish bilan. 2% riboflavin	R c qo‘shing. 5% riboflavin	R c qo‘shing. 10% riboflavin
Yangi yarim tayyor mahsulot	1.7	1.7	1.7	1.7
1 soat	1.6	1.65	1.68	1.68
soat 5	1.3	1.52	1.65	1.66
soat 10	0,9	1.45	1.62	1.65
15:00	0,6	1.36	1.60	1.63
20:00	0.3	1.22	1.58	1.60
25 soat	0,15	1.03	1.55	1.58

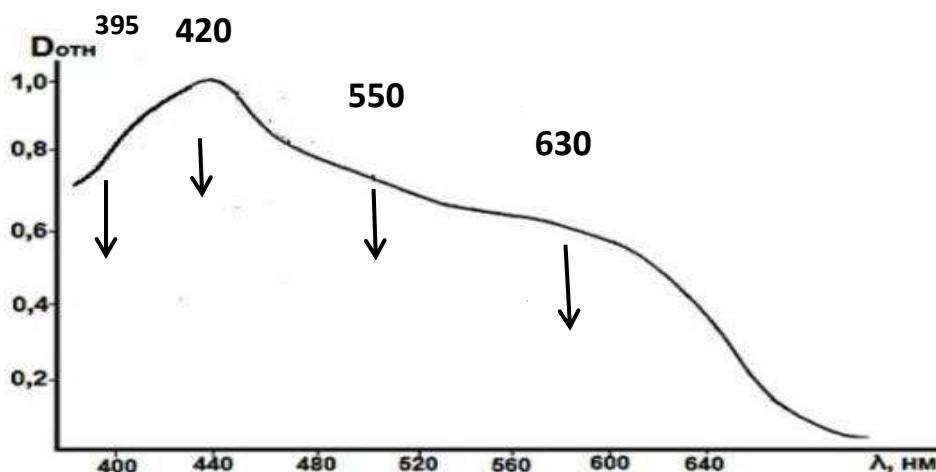
Saqlash vaqtiga va qo‘shilgan piyoz qobig‘i ekstraktiga qarab $\lambda = 480 \text{ nm}$ to‘lqin uzunligidagi yarim tayyor sabzi mahsulotining aks ettirish qobiliyati (R).

Saqlash vaqti	R	R qo‘shish bilan. 2% piyoz qobig‘i	R c qo‘shing. 5% piyoz qobig‘i	R c qo‘shing. 10% piyoz qobig‘i
Yangi yarim tayyor mahsulot	1.3	1.3	1.3	1.3
1 soat	1.1	1.15	1.25	1.27
soat 5	0,8	0,90	1.1	1.20
soat 10	0,65	0,73	0,85	1.10
15:00	0,40	0,65	0,73	1.1
20:00	0,20	0,50	0,62	0,95
25 soat	0,10	0,35	0,52	0,90
rangning% yomonlashishi	90	63	40	29

3. Sabzi sharbatining asosiy rang beruvchi pigmentlari va uning ikkilamchi xom ashyolari.

Konsentrlangan va chang bo‘yoqning asosiy rang beruvchi pigmentlarini aniqlash uchun sabzi sharbati tarkibining tegishli qiymatlari ishlatilgan. 100 gramm sabzi sharbati tarkibida: uglevodlar 12,5 g, yog‘lar 0,1 g, oqsillar 1,12 g, xun tolasi 1 g, suv 85 g. Shuningdek, sharbat tarkibida A, C, E, PP vitaminlari va mikroelementlar, Fe, K va Mg kraxmal, karotenoidlar, organik kislotalar mavjud. Sharbat antioksidant xususiyatlarga ega [9]. Konsentrlangan rang beruvchi pigment faqat sharbatning suvda erimaydigan komponentlarini o‘z ichiga olishi mumkin. Bu tarkibiy qismlarga quyidagilar kiradi: oqsillar, xun tolasi, yog‘lar, suvda erimaydigan karotenoidlar (a, b, g, e) va ba’zi vitaminlar. Ushbu komponentlar texnologik jarayon davomida cho‘kadi va konsentrlangan rang beruvchi pigment hosil qiladi. Ro‘yxatga olingan komponentlardan karotenoidlar bo‘yoqning asosiy rang beruvchi pigmentlari bo‘lishi mumkin. Karotenoidlarni cho‘ktirish jarayonida ular oqsillarga yoki o‘z-o‘zidan agregatsiyalangan molekullarga birlashtirilishi mumkin [10]. Bog‘langan qismlarda suvda erimaydigan vitaminlar va mikroelementlar ham bo‘lishi mumkin.

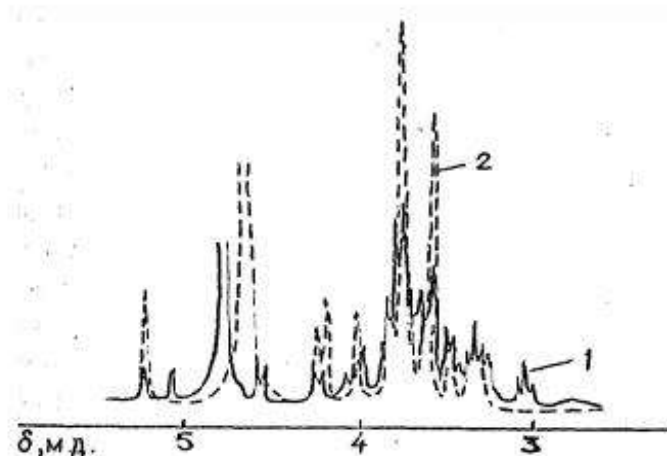
Keyinchalik, biz konsentrlangan oziq-ovqat bo‘yog‘ini uning yutilish spektrlarini qayd etish orqali spektral o‘rganishni amalga oshirdik (5-rasm, egri 1). 5-rasmdan ko‘rinib turibdiki, etil spirtida olingan bo‘yoqning yutilish spektrlari $400 \div 720 \text{ nm}$ oralig‘ida keng diapazonga ega. Ushbu keng diapazon fonida quyidagi qiymatlarga mos keladigan maksimumlar ko‘rinadi $\lambda_{\text{max}} = 435, 615 \text{ nm}$. Keng chiziqning qisqa to‘lqinli qismlari suvda erimaydigan karotenoidlarga (a, b, g, e) tegishli bo‘lishi mumkin. Bu karotenoidlarning yutilish zonasi maksimumlari: b-karotin $\lambda_{\text{max}} = 425, 450, 476 \text{ nm}$; a-karotin $\lambda_{\text{max}} = 420, 442, 472 \text{ nm}$; g-karotin $\lambda_{\text{max}} = 431, 462, 494 \text{ nm}$; e-karotin $\lambda_{\text{max}} = 414, 439, 470 \text{ nm}$; lekopen $\lambda_{\text{max}} = 418, 471, 501 \text{ nm}$. Ushbu bantlarning umumiy qiymatlari, ko‘rinishidan, bo‘yoqning keng bandining qisqa to‘lqinli qismiga to‘g‘ri keladi. Ushbu bandning uzun to‘lqinli qismi, aftidan, karotenoidlarning intensiv fotosintez mahsuloti bo‘lgan xlorofill a va b ga tegishli [11]. Bizning fikrimizning to‘g‘riligi olingan bo‘yoqni xromatografik ajratish bo‘yicha tadqiqotlar natijalari bilan tasdiqlanadi. Oziq-ovqat pigmentlarini ajratish Sefocdax G-25 va alyuminiy oksidi bo‘lgan sorbentlar yordamida ustunli xromatografiyada amalga oshirildi. Erituvchi sifatida benzol va etanol ishlatilgan. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, ustunda uchta mobil zona paydo bo‘ladi. Bunday holda, komponentlardan biri ustundagi pigmentlarning umumiy tarkibining $\approx 90\%$ ni tashkil qiladi.



1- rasm. Sabzi sharbatining yutilish spektrlari

Yupqa qatlamli xromatografik ajratishdan foydalanib, biz tozalangan rang beruvchi pigmentni oldik (1-rasm). 1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, sharbatning yutilish zonasi 390–680 nm to‘lqin uzunligi oralig‘ida yotadi.

Preparatning kuchi tozalangan pigmentning NMR spektrlarini qayd etish orqali ko‘rsatildi (2- rasm). 2-rasmdan ko‘rinib turibdiki, sabzi bo‘yog‘ining asosiy rang beruvchi pigmenti b-karotin bilan bog‘liq bo‘lgan 3-5 s, ppm oralig‘ida NMR tasmalariga ega.



2- rasm. D₂O dagi sabzi sharbati va saxaroza (2) ning NMR spektri

Kukunli va konsentrlangan sabzi bo‘yog‘ini ishlab chiqarish jarayonida pomaza va tiniq sharbat ko‘rinishidagi ikkilamchi xom ashyo ham olinadi. Texnologiyaning iqtisodiy va atrof-muhitga ta‘sirini oshirish uchun ikkilamchi xom ashyoni keyingi qayta ishlash usulini ishlab chiqish rejalashtirilgan edi.

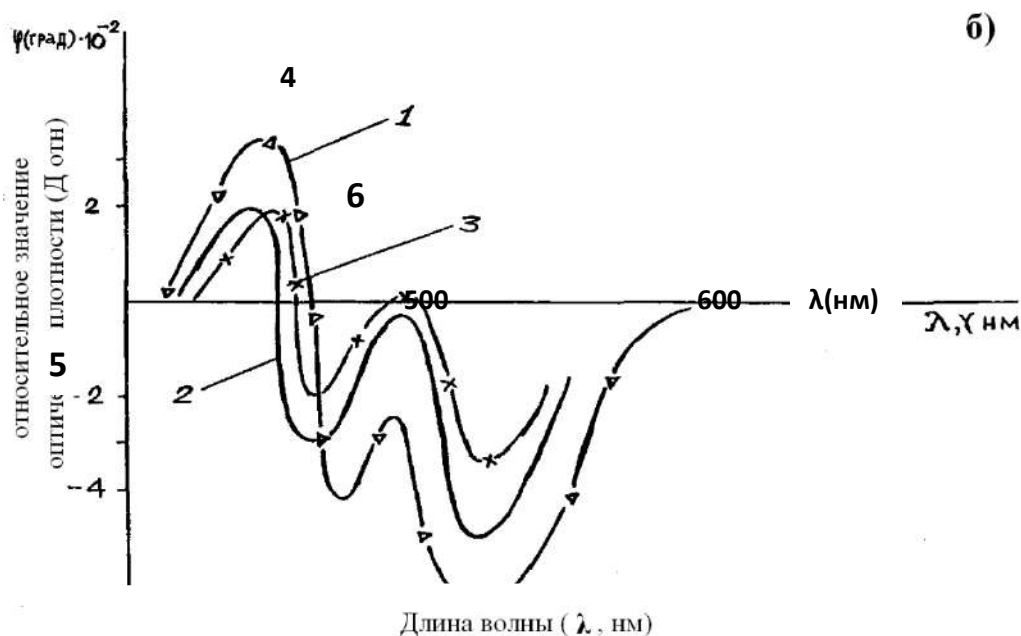
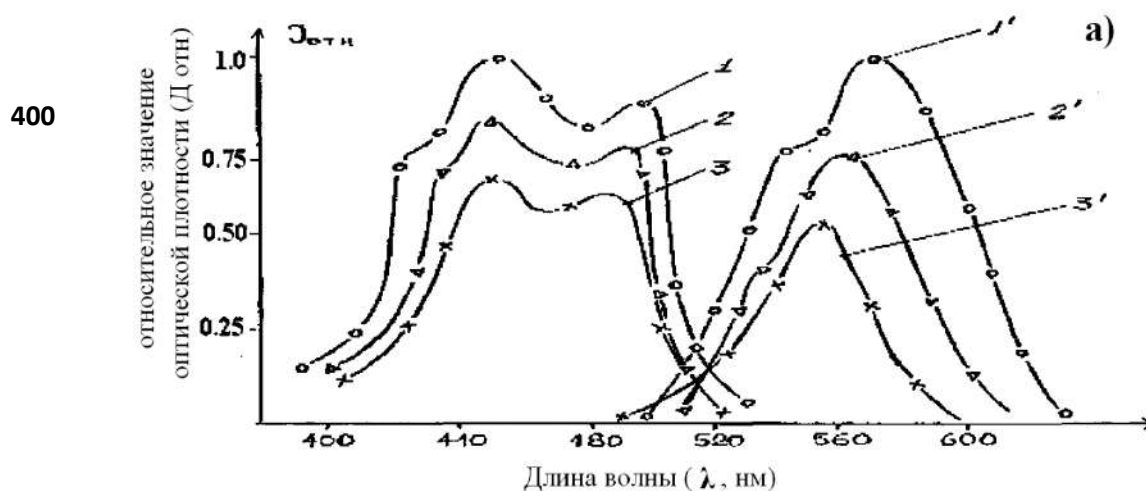
Birinchidan, biz yarim tayyor mahsulotlarning tarkibini baholadik. Pomace vitamin va mikroelementlarning butun arsenalini, shuningdek, tolalar, xun tolasi va boshqa biologik faol moddalarni qisman saqlab qolishi mumkin. Pomazani qayta ishlash texnologiyasi 5% piyoz qobig‘i ekstrakti qo‘shib ikkilamchi xom ashyoni barqarorlashtirishdan iborat edi. Olingan aralash nozik qatlamlarda (2-4 mm) tovoqlar ichiga yuklangan va 45-50 ° haroratda quyosh quritgichida quritilgan. Yarim tayyor mahsulotni quritish butun massani 15-20 daqiqa davomida aralashtirish orqali amalga oshirildi. Natijada quruq moddalar konsentratsiyasi 90% bo‘lgan tayyor mahsulot paydo bo‘ldi. Sabzi unini olish uchun quritilgan mahsulot tegirmonda maydalangan (2-rasm). Tayyor mahsulot 1 kg og‘irlikdagi qog‘oz qoplarga qadoqlangan.

Shaffof sharbat tarkibida sabzi sharbatining suvda eriydigan komponentlari bo‘lishi mumkin. Bularga uglevodlar, organik kislotalar, vitaminlar va boshqa biologik faol moddalar kiradi. Ikkilamchi xom ashyoga 2% og‘irlikda piyoz qobig‘i ekstrakti qo‘shildi. Aralash bir litrli bankalarga quyiladi va infraqizil gausting yordamida sterilizatsiya qilinadi. Ikkala tayyor mahsulot ham qandolat va non mahsulotlari uchun oziq-ovqat sanoatida foydalanish uchun javob beradi.

Shuni ta‘kidlash kerakki, karotenoidlar luminesans ko‘rsatadi. Shaki 5a da to‘lqin uzunliklari mos ravishda 560 , 570 va 545 nm bo‘lgan a, b va g karotenoidlarning luminesans spektri ko‘rsatilgan λ_{max}^f . Bu

Iyuminensans spektri, xuddi shu birikmalarning yutilish spektrlari kabi, tebranish tuzilishiga ega ekanligini ko'rsatadi.

Barcha uch izomer xona haroratida past floresan kvant rentabelligiga ega ekanligi aniqlandi ($B = 10^{-4} - 10^{-3}$ birlik). Eritma haroratini pasaytirish floresan rentabelligida sezilarli o'zgarishlarga olib kelmaydi. Masalan, karotinoidlarning b-izomeri uchun suyuq azot haroratida flüoresans kvant unumi $B = 2 \cdot 10^{-3}$ birlikka teng. Shuni ta'kidlash kerakki, karotinoidlarning yutilish va floresans spektrlarida oyna simmetriyasi mavjud emas.



Sabzi sharbatidan ajratilgan karotinoidlarning yutilish spektrlari (1-3), iyuminestsensiya (1-3') (a) va chiziqli dikroizmi (4-6) (b).

Karotinoidlarning chiziqli va aylana dikroizm spektrlari o'rganildi. Optik faollikning dispersiya qiymatlari $5 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$ va 10^{-4} ekanligi aniqlandi. deg, burchak shkalasida. Karotinoid hosilasi eritmalarining optik faolligi gidrodinamik oqimda sezilarli darajada oshishi aniqlandi. 3b-rasmda (1-2, 3-egri chiziqlar) preparatlarning spektral yutilish hududida karotenoid spirtli eritmalarining optik aylanish dispersiyalari ko'rsatilgan. 3b-rasmdan ko'rinib turibdiki, barcha karotinoid izomerlari uchta bir xil ekstremaga ega. Shu bilan birga, maksimumlarga mos keladigan bantlar b-izomeriga nisbatan a- va g-karotenoidlar uchun mos ravishda 5 va 10 nm qisqa to'lqin uzunlikdagi siljishlarga ega.

Karotinoidning b-izomeri uchun optik aylanish dispersiyasi spektrlaridagi maksimumlar λ_{max}^a 428, 450 va 484 nm to'lqin uzunligi oralig'ida joylashgan (3b-rasm, 1-egri chiziq). 450 nm to'lqin uzunligidagi optik aylanish dispersiya spektrlaridagi ijobiy maksimal $3 \cdot 10^{-2}$ qiymatiga ega va 484 va 428 nm to'lqin

uzunliklarida manfiy maksimalar mos ravishda $5 \cdot 10^{-2}$, $3 \cdot 10^{-2}$ ga teng. burchak shkalasi bo'yicha *darajalar*. Shuni ta'kidlash kerakki, a va g-karotinoidlar uchun optik aylanish intensivligi b-izomerga nisbatan kamroq (3-b-rasm, egri chiziqlar 2.3), bu b-izomer molekulasi tuzilishi bilan bog'liq [12].

Xulosa. Iqtisodiy va ekologik muammolarni hal qiluvchi resursni tejaydigan sabzi qayta ishlash texnologiyasi ishlab chiqildi. Ushbu texnologiya konsentrlangan va kukunli tabiiy bo'yoq, shuningdek, qayta ishlangan xom ashyoni beradi. Qayta ishlangan xom ashyoni keyingi qayta ishlash natijasida biologik faol moddalarga boy sabzi uni va tiniq sharbat ko'rinishidagi tayyor oziq-ovqat mahsuloti olinadi. Ishlab chiqilgan texnologiya joriy fazoda fazalarni ajratish bilan bog'liq jismoniy jarayonga asoslangan. Fazalarni ajratishning paydo bo'lishi uchun shartlar aniqlangan. $V_0 = f(t)$ diagrammasi V_0 qiymatlari t ushlab turish vaqtiga to'g'ridan-to'g'ri proporsional va sharbat haroratining o'zgarishiga teskari proporsional ekanligini ko'rsatadi. Spektroskopik tadqiqotlar sabzi bo'yog'ining asosiy rang beruvchi pigmenti b-karotin ekanligini aniqladi. Bo'yoq komponentlarini xromatografik aniqlash farmatsevtika sanoatida qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Kho, H. E.; Azlan, A.; Tang, S. M.; Lim, S. M. Antosiyanidinlar va antosiyaninlar: rangli pigmentlar oziq-ovqat, farmatsevtik ingredientlar va sog'liq uchun potentsial foydalar. *Oziq-ovqat Nutr. Res.* 2017, 61 (1), 1361779. DOI: 10.1080/16546628.2017.1361779
2. Seda Gunaydin, Necati Chetin, Jevdet Sağlam, Komil Sachilik, Ahmad Jahonbaxshi. Ko'rinadigan va yaqin infraqizil (Vis-NIR) spektroskopiyasining qiyosiy tahlili va turli sharoitlarda quritilgan jujube uchun mashina o'rganish algoritmlari yordamida namlik nisbatini bashorat qilish. *Amaliy oziq-ovqat tadqiqotlari*. 5-jild, 1-son, 2025 yil iyun, 100699. <https://doi.org/10.1016/j.afres.2025.100699>
3. Tao Jiang, Jianjun Ding, Yuhang Du, Shaofeng Yuan, Hang Yu, Weirong Yao. Meva sifatini baholash uchun chuqur o'rganishga asoslangan Vis / NIR spektroskopik qurilmalari: keng qamrovli sharh. *Oziq-ovqat fanlari va texnologiyasidagi tendentsiyalar*. 164-jild, 2025 yil oktyabr, 105262. <https://doi.org/10.1016/j.tifs.2025.105262>
4. Jingyi Liu, Jun Sun, Yasong Vang, Xin Liu, Yingjie Zhang, Xayjun Fu. Meva sifatini buzilmaydigan aniqlash: texnologiyalar, ilovalar va istiqbollari. *Oziq-ovqatlar*. 2025 yil 19-iyun;14(12):2137. doi: 10.3390/foods14122137.
5. Tharuka Wijesekara, Baojun Xu. Tabiiy oziq-ovqat pigmentlarining barqarorligi va stabilizatsiya usullari bo'yicha tanqidiy sharh. *Oziq-ovqat tadqiqotlari xalqaro*. 179-jild, 2024 yil mart, 114011. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2024.114011>
6. Divya. Shruti Joshi, Jayadeep Appukuttan, Jayani Chandrapala, Mahsa Majzoobi. An'anaviy va ilg'or texnikaning tabiiy oziq-ovqat bo'yoqlarining barqarorligiga ta'siri. *Oziq-ovqatlar* 2025, 14(18), 3187; <https://doi.org/10.3390/foods14183187>
7. Xiaochen Chen, Xiaochen Chen, Biyun Yang, Biyun Yang, Xiping Du, Xiping Du, Qingyan Li, Qingyan Li, Zhipeng Li, Zhipeng Li, Yuanfan Yang, Yuanfan Yang, Zedong Jiang, Zedong Jiang, Yanbing Chju, Yanbing Chju, Xui Niya, Xui Niya, Xui Xiong Nia. Porphyrin fotosintetik pigmentlarini kolorimetrik parametrlarga asoslangan tezkor bashorat qilish. *Old. Barqarorlik. Oziq-ovqat tizimi*, 2025 yil 18 fevral. *Sek. Barqaror oziq-ovqat mahsulotlarini qayta ishlash jild 9 - 2025* | <https://doi.org/10.3389/fsufs.2025.1553250>.
8. S.X.Astanov, G.K.Qosimova. Anizotrop molekularning fotonikasini o'rganish uchun optik kyuvetalar va tizimlar. 2019 International Book Market Service Ltd., OmniScriptum Publishing Group nashriyoti. ISBN: 978-620-0-47852-8.
9. www.cum.ru.
10. G.K.Qosimova, S.Astanov, E.N.Kurtaliev, N.Nizomov. Eritmalarda o'z-o'zidan yig'ilgan riboflavin molekularining tuzilishi. //Molekulyar tuzilish jurnali 2019. V.1185. B.107–111.
11. S.X.Astanov, G.K.Qosimova, M.Z.Sharipov. O'z-o'zidan yig'ilgan molekularning fotonikasini o'rganishda qutblanish spektrlarini qo'llashning nazariy va eksperimental jihatlari. - Monografiya. Toshkent: Muxarrir, 2019. – 170 b.
12. V.X. Ibragimov, D.I. Aliev, I.N. Alieva. Polien antibiotiklarini dimetil sulfoksid bilan birgalikda qo'llashning biofizik va tibbiy-biologik jihatlari. *Biofizika*. 2001 yil, 47-v., 833-841-betlar.

СПЕКТРОСКОПИЯ КАРОТИНОИДОВ, ВХОДЯЩИХ В СОСТАВ АБРИКОСОВЫХ ПОРОШКОВ, ОБРАЗУЮЩИХ КОМПЛЕКСЫ С МОЛЕКУЛЯРНЫМ КИСЛОРОДОМ

Астанов Солих Хусенович,
профессор Бухарского государственного
технического университета, Бухара, Узбекистан
Турсунов Сардор Уйгунович,
базовый докторант Бухарского государственного
технического университета, Бухара, Узбекистан
Касимова Гузал Каримовна,
доцент Бухарского государственного
технического университета, Бухара, Узбекистан
s.h.ostonov@rambler.ru

Аннотация. Спектральные и квантово-химические расчёты показали, что основные пигменты абрикосового порошка содержат, помимо каротиноидов, производные кверцетина и цианидина. Установлено, что спектр поглощения абрикосового сока и порошка остаётся неизменным при хранении менее часа, что необходимо для основного технологического процесса. Однако для хранения в течение всего технологического цикла (9 часов) и переработки сырья необходимо нейтрализовать молекулярный кислород, присутствующий в объёме абрикосового сока и порошка.

Ключевые слова: цвет, спектр поглощения, индивидуальные линии, порошок, флавоны, антоцианы, кристаллизация.

MOLEKULYAR KISLOROD BILAN KOMPLEKSLAR HOSIL QILUVCHI O'RIK KUKUNLARI TARKIBIGA KIRUVCHI KAROTENOIDLARNING SPEKTROSKOPIYASI

Аннотация. Спектральный и квантовый химический расчёт показал, что основные пигменты абрикосового порошка содержат, помимо каротиноидов, производные кверцетина и цианидина. Установлено, что спектр поглощения абрикосового сока и порошка остаётся неизменным при хранении менее часа, что необходимо для основного технологического процесса. Однако для хранения в течение всего технологического цикла (9 часов) и переработки сырья необходимо нейтрализовать молекулярный кислород, присутствующий в объёме абрикосового сока и порошка.

Ключевые слова: цвет, спектр поглощения, индивидуальные линии, порошок, флавоны, антоцианы, кристаллизация.

SPECTROSCOPY OF CAROTENOIDS IN APRICOT POWDERS THAT FORM COMPLEXES WITH MOLECULAR OXYGEN

Abstract. Spectral and quantum chemical calculations revealed that the main pigments of apricot powder contain, in addition to carotenoids, quercetin and cyanidin derivatives. It was established that the absorption spectrum of apricot juice and powder remains unchanged when stored for less than one hour, which is necessary for the main technological process. However, for storage and processing of raw materials during the entire technological cycle (9 hours), it is necessary to neutralize the molecular oxygen present in the volume of apricot juice and powder.

Keywords: color, absorption spectrum, individual lines, powder, flavone, anthocyanin, crystallization.

Введение. Самосборка является процессом, в котором принимают участие только компоненты конечной структуры [1,2]. Основным условием самосборки наночастиц является образование высокомолекулярного локального объёма [3]. Одним из методов образования локального объёма с высокими концентрациями осуществляется тепловым выпариванием растворителя с капли раствора растворённого исследуемого соединения. Авторами [4,5] получены кольцевые структуры наночастиц на поверхности стеклянной подложки. Самосборка молекул также может осуществляться в концентрированных растворах и бинарных смесях растворителей. Выбор методики получения самособранных молекул является одним из актуальных вопросов данного направления. Процесс возникновения самоагрегатов

сопровождается существенной деформацией электронных спектров в виде гипохромного эффекта [1-4].

Объекты и методы исследования.

В работе использованы порошки флавонов кверцетин, мерицетин, рутин марки «ЧДА». Электронные спектры поглощения измерялись на спектрофотометре ЕМС-30РС-UV, позволяющем проводить измерения значений оптической плотности с точностью 0,3% и высоким разрешением в диапазоне 190-1100нм. Измерение спектров флуоресценции и возбуждения люминесценции проводилось на установке, собранной на базе двух монохроматоров типа МДР-76 с фотоэлектронной регистрацией. Для удобства сравнения спектров поглощения и флуоресценции, они нормированны к единице. Дисперсию оптического вращения и спектры линейного дихроизма снимали на круговом дихрографе Jasko-20, с использованием оптической приставки двойного параллелепипеда Френеля, рассчитанной для видимой и УФ части спектральной области.

В качестве растворителей были использованы: бидистиллированная вода, этиловый спирт, ацетон, хлороформ, очищенный согласно методике [6].

Определение кверцетина, мерицетина, рутина и цианидина в качестве красящих веществ абрикосовых порошков. Спектр поглощения абрикосового сока, приведенный на рис.1, состоит из широкой полосы, где явно выделяющиеся максимумы имеют следующие длины волн: 260; 290; 320; 340 нм, которые отмечены стрелками (рис.1). Предполагается, что отмеченные максимумы полос поглощения могут быть сильно перекрывающимися между собой, а также не иметь четких форм спектров. Для получения сведений о формах спектров адсорбции красящих пигментов сока использованы литературные данные о цветности абрикоса. Авторами [7-9] показано, что внешняя окраска этих плодов связана присутствием в их составах флавонов и антоцианов. Формы электронных полос флавонов и антоцианов были определены на основе литературных данных. При этом получены сведения о формах спектров поглощения молекулярных полос, которые были взаимосвязаны (рисунок 1, кривая 2). Из кривой 2 рисунка 1, следует, что формы объединённых полос спектров поглощения построены с учётом максимумов в данных спектрах абрикосового порошка (рисунок1). Спектры поглощения имеют сильно перекрывающийся характер (рисунок 1, кривая 2). В целях определения индивидуальных полос, составляющих сильно перекрывающиеся спектры поглощения, показанные на рисунке 2 в качестве сплошной линии, расчёт индивидуальных полос производился методом Аленцева-Фока [9-12].

Для разделения перекрывающихся полос спектров поглощения абрикосового сока были приведены шкалы частот (рисунок 1, кривая 2). Нами были проанализированы литературные данные о формах спектров поглощения пищевых красителей растительного происхождения, в которых содержатся каротиноиды, флавоны, антоцианы и их производные, а также ряд реодахлоринов [13-16]. В случае отсутствия спектров поглощения красящих пигментов нами использованы спектры возбуждения люминесценции [18] для разрешения спектров поглощения растительных молекул. Полученные результаты расчёта индивидуальных полос абрикосового сока показаны на рисунке 1, и они отмечены пунктирными линиями. Из рисунка 2 видно, что индивидуальные полосы в виде кривых 3-10 имеют колоколообразные формы, которые подтверждаются соответствующими решениями уравнения, модифицированного метода Аленцева-Фока, на основе которого были построены функции Гаусса.

Значение полуширины σ - индивидуальных полос определены методом, разработанным авторами, который использовался в целях определения значения σ для дискретных полос поглощения ассоциатов витамина В₂ [19]. На рисунке 2 кривая 2 имеет форму спектра поглощения красящих пигментов, состоящих из молекул флавона и антоциана, отмеченных сплошной линией.

Индивидуальные полосы являются результатом теоретического расчёта модифицированного метода Аленцева-Фока. На основании этих данных представлены индивидуальные полосы, разделённые на 3 группы. К первой группе отнесены индивидуальные полосы с максимумами, совпадающие с флавоном, находящейся в интервале $22,3 - 40 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. Вторая и третья группы имеют

индивидуальные полосы, находящиеся в интервалах $18,5 - 25 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ и $16,3 - 21,2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, относящиеся

к антоцианам соответственно. Полученные теоретические расчёты положения максимумов и величины полуширины индивидуальных полос, сопоставленные с экспериментальными данными.

Из анализа литературных данных следует, что наблюдаемые максимумы поглощения могут быть отнесены к красящим пигментам растительного происхождения: флавонам, каротиноидам и

антоцианам. Следует отметить, что флавоны широко распространены в плодах с жёлтыми красящими веществами, в том числе и в плодах абрикоса [8]. Антоцианы имеют красный цвет с различными оттенками и интенсивностями. Этим параметрам соответствует цвет абрикоса, обладающий жёлто-оранжевым цветом с красным оттенком. При этом использован его спектр поглощения и рассчитанные индивидуальные полосы флавонов и антоцианов в виде их молекулярных красящих пигментов (рисунок 1, кривая 1).

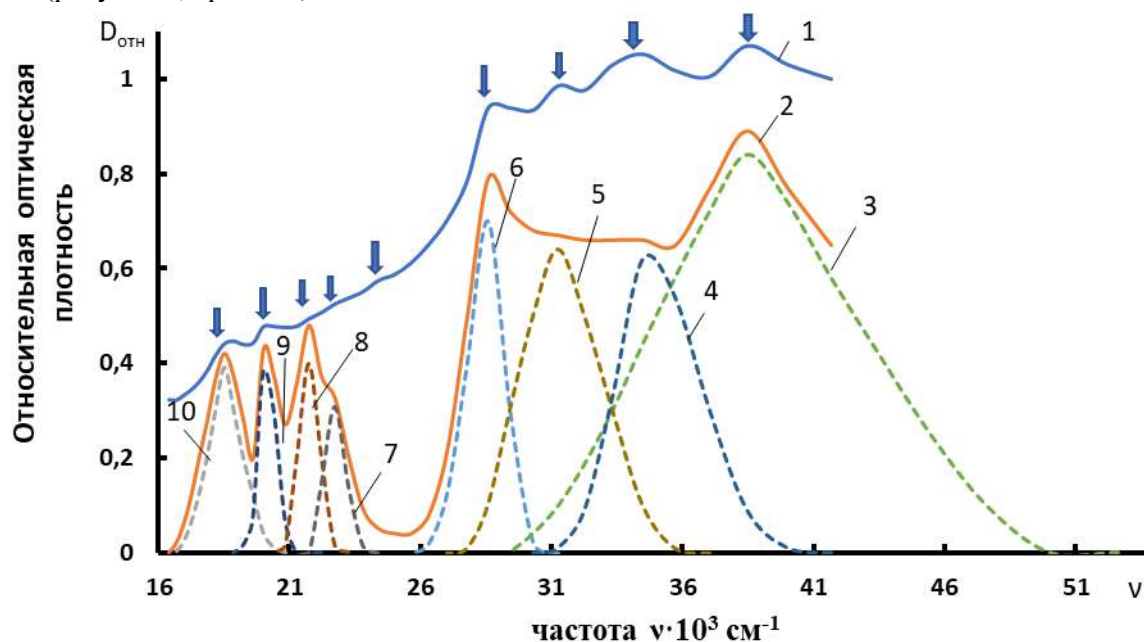


Рисунок 1. Спектр поглощения свежего отжатого сока (1). Объединённая полоса красящих пигментов абрикосового сока, полученная из литературных данных [7,8] (2). Их индивидуальные компоненты (3-11)

Из рисунка 2 следует, что расчётные абсорбционные способности сока можно представить в виде трёх групп молекулярных спектров. Первая из этих групп полос поглощения относится к красящим пигментам с молекулярной структурой флавонов и их производными [13-14]. Из рисунка 2А, кривой 1 видно, что выделенная полоса поглощения находится в интервале частот $28500 \div 38400 \text{ см}^{-1}$ и состоит из четырёх индивидуальных полос. Экспериментальные параметры индивидуальных полос, длины волн максимумов (λ_{max}) и полуширины β -полос приведены на рисунке 2 в интервале частот $18870 \div 25000 \text{ см}^{-1}$ относятся к производным флавонов и антоцианов.

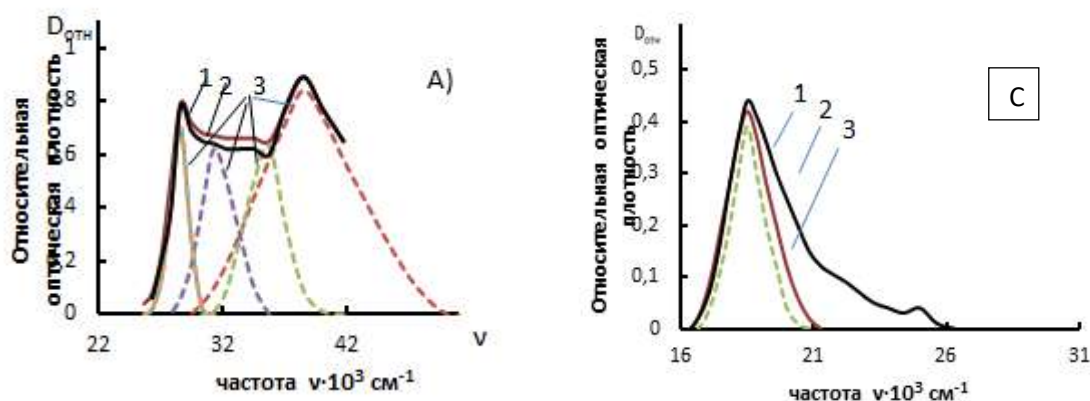


Рисунок 2. А, С Расчётные адсорбционные способности красящих пигментов абрикосового сока (1), их индивидуальные полосы (3), а также его экспериментальные спектры поглощения(2), относящиеся к первым (А) и третьим(С) группам соответственно

Растворы, подвергающиеся колончатой хроматографии, далее подвергались тонкослойной хроматографии. Для продуктов тонкослойной хроматографии получены их абсорбционные способности (рисунок 2). В целях определения молекулярной структуры флавонов в составе абрикосового сока анализированы литературные данные спектров производных флавонов. В

результате чего установлено, что красящие пигменты в первом объёме скользящей зоны колонки удовлетворительны. Однако теоретические максимумы полос $\lambda_{\max}=458$ и 495 нм отличаются от экспериментальных на 2 и 5 нм соответственно. Наблюдаемые отличия, возможно, связаны с проявлением межмолекулярных взаимодействий в составе абрикосового сока.

К третьей группе расчётных полос поглощения относятся спектры, находящиеся в интервале частот $\nu=16390\div 20410$ см⁻¹ (рисунок 2, кривая 9). Данная полоса поглощения относится к красящим пигментам производных антоцианов. Группа антоцианов содержит молекулярные полосы пелорганидина, цианидина, дельфинидина и мальвидина [9]. Авторами [16,317] установлено, что цианидин в этаноле имеет полосы поглощательных способностей с максимальными длинами волн $\lambda_{\max}=360$ нм и 540 нм. При этом экспериментальные спектры поглощения цианидина обладают двумя полосами с максимумами частот $\nu=16390$ и 20408 см⁻¹ соответственно. Эти экспериментальные результаты были сопоставлены с расчётными данными адсорбционных способностей цианидина (рисунок 2,С). Результаты, сопоставленные с расчётными полосами, удовлетворительно совпадают с экспериментальными спектрами поглощения цианидина (рисунок 2,С). На основе полученных данных установлено, что одним из красящих пигментов абрикосового сока является цианидин, входящий в группу антоцианов.

Выводы.

-Определено, что цветность абрикосового сока зависит от времени его хранения при атмосферном давлении и температуры. Установлено, что спектр поглощения (цветность) абрикосового сока практически остаётся неизменным при хранении его менее часа и при хранении во времени, необходимого для проведения технологических процессов для переработки сока (девять часов), в случае удаления молекулярного кислорода, растворимого в соковом объёме.

-Теоретические расчёты с использованием модифицированного метода Аленцева-Фока для решения функции Гаусса позволили определить индивидуальные полосы поглощения красящих пигментов, на основе которых определены нативность их молекулярных структур, ответственные за цветность (абрикосового сока).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Платон. *Избранные диалоги*. - М.: АСТ, 2006. - 512 с.
2. Лебедев-Степанов П.В., Кадушников Р.М., Молчанов, Рубин Н.И., Штуркин Н.А., Алфимов М.В.// *Российские нанотехнологии*. 2011. №1-2. сс. 83.
3. П.В. Лебедев-Степанов, Р.М. Кадушников, С.П. Молчанов и др. *Самосборка наночастиц в микрообъеме коллоидного раствора: физика, моделирование, эксперимент* // *Российские нанотехнологии*. - 2013. - Т. 8, № 3—4. - С. 5-23.
4. А.М.Каххаров, С.А.Бахрамов, У.К.Махманов, О.Б.Исмаилова, Ш.П.Гафуров, М.У.Коххарова. «Исследование процесса самосборки молекул фуллерена С₆₀ в бинарной смеси ЭТАНОЛ+БЕНЗОЛ». *Международная конференция, Самарканд, 22-24 сентября 2016г. С58.*
5. У.К.Махманов, О.Б.Исмаилова, А.М.Каххаров, С.А.Бахрамов, Ш.П.Гафуров, М.У.Коххарова. «Самоорганизация молекул фуллерена С₆₀ в бинарной смеси ЭТАНОЛ+БЕНЗОЛ». *Международная конференция, Самарканд, 22-24 сентября 2016г. С59.*
6. А.Гордон, Р.Форд *Спутник химике М.Мур* 1976. 54с
7. Musa H.H., Shahrajabian M.H. "Traditional herbal medicine: overview of research indexed in the Scopus database". *Advances in Traditional Medicine* (2022)
8. Kumar S., Sharma A., Gupta R. "Medicinal Plants in the Treatment of Chronic Diseases: A Review of Their Mechanisms and Applications" *Phytotherapy Research* (2023)
7. С.Х. Астанов, Р.Х.Шамсиев, А.Р.Файзуллаев. *Пищевые красители: (способы получения и стабилизации)*. Тошкент 2014 с.195.
8. В.И.Дейнека, Я.Ю. Кульченко. *Кванто-химические расчёты электронных спектров поглощения некоторых антоцианидинов. Журнал физической химии, 2021, том 95 №7 С.1051-1058*
9. А.А.Некрасов, А.Б.Ванников. *Спектроэлектрохимические процессы в слоях полианилина, полученных различными методами. Электрохимия, 2011. том 47, №1 с.3-17*
10. Xia Li, Yi-qing Xu, Guo-Quan Zhou. *Airy transformation of Lorentz-Gauss beams. Results in physics* 19(2020)103643 pages 1-10
11. Anna Taraba, Katarzyna Szymczyk. *Quercetin and rutin mixtures with alcohols: Spectroscopic and conductometric studies. Journal of Molecular Structure* 2020 p. 1-8

12. Jawad Ur Rehman, Imdad Ali, Salim Saifullah, Shafi Ullah, Muhammad Raza Shah. *Muhhad imrah, Synthesis of quercetin based self-assembling supramolecular amphiphiles for amphotericin B delivery. Journal of Molecular Liquids. 2021 p.1-10*

13. Аньци Пэн, Сяоянь Тан, Инъин Фен, Юн Хуан, Цзилай, Кай Туан, Мэньцян Лу, Ифань Чжао, Ютин Пан, Санджин ван, Ютун Ху, Вэй Чжао, Чуанькуй Сун, Цян Ван. *Разработка молекулярного механизма регуляции ликопинциклаза, соотношение каротиноидов в разных ветвях чайного цветка. Журнал садовых растений. 2023г*

14. Thi Ngoc Nhon Hoang, Ngoc Phuong Minh Nguyen, Thi Anh Dao Dong Thi Hong Anh Le, *Anthocyanin isolation from Hibiscus sabdariffa L. flwers by extraction, macroporous D101 resin purifiatiion, and biological evaluation. Journal of Agriculture and Food Research 14 (2023) 100848. p.1-9*

15. Daniela Mendes, Patricia Valentao, Maria Manuel Oliveira, Paula Andrade, Romeu A. Videira. *A nanophytosomes formulation based on elderberry anthocyanins and Codium lipids to mitigate mitochondrial dysfunctions. Biomedicine & Pharmacotherapy 143 (2021) 112157. Pages.1-12*

16. Astanov S.Kh., Daminov M.I., Kasimova G.K., Shamsiev R.Kh. *Spectroscopy of a non-luminescent associate of indigo carmine in solutions. Scientific reports of bukhara state university 2021/2 (84) C.3-15*

17. S.Kh.Astanov, G.K.Kasimova, A.B.Muhammadova. *Applicatons of polarization spectra in the study of photonics of self-assembled molecules. LAP LAMBERT Academic Publishing. ISBN: 978-620-4-97934-2. 2022 p. 100*

MUJASSAMLANGAN QUYOSH NURLANISHI TA‘SIRIDA RUX OKSIDINING KARBOTERMİK QAYTARILISHI

Sulaymonov Sulton Xamidovich,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi
Materialshunoslik instituti*

O‘rinboyev Raximjon Ravshanovich,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi
Materialshunoslik instituti
rahimjonravshanovich1990@gmail.com*

Annotatsiya. Hozirgi kunda shamol va mujassamlangan quyosh energiyasi kabi qayta tiklanadigan energiya manbalaridan foydalanish bilan birgalikda energiya samaradorligi ko‘plab mahalliy energiya ehtiyojlarini qondirishi mumkin, ammo energiya talab qiladigan va yuqori haroratli jarayonlarga, ayniqsa sanoat va transportga ta‘siri kamroq. Geliostatlar va texnologik mineralardan foydalanadigan keng miqyosli va mujassamlangan quyosh tizimlari yoqilg‘i va boshqa mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun termal va termokimyoviy jarayonlarni boshqarish, shuningdek, an‘anaviy yuqori haroratli sanoatni boshqarish uchun yuqori haroratli texnologik jarayonlarni issiqlik bilan ta‘minlashi mumkin. Shuningdek, mujassamlangan quyosh energiyasini kimyoviy energiyaga aylantirib kimyoviy energiyani saqlash mumkin. Mujassamlangan quyosh energiyasidan foydalanib rux oksidining karbotermik qaytarilish jarayoni aynan shunday usullardan biri hisoblanadi. $ZnO + C \rightarrow Zn + CO$; $\Delta H_{1500K} = 350 \text{ kJ/mol}$

Bu usul bilan olingan Zn suv bug‘i bilan oksidlanib H olish uchun ishlatiladi va vodorod hozirgi kundagi “yashil” energiyadir.

Kalit so‘zlar: rux oksidi, koks, nano rux, vodorod, suv, mujassamlangan quyosh energiyasi, gelyostat, mujassamlashtirgich va fokus.

КАРБОТЕРМИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОКСИДА ЦИНКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ КОНЦЕНТРИРОВАННОГО СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Аннотация. Энергоэффективность в сочетании с использованием возобновляемых источников энергии, таких как энергия ветра и концентрированная солнечная энергия, в настоящее время может удовлетворять многие местные энергетические потребности, но с меньшим воздействием на энергоёмкие и высокотемпературные процессы, особенно в промышленности и транспорте. Крупномасштабные и концентрированные солнечные системы с использованием гелиостатов и технологических башен могут обеспечивать тепловые и термохимические процессы для производства топлива и других продуктов, а также обеспечивать тепло для высокотемпературных технологических процессов, приводящих в действие традиционные высокотемпературные отрасли промышленности. Также возможно преобразование концентрированной солнечной энергии в химическую энергию и её хранение. Карботермическое восстановление оксида цинка с использованием концентрированной солнечной энергии является одним из таких методов. $ZnO + C \rightarrow Zn + CO$; $\Delta H_{1500K} = 350 \text{ кДж/моль}$.

Полученный этим методом цинк окисляется водяным паром с образованием H_2 , а водород является «зелёной» энергией сегодня.

Ключевые слова: оксид цинка, кокс, наноцинк, водород, вода, концентрированная солнечная энергия, гелиостат, конденсатор и фокус.

CARBOTHERMIC REDUCTION OF ZINC OXIDE UNDER THE INFLUENCE OF CONCENTRATED SOLAR RADIATION

Abstract. Energy efficiency, combined with the use of renewable energy sources such as wind and concentrated solar energy, can now meet many local energy needs, but with less impact on energy-intensive and high-temperature processes, especially in industry and transport. Large-scale and concentrated solar systems using heliostats and process towers can drive thermal and thermochemical processes for the production of fuels and other products, as well as provide heat for high-temperature technological processes to drive traditional high-temperature industries. It is also possible to convert concentrated solar energy into

chemical energy and store chemical energy. The carbothermic reduction of zinc oxide using concentrated solar energy is one such method. $ZnO + C \rightarrow Zn + CO$; $\Delta H_{1500K} = 350 \text{ kJ/mol}$

The Zn obtained by this method is oxidized with water vapor to produce H₂, and hydrogen is the "green" energy of today.

Keywords: zinc oxide, coke, nano zinc, hydrogen, water, concentrated solar energy, heliostat, concentrator, and focus.

Kirish. Energiya samaradorligini oshirishga qaramasdan, zamonaviy iqtisodiyotlar transport sektoridan tortib to mahsulot va materiallarni ishlab chiqarish va qayta ishlashgacha bo‘lgan energiyani ko‘p talab qiladigan jarayonlarga tayanadi. Ayni paytda qayta tiklanuvchi energiya manbalaridan foydalanish dunyoning aksariyat mamlakatlarida, jumladan, O‘zbekistonda ham rivojlanishning ustuvor yo‘nalishi hisoblanadi. Arzonroq va “yashil” energiya ishlab chiqarish bizning davrimizning dolzarb vazifasiga aylandi. Ushbu global vaziyat ko‘plab taniqli obyektiv omillar bilan bog‘liq bo‘lib, ularning asosiylari: Yerning qayta tiklanmaydigan energiya manbalarining kamayishi, atmosferaga karbonat angidridning ulkan emissiyasi, qazilma energiya manbalarining notekis taqsimlanishi va turli xil tabiiy, geografik va dunyo mamlakatlarining iqlim sharoiti (quyoshli kunlar soni, daryolarning mavjudligi va boshqalar), siyosiy va iqtisodiy vaziyat va boshqalar. Shuning uchun qayta tiklanadigan energiya manbalaridan foydalanishga intensiv o‘tish global energetika rivojlanishining muhim bosqichidir [1], [2].

Jarayon, koks qaytaruvchi vosita sifatida ishlatiladigan maxsus kamerada amalga oshiriladi. Oddiy sharoitlarda ZnO ning termik dissotsilanish jarayoni $>2000 \text{ K}$ haroratda sodir bo‘ladi. Ko‘mir, koks, tabiiy gaz yoki biogaz kabi uglerod materiallaridan foydalanish haroratni $1300 - 1600 \text{ K}$ gacha tushirishga imkon beradi.

Adabiyotlar tahlili va metodlar. Mujassamlashgan quyosh radiatsiyasi bevosita ZnO yuzasiga tushadi. Qizdirilganda reaksiya boshlanadi, dastlabki gazlar, Zn va kislorod bug‘lari chiqindi gaz tizimi orqali sovuq Zn kondensatsiya zonasiga - Zn kondensatsiyalanadigan sovitish kamerasiga kiradi. Qolgan Zn zarralari siklonda va filtrlarda to‘planadi. Rux oksidi sof Zn ishlab chiqarish uchun quyosh reaktoriga qaytarilishi mumkin



Kimyoviy reaksiyalarni tavsiflaydi.

Ruxning oksidining quyosh reaktorida karbotermik qaytarilishi maxsus quyosh qurilmasida o‘tkazilgan. Bu quyosh pechi shu ilmiy ish uchun maxsus loyihalashtirib qurilgan. Quyosh reaktorining ishlash sxemasiga ko‘ra mujassamlashgan quyosh nuri vertikal holatda tushadi, ya‘ni reaktorga mujassamlash quyosh nuri reaktorning tepa qismidagi kvarts oyna orqali o‘tadi [3].

Reaksiya vaqtida mujassamlash quyosh nuri energiyasi ta‘sirida kvarts oyna va reaktor qizib ketmasligi uchun reaktor bo‘shlig‘i va kvarts oynasiga inert gaz (argon) $3.0-5.0 \text{ l/min}$ tezlik bilan sovitish uchun yuborildi. Reaktor bo‘shlig‘idan o‘tgan argon, hosil bo‘lgan gazlar bilan reaktor chiqish yo‘li orqali, suv va argon bilan sovitiladigan kameraga o‘tadi. Sovitish kamerasi devorida nano rux zarralari yig‘iladi. Nano rux zarralari sovitish kamerasi kirish qismida kristallanadi va reaktorning chiqish qismida cho‘kadi [4].

Tajribada rux oksidining karbotermik qaytarilish davomiyligi quyosh pechida $60-90$ minutgacha, reaktor kamerasini qizishi va reaksiya boshlanishi uchun $25-40$ minut sarflandi. Tajribada $2.5-4.0 \text{ kt}$ oralig‘ida quyosh energiyasi sarflandi, reaktor bo‘shlig‘idagi harorat $1100 - 1350 \text{ }^\circ\text{C}$ gacha ko‘tarildi. Reaktorning ichki kamerasi harorati xromel-alyuminiy termoparasi yordamida o‘lchandi, termoparalar kameraning tepa qismi kvarts oyna tagida va kameraning pastki qismida reaksiya mahsulot tagida joylashgan.

Ma‘lumki, rux oksidning termik dissotsatsiyasi uchun yuqori harorat zarur, ya‘ni $1800 \text{ }^\circ\text{C}$, bunday quyosh pechini rejalashtirish qiyinchilik tug‘diradi. Yuqori haroratda qayta nurlanish yo‘qotishlari yuzaga keladi. Bu yo‘qotishlarni kamaytirish uchun yuqori konsentirlangan quyosh nuri zarur. Shuning uchun bu tajribani o‘tkazishdan oldin quyosh pechini ish haroratini ehtimoliy pastlashishini aniqlash uchun Termogravimetriya (TG) va Differensial termik-analiz (DTA) metodida Rux oksidining karbotermik usul bilan qaytarilishini o‘rgandik. O‘lchashlar “Linseis STA PT 1600” qurilmasida o‘tkazildi.

Texnik ko‘rsatkichlari:

Harorat oralig‘i	-150 °C dan 1600 °C
Chastota	1 Hz yoki 5 Hz
Namuna o‘lchami	30 mm
Muhit	inertli, oksidli, qaytaruvchi.
Qo‘shimcha qurilmalari	kompyuter, bakuumni nasos, kreokamera

Adabiyotlardan ma‘lumki karbotermik qaytarilish usuli gazlarda (metan) [5], [6], [7] yoki qaytiq materiallarda (ko‘mir, biomassa, koks) [8] foydalanilgan. Qaytaruvchi sifatida me‘vali daraxt danagidan

olingan biomassadan (koks) foydalandik. Tajriba uchun ZnO:C har xil massa nisbatlarini tayyorlab oldik. 1 mol ZnO ga 0.7, 1 va 2 mol nisbatda koks oldik. Tajribalar argonli muhitda 10 °C /min tezlikda t=1450 °C gacha qizdirildi.

DTA qurilmasining Al₂O₃ (korunt)li tigeligiga 13-19 mg massali namunalar joylashtirildi. Tigel harorati 1600 °C bo'lgan elektrpechga joylashtirildi. Pechga 150 ml/min tezlikda argon gazi berildi. Termik analizator tekshirish jarayonining xususiyatlarini, ayniqsa aralashmaning reaksiya tezligini va haroratini aniqlaydi. DTA o'lchashlarning maqsadi ZnO va koks ning quyosh pechidagi reaksiyaga kirishish haroratini aniqlashdir va sistemaga beriladigan argon miqdorini aniqlashdir.

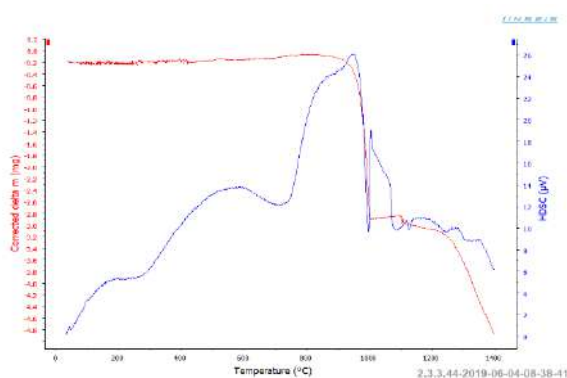
Natijalar. Ma'lumki, rux oksidning termik dissotsatsiyasi uchun yuqori harorat zarur, ya'ni 1800 °C, bunday quyosh pechini rejalashtirish qiyinchilik tug'diradi. Yuqori haroratda qayta nurlanish yo'qotishlari yuzaga keladi. Bu yo'qotishlarni kamaytirish uchun yuqori konsentirlangan quyosh nuri zarur. Shuning uchun bu tajribani o'tkazishdan oldin quyosh pechini ish haroratini ehtimoliy pastlashishini aniqlash uchun Termogravimetriya (TG) va Differensial termik-analiz (DTA) metodida Rux oksidining karbotermik usul bilan qaytarilishini o'rgandik. O'lchashlar "Linseis STA PT 1600" qurilmasida o'tkazildi. Adabiyotlardan ma'lumki karbotermik qaytarilish usuli gazlarda (metan) [9] yoki qaytiq materiallarda (ko'mir, biomassa, koks) [10] foydalanilgan. Qaytaruvchi sifatida me'vali daraxt danagidan olingan biomassadan (koks) foydalandik. Tajriba uchun ZnO:C har xil massa nisbatlarini tayyorlab oldik. 1 mol ZnO ga 0.7, 1 va 2 mol nisbatda koks oldik. Tajribalar argonli muhitda 10 °C /min tezlikda t=1450 °C gacha qizdirildi. DTA va TG tahlil natijalari 1-jadval va 1-2 -rasmlarda keltirilgan.

1-jadval.

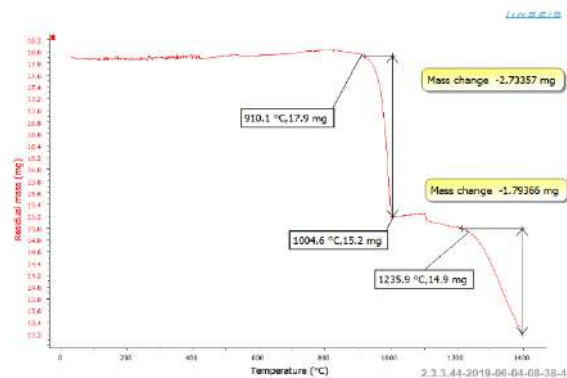
Mol nisbatlari	Boshlang'ich massa	Yo'qotilgan massa	Yo'qotilgan massa, %
ZnO:C = 1 mol: 0.7 mol	19.403	6.6546	34.297
ZnO:C = 1 mol: 1 mol	16.044	2.29741	14.328
ZnO:C = 1 mol: 2 mol	18.324	12.81	69.911

DTA qurilmasining Al₂O₃ (korunt) li tigeligiga 13-19 mg massali namunalar joylashtirildi. Tigel harorati 1600 °C bo'lgan elektrpechga joylashtirildi. Pechga 150 ml/min tezlikda argon gazi berildi. Termik analizator tekshirish jarayonining xususiyatlarini, ayniqsa aralashmaning reaksiya tezligini va haroratini aniqlaydi. DTA o'lchashlarning maqsadi ZnO va koks ning quyosh pechidagi reaksiyaga kirishish haroratini aniqlashdir.

TG chizig'ini ko'radigan bo'lsak 100 °C gachang namuna tarkibidagi yengil uchuvchi moddalar bug'lanib ketgan. 100 °C dan 900 °C gacha massada sezilarli o'zgarish bo'lmagan. 900 °C dan 1000 °C gacha massa miqdori sezilarli darajada kamaygan. Bunga ZnO va koks reaksiyaga kirishi sababdir. Reaksiya natijasida CO ajralib argon gaz oqimi bilan birga chiqib ketgan. Shundan so'ng 1000 °C dan 1180 °C gacha massa o'zgarishi kuzatilmagan, asosiy reaksiya tugagan. 1180 °C dan boshlab rux tigeldan argon gazi oqimi bilan chiqib ketishni boshlagan va jarayon so'ngigacha davom etgan.



1- rasm. DTA tahlillari



2 – rasm. TG tahlili

ZnO va koksning 1:1 mol nisbatli qilib aralashtirib, Pechga 50 ml/min tezlikda argon gazi berilganda DTA va TG tahlillari quydagich ko'rinishga keldi. TG chizig'ini ko'radigan bo'lsak 100 °C gachang namuna tarkibidagi yengil uchuvchi moddalar bug'lanib ketgan. 100 °C dan 400 °C gacha massada sezilarli o'zgarish bo'lmagan. 400 °C dan 700 °C gacha massa miqdori sezilarli darajada kamaygan. Bunga koksning O₂ bilan reaksiyaga kirishi sababdir. Reaksiya natijasida CO ajralib argon gaz oqimi bilan birga chiqib ketgan. Shundan so'ng jarayon so'ngigacha massa o'zgarishi kuzatilmagan.

ZnO ning DTA va TG tahlillari quydagich ko‘rinishga keldi. Pechga 150 ml/min tezlikda argon gazi berildi. TG chizig‘ini ko‘radigan bo‘lsak, 100 °C gacha namuna tarkibidagi yengil uchuvchi moddalar bug‘lanib ketgan. Shundan so‘ng jarayon so‘ngigacha massa o‘zgarishi kuzatilmagan. Bunga ZnO reaksiyaga kirishmagan.

Koksning DTA va TG tahlillari quydagich ko‘rinishga keldi. TG chizig‘ini ko‘radigan bo‘lsak 100 °C gachang namuna tarkibidagi yengil uchuvchi moddalar bug‘lanib ketgan. 100 °C dan 370 °C gacha massada sezilarli o‘zgarish bo‘lmagan. 370 °C dan 845 °C gacha massa miqdori sezilarli darajada kamaygan. Bunga koksning O₂ bilan reaksiyaga kirishi sababdir. Reaksiya natijasida CO va CO₂ gazlari ajralib chiqib ketgan. Shundan so‘ng jarayon so‘ngigacha massa o‘zgarishi kuzatilmagan.

Shundan kelib chiqib aytish mumkinki, koksning miqdorini oshirganimiz sari reaksiya pastga tushadi va bu quyosh pechida jarayonni amalga oshirishimiz uchun muhimdir.

ZnO:C ning 1:1 mol nisbatda olib amalga oshirilgan tajribada asosiy reaksiya t=820-950 °C, 1:2 nisbatda t=800-960 °C, 1:0.7 nisbatda esa t=800-1000 °C sodir bo‘lgan.

Munozara. Ishni ko‘rib chiqish shuni ko‘rsatadiki, yuqori haroratli quyosh pechlari uchun juda ko‘p optik dizaynlar mavjud bo‘lib, ular ruxni olish imkonini beradi. Dastlabki tahlillar shuni ko‘rsatdiki, tadqiqot quyosh pechi uchun eng mos optik dizayn bitta geliostat va paraboloidga o‘xshash mujassamlashtirgichdan iborat ikki oynali dizayn bo‘lishi mumkin. Bu usul bilan olingan rux nano o‘lchamli bo‘lib boshqa usul bilan olingan ruxdan olchamlari kichik, olish usuli energiya jihatdan samarali va ekalogik toza hisoblanadi.

Xulosa. Quyosh termokimyoviy siklining izotermik va o‘zgaruvchan harorat reaksiyalari qonuniyatlarini, quyosh energiyasini kimyoviy energiyaga aylantirish jarayonlarini o‘rganildi.

Vertikal optik o‘qli quyosh pechining fokusida rux oksidini karbotermik qaytaruvchi quyosh reaktori ishlab chiqildi.

Mujassamlangan quyosh energiyasidan foydalanib rux oksidini karbotermik qaytarishning optimal sharoiti aniqlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Adylov G.T., Akbarov R.Y., Singh D. et al. Crystallization of μ - and α -cordierite in glass obtained via melting by concentrated radiant flux // *Applied Solar Energy*. -2008. -Vol. 44. -P. 135 - 138.
2. S.V. Kiseleva, Yu.G. Kolomiets, O.S. Popel. Assessment of solar energy resources in Central Asia // *Applied Solar Energy*. -2015. -Vol. 51. - Issue 3. -P. 214 - 218.
3. Rodat S., Abanades S., Flamant G. Co-production of hydrogen and carbon black from solar thermal methane splitting in a tubular reactor prototype // *Sol. Energy*. -2011. -Vol. 85. -P. 645 - 52.
4. Abdurakhmanov A.A., Faiziev Sh.A., Akbarov R.Yu., Suleimanov S.Kh., Rumi M.K., Paizullakhanov M.S., Nodirmatov E.Z. Properties of pyroxene glass ceramics, heat treated in the big solar furnace // *Applied Solar Energy*. -2011. -Vol - Issue 1. -P. 45 - 47.
5. Yadav D., Banerjee R. A review of solar thermochemical processes // *Renew. Sustain. Energy Rev.* -2016. -Vol. 54. -P. 497 - 532.
6. Abanades S., Villafan-Vidales I. CO₂ valorisation based on Fe₃O₄/FeO thermochemical redox reactions using concentrated solar energy // *Int. J. Energy Res.* -2013. -Vol. 37. -P. 598 - 608.
7. M. Chambon, S. Abanades, G. Flamant. Thermal dissociation of compressed ZnO and SnO₂ powders in a moving-front solar thermochemical reactor // *Environ Energy Eng.* -2011. -Vol. 57. -P. 2264 - 73.
8. Perkins C., Lichty P.R., Weimer A.W. Thermal ZnO dissociation in a rapid aerosol reactor as a part of a solar hydrogen production // *Int. J. Hydrog. Energy*. -2008 1. -Vol. 33. -P. 499 - 510.
9. D. Weibel, Z.R. Jovanovic, E. Galvez, A. Steinfeld. Mechanism of Zn particle oxidation by H₂O and CO₂ in the presence of ZnO // *Chem. Mater.* -2014. -Vol. 26. -P. 6486 - 6495.
10. Akbarov R.Yu., Paizullakhanov M.S. Characteristic Features of the Energy Modes of a Large Solar Furnace with a Capacity of 1000 kW // *Applied Solar Energy*. -2018. -Vol. 54. - Issue 2. -P. 99 - 109.

NANOTO'LDIRGICHLI POLIMER KOMPOZITLARNING ELEKTR VA DIELEKTRIK XUSUSIYATLARI

Abdullayev Lazizbek Abdulazizovich,
Namangan davlat universiteti o'qituvchisi, PhD
lazizbeka011@gmail.com

Yusupov Dilmurod Dilshod o'g'li,
Namangan davlat universiteti magistranti
dilmurodyusupov4864@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada polimer asosli kompozit materiallarning tuzilishi, elektr o'tkazuvchanlik va dielektrik xossalari ga mustahkamlovchi faza (tola, zarracha yoki nanomateriallar) ning ta'siri o'rganildi. PAKMlarning elektr xossalari ni chuqur o'rganish, relaksatsiya mexanizmlarini asoslab berildi. Ushbu yondashuv polimer kompozitlarining texnologik qo'llanishlarini kengaytirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: polimer kompoziti, nanokompozit, elektr o'tkazuvchanlik, dielektrik xossa, grafen, CNT.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ С НАНОПОЛНИТЕЛЯМИ

Аннотация. В статье исследовано влияние армирующей фазы (волокон, частиц или наноматериалов) на структуру, электрическую проводимость и диэлектрические свойства полимерных композиционных материалов. Проведён углублённый анализ электрических свойств ПКМ, а также обоснованы механизмы диэлектрической релаксации. Данный подход способствует расширению технологических областей применения полимерных композитов.

Ключевые слова: полимерный композит, нанокompозит, электрическая проводимость, диэлектрические свойства, графен, CNT.

ELECTRICAL AND DIELECTRIC PROPERTIES OF NANOFILLER-REINFORCED POLYMER COMPOSITES

Abstract. This article investigates the influence of the reinforcing phase (fibers, particles, or nanomaterials) on the structure, electrical conductivity, and dielectric properties of polymer-based composite materials. A comprehensive analysis of the electrical properties of polymer composite materials is presented, and the mechanisms of dielectric relaxation are substantiated. This approach contributes to expanding the technological applications of polymer composites.

Keywords: polymer composite, nanocomposite, electrical conductivity, dielectric properties, graphene, CNT.

Kirish. Polietilen (PE) asosli polimer kompozit materiallar, ularning yengil vazn, korroziyaga chidamliligi, va mexanik xossalari ning yuqoriligi sababli, turli sanoat tarmoqlarida keng qo'llaniladi. Polietilenning o'zi yaxshi dielektrik xossalarga ega bo'lsa-da, uning elektr o'tkazuvchanligi past bo'lishi mumkin. Shuning uchun polietilen asosli kompozit materiallarda elektr o'tkazuvchanlik xossalari ni yaxshilash uchun mustahkamlovchi faza sifatida yuqori o'tkazuvchanlikka ega materiallar qo'shiladi. Bu kompozitlar nafaqat mexanik jihatdan kuchli, balki elektronika va energiya saqlash tizimlarida qo'llanish uchun ham mos keladigan materiallar bo'ladi.

Polietilen, o'zining oddiy tuzilishi va ishonchiligi bilan mashhur bo'lgan polimerdir. U birikma bo'yicha ikki shaklda mavjud: yuqori zichlikli polietilen (HDPE) va past zichlikli polietilen (LDPE). Polietilenning tabiiy holatida yaxshi izolyatsiya xususiyatlari mavjud, lekin uning elektr o'tkazuvchanligi juda pastdir. Shuning uchun polietilen asosli kompozit materiallar ishlab chiqishda, polietilen matritsasiga o'tkazuvchan materiallar, masalan, uglerod tolalari, grafen yoki uglerod nanotubalar kiritiladi. Bu qo'shimchalar polietilenning elektr o'tkazuvchanlik xossalari ni sezilarli darajada yaxshilaydi. Kompozit materiallar ishlab chiqishda qo'llaniladigan mustahkamlovchi materiallar bilan polietilenning o'zaro ta'siri ham juda muhimdir. Mustahkamlovchi materiallar polietilen matritsasiga o'tkazuvchanlikni oshirishda yordam beradigan strukturalarni yaratadi, bu esa materialning umumiy elektr xossalari ni yaxshilashga olib keladi.

Yangi kompleks xossaga ega materialga bo'lgan talab yuzaga kelsa, yangi turdagi polimerlarni sintez qilib, ularni ishlab chiqarishni o'sishiga erishish hamma vaqt ham maqsadga muvofiq kelavermaydi. Bu yo'l juda murakkab, uzun, hamda hamma vaqt ham muvaffaqiyatli tugayvermaydi. Mavjud polimerni fizik o'zgarishiga uchratilishi (modifikatsiyalash), ularning boshqa tabiatli modda bilan kombinatsiyasi, boshqacha tuzilishga o'tishli kabi ishlarining maqsadi olinadigan materialni mustahkamlash, unga alohida to'ldiruvchi turiga bog'liq holda kompleks xususiyat baxsh etish va arzonlashtirish muammosini hal etishni umidli yo'llaridan biri sanaladi. Ikkinchi yo'li esa, metallardan qotishma tayyorlagani kabi polimerlar qotishmasini olish, ya'ni polimerga boshqa polimerni oz qismini kiritish bilan (legirlash) amalga oshiriladi (metallurgiyadagi kabi). Shuning uchun oxirgi yillarda polimerlar haqidagi fanda birinchi o'rinda polimerli kompozitsion materiallar (KM) yaratish muammosi yuzaga kelmoqda. Polimerli kompozit materiallarga quyidagilar kiradi:

- mayda qirqilgan tolali yoki dispers zarralardan iborat to'ldiruvchilari, shuningdek, boshqa polimerlarni juda kichik o'lchamgacha disperslangan qattiq zarrachalari bo'lgan polimerlar;
- Izotrop arminlangan (sinchlangan) yoki xaotik yo'nalgan organik va noorganik tolalari bo'lgan shuningdek, turlicha to'qilgan matolar va boshqalari bo'lgan polimerlar;
- o'zaro bir-birida erimaydigan va bir tabiatli polimer zarralarini ikkinchi matritsa polimerda ma'lum darajada taqsimlanishi bilan xarakterlanadigan (chiziqli tuzilishli, ikki polimer, ikki turli polimerlar (o'zaro kirishishga to'r)), chiziqli va to'rli polimer (yarimo'zaro kirishishga ega tur) kabi polimerlar aralashmasi.

Umumiy holda kompozit materiallar strukturasi uzluksiz polimer faza (matritsa) va u matritsada ma'lum darajada takomillashgan bir yoni undan ortiq dispers faza (to'ldiruvchi) dan tashkil topgan deb tasavvur qilish mumkin.

Bunday materiallar olishni ilmiy asosini ishlab chiqish plastiklar doirasini anchayin kengayishiga va oldin yaratilgan va ishlab chiqarilayotgan polimerlar asosida ularning xossalari turini o'rnatishga imkon yaratadi.

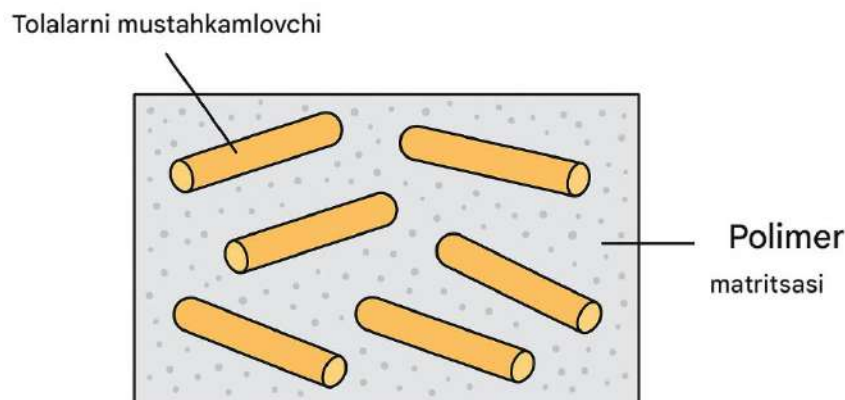
Kompozit materiallar yaratish, ulardan keng ko'lamlari foydalanish bo'yicha dunyoda juda ko'p mamlakatlar o'z sanoatini yuqori pog'onaga ko'tarishga erishmoqda. Hattoki, kompozit materiallar ishlab chiqarish ko'rsatkichi bo'yicha mamlakatni rivojlanish darajasini baholash mumkin bolib, ayniqsa, polimer materiallar asosida yaratiladigan kompozitlarni texnik taraqqiyotdagi o'rni salmoqli bo'lib bormoqda. Kerakli elektrotexnik xossaga ega polimer asosli kompozit materiallar tayyorlashda yaratilgan namunalarni elektrik xossalari turli xildagi parametrlarga bog'lanishini o'rganish bo'yicha juda ko'plab tadqiqotlar o'tkazilgan. Konstruktsion maqsadda KM tayyorlash uchun to'ldirishni asosiy maqsadi kuchaygan polimer material olishdan iborat. Ya'ni fizika-mexanik xossalari kompleks tarzda yaxshilangan material olish. Bunga erishish uchun tolasimon sinchlovchi to'ldiruvchilar yoki ingichka dispersli to'ldiruvchilar qirqilgan shisha tolalar, aerokuchlar va boshqalar kiritiladi. Materialga maxsus elektrofizik xususiyat berish uchun foydalaniladigan dispers to'ldiruvchilarga qora uglerod, grafit, metallar kukuni, elektr o'tkazuvchilar uchun qirqilgan tola, metallar kukuni va magnit KM uchun ferritlar segnetoelektrik KM uchun segneto elektrklar kukuni (masalan, bariy titanati). Hozirgi kunda ko'plab foydalanlayotgan yana bir dispers to'ldiruvchilar guruhiga dispers zarralar shaklidagi polimerlar kiradi.

Maxsus xossaga ega KM yaratishda to'ldiruvchini odatda materialga mexanik emas u boshqa masalan, elektrofizik xususiyat baxsh etadigan qilib kiritiladi. Dastlabki o'tkazuvchan polimer materiallar sifatida grafit yoki texnik uglerod bilan to'ldirilgan fenolformaldegid va bir qator termoreaktiv smolalar asosidagi kompozitlar tayyorlash uchun ishlatilgan. Bulardan keyin texnik uglerod bilan to'ldirilgan dastlab tabiiy, so'ng sun'iy kauchuk asosli o'tkazuvchan elastomerlar yuzaga keldi. Hozirgi kunda polimer materialga maxsus elektrofizik xossani berish uchun turli-tuman tabiatga ega tolali yoki disperli to'ldiruvchilardan foydalaniladi.[1]

Polimer asosli kompozit materiallar (PAKM) hozirgi zamonaviy texnika va texnologiya rivojida eng keng qo'llanilayotgan funksional materiallar sirasiga kiradi. Polimer matritsaning yengil vazni, qayta ishlash qulayligi, kimyoviy barqarorligi va arzonligi mustahkamlovchi fazalar bilan birgalikda qo'llanganda yanada yuqori ekspluatatsion xossalarga ega yangi avlod kompozitlarni yaratish imkonini beradi. Kompozit tarkibiga kiritiladigan to'ldirgichlarning shakli, tabiati, zarracha o'lchami, fazalararo o'zaro ta'siri va taqsimlanish darajasi materialning yakuniy fizik, mexanik, termal hamda dielektrik tavsiflarini belgilab beradi [2]. Mustahkamlovchi fazaning qo'shilishi polimer matritsasida yuk ko'tarish qobiliyatini kuchaytiradi, issiqlik barqarorligini oshiradi, elektr o'tkazuvchanlik yoki dielektrik xossalarni maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirish imkonini yaratadi. Bu esa PAKMlarning funksional imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytiradi va ularni yuqori texnologik qurilmalarda qo'llashga zamin yaratadi. Xususan, dielektrik parametrlarning boshqarilishi – dielektrik o'tkazuvchanlik (ϵ), yo'qotish tangensi ($\text{tg}\delta$), dielektrik relaksatsiya jarayonlari va elektr o'tkazuvchanlikning chastotaga bog'liqligi – kompozitlarning qo'llanish

sohalarini belgilovchi asosiy omillardandir [3]. Shu boisdan modellashtirish va material tarkibini optimallashtirish bo'yicha ilmiy tadqiqotlar izchil ravishda dolzarbligini saqlab kelmoqda.

Tahlil va natijalar. Polimer matritsa (epoksid, poliimid, poliester) hamda mustahkamlovchi faza (uglerod tolalari, nanotrubalar, keramika zarrachalari) kompozitning asosiy tuzilma komponentlarini tashkil etadi. Mustahkamlovchi materiallar matritsa ichida turli geometriyalarda tarqalishi elektr xossalarning shakllanishiga bevosita ta'sir ko'rsatadi.



1-rasm. Polimer kompozitning umumiy struktura modeli

Polimer asosli kompozitlarning dielektrik xossalari, avvalo, polimer matritsasining qutblanish qobiliyati va mustahkamlovchi fazaning tabiatiga bog'liq bo'ladi

Nanoto'ldirgichli polimer kompozit materiallarning (NPKM) elektr va dielektrik xossalari ularning ichki qutblanish mexanizmlari hamda tashqi elektr maydon bilan o'zaro ta'siri orqali aniqlanadi. Molekulyar dipollarning yo'nalishi elektron o'tishlar yoki molekulyar tebranishlar bilan solishtirilganda ancha sekin jarayon bo'lib, bu holat dipol qutblanishining vaqtga va chastotaga bog'liqligini belgilaydi. Elektron va tebranish jarayonlari odatda 10^{12} Hz dan yuqori chastotalarda sodir bo'lsa, dipol yo'nalishi issiqlik harakati bilan raqobatlashuvchi nisbatan inert jarayon hisoblanadi.

Dipol qutblanishi barcha molekulalarda bir vaqtning o'zida yuz beradigan keskin o'zgarish emas, balki doimiy issiqlik tebranishlari fonida molekulalarning o'rtacha yo'nalishining asta-sekin moslashuvi sifatida namoyon bo'ladi. Shu sababli elektr maydon qo'llanilgandan so'ng dipollarning to'liq yo'nalishi uchun yetarli vaqt berilgandagina muvozanat holatiga erishiladi va maksimal qutblanish yuzaga keladi. Ushbu holatda kuzatiladigan nisbiy dielektrik o'tkazuvchanlik **statik dielektrik doimiysi** sifatida aniqlanib, ϵ_s bilan ifodalanadi.

Aksincha, agar qutblanish jarayoni elektr maydon qo'llanilishi bilan darhol o'lchansa, dipollarning orientatsiyalanishi uchun vaqt yetarli bo'lmaydi. Bunday sharoitda faqat elektron va ion qutblanishlari hissasi kuzatiladi va oniy nisbiy dielektrik o'tkazuvchanlik ϵ_∞ bilan tavsiflanadi. Demak, ϵ_s va ϵ_∞ orasidagi farq dipol qutblanishining vaqtga bog'liq tabiatini ifodalaydi.

Ushbu ikki chegaraviy holat orasida dielektrik xossalarning chastotaga bog'liq o'zgarishi — **dielektrik dispersiya** kuzatiladi. Bu dispersiyani tavsiflash uchun dielektrik materialga amplitudasi E_0 va burchak chastotasi ω bo'lgan o'zgaruvchan elektr maydon qo'llaniladi:

$$E = E_0 \cos(\omega t).$$

Natijada hosil bo'ladigan qutblanish ham vaqt bo'yicha davriy xarakterga ega bo'ladi. Biroq chastota oshgani molekulyar dipollar elektr maydon yo'nalishiga to'liq ergasha olmaydi va qutblanish vektori maydondan faza bo'yicha ortda qoladi. Ushbu kechikish elektr siljish vektori orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$D = D_0 \cos(\omega t - \delta),$$

quyidagicha yozilishi mumkin:

$$D = D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t,$$

bu yerda

$$D_0 \cos \delta, \quad D_2 = D_0 \sin \delta,$$

Bu bizni ikkita nisbiy dielektrik o'tkazuvchanlikni aniqlashga olib keladi.

$$\epsilon'(\omega) = \frac{D_1}{\epsilon_0 E_0} \quad \text{va} \quad \epsilon''(\omega) = \frac{D_2}{\epsilon_0 E_0}$$

Mazkur faza kechikishi dielektrik yo'qotishlarning fizik mohiyatini belgilaydi. Elektr maydon energiyasining bir qismi dipollarning issiqlik harakati va ichki ishqalanish jarayonlariga sarflanib,

yo‘qotishlarga olib keladi. Shu sababli nanoto‘ldirgichli polimer kompozitlarda kompleks dielektrik doimiylik tushunchasi muhim ahamiyat kasb etadi. U real va mavhum qismlardan iborat bo‘lib, energiyani saqlash va yo‘qotish jarayonlarini alohida tavsiflash imkonini beradi.

Polimerlar odatda yuqori dielektrik chidamlilikka ega izolyatorlardir, ammo ularga BaTiO₃, TiO₂ kabi metal oksid nanoparchalari qo‘shilganda dielektrik doimiylik sezilarli oshadi[4]. Dielektrik xossalarga ta‘sir etuvchi omillar chastota, harorat, zarralarning geometrik shakli, fazalararo chegaraning sifati. Kompozitlarning dielektrik javobi kompleks dielektrik doimiylik orqali ifodalanadi:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j \varepsilon''(\omega),$$

bu yerda $\varepsilon'(\omega)$ – energiyani saqlovchi qism, $\varepsilon''(\omega)$ – dielektrik yo‘qotishlarni ifodalovchi qismdir [5].

Dielektrik yo‘qotish tangensi:

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}.$$

Boltzmannning chiziqli tizimlar uchun superpozitsiya prinsipiga mos holda, agar vaqtni t_1 momentida maydon qandaydir kattalikka ortsa, unda to‘la siljish kelgusida $t > t_1$ larda quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$D(t) = \varepsilon_0[\varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\psi(t)]E_0 + \varepsilon_0[\varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\psi(t - t_1)]E_0.$$

ya‘ni maydon ta‘siri davomiyligiga mos xoldagi elektr siljishlar yig‘indisi bilan umumiy holda maydon inkermentlari ketma-ketligi uchun t vaqt momentiga quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$D(t) = \sum_{t_i} \varepsilon_0[\varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\psi(t - t_i)]E_i$$

Bundan uzluksiz o‘zgaruvchan maydon uchun

$$D(t) = \varepsilon_0\varepsilon_\infty E(t) + \int_{-\infty}^t \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\psi(t - s) \frac{dE_i}{ds} ds.$$

Bu yerda s vaqt o‘zgaruvchisi, bu tenglama vaqtning t momentida tashqi maydon oldingi tarixiga bog‘liq holda elektr siljishini ifodalaydi. Bo‘laklab integrallasak:

$$D(t) = \varepsilon_0\varepsilon_\infty E(t) + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_{-\infty}^t \psi'(t - s) E(s) ds$$

Tenglamadan kelib chiqadiki, $\psi'(t)$ dielektrik aks sado deyiluvchi funksiya bo‘lib u $\psi'(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$ ko‘rinishga ega. $D(t)$ uchun t bo‘yicha differensiallash quyidagini beradi:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \varepsilon_0\varepsilon_\infty \frac{dD(t)}{dt} + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t \psi'(t - s) E(s) ds \right]$$

Chunki

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^t \psi'(t - s) E(s) ds \right] = \psi'(0)E(0) - \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau} \psi'(t - s) E(s) ds$$

$\psi'(0) = \frac{1}{\tau}$ bo‘lgani uchun oxirida materialni elektr siljishi uchun differensial tenglamani olamiz:

$$\tau \frac{dD(t)}{dt} + D(t) = \tau\varepsilon_0\varepsilon_\infty \frac{dE(t)}{dt} + \varepsilon_0\varepsilon_s E(t)$$

Xususiy holda o‘zgaruvchan maydon haqiqiy qismi $E = E_0 e^{i\omega t}$ ko‘rinishda va mos holdagi o‘zgaruvchan siljish $D(t) = D_0 e^{i\omega(t-\delta)}$ tenglama yechimi ko‘rinishda bo‘lib

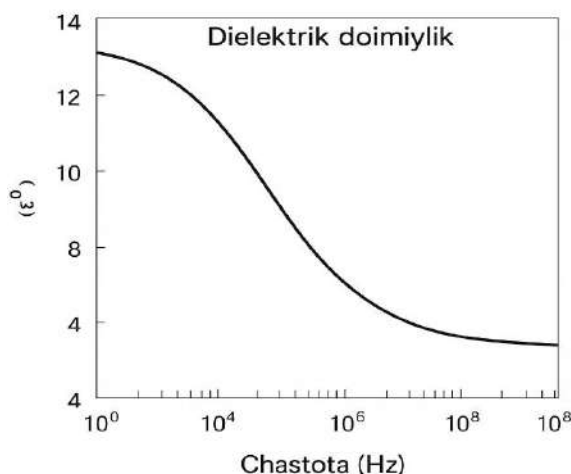
$$\varepsilon^* = \frac{D(t)}{\varepsilon_0 E(t)} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + i\omega\tau}$$

Uni Debaynnig dielektrik dispers tenglamasi deyiladi. Uni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratib, quyidagilarni olamiz. Bu tengalma dipollarning tashqi maydonga moslashuvi relaksatsiya vaqti τ ga bog‘liq bo‘ladi. Buni oddiy Debye modelida [4]:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Bu formulalardan ko‘rinadiki, chastota oshgan sari ε' kamayib boradi, chunki dipollar yuqori chastotali maydonga ergasha olmaydi.



2-rasm. Dielektrik doimiylikning chastotaga bog‘liqligi

Xulosa. O‘tkazilgan tahlillar shuni ko‘rsatadiki, polimer asosli kompozit materiallar (PAKM) elektr xossalarini boshqarish imkoniyati tufayli zamonaviy elektrotexnika va elektronika uchun eng istiqbolli funksional materiallar qatoriga kiradi. Polimer matritsa tabiatan dielektrik bo‘lgani sababli uning o‘tkazuvchanligi juda past bo‘ladi. Ammo uglerod tolalari, grafen, CNT yoki boshqa o‘tkazuvchi fazalarning qo‘shilishi natijasida perkolyatsiya kritik chegarasidan boshlab kompozit ichida uzluksiz elektr yo‘llari hosil bo‘ladi. Bu hodisa PAKMlarning elektr o‘tkazuvchanligini bir necha tartibga oshiradi va materialning funksional qo‘llanish sohasini sezilarli darajada kengaytiradi. Metal oksid nanoparchalar (BaTiO_3 , TiO_2 va boshqalar) qo‘shilganda dielektrik doimiylikning ortishi kuzatilishi PAKMlarning yuqori chastotali qurilmalar, sensorlar va energiya saqlash elementlari uchun qiymatini oshiradi. Shunday qilib, nanoto‘ldirgichlar bilan boyitilgan PAKM fizik jarayonlarning murakkab kombinatsiyasiga asoslangan bo‘lib, ularning tarkibi va tuzilishini ilmiy asosda boshqarish orqali yangi avlod elektrotexnika qurilmalariga moslashtirilgan yuqori samarali kompozit materiallarni yaratish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Abdullayev L.A., Yusupov D.D. Polietilen asosli polimer kompozit materiallar va ularning elektr o‘tkazuvchanlik xossalari. // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti jurnal 2025, № 5, may.170-175 bb.
2. Callister W. D., Rethwisch, D. G. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. 10th ed. John Wiley Sons, 2020.
3. Chung D. D. L. “Carbon-based structural and functional composites: self-sensing, electromagnetic shielding and thermal transport.” *Carbon*, vol. 50, no. 9, 2012, pp. 3342–3353.
4. Mittal V. *Polymer Nanocomposites: Electrical, Mechanical and Thermal Properties*. CRC Press, 2016.
5. Jonscher A. K. “The universal dielectric relaxation law.” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 11, no. 7, 1977, pp. 501–522.

KO'P JISMLI TIZIMLARDA QOVUSHQOQ-ELASTIK XUSUSIYATLARNI CHEKLI ELEMENTLAR USULI ASOSIDA TAHLIL QILISH

Esanov Nuriddin Qurbonovich,
Osiyo Xalqaro Universiteti dotsenti
esanovnuriddin06@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tadqiqotda o'zaro bog'langan qattiq, elastik va qovushqoq-elastik komponentlardan tashkil topgan ko'p jismlil tizimlarning dinamik javobiga qovushqoq-elastik materialning so'nish xususiyatlari ta'siri o'rganilgan. Qovushqoq-elastik komponentlarning harakat tenglamalarini ishlab chiqishda chiziqli qovushqoq-elastik model faraz qilinadi. Bu modelda Kelvin-Voigt modeli qo'llanilib, unda kuchlanish deformatsiya va uning vaqt bo'yicha hosilasiga to'g'ri proporsional deb hisoblanadi. Natijada hosil bo'lgan formulalarda doimiy so'nish matritsasi olinadi va so'nish kuchlari faqat deformatsiyaga bog'liq bo'ladi. Raqamli hisoblash misoli orqali qovushqoq-elastik materialdagi so'nish ko'p jismlil tizimlarning dinamik javobiga sezilarli darajada ta'sir ko'rsatishi isbotlangan.

Kalit so'zlar: elastik, burchakli, aylanish, model, qovushqoq, so'nish, dinamik, tebranish, deformatsiya, kuchlanish, chiziqli, koordinatalar, to'plam, jism, modlar, parametr, komponent, mexanik, Lagrang, differensial, tenglama.

АНАЛИЗ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ В МНОГОТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация. В данном исследовании изучено влияние демпфирующих (затухающих) свойств вязкоупругого материала на динамический отклик многотельных систем, состоящих из взаимосвязанных жёстких, упругих и вязкоупругих компонентов. При выводе уравнений движения вязкоупругих компонентов предполагается линейная вязкоупругая модель. В рамках этой модели используется модель Кельвина–Фойгта, в которой считается, что напряжение прямо пропорционально деформации и её производной по времени. В результате в полученных формулах вводится постоянная матрица демпфирования, а силы демпфирования зависят только от деформации. На основе примера численного расчёта доказано, что затухание в вязкоупругом материале оказывает заметное влияние на динамический отклик многотельных систем.

Ключевые слова: упругий, угловой, вращение, модель, вязкий, затухание, динамический, колебания, деформация, напряжение, линейный, координаты, совокупность, тело, моды, параметр, компонент, механический, Лагранж, дифференциальный, уравнение.

ANALYSIS OF VISCOELASTIC PROPERTIES IN MULTIBODY SYSTEMS BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD

Abstract. This study investigates the effect of the damping properties of a viscoelastic material on the dynamic response of multibody systems composed of interconnected rigid, elastic, and viscoelastic components. In deriving the equations of motion for the viscoelastic components, a linear viscoelastic model is assumed. The Kelvin-Voigt model is employed, where the stress is considered to be directly proportional to the strain and its time derivative. As a result, a constant damping matrix is obtained in the derived formulations, and the damping forces depend only on the deformation. A numerical example demonstrates that damping in a viscoelastic material significantly affects the dynamic response of multibody systems.

Keywords: elastic, angular, rotation, model, viscous, damping, dynamic, vibration, deformation, stress, linear, coordinates, set, body, modes, parameter, component, mechanical, Lagrange, differential, equation.

Kirish. Elastik komponentlarning katta burchakli aylanishlar sharoitida dinamik tahlili so'nggi yillarda mexanika va strukturaviy dinamika sohasidagi ko'plab ilmiy izlanishlarning markazida bo'lib kelmoqda [1–8]. Bunday katta burchakli aylanishlar tizimning inersiya xususiyatlarini o'zgaruvchan holatga keltiradi, ya'ni tizimning inersiya parametrlari umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lib qoladi. Aniqlik darajasiga bo'lgan talabning ortib borishi, shuningdek, egiluvchan jism deformatsiyasi va umumiy jism harakatining o'zaro ta'sirini bir vaqtda hisobga olish zarurati [2–8] mexanik tahlil metodlarida yangi

bosqichni boshlab berdi. Endilikda elastik deformatsiyalarni qattiq jism harakatidan alohida emas, balki integrallashgan holatda, ya'ni bir vaqtda, bog'liq differensial tenglamalar tizimini yechish asosida o'rganish talab etilmoqda.

Ushbu ishda har bir egiluvchan (moslashuvchan) komponentning konfiguratsiyasi uchta turdagi modlar to'plami yordamida aniqlanadi: qattiq jism modlari, asosiy modlar va normal modlar. Qattiq jism modlari jismning translyatsion harakati va katta burchakli aylanishlarini tavsiflaydigan Lagrang koordinatalar to'plami yordamida kiritiladi. Har bir jismning fazodagi yo'nalishi esa aylanish koordinatalari yordamida ifodalanadi. Ushbu koordinatalar Eyler burchaklari yoki Eyler parametrlaridan foydalanish orqali aniqlanishi mumkin. Cheklangan elementlar usulida qo'llaniladigan shakl funksiyalari doimiy deformatsiya holatini hisobga olganligi sababli, bir qiymatli siljish maydonini aniqlash uchun ma'lum asosiy shartlarni qo'yish zarur bo'ladi. Ushbu shartlar o'rta o'q yoki jismga birlashtirilgan o'q sharoitlariga muvofiq tanlanishi mumkin. Mazkur shartlarni joriy etish natijasida referens modlar to'plami hosil qilinadi, u esa tegishli jismning noxiziqli cheklov tenglamalari bilan mos bo'lishi lozim [9]. Bir qiymatli siljish maydoni aniqlangandan so'ng, tebranishning normal modlari [10] yordamida tizimdagi elastik koordinatalar sonini qisqartirish mumkin bo'ladi.

Kinematika va kinetik energiya. Bu yerda egiluvchan komponentlarning elastik koordinatalarini kiritish uchun cheklangan elementlar usuli qo'llaniladi. Qattiq jism harakati esa jismning translatsiyasi va katta burchakli aylanishlarini tavsiflaydigan Lagrang koordinatalar to'plami yordamida ifodalanadi. Ushbu koordinatalar to'plami i -jismning koordinatalari deb ataladi va bo'linib yozilgan shaklda ifodalanishi mumkin:

$$q_r^i = \begin{bmatrix} R^i & \theta^i \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

Bu yerda R^i va θ^i mos ravishda jismning translyatsion va rotatsion koordinatalarini ifodalaydi. Shu notatsiyada, i -jismning j -elementidagi istalgan p nuqtasining joylashuvi quyidagicha yozilishi mumkin [4]:

$$r_p^{ij} = R^i + A^i N^{ij} e^{ij} \quad (2)$$

Bu yerda: A^i - i -jismdan global koordinatalarga o'tkazuvchi transformatsiya matritsasi; N^{ij} - element shakl funksiyasi; e^{ij} - elementning elastik koordinatalari vektori. Vektor e^{ij} jismning o'qlariga nisbatan elementning tugun (nodal) nuqtalarining joylashuvi va egilishlarini belgilaydi. Shunday qilib, (2) tenglamani i -jismning elastik koordinatalari orqali quyidagicha yozilishi mumkin [10].

$$r_p^{ij} = R^i + A^i \bar{N}^{ij} e^i \quad (3)$$

Bu yerda e^i - i -jismning tugun koordinatalari vektori hisoblanadi va

$$\bar{N}^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & N^{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_1^{ij} \quad (4)$$

Bu modifikatsiyalangan (o'zgartirilgan) shakl funksiyasi hisoblanadi; B_1^{ij} - matritsa sifatida ishlatiladi.

Chunki qattiq jism harakati Lagrang koordinatalar to'plami q_r^i yordamida kiritilgan, shuning uchun cheklangan element shakl funksiyasining qattiq jism modlari olib tashlanishi lozim. Buni amalga oshirish uchun bir qiymatli siljish maydonini aniqlashga yetarli bo'lgan referens shartlar joriy qilinadi [9]. Referens shartlar yordamida mustaqil koordinatalar to'plamini aniqlash mumkin. Shu tarzda, tugun koordinatalari vektori e^i quyidagicha yozilishi mumkin:

$$e^i = B_b^i q_f^i \quad (5)$$

Bu yerda, q_f^i - yangi elastik koordinatalar to'plamini bildiradi, B_b^i - elementlari doimiy bo'lgan transformatsiya matritsasi. Agar (5)-tenglamani (3)-tenglamaga qo'ysak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi.

$$r_p^{ij} = R^i + A^i D^{ij} q_f^i \quad (6)$$

Bu yerda $D^{ij} = \bar{N}^{ij} B_b^i$ - fazoviy o'zgaruvchan matritsa. (6)-tenglamani vaqt bo'yicha differensiallaganda, p nuqtaning tezlik vektori quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\dot{r}_p^{ij} = \dot{R}^i + \dot{A}^i D^{ij} q_f^i + A^i D^{ij} \dot{q}_f^i \quad (7)$$

(7)-tenglamani o'ng tomonidagi markaziy had quyidagi shaklda ifodalanadi:

$$\dot{A}^i D^{ij} q_f^i = \sum_{k=1}^{NR} \frac{\partial}{\partial \theta_k^i} (A^i D^{ij} q_f^i) \dot{\theta}_k$$

Bu yerda NR - ixtiyoriy i -qiymati uchun referens (asosiy) burchakli koordinatalar sonini bildiradi. Fazoviy (spatial) tahlilda NR 3 yoki 4 ga teng bo'ladi, bu esa tanlangan burchak parametrizatsiya turiga bog'liq:

$$\sum_{k=1}^4 \theta_k^i = 1$$

Tekislikdagi (planar) tahlilda mahalliy koordinatalar tizimidan global koordinatalar tizimiga o'tish uchun ishlatiladigan transformatsiya matritsasi A^i quyidagicha beriladi (bu holda faqat bitta burchakli koordinata θ^i kerak bo'ladi):

$$A^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_1^i & -\sin \theta_1^i \\ \sin \theta_1^i & \cos \theta_1^i \end{bmatrix}$$

Natijada quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\dot{A}^i = \dot{\theta}^i \begin{bmatrix} -\sin \theta_1^i & -\cos \theta_1^i \\ \cos \theta_1^i & -\sin \theta_1^i \end{bmatrix}$$

[4]-manbada keltirilgan protseduraga muvofiq, i -jismning kinetik energiyasi bo'linib yozilgan shaklda quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$T^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^i & \dot{q}_f^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{rr}^i & m_{rf}^i \\ m_{fr}^i & m_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^i \\ \dot{q}_f^i \end{bmatrix}$$

yoki bu ifoda yanada ixcham shaklda quyidagicha yozilishi mumkin: $T^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} M^i \dot{q}^i$, bu yerda $\dot{q}^i = [\dot{q}_r^i \ \dot{q}_f^i]^T$ - i -jismning umumlashtirilgan koordinatalar vektori, M^i - i -jismning massaviy matritsasi. (8)-tenglamadagi m_{ff}^i esa doimiy submatritsa bo'lib, u chiziqli konstruksiyalar uchun chekli elementlar metodidagi matritsaga aynan mos keladi. Shuning uchun bu matritsani istalgan struktura dinamikasi dasturi yordamida hosil qilish mumkin. Shuningdek, (8)-tenglamadan ko'rinib turibdiki, kinetik energiya ifodasida referens (asosiy) koordinatalar bilan elastik koordinatalar o'zaro bog'langan (ya'ni coupling mavjud).

m_{rf}^i va m_{fr}^i bog'lanish matritsalarini ($m_{fr}^i = m_{rf}^{iT}$ holatda) nochiziqli bo'ladi, chunki ular θ^i burchak koordinatalariga va i -jismning elastik koordinatalariga bog'liq. Biroq, shuni ko'rsatish mumkinki, bu matritsalar ikki xil matritsalar to'plami ko'paytmasi shaklida yozilishi mumkin - ulardan biri vaqtga bog'liq, ikkinchisi esa makondan bog'liq bo'lib, dinamik tahlil uchun oldindan hosil qilinishi mumkin. Masalan, m_{rf}^i matritsani quyidagicha bo'laklarga ajratilgan shaklda yozish mumkin:

$$m_{rf}^i = \begin{bmatrix} m_{Rf}^i \\ m_{\theta f}^i \end{bmatrix}$$

Bu yerda m_{Rf}^i va $m_{\theta f}^i$ - mos ravishda m_{Rf}^{ij} va $m_{\theta f}^{ij}$ element matritsalarining yig'ilgan shakllaridir. Indeks R va θ - mos ravishda referens (asosiy) translatsion va burchak koordinatalarga, ya'ni R^i va θ^i ga tegishlidir. (7)-tenglamadan va kinetik energiya ta'rifidan kelib chiqib, m_{Rf}^i - matritsasini quyidagicha yozish mumkinligi ko'rsatiladi:

$$m_{Rf}^i = A^i S^{ij}$$

bu yerda A^i - vaqtga bog'liq o'zgaruvchi transformatsiya matritsasi, S^{ij} esa makonga bog'liq matritsa bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi:

$$S^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} D^{ij} dV^{ij}$$

Bu yerda ρ^{ij} - ij -elementning massaviy zichligi, V^{ij} - ushbu elementning hajmi. Shunday qilib, m_{Rf}^i matritsasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$m_{Rf}^i = A^i S^i$$

Bu yerda S^i - S^{ij} element matritsalarining yig'ilgan shakli. Matritsa m_{Rf}^i jismning asosiy nuqtasining global koordinatalar tizimidagi joylashuvini ko'rsatuvchi x, y, z komponentlar bilan elastik deformatsiya orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Agar S^i matritsa tezlik vektori \dot{q}_f^i bilan ko'paytirilsa, hosil bo'lgan vektor deformatsiya tufayli jism o'qlariga nisbatan chiziqli impulsni ifodalaydi. Bu vektor tanlanganda talab qilinadi. Xuddi shunga o'xshash tarzda, referens burchak koordinatalari bilan elastik deformatsiya orasidagi bog'lanish ham ikki xil matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida yozilishi mumkin - ulardan biri jism orientatsiyasiga (holatiga) bog'liq, boshqasi esa element shakl funksiyasiga bog'liq. Bu bog'lanish matritsalarining shakllanishini olti daraja erkinlikka ega ikki o'lchamli nurlanish elementi misolida tushuntirish mumkin, uning shakl funksiyasi quyidagicha beriladi:

$$N^{ij} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi^2+2\xi^3 & l^{ij}(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & l^{ij}(\xi^3-\xi^2) \end{bmatrix}$$

Bu yerda $\xi = x^{ij}/l^{ij}$ va l^{ij} nurlanish (beam) elementining uzunligini bildiradi. Bu holatda S^{ij} matritsa quyidagicha ifodalanadi:

$$S^{ij} = \frac{m^{ij}}{12} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & l^{ij} & 0 & 6 & -l^{ij} \end{bmatrix}$$

Bu yerda m^{ij} - elementning massasini bildiradi. Agar S^{ij} jism o'qiga nisbatan aniqlansa va u A^i transformatsiya matritsasi bilan oldindan ko'paytirilsa, natijada m_{Rf}^{ij} bog'lanish matritsasi hosil bo'ladi. Bu holatda $m_{\theta f}^i$ matritsa quyidagicha beriladi:

$$m_{\theta f}^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} q_f^{i^T} D^{ij^T} A_o^{i^T} A^i D^{ij} dV^{ij} = \int_{V^{ij}} \rho^{ij} q_f^{ij^T} N^{ij^T} A_o^{i^T} A^i N^{ij} dV^{ij}$$

Bu yerda A_o^i - A^i ning θ^i burchak koordinatasi bo'yicha hosilasidir. Shundan kelib chiqib, quyidagilarni ko'rsatish mumkin:

$$A_o^{i^T} A^i = \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu yerda \tilde{I} - egri simmetrik matritsa hisoblanadi. Shunday qilib, $m_{\theta f}^i$ quyidagicha yozilishi mumkin:

$$m_{\theta f}^{ij} = q_f^{ij^T} \int_{V^{ij}} \rho^{ij} N^{ij^T} \tilde{I} N^{ij} dV^{ij} = q_f^{ij^T} \tilde{S}^{ij}$$

Bu yerda \tilde{S}^{ij} - egri simmetrik matritsa hisoblanadi:

$$\tilde{S}^{ij} = \frac{m^{ij}}{60} \begin{bmatrix} 0 & 21 & 3l^{ij} & 0 & 9 & -2l^{ij} \\ -21 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ -3l^{ij} & 0 & 0 & -2l^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2l^{ij} & 0 & 21 & -3l^{ij} \\ -9 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 \\ 2l^{ij} & 0 & 0 & 3l^{ij} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uch o'lchovli (3D) tahlil holatida ham shunga o'xshash protsedura qo'llanilishi mumkin.

Qovushqoq-elastik model. Mazkur tadqiqotda qovushqoq-elastik jismlar Kelvin-Voigt materialidan tashkil topgan deb faraz qilinadi. Ushbu model uchun ij -elementi bo'yicha kuchlanish-deformatsiya munosabati quyidagicha ifodalanadi:

$$\sigma^{ij} = E^{ij} \epsilon^{ij} + F^{ij} \dot{\epsilon}^{ij} \quad (9)$$

Bu yerda: σ^{ij} - kuchlanish vektori; ϵ^{ij} - deformatsiya vektori; E^{ij} - elastik koeffitsiyentlar matritsasi; F^{ij} - so'nish koeffitsiyentlari matritsasi;

ij -elementning elastik va qovushqoq-elastik kuchlar ta'siridan kelib chiqqan virtual ish quyidagicha ifodalanadi:

$$\delta \bar{W}^{ij} = \int_{V^{ij}} \delta \varepsilon^{ij} \sigma^{ij} dV^{ij} \quad (10)$$

Bu yerda V^{ij} - element hajmi. (9)-tenglamani (10)-tenglamaga qo'ysak, quyidagi natija hosil bo'ladi:

$$\delta \bar{W}^{ij} = \int_{V^{ij}} \left(\delta \varepsilon^{ijT} E^{ij} \varepsilon^{ij} + \delta \varepsilon^{ijT} F^{ij} \dot{\varepsilon}^{ij} \right) dV^{ij} \quad (11)$$

Deformatsiya-siljish munosabati quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$\varepsilon^{ij} = C^{ij} N^{ij} e^{ij} \quad (12)$$

Bu yerda C^{ij} - deformatsiya va siljish o'rtasidagi bog'lanishni belgilovchi differensial operator. (4) va (5)-tenglamalardan foydalanib, (12)-tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\varepsilon^{ij} = C^{ij} D^{ij} q_f^i \quad (13)$$

(13)-tenglamani vaqt bo'yicha differensiallash natijasida quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\dot{\varepsilon}^{ij} = C^{ij} D^{ij} \dot{q}_f^i \quad (14)$$

(13) va (14)-tenglamalarni (11)-tenglamaga qo'ysak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\delta \bar{W}^{ij} = \int_{V^{ij}} \delta q_f^{iT} \left[(C^{ij} D^{ij})^T E^{ij} (C^{ij} D^{ij}) \right] q_f^i dV^{ij} + \int_{V^{ij}} \delta q_f^i \left[(C^{ij} D^{ij})^T F^{ij} (C^{ij} D^{ij}) \right] \dot{q}_f^i dV^{ij} \quad (15)$$

(15)-tenglama quyidagi ixcham shaklda yozilishi mumkin:

$$\delta \bar{W}^{ij} = \delta q_f^{iT} K^{ij} q_f^i + \delta q_f^{iT} \bar{C}^{ij} \dot{q}_f^i \quad (16)$$

Bu yerda: K^{ij} va \bar{C}^{ij} mos ravishda ij -elementning qattqlik matritsasi va so'nish matritsasi sifatida aniqlanishi mumkin va ular quyidagicha ifodalanadi:

$$K^{ij} = \int_{V^{ij}} (C^{ij} D^{ij})^T E^{ij} (C^{ij} D^{ij}) dV^{ij}, \quad \bar{C}^{ij} = \int_{V^{ij}} (C^{ij} D^{ij})^T F^{ij} (C^{ij} D^{ij}) dV^{ij}$$

Shunday qilib, i -jismning elastik va qovushqoq-elastik kuchlar ta'siridan kelib chiqqan virtual ishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\delta \bar{W}^i = \begin{bmatrix} \delta q_r^{iT} & \delta q_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r^i \\ q_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta q_r^{iT} & \delta q_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^i \\ \dot{q}_f^i \end{bmatrix} \quad (17)$$

Bu yerda: K_{ff}^i va C_{ff}^i - mos ravishda elementlar K_{ff}^i va \bar{C}_{ff}^i matritsalarining yig'ilgan shaklidir.

Chiziqli bo'lmagan cheklov tenglamalari. Ushbu cheklovlar qattiq, elastik yoki viskoelastik jismlarni bir-biriga ulanadigan qilib beradi. Umuman olganda, bu tenglamalar vektor shaklida quyidagicha yoziladi:

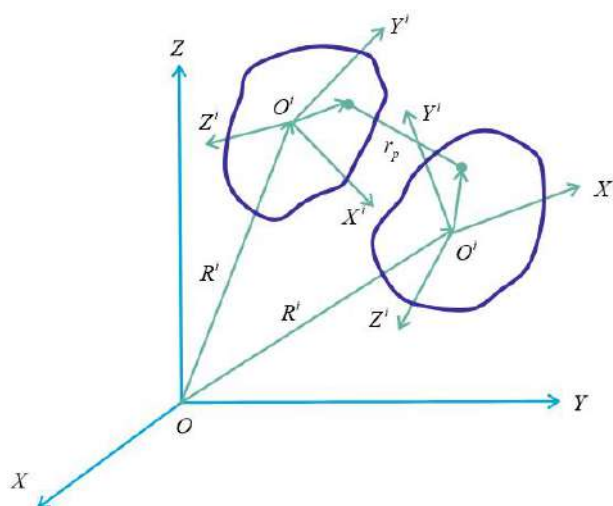
$$\Phi(q, t) = 0 \quad (18)$$

bu yerda $\Phi = [\Phi_1(q, t), \Phi_2(q, t), \dots, \Phi_m(q, t)]^T$ - mustaqil m ta cheklov tenglamalari vektori, q - tizimning umumlashtirilgan koordinatalari vektori, t - vaqt. Tizimning umumlashtirilgan koordinatalari vektori quyidagicha bo'linadi:

$$q = \begin{bmatrix} q_r^T & q_f^T \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

bu yerda $q_r = [q_r^{1T}, q_r^{2T}, \dots, q_r^{nT}]^T$ - tizimning bog'langan koordinatalari, $q_f = [q_f^{1T}, q_f^{2T}, \dots, q_f^{nT}]^T$ - elastik koordinatalar; n - tizimdagi jismlar soni.

1-rasmda i va j jismlar orasidagi o'zaro bog'lanish tasvirlangan. Shunda, harakatsiz koordinata tizimi markazidan o'tuvchi vektor tenglama quyidagicha ifodalanadi:



1-rasm. Qo‘shni jismlar orasidagi bog‘lanishlar (cheklovlar)

$$R^i + A^i q_i^j + r_p - R^j - A^j q_m^j = 0$$

Sferik birikma (yoki tekislikdagi tahlilda aylanuvchi birikma) uchun cheklov tenglamalari r_p ni tenglashtirish orqali aniqlanishi mumkin. Shunday qilib,

$$R^i + A^i q_i^j - R^j - A^j q_m^j = 0$$

Ushbu cheklov tenglamalari ikki jismning yo‘nalishiga bog‘liq bo‘lgani sababli, ular chiziqli bo‘lmaganligi aniq. Ikki jism orasidagi qattiq bog‘lanish esa ularning tegishli tugun nuqtalarida nisbiy burchakli aylanishni oldini oluvchi qo‘shimcha tenglamalar orqali aniqlanadi.

Tashqi kuchlar. Jismga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar tomonidan bajarilgan virtual ish quyidagicha ifodalanadi:

$$\delta W_{ex}^i = \bar{Q}^{i^T} \delta q^i \quad (20)$$

bu yerda \bar{Q}^i - i -jismning umumlashgan kuch vektoridir. (20)-tenglama esa bo‘linma ko‘rinishda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\delta W_{ex}^i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_r^{i^T} & \bar{Q}_f^{i^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_r^i \\ \delta q_f^i \end{bmatrix} \quad (21)$$

Bu yerda \bar{Q}_r^i va \bar{Q}_f^i mos ravishda tayanch koordinatalar hamda elastik koordinatalarga tegishli umumlashgan kuchlardir.

Tizimning harakat tenglamalari. (18)-tenglama bilan berilgan cheklovlar ish bajarmaydi degan taxmin asosida, i -jism uchun harakat tenglamalarining variatsion shakli quyidagicha ifodalanadi:

$$\left[\frac{d}{dt} (T_{q^i}^i) - T_{q^i}^i - Q^{i^T} \right] \delta q^i = 0 \quad (22)$$

(18)-tenglama bilan berilgan cheklovlarga mos keluvchi barcha virtual siljishlar δq^i uchun, (22)-tenglamadagi pastki indeksli yozuv vektorga nisbatan differensial olishni bildiradi. Bu yerda Q^i - (17) va (21) tenglamalar yordamida aniqlanadigan umumlashgan kuchlar vektoridir. Optimallashtirish nazariyasiga ko‘ra, shunday ko‘paytiruvchi vektor $\lambda \in R^m$ mavjudki, bunda m - cheklov tenglamalari sonini bildiradi, shunda quyidagi tenglik bajariladi:

$$\frac{d}{dt} (T_{q^i}^i)^T - (T_{q^i}^i)^T - Q^i + \Phi_{q^i}^T \lambda = 0 \quad (23)$$

Bu yerda T^i va Φ mos ravishda (8) va (18)-tenglamalarda berilgan. (23)-tenglamaning chap tomonidagi dastlabki ikki had quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\frac{d}{dt} (T_{q^i}^i)^T - (T_{q^i}^i)^T = M^i (\ddot{q}^i) \dot{q}^i - F^i (q^i, \dot{q}^i) \quad (24)$$

Bu yerda M^i - (8)-tenglamada keltirilgan bo‘linmalarga ega bo‘lgan i -jismning massalar matritsasi, va F^i - vaqt hamda umumlashgan koordinatalarga nisbatan kinetik energiyani differensiallash natijasida hosil bo‘ladigan kvadratik tezlik vektoridir. Shundan so‘ng, (23)-tenglama bo‘linma ko‘rinishda quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\begin{bmatrix} m_{rr}^i(q^i) & m_{rf}^i(q^i) \\ m_{fr}^i(q^i) & m_{ff}^i(q^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r^i \\ \ddot{q}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r^i \\ \dot{q}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r^i \\ q_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_r^i \\ Q_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_r^i \\ F_f^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_{q_r^i}^T \\ \Phi_{q_f^i}^T \end{bmatrix} \lambda \quad (25)$$

yoki ixcham shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$M^i \ddot{q}^i + C^i \dot{q}^i + K^i q^i = Q^i + F^i - \Phi^T \lambda \quad (26)$$

Bu yerda M^i , C^i va K^i - mos ravishda i -jismning massa, so‘nish va qattqlik matritsalaridir. (26)-tenglama va (18)-tenglama birgalikda qovushqoqelastik jismning cheklangan harakat tenglamalarini hosil qiladi. Elastik jismni tahlil qilish holatida, (26)-tenglama so‘nish matritsasi C^i nol matritsa sifatida qabul qilingan holda qo‘llaniladi. Qattiq jismni tahlil qilish esa shuningdek (26)-tenglama asosida, $q_f^i = 0$ deb olgan holda amalga oshiriladi.

Modal tahlil. Har bir jismning tebranish modlari tajribaviy yo‘l bilan aniqlanishi mumkin. Umuman olganda, egiluvchan jismning fizik koordinatalaridan modal koordinatalarga o‘tish quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$q_f^i = \bar{B}^i p_f^i \quad (27)$$

Bu yerda \bar{B}^i - modal matritsa, va p_f^i - modal koordinatalar vektoridir. Shundan so‘ng, (27)-tenglama quyidagi shaklda qayta yozilishi mumkin:

$$q^i = B^i p^i \quad (28)$$

Tayanch koordinatalarni hisobga olish uchun. (28)-tenglamada B^i va p^i quyidagicha aniqlanadi:

$$B^i = \begin{bmatrix} I \\ \bar{B}^i \end{bmatrix}, \quad p^i = \begin{bmatrix} q_r^{iT} & p_f^{iT} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

(28)-tenglamani (26)-tenglamaga qo‘yib, uni oldindan B^{iT} ga ko‘paytirsak, quyidagi natija hosil bo‘ladi

$$M_b^i \ddot{p}^i + C_b^i \dot{p}^i + K_b^i p^i = Q_b^i + F_b^i - \Phi_{p^i}^T \lambda \quad (30)$$

bu yerda

$$M_p^i = B^{iT} M^i B^i, \quad C_p^i = B^{iT} C^i B^i, \quad K_p^i = B^{iT} K^i B^i \quad (31-33)$$

$$Q_p^i = B^{iT} Q^i, \quad F_p^i = B^{iT} F^i, \quad \Phi_{p^i} = \Phi_{q^i} B^i \quad (34-36)$$

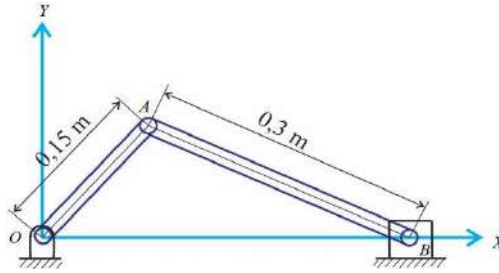
Maxsus hol sifatida, (27)-tenglamadagi \bar{B}^i modal matritsasining ustunlari tenglamani yechish natijasida hosil bo‘ladigan tebranishlarning normal modlari bo‘lishi mumkin.”

$$m_{ff}^i \ddot{q}_f^i + K_{ff}^i q_f^i = 0 \quad (37)$$

Bu holda K_p^i va $\bar{B}^{iT} m_{ff}^i \bar{B}^i$ matritsalar diagonal bo‘ladi. Agar (25)-tenglamadagi C_{ff}^i so‘nish (damping) matritsasi m_{ff}^i yoki K_{ff}^i matritsalaridan biriga yoki ikkala matritsaga mutanosib deb faraz qilinsa, u holda (32)-tenglamadagi keltirilgan so‘nish matritsasi C_p^i diagonal matritsa bo‘ladi; uning elementlari esa modal so‘nish koeffitsiyentlari β dan iborat bo‘ladi.

Sonli (raqamli) misollar. 2-rasmda ko‘rsatilgan slayder-krank mexanizmi OA bilan belgilangan qattiq krank, bir xil dumaloq ko‘ndalang kesimga ega bo‘lgan AB bog‘lovchi sterjen va B nuqtasida joylashgan sirpanadigan blokdan iborat. O‘lchamlar va material xossalari [4]-manbada ko‘rsatilganlar bilan

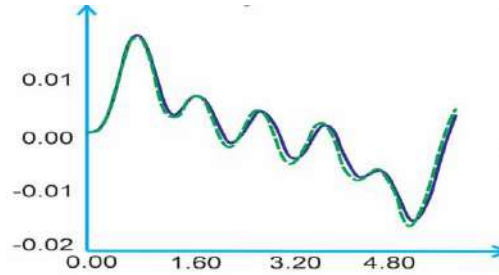
bir xil. Barcha jismlar qattiq deb qaraladi, faqat bog'lovchi sterjen viskoelastik materialdan tayyorlangan jism sifatida hisobga olinadi.



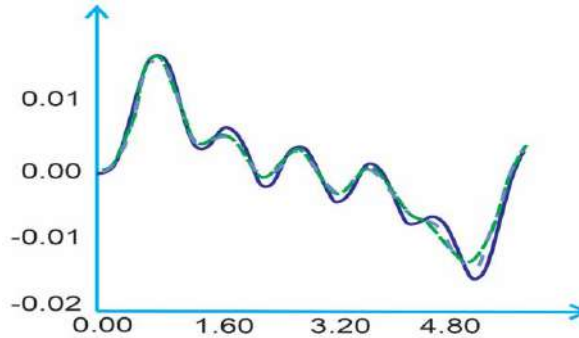
2-rasm.

Bu yerda modal tahlil qo'llanilgan bo'lib, modal so'nish ko'effitsiyenti β ning uchta vakillik qiymati ishlatilgan: $\beta = 0.01$, $\beta = 0.03$ va $\beta = 0.05$. Har bir holatda barcha modalar bir xil so'nish ko'effitsiyentiga ega deb qabul qilinadi. Krank val esa doimiy burchak tezlik $\omega = 150 \text{ rad} / \text{s}$ bilan aylantiriladi.

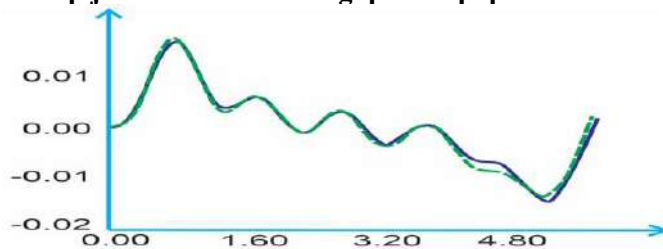
Avvalo, tutqichli jism ikki prujina elementiga bo'lingan va so'nishsiz yechim ikki rejim va 1% modal so'nish bilan olingan so'nishli yechim bilan taqqoslangan (qarang, 3-rasm). 3-rasm shuni ko'rsatadiki, ushbu past so'nish ko'effitsiyenti uchun viskoelastik model elastik modeldan farqlana boshlaydi. 4-rasmda turli so'nish ko'effitsiyentlariga ega ikki rejimli yechimlar solishtirilgan. Ko'rinib turibdiki, yuqori so'nish ko'effitsiyenti ishlatilganda amplitudalar kamayadi. 5-rasmda esa 3% so'nish ko'effitsiyentiga ega ikki va to'rt rejimli yechimlar taqqoslangan. 6–9-rasmlarda tutqichli sterjen 4 va 8 elementga bo'linganida shunga o'xshash xatti-harakat kuzatiladi, 10-rasmda esa ikki va to'rt elementli yechimlar, ikki rejim va 3% so'nish ko'effitsiyenti bilan solishtirilgan.



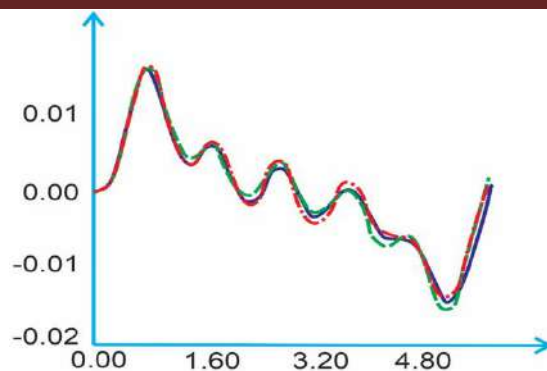
3-rasm. Ikki elementli, so'nishlangan va so'nishsiz modelning ikki rejimli yechimi. Chiziqli nuqta (- - -): 0% so'nish; To'liq chiziq (-): 1% so'nish.



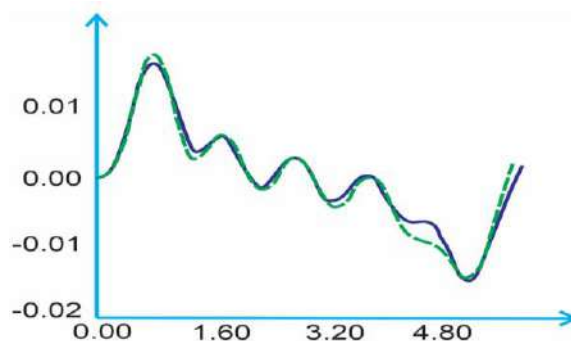
4-rasm. Turli so'nish (damping) ko'effitsiyentlariga ega ikki rejimli, ikki elementli yechimlar. To'liq chiziq (-): 1% so'nish; Chiziqli nuqta (- - -): 3% so'nish; Ikki chiziq va bo'shliq (--): 5% so'nish. Ko'p jismlı sistemalarning qovushqoqelastik so'nishi



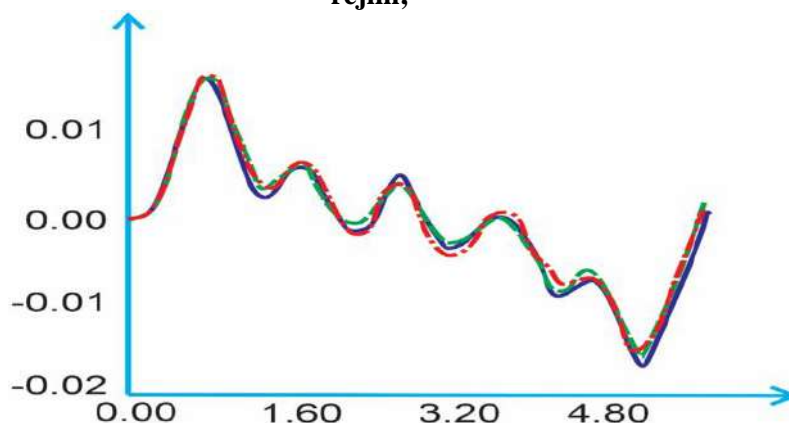
5-rasm. 3% so'nish (damping) ko'effitsiyentiga ega ikki elementli yechim. To'liq chiziq (—): ikki rejim; Chiziqli nuqta (- - -): to'rt rejim.



6-rasm. Turli so'nish (damping) koeffitsiyentlariga ega ikki rejimli, to'rt elementli yechimlar. Chizikli nuqta (- - -): 1% so'nish; To'liq chiziq (—): 3% so'nish; Ikki chiziq va bo'shliq (--): 5% so'nish.

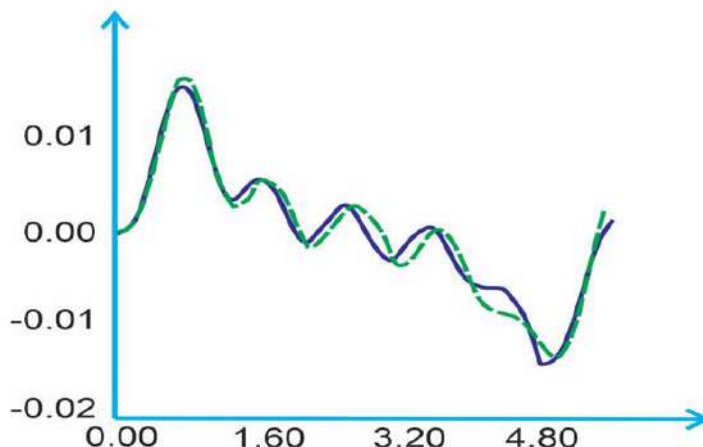


7-rasm. 3% modal so'nishga (damping) ega to'rt elementli yechimlar. To'liq chiziq (—): ikki rejim;

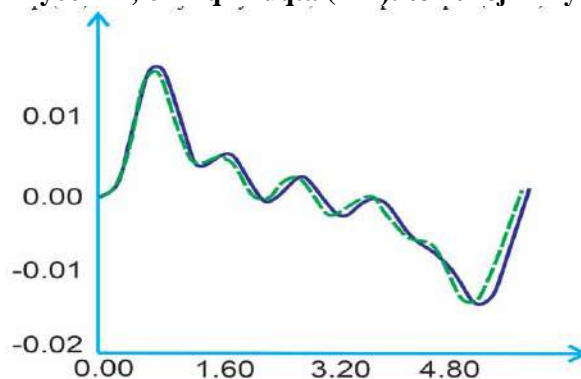


Chizikli nuqta (- - -): to'rt rejim.

8-rasm. Turli so'nish (damping) koeffitsiyentlariga ega ikki rejimli, sakkiz elementli yechimlar. To'liq chiziq (—): 1% so'nish; Bitta chiziq va bo'shliq (-): 3% so'nish; Ikki chiziq va bo'shliq (--): 5% so'nish.



9-rasm. 3% soʻnish (damping) koeffitsiyentiga ega sakkiz elementli yechimlar. Toʻliq chiziq (—): ikki rejimli yechim; chiziqli nuqta (- - -): toʻrt rejimli yechim.



10-rasm. 5% soʻnish (damping) koeffitsiyentiga ega ikki rejimli yechimlar. Chiziqli nuqta (- - -): toʻrt element; Toʻliq chiziq (—): ikki element.

Xulosa va umumiy lashtirishlar. Koʻp jismli tizimlarning viskoelastik tahlili uchun cheklangan elementlar (finite element) asosidagi matematik model ishlab chiqildi. Har bir elastik yoki viskoelastik jismning holati (konfiguratsiyasi) uchta holat rejimi orqali aniqlanadi: qattiq jism rejimi (rigid body modes), mos yozuv (reference) rejimi, normal tebranish (normal modes). Taqdim etilgan model tizim elementlarining geometriyasida katta oʻzgarishlarni hisobga olish imkonini beradi, natijada yuqori darajada nolinear (chiziqli boʻlmagan) matematik model hosil boʻladi. Tahlilda mos yozuv harakati (reference motion) va elastik deformatsiya orasidagi inertsia bogʻlanishlari inobatga olingan. Natijada hosil boʻlgan bogʻlanish (coupling) matritsalarini ikki turdagi matritsalar koʻpaytmasi sifatida ifodalaniishi mumkinligi koʻrsatildi: biri vaqtga bogʻliq matritsa, ikkinchisi fazoviy (makoniy) matritsa boʻlib, ular dinamik tahlildan oldin hisoblab olinadi. Modelda chiziqli viskoelastik Kelvin–Voigt modeli qoʻllanildi, bunda stress (zoʻriqish) deformatsiya va uning vaqt boʻyicha hosilasiga (tezligiga) proporsional deb qabul qilinadi. Ushbu yondashuv doimiy soʻnish (damping) matritsasini beradi va soʻnish kuchlari faqat elastik tezliklarga bogʻliq boʻladi.

ADABIYOTLAR:

1. Erdman A.G. and Sandor G.N. 1972 *Mechanisms and Machine Theory* 7, 19-33. *Kinetoelastodynamics-a review of the state of the art and trends.*
2. Lowen G.G. and Jandrasits W.G. 1972 *Mechanisms and Machine Theory* 7,3-17. *Survey of investigations into the dynamic behavior of mechanisms containing links with distributed mass and elasticity.*
3. Esanov N.Q. *Vibration analysis of viscoelastic pipeline compensators. // Journal of Mechanics and Engineering*, 2024, Vol. 12(3), pp. 45–59.
4. Esanov N. Q., & Saipnazarov J. M. (2024). *Effect of moving load on a cylindrical shell with an elastic filler. // Modern Innovations, Systems and Technologies*, 4(4), 0301–0309. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2024-4-4-0301-0309>.
5. Esanov N. Q., & Saipnazarov J. M. (2024) *On propagation of natural waves in viscoelastic media.*
6. Esanov N.K., Almuratov Sh.N., Saipnazarov, J. M., Ishmamatov M, Raxmonova G.X. *Free Vibrations of a Spherical shell with a Pinched Edge.*
7. Yunusov G. G.; Esanov N.Q., Almuratov Sh.N., Ablokulov Sh., Sobirov R. *On numerical simulation of vibrations in radio-electronic structures.*
8. Esanov N.Q., *Natural and forced oscillations of pipelines in contact with the Winkler medium.*
9. Сафаров И.И., Эсанов Н.Қ., & Саипназаров Ж.М., Халилов Ш.Ф. *Колебания плоской вязкоупругой спиральной пружины.*
10. Hurty W.C. *Dynamic analysis of structural system using component models. 1965 American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 3, 678-685.

KO'P QATLAMLI QOVUSHOQ-ELASTIK STERJENLI KONSTRUKSIYALARGA XOS TO'LQINLARNI TARQALISHI

Jo'rayev Shuhrat Isroilovich,

Buxoro davlat pedagogika instituti Matematika va informatika kafedrası dotsenti, f.-m.f.f.d.(PhD)

sjurayer509@gmail.com

Karimova Sanobar To'yboevna,

Toshkent kimyo- texnologiya instituti,

"Fizika va energetika" kafedrası katta o'qituvchisi sanobarkarimova1974@gmail.com

Ixtiyorov Sardor Zafar o'g'li,

Toshkent Kimyo xalqaro universiteti

1-bosqich magistranti

sardorikhtiyorov@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ko'p qatlamli qovushoq elastik silindrsimon sterjenli konstruksiyalarda rezonans xos to'lqinlarning tarqalish masalasi yechilgan. Qovushoq elastik sterjenlarda egiluvchan, burama va egiluvchan-burama to'lqinlarning tarqalish jarayonlarini o'rganish masalalarini yechish metodikasi va algoritimini ishlab chiqish, sonli olish va tahlil qilingan. Qobiq qalinligi oshishi bilan tebranish chastotalarining sekin oshishi topilgan. Buni qobiq qalinligi oshishi bilan silindrning ichki qatlamlarining tangensial ko'chishi qobiq bilan bog'langan tashqi qatlamning ko'chishiga nisbatan ortishi, silindrning inersiya kuchlarining ortishiga va chastotaning kamashiga sabab bo'lishi topilgan.

Kalit so'zlar: ko'p qatlamli, qovushoq - elastik silindr, sterjenli konstruksiya, rezonans, xos to'lqin.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН, ХАРАКТЕРНОЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Аннотация. В данной статье решена задача распространения резонансных волн в многослойных упругих цилиндрических стержневых конструкциях. Разработаны, численно получены и проанализированы методология и алгоритм решения задач изучения процессов распространения упругих, крутильных и упруго-крутильных волн в упругих стержнях. Обнаружено медленное увеличение частоты колебаний с увеличением толщины оболочки. Это связано с тем, что с увеличением толщины оболочки тангенциальное смещение внутренних слоёв цилиндра возрастает относительно смещения внешнего слоя, соединённого с оболочкой, что приводит к увеличению инерционных сил цилиндра и уменьшению частоты.

Ключевые слова: многослойная структура, упруго-композиционный цилиндр, стержневая конструкция, резонанс, собственные волны.

PROPAGATION OF WAVES IN MULTILAYER ALLOY-ELASTIC STRAND STRUCTURES

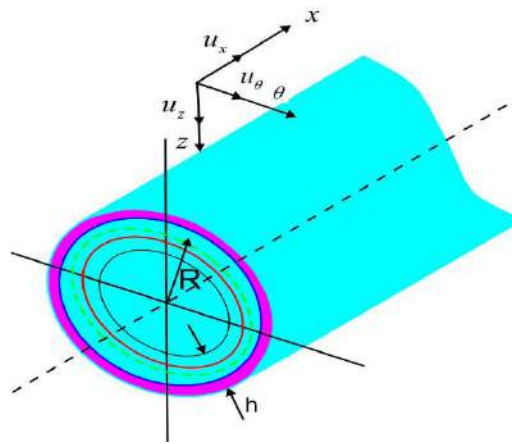
Abstract. This article deals with the problem of propagation of resonant eigenwaves in multilayered viscous-elastic cylindrical rod structures. The methodology and algorithm for solving the problems of studying the propagation processes of elastic, torsional and flexural-torsional waves in viscous elastic rods are developed, numerically obtained and analyzed. A slow increase in vibration frequencies is found with increasing shell thickness. This is due to the fact that with increasing shell thickness, the tangential displacement of the inner layers of the cylinder increases relative to the displacement of the outer layer connected to the shell, which causes an increase in the inertial forces of the cylinder and a decrease in the frequency.

Keywords: multilayer, viscous-elastic cylinder, rod structure, resonance, eigenwave.

Kirish. Buriilish to'lqinlari sirt to'lqini rejimidan foydalanishga qaraganda yer osti inshootlari nuqsonlari uchun yuqori sezgirlikni (2,35 martadan ko'proq) ta'minlaydi [1,2]. Kontakt nuqsonlarining dastlab kuchlanishli dumaloq silindrda buriilish to'lqinlarining tarqalish ta'siri [3,4] ishlarda ko'rib chiqilgan.

Oldindan kuchlanishli qattiq jismlar uchun elastik to‘lqinlarning uch o‘lchovli chiziqli nazariyasidan foydalangan holda alohida bir xil qattiq jism modelini o‘rganish shuni ko‘rsatdiki, chegara nuqsonlari to‘lqin tarqalish tezligining asimptotik chegarasi qiymatlariga ta’sir qilmaydi [5,6]. Yuqoridagi ishda chegara nuqsonlarining dastlabki kuchlanishlarga ta’siriga qarab, to‘lqin tarqalish tezligi uchun sonli natijalar ham keltirilgan. Yupqa devorli sterjenlarning sof burishi, ya’ni bo‘ylama kuchlar va egilish momentlari ta’siridagi egilish-burilish tebranishlari muammolari, ko‘ndalang kesimli sterjenlarning burish va egilish-burilish tebranishlari chastotalarini aniqlash tenglamalari [7,8] ishlarda olingan va taqribiy yechish formulalar olingan. Bunday yechimlar juda muhimdir, chunki amalda konstruksiya strukturasi ichidagi sterjenlar turli xil yuklarni ko‘taradi [9]. Ixtiyoriy kesimli yupqa devorli ochiq elastik sterjenlar uchun egilish-burilish to‘lqinlari uchun chiziqli nazariya yaratilgan [10]. Chiziqli nazariyani ishlab chiqarishda murakkab kinematik samaralar hisobga olindi, ularning ketma-ketliklari aniqlandi. Harakatning tenglamalaridan kelib chiquvchi umumiy dispersiya xususiyatlarini tahlil qilish asosida kuchlanish va siljishlarning o‘rtacha umumlashtirilgan qiymatlarini topishgan. Taklif qilingan fundamental munosabatlar material mustahkamligining statik qonunlarini o‘z ichiga olgan egilish-burilish cheklovlarini hisobga oladi.

Masalani qo‘yilishi va yechish metodikasi. Bu holda 1 - rasmda berilgan quyidagi ko‘rinishdagi ko‘p qatlamli silindrik sterjenli konstruksiyaga to‘lqin tarqalishi masalasini ko‘ramiz.



1- rasm. Ko‘p qatlamli to‘ldiruvchili silindrik sterjen

Deformatsiyalanuvchan qatlamning harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi [11]:

$$\tilde{\mu}_k \nabla^2 \vec{u} + (\tilde{\lambda}_k + \tilde{\mu}_k) \text{grad div} \vec{u} = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots, N.) \quad (1)$$

Bu yerda, $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ - muhitning ko‘chish vektori; u_x, u_y, u_z - ko‘chish vektorining komponentalari. Agar ko‘chish vektorini potentsialli va solenoidli ko‘rinishda tasvirlasak, u holda muhitning ko‘chishi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}.$$

Bu yerda, φ - bo‘ylama to‘lqin potentsiali; $\vec{\psi}(\psi_r, \psi_\theta, \psi_z)$ - ko‘ndalang to‘lqin potentsiali. Bu potentsial funksiyalar dekart koordinatalar sistemasida quyidagi to‘lqin tenglamalarini qanoatlantiradi. Ko‘chish, deformatsiya vektorlari va siljish potentsiallari silindrik koordinatalar sistemasida quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}; \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{\bar{c}_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_z - \frac{1}{\bar{c}_s^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{\bar{c}_s^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{\bar{c}_s^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Bu yerda,

$$\bar{c}_s^2 = c_s^2 \Gamma_\kappa; \quad \bar{c}_p^2 = c_p^2 \Gamma_\kappa.$$

Bu yerda, uzun tekis (yoki silindrik) jismlardan tashkil topgan dissipativ mexanik sistemalarda to'liq tarqalishi masalasi ko'riladi. U holda (3) differensial tenglamalar sistemasinigi yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\alpha_k r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_{pk} z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{rk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nr}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_{pk} z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{\theta k}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n\theta}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_{pk} z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_{zk}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nz}(\beta_k r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_{pk} z} e^{-i\omega t}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Bu yerda, n - butun son; γ_{pk} - to'liq tarqalishining doimiy soni; ω - kompleks xususiy chastota;

$$r = \frac{r_1}{a_0}, \quad z = \frac{z_1}{a_0}. \quad \text{Har bir komponent uchun cheksizlikda } (r \rightarrow \infty) \text{ Zommerfeld shartlari qo'yiladi [12].} \quad (4)$$

ni (3) ga qo'yib, quyidagi oddiy differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_k}{dr} + \left(\alpha_k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi_k &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{zk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{zk}}{dr} + \left(\beta_k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi_{zk} &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \psi_{\theta k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{\theta k}}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(-n^2 \psi_{\theta k} + 2n \psi_{\theta k} - \psi_{\theta k} \right) \beta_k^2 \psi_{\theta k} = 0;$$

$$\frac{d^2 \psi_{rk}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{rk}}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(-n^2 \psi_{rk} + 2n \psi_{\theta k} - \psi_{rk} \right) \beta_k^2 \psi_{rk} = 0;$$

Bu yerda:

$$\alpha_k^2 = \frac{\bar{\Omega}_k^2}{\gamma_k^2} - \gamma_p^2; \quad \beta_k^2 = \bar{\Omega}_k^2 - \gamma_p^2; \quad \bar{\Omega}_k = \frac{\omega \alpha_k}{\bar{c}_{sk}}; \quad \gamma_k^2 = \frac{2(1 - \nu_k)}{1 - 2\nu_k}.$$

(5) tenglamalardagi birinchi ikkita tenglamalar $k=1$ birinchi (tutash) va tashqi silindr ($k=N$) uchun quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$\phi_k(r) = \begin{cases} F_{nk} J_n(\alpha_k r), & k = 1; \\ F'_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r), & k = N; \end{cases} \quad (6)$$

$$\psi_z(r) = \begin{cases} M_{1k} J_n(\beta_k r), & k = 1; \\ M'_{1k} H_n^{(1)}(\beta_k r), & k = N; \end{cases} \quad (7)$$

Bu yerda, $J_n(\alpha_k r)$ - n - tartibli Bessel funksiyasi, $H_n^{(1)}(\beta_k r)$ - n - tartibli birinchi tipdagi Xankel funksiyasi. (5) dagi qolgan ikkita tenglamaning yechimlari ham Bessel va Xankel funksiyalari orqali ifodalanadi:

$$\psi_{rk}(r) = \begin{cases} L_{1nk} J_{n-1}(\beta_k r) + L_{2nk} N_{n+1}(\beta_k r), & k = 1; \\ L'_{1nk} H_{n-1}^{(1)}(\beta_k r) + L'_{2nk} H_{n+1}^{(2)}(\beta_k r), & k = N; \end{cases} \quad (8)$$

(5) differensial tenglamalar sistemasining (6),(7) va (8) yechimlari $6k-2$ ta ixtiyoriy o'zgarmlarni o'z ichiga oladi. Ixtiyoriy o'zgarmlardan bittasini ixtiyoriy usulda tanlash imkoniyatidan foydalanib, bundan keyin qabul qilamiz:

$$L_{1k} = L'_{1k} = 0, \quad \psi_{rk} = \psi_{\theta k}$$

Ikkita aniq jismga qattiq mahkamlanganlik sharti qo'yiladi:

$$r = R_k; \quad \sigma_{rrk} = \sigma_{r(\kappa+1)}; \quad \sigma_{r\theta k} = \sigma_{r\theta(\kappa+1)}; \quad u_k = u_{\kappa+1}; \quad \mathcal{G}_k = \mathcal{G}_\kappa;$$

$$\sigma_{rz k} = \sigma_{rz(\kappa+1)}; \quad w_k = w_{\kappa+1}.$$

$$r = R_{\kappa+1}; \quad \sigma_{rr(\kappa+1)} = 0; \quad \sigma_{r\theta(\kappa+1)} = 0; \quad \sigma_{rz(\kappa+1)} = 0. \quad (9)$$

Shunday qilib, (5)-(8) ni va (9) hisobga olgan holda kompleks parametrli dispersion tenglama (transsendent tenglama) olamiz. Masala ortogonal progonka va Myuller metodlarini birgalikda qo'llash orqali kompleks arifmetikada yechiladi.

Misol tariqasida uch qatlamli silindrik jismga to'liq tarqalishida osesimetrik masalasini ko'ramiz. Osesimetrik holat uchun dispersiya tenglamasi ikkita mustaqil tenglamaga bo'linadi va bo'y lama-ko'ndalang to'liqlar va burish to'liqlarining tarqalishini alohida o'rganishi mumkin. Qobiq harakati tenglamasi Kirxgoff-Lov gipotezasi yordamida tasvirlangan. Ichki qobiq qalinligini oshirish nisbatan dinamik holatni ifodalovchi parametrlarga ayniqsa sezilarli ta'sirga ega ekanligi aniqlandi. Deformatsiyalanuvchi muhit bilan o'zaro ta'sir qiluvchi ko'p qavatli qovushoq elastik (polimer) qobiqlar ko'rinishidagi tuzilmalar muhandislik va qurilishda keng qo'llanilishini hisobga olsak, ularni dinamik holatini o'rganish dolzarb muammo ekanligi kelib chiqadi. Xususan, yer osti va suv osti rezervuarlari va quvurlarini loyihalashda yuzaga keladigan muammolar ushbu hisoblash sxemasi yordamida hisoblash mumkin. Uch qavatli jismlarning harakat tenglamasini olishda, Kirxgoff-Lyav va Timoshenko gipotezasiga asoslangan qovushoq - elastik nazariyasi va qobiqlari nazariyasining uch o'ldiruvchi tenglamalaridan foydalaniladi. Biroq, dinamik yuklar ostida uch qavatli qovushoq - elastik tuzilmalarni hisoblashning umumiy usullari va algoritmlari hali ishlab chiqilmagan. Uch qavatli qobiqlarning strukturaviy elementlarida erkin to'liqlarning tarqalishi muammolari [13,14] asarlarida qobiq va to'ldiruvchi moddasining qovushoqlik xususiyatlarini hisobga olgan holda ko'rib chiqilgan. To'ldiruvchi moddasining harakati Lamé tenglamalari bilan tavsiflanadi va qobiqning harakati Kirxgoff gipotezasi asosida olingan. Chegaraviy va kontakt shartlar asosida dispersiya tenglamalari olinadi va simmetrik va antisimmetrik to'liqlar uchun fazaviy tezliklar aniqlanadi. Elastik to'ldiruvchi moddasi bo'lgan cheksiz uzun silindrsimon qobiqdagi erkin to'liqlar [15] ishida o'rganiladi. Qatlamli qovushoq elastik tuzilmalar va uzluksiz muhitlar o'rtasidagi o'zaro ta'sir muammolari qo'shimcha tadqiqotlarni talab qiladi. Uch qatlamli silindr, ikkita tashqi qatlamlari silindrik qobiq bo'lib ular orasida to'ldiruvchisi bo'lsin. Qobiqlar orasiga material qovushoq elastik bo'lsin. Qobiq va to'ldiruvchi cheksiz uzun deb faraz qilinadi. Ushbu strukturada xos to'liqlarning tarqalishi o'rganiladi. Qobiqning osesimetrik harakati Kirxgoff-Lyav gipotezasi asosida olingan tenglamalar bilan tavsiflanadi.

$$L_{ijk} [1 - i\Gamma_0(\omega_R)] \vec{U}_{0k} = \frac{(1 - \nu_{0k}^2)}{G_{0k} h_{0k}} \vec{P}_k + \rho_{0k} \frac{(1 - \nu_{0k}^2)}{G_{0k} h} \frac{\partial^2 \vec{U}_{0k}}{\partial t^2}, \quad (k=1,2) \quad (10)$$

Bu yerda, $k=1$ indeks ichki qobiqni (yoki silindrni), $k=2$ tashqi qobiq, $\vec{U}_{0k}(U_k, V_k, W_k)$ - esa tayanch qatlamning o'rta yuzasidagi nuqtalarning siljish vektorini anglatadi. Kirxgoff-Lyav qobiqlari uchun

siljish vektori uch o'lchamga ega. Timoshenko tipidagi gipotezani qondirish uchun siljish vektorining o'lchami beshga teng. Ko'rib chiqilayotgan mexanik tizimning ko'p qatlamli to'ldiruvchisining hajmli kuchlar bo'lmagan taqdirda vektor shaklidagi harakatining chiziqli tenglamasi (1) shaklni oladi. Qatlamlar orasiga qattiq mahkamlanganlik (9) kontakt shartlari qo'yiladi. Qattiq kontakt holatida, siljish vektorining mos keladigan komponentlarining uzluksizlik sharti chegarada qo'yiladi va qobiq yuzasida biz quyidagi shaklni olamiz:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \pm q_{rk}; \quad \sigma_{r\theta} = \pm q_{\theta k}; \quad \sigma_{rx} = \pm q_{xk}; \\ u_r &= W_k; \quad u_\theta = V_k; \quad u_x = U_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Agar chegarada ishqalanish bo'lmasa, u holda

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \pm q_{r1}(r = a); \quad \sigma_{rr} = \pm q_{r2}(r = b); \\ \sigma_{rx} &= \sigma_{r\theta} = 0; \quad u_r = W_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Bu yerda, qobiqlarning to'ldiruvchi bilan aloqasi yo'q ko'taruvchi qatlamlarning o'rta yuzalari bo'ylab sodir bo'ladi deb taxmin qilinadi; a va b qobiqning ichki va tashqi radiuslari; q_{rk} – qobiq tebranishlariga normal reaksiyalari.

Erkin to'lqinlarning tarqalishi materialning qovushoq elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda ko'rib chiqiladi. Osesimmetrik holat uchun dispersiya tenglamasi ikkita mustaqil tenglamaga bo'linadi, bu esa bo'ylama-ko'ndalang to'lqinlar va burish to'lqinlarining tarqalishini alohida o'rganish imkonini beradi. Ushbu maqolada biz viskoyelastik uch qavatli tuzilmalarda burish to'lqinlarining tarqalishini ko'rib chiqamiz. Biz yuk ko'taruvchi qatlamlarning harakatini Timoshenko tipidagi (10) tenglamalar yordamida

tasvirlaymiz, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ holat uchun differensial operatorlarda va siljish vektorining komponentlari

$U_k = W_k = \psi_{xk} = 0$ da o'rnatiladi. Faqat burish to'lqinlari qo'zg'atiladigan qobiqning harakati bitta tenglama bilan tavsiflanadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \\ + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = \frac{\rho_c}{G_{0c} [1 - i\Gamma_0^g \omega_R]} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Nol bo'lmagan kuchlanish komponenti tangensial kuchlanish komponentalari bo'lib quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g(\omega_R)] \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \\ \sigma_{\theta x} &= G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g(\omega_R)] \frac{\partial u_\theta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ushbu masaladagi chegara shartlarini quyidagicha yozamiz:

$$\begin{aligned} u_\theta &= V_1 + \frac{h_1}{2} \psi_{y1}, \quad \sigma_{r\theta} = -q_{\theta 1} \quad r = a_1, \\ u_\theta &= V_2 + \frac{h_2}{2} \psi_{y2}, \quad \sigma_{r\theta} = -q_{\theta 2} \quad r = a_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Yuqorida keltirilgan tenglamalarni yechimlarini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\begin{Bmatrix} V_k \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{k,0} \\ \vartheta_0 \end{Bmatrix} e^{i(\gamma x - \omega t)}, \quad (16)$$

Bu yerda, $V_{k,0}$ – qatlamlarning o‘rta sirt nuqtalarining siljish amplitudasidagi nolga teng bo‘lmagan komponenti; $U_{\theta,0}$ to‘ldiruvchi nuqtalarining siljish amplitudalari; to‘lqin soni, to‘lqin uzunligi va faza tezligi. Agar (16) ni ifodalarni (13) ga qo‘yib, (15) ni hisobga olgan holda $V_{k,0}, \vartheta_{k,0}$ ga nisbatan quyidagi ko‘rinishdagi tenglamani olamiz:

$$\frac{d^2 u_{\theta}^{\cdot}}{dr^{\cdot 2}} + \frac{1}{r^{\cdot}} \frac{du_{\theta}^{\cdot}}{dr^{\cdot}} - \frac{u_{\theta}^{\cdot}}{r^{\cdot 2}} - [1 - M_s^2] \eta^2 u_{\theta}^{\cdot} = 0, \quad (17)$$

$$M_s = \frac{C_f}{C_{0s} [1 - i\Gamma_0^g \omega_R]}.$$

Faza tezligining kattaligiga qarab, (17) tenglamaning yechimi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$u_{\theta}^{\cdot} = A(\gamma) K_1(m_s \eta r^{\cdot}) + B(\gamma) I_1(m_s \eta r^{\cdot}) \quad (M_s < 1),$$

$$u_{\theta}^{\cdot} = A(\gamma) \frac{1}{r^{\cdot}} + B(\gamma) r^{\cdot} \quad (M_s = 1), \quad (18)$$

$$u_{\theta}^{\cdot} = A(\gamma) Y_1(\bar{m}_s \eta r^{\cdot}) + B(\gamma) I_1(\bar{m}_s \eta r^{\cdot}) \quad (M_s > 1).$$

To‘ldiruvchi kuchlanish amplitudalarini (18) formulalar yordamida aniqlab va keyin (14) shartlarini qanoqlantirib dispersiya tenglamasini quyidagi ko‘rinishda olamiz

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

$$a_{11} = -m_s \eta s_4 - n_1 d_4 s_6, \quad a_{12} = m_s \eta s_1 - n_1 d_4,$$

$$a_{21} = -m_s \eta s_5 + n_2 b_4, \quad a_{22} = m_s \eta s_2 + n_2 b_4 s_3, \quad (19)$$

$$s_1 = \frac{I_2(m_s \eta)}{I_1(m_s \eta)}, \quad s_2 = \frac{I_2(m_s \eta \epsilon_1)}{I_1(m_s \eta)}, \quad s_3 = \frac{I_1(m_s \eta \epsilon_1)}{I_1(m_s \eta)},$$

$$s_4 = \frac{K_2(m_s \eta)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}, \quad s_5 = \frac{K_2(m_s \eta \epsilon_1)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}, \quad s_6 = \frac{K_1(m_s \eta)}{K_1(m_s \eta \epsilon_1)}.$$

Bu

$$n_1 = k_1 \gamma_1, \quad n_2 = k_2 \gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \frac{G_{01} [1 - i\Gamma_{01}^g]}{G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g]}, \quad \gamma_2 = \frac{G_{02} [1 - i\Gamma_{02}^g]}{G_{0c} [1 - i\Gamma_c^g]}.$$

Agar $M_s > 1$ uchun determinant elementlari quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi

$$a_{11} = \bar{m}_s \eta Y_2(\bar{m}_s \eta) - n_1 d_4 Y_1(\bar{m}_s \eta),$$

$$a_{12} = -\bar{m}_s \eta I_2(\bar{m}_s \eta) - n_1 d_4 I_1(\bar{m}_s \eta),$$

$$a_{21} = -\bar{m}_s \eta Y_2(\bar{m}_s \eta \epsilon_1) + n_2 b_4 Y_1(\bar{m}_s \eta \epsilon_1), \quad (20)$$

$$a_{22} = -\bar{m}_s \eta I_2(\bar{m}_s \eta \epsilon_1) + n_2 b_4 Y_1(\bar{m}_s \eta \epsilon_1).$$

Agar yuk ko‘taruvchi qatlamlardan (qobiqlardan) biri yoki ikkalasi ham bo‘lmasa, u holda (19) va (20) formulalarda $n_j = 0$. Mutlaqo qattiq yuk ko‘taruvchi qatlam holatida $n_j = \infty$. Bir qavatli Timoshenko tipidagi qobiqda osesimetrik burish to‘lqinlarining ikkita tarqalish tezligi mavjud:

- birinchisi, kesimlarning bir-biriga nisbatan halqalar sifatida aylanishi bilan bog‘liq

$$C_{f1} = C_s = \sqrt{\frac{G_0 [1 - i\Gamma_\mu^g]}{\rho_0}};$$

- ikkinchisi, normalning tangensial yoʻnalishda aylanishi bilan bogʻliq deformatsiyalar natijasida yuzaga keladi

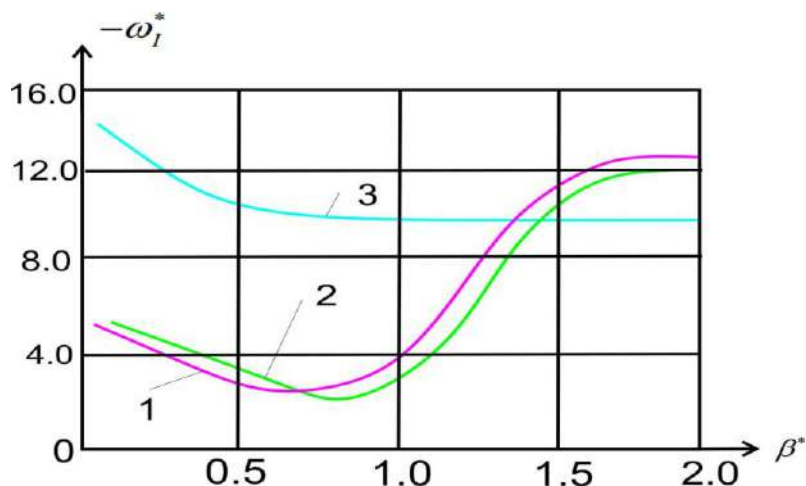
$$C_{f2} = C_s [1 - i\Gamma_g^0] \sqrt{1 + \frac{12k_0^2}{k^2 \eta^2}}, \eta = \frac{\gamma h_2}{k_2}, k_2 = \frac{h_2}{a_2}$$

Kirxgoff-Lyav qobigʻi uchun osesimetrik burish toʻlqinlarining faqat bitta tarqalish tezligi mavjud $C_f = C_s$.

Sonli natijalar va ularning tahlili. Dispersiya tenglamasining (19) sonli yechimi uchun Myuller usuli (transsendental tenglamaning sonli yechimi), Gauss va Laplas yordamida C++ tilida dastur ishlab chiqildi. Bessel va Hankel kompleks argumentining maxsus funksiyalarini hisoblash uchun algoritmi va dastur ishlab chiqildi.



2,a-rasm. Xos chastota haqiqiy qismining toʻlqin soniga bogʻliq oʻzgarishi



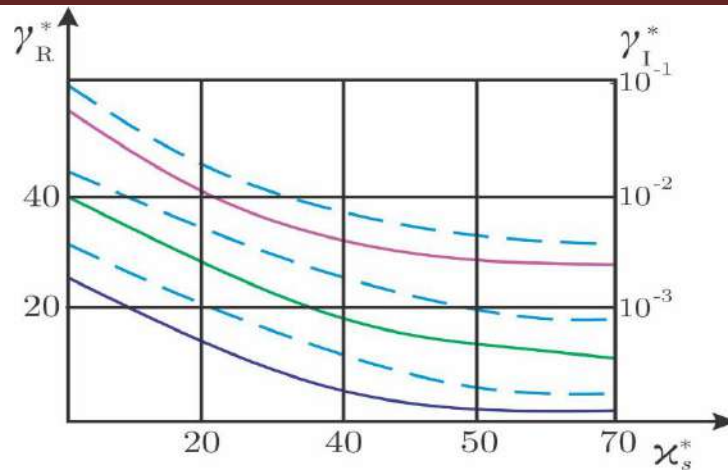
2,b-rasm. Xos chastota mavhum qismining toʻlqin soniga bogʻliq oʻzgarishi

Hisob-kitoblarda oʻlchovsiz parametrlarning quyidagi qiymatlari bilan uch parametrli Koltunov-

Rjanitsin $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$ relaksatsiya yadrosi ishlatilgan:

$$A = 0,048; \quad \beta = 0,05; \quad \alpha = 0,1; \quad k_1 = k_2 = 0,005; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 120,0;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 12,0; \quad k_s = 50; \quad k_0^2 = 2/3; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_s = 0,3.$$



3-rasm. To'ldiruvchi parametrlariga qarab to'liq sonining haqiqiy va xayoliy qismlarining o'zgarishi

Raqamli natijalar 2 va 3-raslarda ko'rsatilgan. 2-rasmda uch qavatli silindrsimon qobiqdagi dastlabki oltita kompleks (haqiqiy va mavhum qismlar) chastotalar xos burama to'liqlarning uchun kompleks dispersiya tenglamalarni yechish orqali olingan egri chiziqlari ko'rsatilgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, tekislikdagi egri chiziqlar zichligi rejim tartibining ortishi bilan ortadi. Qisqa to'liqlar uchun (19) tenglamadan chegaraga o'tish faza tezligining haqiqiy va mavhum qismlari asimptotik formula orqali aniqlangan.

$$c_{0n} = [1 - i\Gamma_\mu^0] \sqrt{1 + \frac{n^2 k^2 \epsilon_1}{4[1 - \epsilon_1^2]^2 \eta^2}}, \quad c_0 = \frac{c_f}{c_{0s} [1 - i\Gamma_\mu^0]}$$

n - harakat moddasi raqami. 3-rasmda belgilangan faza tezligida dastlabki uchta harakat rejimi uchun to'ldiruvchi nuqtalarning tangensial siljishlarining qalinlik bo'yicha $c_0 = 1.4201 - 0.0715$ taqsimlanishi ko'rsatilgan. 3.23-rasmda to'ldiruvchi parametrlarining funksiyasi sifatida to'liq sonining haqiqiy va mavhum qismlarining o'zgarishi $c_0 = 1.4201 - 0.0715$ ko'rsatilgan.

Xulosalar. Materiallarning qovushoq elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda, uch qavatli silindrsimon konstruksiyada burama to'liqlarning tarqalishini o'rganish uchun masala qo'yildi, yechish usuli va algoritmi ishlab chiqildi. Qobiq qalinligi oshishi bilan tebranish chastotalarining sekin oshishi topildi. Buni qobiq qalinligi oshishi bilan silindrning ichki qatlamlarining tangensial ko'chishi qobiq bilan bog'langan tashqi qatlamning ko'chishiga nisbatan ortishi bilan izohlash mumkin. Natijada, silindrning inersiya kuchlari ortadi va chastotaning oshishiga to'sqinlik qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г. Динамика двухслойного линейно-упругого цилиндра при разрывной нагрузке// Строит. Механики и расчет сооружений. -1986.-№ 6,-С. 54-58.
2. Жигалько Ю.Н., Дмитриева Л.М. Реакция ортотропной цилиндрической оболочки на локализованный импульс внешнего давления// Исследования по теории пластин и оболочек.-Казань,1975.-Вып.11.-С.254-261.
3. Safarov, I.I., Tshaev, M.Kh., Boltayev, Z.I., Ishmatov, M.R., Ruziyev, T.R. Propagation of Proper Waves in a Viscoelastic Timoshenko Plate of Variable Thickness. International Journal of Engineering Trends and Technology, 71(1), 2023, pp. 25–30 DOI 10.14445/22315381/IJETT-V71I1P203
4. Бабич Ю.Н. Трёхмерные волновые процессы в составных полях цилиндрах, взаимодействующих с окружающей средой // Пробл. прочности.-1980. -№3.-С.101-104.
5. M. Kh. Tshaev, I. I. Safarov, and M. M. Mirsaidov. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes, J. of the Serbian Society for Computational Mechanics, vol. 13, no. 2, pp. 105-116, 2019, doi:10.24874/jsscm.2019.13.02.08
6. Safarov I.I., Tshaev M.Kh., Boltayev Z.I. Propagation of linear waves in multilayered structural - Inhomogeneous cylindrical shells. Journal of Critical Reviews, 2020, 7(12), p. 893-904 <http://jcreview.com/>
7. Галиев Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем.- Киев: Наук.думка.-1981.-276с.

8. Галиев Ш.У. *Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах.* - Киев: Наук.думка.-1988.-263с.
9. Tshaev, M.Kh. *Realization of Servo-Constraints by Electromechanical Servosystems.* 2010, *RUSSIAN MATHEMATICS.* 54 (12), pp.38-44 DOI 10.3103/S1066369X10120042
10. Новацкий В. *Теория упругости.* М.: Мир, 1975. 872 с.
11. Safarov I.I. and Tshaev, M.Kh. *Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports.* *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy-prikladnaya nelineynaya dinamika.* 31 (1), pp.63-74 DOI: 10.18500/0869-6632-003021
12. Tshaev M.Kh., Karimov I.M., Umarov A.O., Zhuraev Sh.I. *Diffraction of Harmonic Shear Waves on an Elliptical Cavity Located in a Viscoelastic Medium.* *Russian Mathematics,* vol. 67(8), pp. 44–48, 2023 DOI 10.3103/S1066369X23080108 (2023)
13. Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M., “Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects,” *Physica E,* 57, pp. 83-95 (2014).
14. Safarov I.I., Tshaev M.Kh. *Control of resonant oscillations of viscoelastic systems.* *Theoretical and Applied Mechanics,* 2024, 51(1), pp. 1–12 <https://doi.org/10.2298/TAM220510007S>.
15. Durdiyev D.Q., Safarov I.I., Tshaev M.Kh.. *Propagation of Waves in a Fluid in a Thin Elastic Cylindrical Shell.* *Wseas transactions on fluid mechanics* DOI: 10.37394/232013.2024.19.11 , pp.113-119

**HISORAK VA CHIMQURG‘ON SUV OMBORLARINING MIKROFLORASINI
TADQIQ QILISH****Zokirov Bekzod Ulashevich,***Qarshi davlat texnika universiteti “Oziq-ovqat
mahsulotlari texnologiyasi” kafedrası dotsenti**bzokirov012@gmail.com***Xalilov Og‘abek Safar o‘g‘li,***Qarshi davlat texnika universiteti magistranti*

Annotatsiya. Maqolada Qashqadaryo viloyatida mavjud bo‘lgan va aholi iste‘moli hamda ekin maydonlarni sug‘orishga mo‘ljallangan Hisorak va Chimqo‘rg‘on suv omborlarini suvlari va ularni mikroflorasini tadqiq qilishni maqsad qildik. Olib borilgan tadqiqotlarimizning asosiy obyekti sifatida suv omborlarning qirg‘oq bo‘yi va qirg‘oqdan 300-400 metr uzoqlikdagi qismlaridan suv sathining 10-15 sm chuqurligidan namunalar olindi o‘rganildi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, mikroorganizmlarning soni yil bo‘yi va yil fasllariga qarab bir xil bo‘lmas ekan, ya‘ni mikroorganizmlarning soni boshqa fasllarga nisbatan ayniqsa, yoz va kuz fasllarida eng ko‘p miqdorda bo‘ladi.

Kalit so‘zlar: *Bac. fluorescens, Bac. aquatilis, Micrococcus candidans, Hisorak, Chimkurgan, Paramecium caudatum, Colpidium colpoda.*

**ИЗУЧЕНИЕ МИКРОФЛОРЫ ХИСОРАКСКОГО И ЧИМКУРГАНСКОГО
ВОДОХРАНИЛИЩ**

Аннотация. В статье мы поставили задачу изучить воды и микрофлору Чимкурганского и Пачкамарского водохранилищ, существующих в Кашкадарьинской области и предназначенных для потребления человеком и орошения пахотных земель. В качестве основного объекта наших исследований были отобраны пробы с прибрежной части водоёмов и в 300-400 метрах от берега на глубине 10-15 см над уровнем воды. Результаты исследования показали, что количество микроорганизмов неодинаково в течение года и в зависимости от времени года, т.е. количество микроорганизмов выше, чем в другие сезоны, особенно летом и осенью.

Ключевые слова: *Bac. fluorescens, Bac. aquatilis, Micrococcus candidans, Хисорак, Чимкурган, Paramecium caudatum, Colpidium colpoda.*

STUDY OF THE MICROFLORA OF THE HISORAK AND CHIMKURGAN RESERVOIRS

Abstract. In the article, we set the task to study the waters and their microflora of the Hisorak and Chimkurgan reservoirs, existing in the Kashkadarya region and intended for human consumption and irrigation of arable land. As the main object of our research, samples were taken from the coastal part of the reservoirs and 300-400 meters from the coast at a depth of 10-15 cm above the water level. The results of the study showed that the number of microorganisms is not the same throughout the year and depending on the season, i.e. the number of microorganisms is higher than in other seasons, especially in summer and autumn.

Keywords. *Bac. fluorescence, Bac. aquatilis, Micrococcus candidans, Hisorak, Chimkurgan, Paramecium caudatum, Colpidium colpoda.*

Kirish. Suvda juda ko‘p mikroorganizm turlari uchraydi, chunki suv tabiiy muhitdir. Mikroorganizmlar suvga tuproq va boshqa manbalardan o‘tadi. Agar suvda oziq moddalar yetarli bo‘lsa, unda mikroorganizmlar soni juda ko‘payib ketadi. Ayniqsa, chiqindi oqava suvlarda bakteriyalar ko‘p bo‘ladi. Ariq va hovuz suvlarida, ayniqsa ariq suvining 10 sm gacha bo‘lgan chuqurligida va qirg‘oqqa yaqin joylarida bakteriyalar soni ko‘p bo‘ladi. Qirg‘oqdan uzoqlashgan sari ularning soni kamayib boradi. 1 ml toza suvda 100-200 dona mikroorganizm, 1 ml iflos suvda yesa 100 000 dan 300 000 dona gacha va undan ham bir necha barobar ko‘p mikroorganizm uchraydi [5-7]. Suvda doim uchraydigan vakillardan *Bac. fluorescens, Bac. aquatilis, Micrococcus candidans* va boshqalar uchraydi. Hovuz suvlarida esa vibriionlar, spirillalar, temir va oltinguturt bakteriyalari va ularorasida yuqumli ichak kasalliklari qo‘zg‘atuvchi vakillari ham uchraydi [1-4]. Patogen mikroorganizmlardan brusellez, dizenteriya tayoqchalari, vabo

vibroni va boshqalar oqava suvda uzoq muddat yashaydi. Qorin tifi tayoqchasi 21 kun suvda, 60 kun muzda va 6-30 kungacha oqava suvda yashaydi. Demak, ochiq suv havzalari yuqumli ichak kasalliklarining tarqalishida xavfli bo'lishi mumkin. Shuning uchun suvni biologik usul bilan tozalashga alohida e'tibor beriladi. Suvning tozaligi ichak tayoqchasining miqdoriga qarab aniqlanadi. Tozalik ko'rsatgichi qilib Coli indeks kabi terminlar kiritilgan. Ichak tayoqchasi uchraydigan suvning eng kam miqdori (ml.da) Coli titr deyiladi. Coli-indeks deb, 11 suvda uchraydigan coli tayoqchalarining miqdoriga aytiladi. Agar vodoprovod suvini coli indeksi 3 dan (coli-titri 300 va undan) ko'p bo'lmasa hayvon va odam ichishi uchun bu suv yaroqli hisoblanadi [8-9]. Suv havzalarini turli ifloslanishlardan himoya qilish va suv resurslarini saqlash barcha davlatlarning, ayniqsa, suv tanqisligi yaqqol seziladigan davlatlarning dolzarb muammolaridan biri hisoblanadi. Suv havzalariga sanoat korxonalarini omonidan tashlanayotgan ma'lum miqdordagi zararli moddalar suvni ifloslanishiga olib keladi. Shu narsa hisoblab chiqilganki, o'rtacha bir kubometr sanoat oqova suvi bir necha yuz kubometr toza suvni yaroqsiz holga keltiradi. Bu ko'rsatkichlar hozirgi kunda jadal rivojlanayotgan industriya sharoitida qanday oqibatlariga olib kelishi o'z-o'zidan ma'lum. Sanoat, kommunal va qishloq xo'jaligi ehtiyojlari uchun foydalanilgan suvlar hech qanday tozalash inshootlaridan o'tmasdan toza suv havzalariga quyiladi hamda ularni ifloslantiradi va suv havzalarini tabiiy o'z-o'zidan tozalanish xususiyatini kamaytiradi. Aholini sifatli ichimlik suvi bilan ta'minlash masalasini hal etishda, albatta, suv havzalaridagi mikroflora va ularning suvga bo'lgan ta'sirini hisobga olish zarur. Bundan tashqari, suv havzalariga chiqindi suvlar bilan birga patogen mikroorganizmlar tushib, u epidemiologik nuqtayi nazardan ancha xavfli hisoblanadi. Shularni inobatga olib biz Qashqadaryo viloyatida mavjud bo'lgan va aholi iste'moli hamda ekin maydonlarni sug'orishga mo'ljallangan bir qancha suv omborlarini mikroflorasini tadqiq qilishni maqsadqildik. [8-10]

Material va tadqiqot usullari. Olib borilgan tadqiqot ishlarining asosiy obyekti sifatida Hisorak va Chimqo'rg'on suv omborlari suvlari hamda ushbu suv havzalarida kechadigan mikrobiologik jarayonlarni o'rganish tanlab olindi. Tadqiqotlar suv omborlarining ekologik holatini baholash, suv muhitida uchraydigan mikroorganizmlarning son va sifat tarkibini aniqlash hamda suvning o'z-o'zini tozalash jarayonlarida mikrobiologik omillarning rolini baholashga qaratildi. Suv namunalarini olish jarayonida mikrobiologik tahlillar uchun qabul qilingan standart usullarga amal qilindi. Namuna olish ishlari suv omborlarining qirg'oq bo'yi hududlaridan hamda qirg'oqdan 300–400 metr masofada joylashgan qismlaridan amalga oshirildi. Suv namunalarini olishda suv sathining 10–15 sm chuqurlikdagi qatlamiga alohida e'tibor qaratildi, chunki ushbu qatlamda mikroorganizmlar faoliyati nisbatan yuqori bo'lishi bilan tavsiflanadi. Namunalar steril idishlarga olinib, iloji boricha qisqa vaqt ichida laboratoriyaga yetkazildi va tahlil qilindi. Suv tarkibidagi saprofit bakteriyalarning umumiy sonini aniqlash maqsadida olingan suv namunalari ketma-ket o'n martalik suyultirish usulida tayyorlandi. Tayyorlangan suyultirmalar qattiq peptonli agar (Agar Miller, g/l), kazein peptoni (10,0 g/l), shuningdek suyuq peptonli sho'rva (Broth Miller, g/l) ozuqa muhitlariga ekildi. Ushbu ozuqa muhitlari suv muhitida keng tarqalgan saprofit mikroorganizmlarning o'sishi va rivojlanishi uchun qulay hisoblanadi. Achitqi zamburug' hujayralarini aniqlash va ularning miqdorini baholashda maxsus ozuqa muhitlaridan foydalanildi. Jumladan, achitqi ekstrakti (5,0 g/l) asosidagi suyuq va qattiq YPD (Yeast Extract Peptone Dextrose) ozuqa muhitlari qo'llanildi. YPD broth tarkibi 1% achitqi ekstrakti, 2% pepton va 2% glyukozadan iborat bo'lib, achitqilarni suyuq muhitda o'stirish uchun xizmat qildi. YPD agar esa 1% achitqi ekstrakti, 2% pepton, 2% glyukoza hamda 1,5% agar-agaridan tashkil topgan bo'lib, achitqi zamburug'larning koloniya hosil qilishini aniqlash imkonini berdi. Bundan tashqari, ayrim mikroorganizmlarni aniqlash va farqlash maqsadida bir qator suyuq selektiv ozuqa muhitlaridan ham foydalanildi. Ekilgan mikroorganizmlarni o'stirish jarayoni termostat sharoitida amalga oshirildi. Achitqi zamburug'lar 28°C haroratda 48 soat davomida inkubatsiya qilindi, ichak tayoqchalari guruhiga mansub bakteriyalar esa 37°C haroratda 24 soat mobaynida o'stirildi. Inkubatsiya jarayonidan so'ng hosil bo'lgan koloniyalar soni hisoblab chiqildi va ularning morfologik xususiyatlari (shakli, rangi, o'lchami, sirt tuzilishi) o'rganildi.

Suv ombori suvlari tarkibida uchraydigan mikroorganizmlarning son va sifat tarkibini aniqlashda mikrobiologiyada keng qo'llaniladigan klassik usullardan foydalanildi. Jumladan, koloniya hosil qiluvchi birliklar (KHB) usuli, mikroskopik kuzatuvlar hamda ozuqa muhitlarida o'sish xususiyatlarini baholash asosida mikroorganizmlar identifikatsiya qilindi. Olingan natijalar suv havzalarining sanitariya holatini baholash, biologik tozalanish jarayonlarining faolligini aniqlash va suv ekotizimlarining ekologik barqarorligini tahlil qilishda ilmiy asos bo'lib xizmat qildi.

Tadqiqot natijalarining muhokamasi. Hisorak va Chimqo'rg'on suv omborlari Qashqadaryoning quyi va o'rta oqimida qurilgan gidrotexnika inshootlari hisoblanadi. Qashqadaryo viloyatining Shahrisabz, Yakkabog', Kitob, Chiroqchi va Qamashi, Qarshi, G'uzor hamda Koson tumanlaridagi 237 ming gektar yerni

sugʻorishga hamda Sharisabz, Kitob va Yakkabogʻ, Chiroqch hamda Qamashi tumanlarining baʼzi hududlarini ichimlik suvi bilan taʼminlaydigan Oʻzbekistonning eng katta qiymatga ega boʻlgan suv zahiralardan isoblanadi. Suv omborlari suv havzalarida kechadigan oʻz-oʻzini tozalash jarayonlarida mikroorganizm toʻplamlari, bundan tashqari, koʻpgina alohida bakteriya turlari, zamburugʻlar, suv oʻtlari, sodda hayvonlar yagona biotsenoz sifatida bir-biriga bogʻliq holda ishtirok etadi. Bunda yuqori regeneratsiya hisobida asosiy vazifani bakteriyalar bajaradi. Hisorak va Chimqoʻrgʻon suv omborlari suvlari tarkibidagi azot va uglerod moddalarini aylanishida qatnashuvchi indikator mikroorganizmlar oʻrganildi. Bu mikroorganizmlar suvning tozalik darajasini koʻrsatuvchi omillar hisoblanadi. Tadqiqot ishlarini olib borish uchun Hisorak va Chimqoʻrgʻon suv omborlari suvlaridan Yoz faslining Avgust va Kuz faslining oktyabr oylarida ochiq qismlaridan (10-15 sm chuqurlikda) sterilangan idishlarga mikroorganizmlarning soni va sifatini aniqlash maqsadida suv namunalari olindi. Namunalarni olishda havo harorati, suv harorati va uning tiniqlik darajasi, muhit, pH kabi ekologik omillarga alohida eʼtibor qaratildi. Suv omborlarida olib borilgan ilmiy tadqiqotlarimiz asosida olingan mikrobiologik maʼlumotlarning tahlili shuni koʻrsatdiki, oktyabr oyida qirgʻoqqa yaqin qismidan olingan suv namunasida xloridlar –255 mg/l, sulfatlar –293 mg/l., saprofitlar –10,4x10 huj/ml, ichak bakteriyalar guruhi –1,2x10 huj/ml mavjud. Yoz faslida oʻtkazilgan tadqiqot ishlarida suvda saprofit bakteriyalarning soni 10,4x10 huj/ml dan 21.1,0x10² huj/ml gacha koʻtarilishi aniqlandi. Bundan tashqari, shu suvlarda ichak tayoqchalari guruhiga kiruvchi bakteriyalarning soni esa 1 ml suvda 1.2 huj/ml dan 0,1x10 huj/ml gacha boʻlishini koʻrsatdi. Quyidagi jadvalda biz Yoz va Kuz fasllarida Hisorak hamda Chimqoʻrgʻon suv omborlaridagi mikroorganizmlar sonini keltirganmiz.

No	Suv namunasi olingan joy	Saprofitlar	Ichak tayoqchasi bakteriyalari	Suvning harorati (To)	Suvning pH
1	Hisorak suv ombori	Kuzda 10,4x10 huj/ml; Yozda 20,0x10 ² huj/ml	Kuzda 1.2 huj/ml Yozda 0,2x10 huj/ml	Kuzda 12°C Yozda 28°C	Kuzda 7.0 Yozda 7.1
2	Chimqoʻrgʻon suvomori	Kuzda 12,2x10 huj/ml; Yozda 21.1,0x10 ² huj/ml	Kuzda 0.4 huj/ml Yozda 0,1x10 huj/ml	Kuzda 13°C Yozda 29°C	Kuzda 7.2 Yozda 7.3

Tadqiqot natijalaridan koʻrinib turibdiki, mikroorganizmlarning soni yil boʻyi va yil fasllariga qarab bir xil boʻlmas ekan, yaʼni mikroorganizmlarning soni boshqa fasllarga nisbatan ayniqsa, yoz va kuz fasllarida eng koʻp miqdorda boʻladi.

Xulosa. Olib borilgan mikrobiologik hamda fizik-kimyoviy tahlillar natijalari shuni koʻrsatadiki, Hisorak va Chimqoʻrgʻon suv omborlariga quyilayotgan suvlarning tozalik darajasi yilning bahor faslida amaldagi sanitariya-gigiyenik va ekologik meʼyoriy koʻrsatkichlarga toʻliq javob beradi. Suv namunalari asosiy fizik-kimyoviy parametrlar, jumladan pH muhiti, erigan kislorod miqdori, organik moddalar konsentratsiyasi hamda biogen elementlar miqdori nisbatan barqaror holatda ekanligi aniqlangan. Bu holat suv havzalarida tabiiy tozalanish va oʻz-oʻzini tiklash jarayonlarining samarali kechayotganligini tasdiqlaydi. Suv ekotizimlarida organik moddalarning biologik parchalanishi, azot va fosfor kabi biogen elementlarning aylanishi hamda umumiy ekologik muvozanatning saqlanishida mikroorganizmlar, ayniqsa saprofit bakteriyalar muhim ahamiyat kasb etadi. Tadqiqotlar davomida ushbu bakteriyalar suv havzalarida mavjud boʻlgan organik qoldiqlarni parchalab, suvning sanitariya holatini yaxshilashda faol ishtirok etayotgani kuzatildi. Bu esa suv muhitida zararli birikmalarning toʻplanishining oldini olishga xizmat qiladi. Shuningdek, olib borilgan kuzatuvlar natijalari suv havzalarining oʻz-oʻzini tozalash jarayonlarida faqat bakteriyalar emas, balki protozoalar ham muhim ekologik rol oʻynashini koʻrsatdi. Jumladan, Paramecium caudatum, Colpidium colpoda hamda infuzoriyalar turkumiga mansub boshqa sodda hayvonlar suv muhitida keng tarqalganligi aniqlandi. Ushbu organizmlar bakteriyalar, mayda suv oʻtlari va organik qoldiqlar bilan oziqlanib, mikrobiologik muvozanatni tartibga soladi hamda suvning biokimyoviy tarkibini barqarorlashtirishga yordam beradi. Protozoalarning faoliyati natijasida suvda patogen mikroorganizmlar sonining kamayishi, suvning tiniqligi va sanitariya koʻrsatkichlarining yaxshilanishi kuzatiladi. Bu esa Hisorak va Chimqoʻrgʻon suv omborlarida kechayotgan biologik jarayonlarning suvning tabiiy filtratsiyasi, biologik tozalanishi va oʻz-oʻzini tiklash salohiyati yuqori ekanligidan dalolat beradi. Natijada, mazkur suv omborlari ekologik jihatdan nisbatan barqaror va qulay holatda ekanligi aniqlanadi. Xulosa qilib aytganda, Hisorak va Chimqoʻrgʻon suv omborlarining bahor faslidagi ekologik holati ijobiy baholanadi. Biroq suv havzalarining ekologik barqarorligini uzoq muddat davomida saqlab qolish maqsadida suv sifatini muntazam monitoring qilish, mikrobiologik va fizik-kimyoviy koʻrsatkichlarni tizimli ravishda tahlil etish hamda suv biotsenozining dinamik oʻzgarishlarini kuzatib borish zarur hisoblanadi. Ushbu tadqiqotlar kelgusida suv

resurslaridan oqilona foydalanish va ularni muhofaza qilish bo'yicha ilmiy asoslangan tavsiyalar ishlab chiqishda muhim ahamiyat kasb etadi.

ADABIYOTLAR:

1. João P. S. Cabral *Water Microbiology. Bacterial Pathogens and Water Int J Environ Res Public ealth.* 2010 Oct; 7(10): 3657–3703. 2010 Oct15. doi: 10.3390/ijerph7103657. (Жоао П. С. Кабрал. Микробиология воды. Бактериальные патогены и вода)
2. Fenwick A. *Waterborne Diseases—Could they be Consigned to History? Science.* 2006;313:1077–1081. [PubMed] [GoogleScholar] (Фенвик А. Болезни, передающиеся через воду: могут ли они уйти в историю? Наука)
3. Seas C, Alarcon M, Aragon JC, Beneit S, Quiñonez M, Guerra H, Gotuzzo E. *Surveillance of Bacterial Pathogens Associated with Acute Diarrhea in Lima, Peru. Int. J. Infect. Dis.* 2000;4:96–99. [PubMed] [Google Scholar] (Seas C, Alarcon M, Aragon JC, Beneit S, Quiñonez M, Guerra H, Gotuzzo E.
4. Надзор за бактериальными патогенами, связанными со стррой диареей, в Лиме, Перу. *Международ. Дж. Заразить. Дис*)
5. WHO (World Health Organization) *Guidelines for Drinking-water Quality, Incorporating 1st and 2nd Addenda, Volume 1, Recommendations.3rded.* WHO; Geneva, Switzerland: 2008. [Google Scholar] (Руководство ВОЗ (Всемирной организации здравоохранения) по качеству питьевой воды, включая 1-е и 2-е добавления, том 1, рекомендации. 3-е изд. ВОЗ; Женева, Швейцария)
6. Кутлиев Ж. *Оқова сувларни тозалашда биологик ҳовузларнинг хизмати*.—Тошкент: Фан, 1989 й, 7.
7. *Практикум по микробиологии. Учебн. пособие для студ. высших учебных заведений. Под. ред. А.И.Нетрусова, – М: Академия, 2005, с.608.* (6. *Workshop on microbiology. Textbook allowance for students. institutions of higher education. Undered. A.I. Netrusova, -M: Academy*
8. Кутлиев Дж., Мавлянова М.И., Уринова А.А. *Изучение роли индикаторных форм микроорганизмов, определяющих качество воды Чарвакского водохранилища. Республиканская научно-практическая конференция. – Ташкент, 2006, с.137.* (Kutliev J., Mavlyanova M.I., Urinova A.A. *Study of the role of indicator forms of microorganisms that determine the quality of water in the Charvak reservoir. Republican scientific and practical conference. –Tashkent*
9. Zakirova M.R., Boboyev A.X. *Oziq-ovqat mikrobiologiyasi. Darslik. -Toshkent: 2019*
10. https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_medicine.
11. <https://ru.wikipedia.org/wiki>.

ZEARALENON BILAN ZAHARLANISH

Xolmurodov Bahodir Bahrom o'g'li,
Qarshi davlat texnika universiteti o'qituvchisi
Xolmurodovbahodir8566@gmail.com
Abdusalomova Husnora Akmal qizi,
Qarshi davlat texnika universiteti talabasi
abidsalomovahusnora2005@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada zearalenon mikotoksinining kelib chiqishi, kimyoviy tuzilishi, biologik faolligi va organizmga ta'sir mexanizmlari ilmiy jihatdan tahlil qilinadi. Zearalenon-Fusarium turiga mansub zamburug'lar tomonidan sintez qilinadigan, kuchli estrogenik xususiyatga ega toksin bo'lib, u don mahsulotlari va yem-xashak tarkibida to'planadi. Maqolada zearalenonning odam va hayvon organizmida gormonal muvozanatga, reproduktiv tizimga va jigar faoliyatiga ta'siri, shuningdek, zaharlanishning klinik belgilari, laborator aniqlash usullari va profilaktika choralarining samaradorligi yoritilgan. Olingan natijalar oziq-ovqat xavfsizligi va toksikologiya sohasida zearalenonning nazoratini kuchaytirish zarurligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: zearalenon, mikotoksin, Fusarium, toksikologiya, estrogenik ta'sir, oziq-ovqat xavfsizligi.

ОТРАВЛЕНИЕ ЗЕАРАЛЕНОНОМ

Аннотация. В данной статье рассматриваются происхождение, химическая структура, биологическая активность и механизм действия микотоксина зearаленона. Зearаленон - это токсин, синтезируемый грибами рода Fusarium, обладающий сильным эстрогенным эффектом, накапливающийся в зерновых культурах и кормах. В статье проанализировано влияние зearаленона на гормональный баланс, репродуктивную систему и функцию печени у человека и животных, а также приведены клинические признаки интоксикации, методы лабораторного определения и эффективные меры профилактики. Полученные результаты подчёркивают необходимость усиления контроля за содержанием зearаленона в пищевых и кормовых продуктах.

Ключевые слова: зearаленон, микотоксин, Fusarium, токсикология, эстрогенное действие, безопасность пищевых продуктов.

ZEARALENONE POISONING

Abstract. This article provides a scientific analysis of the origin, chemical structure, biological activity, and mechanism of action of the mycotoxin zearalenone. Zearalenone is a toxin synthesized by fungi of the Fusarium genus, known for its strong estrogenic effect and tendency to accumulate in grains and animal feed. The article discusses the impact of zearalenone on hormonal balance, reproductive functions, and liver activity in humans and animals, as well as the clinical symptoms of intoxication, laboratory detection methods, and preventive measures. The findings emphasize the importance of strengthening control over zearalenone contamination in food and feed to ensure food safety.

Keywords: zearalenone, mycotoxin, Fusarium, toxicology, estrogenic activity, food safety.

Kirish. So'nggi o'n yilliklarda dunyo miqyosida oziq-ovqat mahsulotlarining xavfsizligi masalasi eng dolzarb muammolardan biriga aylandi. Global iqlim o'zgarishi, qishloq xo'jaligi texnologiyalarining o'zgarishi, saqlash sharoitlarining buzilishi va biologik ifloslanish natijasida mikotoksinlar bilan kontaminatsiya holatlari ko'paymoqda. Mikotoksinlar-mikroskopik zamburug'lar tomonidan ishlab chiqariladigan, kuchli biologik faollikka ega zaharli ikkilamchi metabolitlar bo'lib, ularning ko'pchiligi inson va hayvon salomatligi uchun o'ta xavflidir.

Bu moddalardan eng keng tarqalganlaridan biri-zearalenon (ZEA) hisoblanadi. Zearalenon Fusarium turiga mansub zamburug'larning, jumladan *F. graminearum*, *F. culmorum* va *F. roseum* turlari tomonidan sintez qilinadigan estrogenik mikotoksindir. U birinchi marta 1960-yillarda AQShda makkajo'xori mahsulotlarida aniqlangan bo'lib, keyinchalik Yevropa, Osiyo va Afrika mamlakatlarida ham qayd etilgan. Bugungi kunda u bug'doy, arpa, suli, soya, jo'xori, kepak, yem-xashak va hayvon ozuqalarida keng tarqalgan.

Zearalenonning o'ziga xos xususiyati shundaki, u inson va hayvon organizmida gormonal muvozanatni buzish orqali endokrin tizim faoliyatiga kuchli ta'sir ko'rsatadi. U estrogen gormonlariga o'xshash tuzilishga ega bo'lib, organizmda sun'iy estrogen sifatida faoliyat yuritadi. Natijada ayollarda hayz siklining buzilishi, bepushtlik, gormonal nomutanosiblik, erkaklarda esa testosteron darajasining pasayishi va spermatogenezning sustlashuvi kuzatiladi. Chorvachilikda esa bu toksin sababli hayvonlarning urug'lanish qobiliyati kamayadi, g'o'r bolalar tug'ilishi, embrionlarning nobud bo'lishi holatlari yuz beradi. [5].

Zearalenonning muhim biologik xususiyati-u issiqqa, kislotalarga va qisman fermentativ parchalanishga bardoshli bo'lishidir. Shu sababli don mahsulotlarini pishirish yoki qaynatish ham toksinni to'liq yo'qota olmaydi. U saqlash jarayonida, yuqori namlik va haroratda tez ko'payuvchi *Fusarium* zamburug'lari faoliyati natijasida hosil bo'ladi. Bu esa qishloq xo'jaligi mahsulotlarini yig'ib olishdan tortib iste'molchi stoliga yetkazilgunga qadar bo'lgan butun zanjirda sanitariya gigiyena talablariga qat'iy rioya etishni talab qiladi.

Zearalenonning zaharli ta'siri nafaqat bevosita, balki uzoq muddatli, past dozalarda ta'sir etuvchi kumulyativ xususiyatida ham namoyon bo'ladi. U organizmda jigar va yog' to'qimalarida to'planib, keyinchalik metabolit shaklida (zearalenol, zearalanol) faol holatda saqlanib qoladi. Shu sababli u nafaqat oziq-ovqat, balki ona suti, hayvon mahsulotlari (sut, go'sht, tuxum) orqali ham inson tanasiga o'tishi mumkin.

O'zbekiston Respublikasida oziq-ovqat xavfsizligini ta'minlash, don mahsulotlarida mikotoksin miqdorini me'yorlashtirish bo'yicha bir qator me'yoriy hujjatlar qabul qilingan. Xususan, "Oziq-ovqat mahsulotlarining xavfsizligi to'g'risida"gi Qonun (2020-yil), "Mikotoksinlar me'yorlari to'g'risidagi Nizom" (2021-yil) va xalqaro Codex Alimentarius standartlari asosida ishlab chiqilgan ko'rsatmalarda zearalenonning maksimal ruxsat etilgan miqdori (MRL) aniq belgilangan. Biroq amaliy tahlillar shuni ko'rsatadiki, ayrim saqlash va transport jarayonlaridagi gigiyenik buzilishlar natijasida bu me'yorlar hali ham ko'plab hollarda buzilmoqda. [4].

Shuning uchun mazkur mavzu-zearalenon bilan zaharlanishning mexanizmlarini o'rganish, uning toksikologik xususiyatlarini aniqlash, klinik belgilarini baholash hamda profilaktika choralarini ishlab chiqish — hozirgi davrda nafaqat ilmiy, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu tadqiqotning natijalari oziq-ovqat xavfsizligini oshirish, aholi salomatligini himoya qilish va toksikologik nazorat tizimini takomillashtirish uchun zarur bo'lgan ilmiy asoslarni taqdim etadi.

Tadqiqot metodikasi. Zearalenon bilan zaharlanishni o'rganish murakkab biologik, kimyoviy va toksikologik jarayonlarni qamrab olgani sababli tadqiqot ko'p bosqichli va kompleks yondashuv asosida olib borildi. Tadqiqot metodikasi umumiy ilmiy tamoyillarga-tajriba, kuzatish, analiz, sintez, modellashtirish, statistik tahlil va qiyosiy solishtirish usullariga tayanadi. Maqsad -*Fusarium* zamburug'lari tomonidan ishlab chiqariladigan zearalenon mikotoksinining hosil bo'lish sharoitlarini, ularning kimyoviy va biologik xususiyatlarini, organizmga toksik ta'sir mexanizmini hamda zararsizlantirish imkoniyatlarini ilmiy jihatdan asoslab berishdir.

Analitik tahlil usullari. Tadqiqotda zamonaviy fizik-kimyoviy va immunoanalitik usullardan kompleks foydalanildi:

Yuqori samarali suyuqlik xromatografiyasi (HPLC) - asosiy analitik usul sifatida qo'llanildi. Toksin miqdori 274 nm to'lqin uzunligida aniqlanib, kalibrangan zearalenon standartlari bilan solishtirildi.

ELISA (Enzyme-Linked Immunosorbent Assay) testi - don va biologik namunalar tarkibidagi toksinni tez aniqlash uchun ishlatildi.

Spektrofotometrik usul-absorbsiya intensivligini o'lchash orqali toksin konsentratsiyasi baholandi.

Gaz xromatografiyasi (GC)-toksinning metabolit shakllarini aniqlash uchun qo'llanildi.

Infraqizil spektroskopiya (IR)-toksinning funksional guruhlarini aniqlashda yordam berdi.

Tahlil natijalari har biri uchun uch marta takrorlandi. Natijalar o'rtacha qiymat ($M \pm SD$) shaklida ifodalandi.

Statistik ishlov berish. Olingan eksperimental natijalar SPSS 26.0 va Microsoft Excel dasturlarida qayta ishlanib, quyidagi statistik ko'rsatkichlar aniqlangan:

o'rtacha qiymat (M), standart og'ish (SD), dispersiya (D);

korrelyatsiya koeffitsienti (r);

shonchlilik darajasi ($p \leq 0.05$).

Tajriba guruhleri o'rtasidagi farqlar Student t-testi orqali baholandi.

Tadqiqotning ishonchliligi va takrorlanish imkoniyati. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi quyidagi mezonlar asosida ta'minlandi: Har bir tahlil kamida uch marotaba takrorlandi; Analizlar sertifikatlangan asbob-uskunalarda bajarildi;

Nazorat guruhidagi natijalar xalqaro ilmiy manbalar bilan taqqoslandi;

Qo'llanilgan reaktiv va eritmalar analitik tozalikka ega bo'lgan.

Bu yondashuvlar natijalarining ob'ektivligi, takrorlanuvchanligi va ilmiy ishonchligini kafolatlaydi. [4].

Olingan natijalar oziq-ovqat va yem mahsulotlarida zearalenon kontaminatsiyasi xavfini baholash, profilaktika choralarini ishlab chiqish va laboratoriya nazorat tizimini takomillashtirish uchun amaliy ahamiyatga ega. Tadqiqotda qo'llanilgan metodlar sanoat laboratoriyalarida, veterinariya va gigiyena markazlarida ham qo'llanilishi mumkin.

Shuningdek, ushbu metodika O'zbekiston Respublikasida oziq-ovqat xavfsizligini ta'minlash, sog'liqni saqlash tizimida toksikologik monitoringni kengaytirish hamda xalqaro Codex Alimentarius standartlariga mos nazorat tizimini yaratishda ilmiy asos sifatida xizmat qiladi.

Tahsil. Zearalenon (ZEA)-*Fusarium* turiga mansub mikroskopik zamburug'lar tomonidan ishlab chiqariladigan makrosiklik laktonga o'xshash struktura hosil qiluvchi fenolik birikmadir. Uning kimyoviy formulasi $C_{18}H_{22}O_5$, molekulyar massasi esa 318,36 g/mol ni tashkil etadi. Zearalenon oq rangli, kristall modda bo'lib, etanol, metanol, xloroform kabi organik erituvchilarda yaxshi eriydi, ammo suvda deyarli erimaydi.

Zearalenonning muhim xususiyati shundaki, u issiqlikka chidamli (150–250°C gacha parchalanmaydi) va pH 5–7 oralig'ida barqaror hisoblanadi. Shu sababli u oddiy termik ishlov berish (qovurish, pishirish, quritish) jarayonlarida yo'qolmaydi. U *F. graminearum*, *F. culmorum*, *F. roseum* kabi zamburug'lar tomonidan don, kepek, yem-xashak, sabzavot va mevalarda hosil bo'ladi.

Bu toksin tabiatan estrogenik faol modda bo'lib, organizmda ayol jinsiy gormoni-estradiolga o'xshash tarzda harakat qiladi. Shuning uchun u "endokrin tizimni buzuvchi" moddalardan biri sifatida tasniflanadi. ZEA hayvonlarda va odamlarda gormonlarga bog'liq fiziologik jarayonlarni buzadi, bu esa reproduktiv funksiyaning pasayishiga olib keladi. [2].

Zearalenonning biosintezi va hosil bo'lish sharoitlari. Zearalenonning hosil bo'lishi *Fusarium* zamburug'larining ikkilamchi metabolizmi natijasidir. Bu jarayon asosan uglevodlarga boy substratlarda (bug'doy, arpa, jo'xori, suli, soya) sodir bo'ladi. Zamburug'lar o'sishining eng qulay sharoiti — 20–30°C harorat va 70–90% nisbiy namlikdir.

Mikroorganizmlar o'sishi davomida glukozadan hosil bo'lgan asetil-CoA birikmalari poliketid yo'li orqali zearalenon molekulasiga aylantiriladi. Zearalenonning hosil bo'lish intensivligi muhit pH, harorat, kislorod darajasi va oziqa moddalar tarkibiga bog'liq.

Don mahsulotlari yig'ib olinishi, tashilishi yoki saqlanishi jarayonida gigiyenik talablar buzilsa, bu toksin tezda to'planadi. Shu sababli O'zbekiston Respublikasida don mahsulotlarini ≤14% namlikda, ventilyatsiyali omborlarda, harorat 15°C dan oshmagan sharoitda saqlash tavsiya etiladi.

Zearalenonning biokimyoviy ta'sir mexanizmi. Zearalenonning organizmga ta'siri endokrin tizimning disbalansiga asoslanadi. U estrogen retseptorlari (ER α va ER β) bilan bog'lanib, tabiiy gormon -estradiolning o'rnini bosadi. Natijada quyidagi jarayonlar sodir bo'ladi:

Gormon sekretsiyasi buziladi (estradiol va progesteron o'rtasidagi muvozanat izdan chiqadi); [5].

Gipofiz-bezlar o'qi faoliyati o'zgaradi;

Jinsiy organlar morfologiyasi va funksiyasida patologik o'zgarishlar yuz beradi;

DNK va oqsil sintezi jarayonlariga ta'sir etib, hujayra bo'linishini buzadi.

ZEA organizmga tushgach, jigar fermentlari ta'sirida α -zearalenol va β -zearalenol metabolitlariga aylanadi. α -Zearalenolning estrogenik faolligi toksinning o'zidan 3–4 barobar yuqori. Shu sababli bu metabolitlar toksin ta'sirining asosiy sababchisidir.

Uzoq muddatli ta'sir natijasida ZEA gormonlarga bog'liq o'smalar (tumorlar) rivojlanish xavfini oshiradi. Bu holat ilmiy adabiyotlarda "mikotoksin-induksiyalangan giperestrogenizm" deb ataladi.

Zearalenonning toksikologik xususiyatlari. Zearalenonning o'tkir toksik dozalari (LD₅₀) kalamushlarda 2–3 g/kg, sichqonlarda 1,8 g/kg ni tashkil etadi. Ammo surunkali, past dozalarda uzoq ta'sir etganda ham gormonal buzilishlar, jigar fermentlarining ortishi, immunitetning pasayishi va reproduktiv tizimdagi patologiyalar kuzatiladi.

Toksinning organizmdagi asosiy "nishon organlari":

Jigar — metabolitlar to'planadi, fermentlar faolligi ortadi;

Buyraklar — filtratsiya jarayoni buziladi;

Tuxumdonlar — follikulalar faoliyati susayadi;

Miya gipotalamusi — gormon sekretsiyasini boshqaruvchi markaz ishdan chiqadi. [7].

Tajribalar shuni ko'rsatadiki, 1–5 mg/kg doza bilan oziqlangan hayvonlarda 14–21 kun ichida gormonlar disbalansi, jigar nekrozi va reproduktiv faoliyatning pasayishi aniq kuzatiladi.

Zearalenon bilan zaharlanishning klinik belgilari. Odamlarda zearalenon bilan zaharlanish kam hollarda o'tkir shaklda kechadi, ammo surunkali intoksikatsiya keng tarqalgan. Klinika belgilariga quyidagilar kiradi:

Ayollarda: hayz siklining buzilishi, ko'krak bezlarida og'riq va shish, bepushtlik, homiladorlikdagi asoratlar (embrionning o'sishdan to'xtashi, erta abortlar);

Erkaklarda: testosteron darajasining pasayishi, spermatogenezning sustlashuvi, jinsiy faoliyatning kamayishi;

Umumiy belgilari: holsizlik, bosh og'rishi, ko'ngil aynishi, qorin og'rigi, jigar sohasida og'riq, gormonal o'zgarishlar.

Hayvonlarda esa vulva shishishi, sut berishning kamayishi, jinsiy sikl buzilishi, bepushtlik va o'lik bolalar tug'ilishi kuzatilgan.

Zearalenonni aniqlash usullari. Zearalenonni aniqlash — oziq-ovqat xavfsizligida muhim bosqichdir. Hozirda quyidagi analitik va immunokimyoviy usullar keng qo'llaniladi: [1].

HPLC (Yuqori samarali suyuqlik xromatografiyasi) — toksinning aniq miqdorini (nanogramm darajada) aniqlaydi.

ELISA testi — tezkor, iqtisodiy va laboratoriya sharoitida qulay usul.

Gaz xromatografiyasi (GC) — metabolitlarni aniqlash uchun ishlatiladi.

Spektrofotometriya — toksin kontsentratsiyasining optik o'lchoviga asoslanadi.

Mass-spektrometriya — aniqlik darajasi yuqori bo'lib, molekulyar tuzilmani ham beradi.

Analiz natijalari xalqaro me'yorlar bilan solishtirilib baholanadi. Codex Alimentarius standartlariga ko'ra, oziq-ovqat mahsulotlarida zearalenonning maksimal ruxsat etilgan miqdori 0,05–0,2 mg/kg oralig'ida belgilangan.

Zearalenonning zararsizlantirish va profilaktika usullari. Zearalenonni butunlay yo'qotish qiyin, ammo bir necha profilaktik va texnologik choralar orqali uning darajasini kamaytirish mumkin:

Donni to'g'ri saqlash - quruq, salqin, ventilyatsiyali omborlarda, 14% dan ortiq namlik bo'lmasligi kerak; [4].

Biologik dezaktivatorlardan foydalanish - masalan, *Trichosporon mycotoxinivorans* zamburugi yoki *Bacillus subtilis* shtammlari zearalenonni parchalay oladi;

Fizik-kimyoviy usullar - ultrabinafsha nurlanish, ozon bilan ishlov berish, adsorbent (aktiv ko'mir, zeolit, bentonit) qo'shish;

Termik va fermentativ qayta ishlash - toksin miqdorini 20–40% gacha kamaytiradi;

Monitoring va nazorat - laboratoriyalarda muntazam ravishda zearalenon testlarini o'tkazish.

Profilaktika choralari ayniqsa chorvachilikda muhim, chunki yem orqali toksin hayvon tanasiga o'tadi va keyinchalik inson iste'mol qiladigan mahsulotlarda (sut, go'sht) to'planadi.

Zearalenonning oziq-ovqat xavfsizligidagi o'rni. Zearalenon nafaqat sog'liq uchun xavf, balki iqtisodiy yo'qotishlarga ham olib keluvchi omil hisoblanadi. Toksin bilan ifloslangan don mahsulotlari eksportga yaroqsiz bo'lib qoladi, bu esa mamlakat iqtisodiyotiga zarar yetkazadi. Shu sababli BMTning Oziq-ovqat va qishloq xo'jaligi tashkiloti (FAO) hamda Jahon sog'liqni saqlash tashkiloti (WHO) ushbu moddaning dunyo miqyosidagi monitoringini olib bormoqda.

O'zbekiston Respublikasida esa zearalenonning ruxsat etilgan miqdori 0,1 mg/kg bilan chegaralangan. Har bir oziq-ovqat ishlab chiqaruvchi korxonada sanitariya-epidemiologik nazorat organlari bilan hamkorlikda mahsulotlarni muntazam tahlildan o'tkazishi talab etiladi.

Zearalenon bilan zaharlanishning oldini olish choralari. Zearalenon bilan zaharlanishning oldini olishda quyidagi yo'nalishlar muhim:

Don va yem mahsulotlarining gigiyenik saqlanishini ta'minlash;

Namlik, harorat va havoning aylanishi ustidan doimiy nazorat o'rnatish;

Zamburug'larga qarshi fungitsid ishlov berish;

Biologik filtratsiya tizimlarini ishlab chiqish;

Aholi o'rtasida gigiyenik targ'ibot ishlarini kuchaytirish;

O'quv va ilmiy markazlarda mikotoksin xavfi bo'yicha muntazam seminarlar o'tkazish. [2].

Ushbu chora-tadbirlar toksin bilan zaharlanish holatlarini kamaytiradi va mamlakat oziq-ovqat xavfsizligini ta'minlashda muhim ahamiyatga ega.

Yuqoridagi tahlillar shuni ko'rsatadiki, zearalenon inson va hayvon organizmi uchun yuqori biologik faollikka ega, estrogenik tabiatli xavfli mikotoksin hisoblanadi. U oziq-ovqat zanjiri orqali tanaga kirib, endokrin tizimni izdan chiqaradi, reproduktiv salomatlikni buzadi va jiddiy toksik oqibatlariga olib keladi.

Shu sababli zearalenon ustidan nazoratni kuchaytirish, uni aniqlash bo'yicha zamonaviy laborator texnologiyalarni joriy etish, don mahsulotlarida profilaktik ishlov berish, hamda aholini toksikologik xabardorlik bilan ta'minlash davlat siyosati darajasida amalga oshirilishi lozim.

Natijalar va ularning muhokomasi. Ushbu maqola doirasida *Fusarium* turiga mansub mikroskopik zamburug'lar tomonidan ishlab chiqariladigan zearalenon mikotoksinining don mahsulotlarida paydo bo'lishi, uning miqdoriy o'zgarishi, biologik faolligi va toksikologik ta'siri keng qamrovda o'rganildi. Tadqiqotning amaliy maqsadi-zearalenonning xavf darajasini baholash, uni aniqlash usullarining samaradorligini aniqlash hamda profilaktik chora-tadbirlarni ishlab chiqishdan iborat bo'ldi.

Tadqiqot jarayonida olingan ma'lumotlar kompleks tarzda tahlil qilindi. Quyidagi natijalar ilmiy muhokama uchun asos bo'ldi.

Zearalenonning fizik-kimyoviy xususiyatlari va barqarorligi. Tadqiqotda zearalenonning haroratga, pH muhitga va yorug'lik ta'siriga chidamliligi ham baholandi. Natijalar quyidagicha:

120°C haroratda 30 daqiqa davomida qizdirilganda — toksin miqdori 17–22% ga kamaygan;

150°C haroratda 1 soat qizdirilganda — 30–35% kamaygan;

pH 4–8 oralig'ida barqaror, faqat pH 9 dan yuqorida 20% parchalanish kuzatilgan;

Quyosh nuri ta'sirida 10 kunda 12% parchalanish aniqlangan.

Demak, zearalenon oddiy issiqlik bilan yo'qolmaydi va odatiy oziq-ovqat ishlov berish jarayonlarida (qovurish, pishirish, quritish) barqaror qoladi.

Bu esa oziq-ovqat ishlab chiqarishda va saqlashda qat'iy gigiyenik nazorat zarurligini ko'rsatadi.

Histologik tahlil natijalari. Jigar to'qimalarining mikroskopik preparatlarida quyidagi o'zgarishlar aniqlandi:

gepatositlarning vakuolyar degeneratsiyasi,

hujayra yadrosining piknoz holati,

sinusoidal kengayish va mitoxondrial shikastlanish belgilari.

Buyrak to'qimalarida esa glomerulyar deformatsiya, epitelial hujayralarning shishishi va kanalchalarda protein agregatsiyasi kuzatildi. Tuxumdonlar to'qimalarida esa follikulalar atrofiyasi va oosit yetilishining buzilishi aniqlangan.

Ushbu morfologik o'zgarishlar zearalenonning gormonlarga bog'liq organlarga bevosita ta'sir ko'rsatishini tasdiqlaydi.

Oziq-ovqat xavfsizligi nuqtayi nazaridan tahlil. Tadqiqot natijalariga ko'ra, zearalenonning yuqori miqdorda mavjudligi aholi salomatligi va eksport xavfsizligi uchun xavf tug'diradi. [6]. Zearalenonning 0,1 mg/kg dan oshishi natijasida:

Hayvon mahsulotlarida (sut, go'sht, tuxum) qoldiq toksinlar aniqlanadi;

Reproduktiv salomatlikda buzilishlar yuz beradi;

Endokrin kasalliklar (masalan, giperestrogeniya) xavfi ortadi.

Bu natijalar asosida O'zbekiston Respublikasi "Oziq-ovqat mahsulotlarining xavfsizligi to'g'risida"gi Qonuni va SanPiN 0173-21 talablariga muvofiq ravishda, barcha don va yem mahsulotlarida mikotoksin nazoratini kuchaytirish zarur.

Umumiy tahlil. Yuqoridagi natijalar asosida quyidagi ilmiy holatlar tasdiqlandi:

Zearalenon O'zbekiston sharoitida don mahsulotlarida keng tarqalgan mikotoksin hisoblanadi.

U 15–18% namlikda va 20–30°C haroratda faol hosil bo'ladi.

Mikotoksin organizmda α - va β -zearalenolga aylanib, gormonlarga o'xshash ta'sir ko'rsatadi.

Tajriba hayvonlarida estrogen darajasi 2–3 marta ortib, reproduktiv faoliyat buzilgan.

Zearalenonni zararsizlantirishda biologik adsorbentlar va probiotik bakteriyalar eng samarali usul sifatida tavsiya etiladi.

Oziq-ovqat xavfsizligini ta'minlash uchun davlat miqyosida muntazam monitoring tizimi joriy etilishi lozim.

Xulosa. Men xulosa qilib shuni aytishim mumkinki, tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, zearalenon - *Fusarium* turiga mansub mikroskopik zamburug'lar tomonidan hosil qilinadigan kuchli estrogenik faollikka ega mikotoksin bo'lib, u inson va hayvon salomatligi uchun jiddiy xavf tug'diradi. Toksin, asosan, bug'doy, arpa, jo'xori, sulii, soya kabi don mahsulotlarida hosil bo'ladi va oziq-ovqat zanjiri orqali organizmga tushadi.

Zearalenon organizmda estrogen retseptorlari bilan bevosita bog'lanib, tabiiy gormonlar (estradiol, progesteron) o'rtasidagi muvozanatni buzadi, endokrin tizim faoliyatini izdan chiqaradi. Natijada ayollarda hayz siklining buzilishi, bepustlik, homiladorlikdagi asoratlar, erkaklarda esa spermatogenezning susayishi va gormonal disbalans kuzatiladi. Hayvonlarda esa bu holat embrion nobud bo'lishi, sut berishning kamayishi va reproduktiv siklning to'xtashi bilan kechadi.

O'tkazilgan laboratoriya tadqiqotlari natijasida O'zbekistonning ayrim hududlarida, xususan, Qashqadaryo va Samarqand viloyatlarida zearalenon miqdori xalqaro me'yorlardan (0,1 mg/kg) oshganligi aniqlandi. Bu esa don mahsulotlarini yig'ish, tashish va saqlash jarayonlarida gigiyenik talablarning yetarli darajada bajarilmayotganligini ko'rsatadi.

Eksperimental hayvonlarda o'tkazilgan tajribalar zearalenonning gormonlar sekretsiyasiga, jigar fermentlariga va to'qimalar morfologiyasiga kuchli ta'sir ko'rsatishini tasdiqladi. Toksin dozalari ortgan sari hayvonlarda ALT va AST faolligi oshgan, estradiol miqdori 3 barobar ortgan, progesteron esa 60% ga kamaygan, bu esa hepatotoksik va endokrin buzilishlar bilan bog'liq.

Zearalenon issiqlik, pH o'zgarishi va yorug'lik ta'siriga barqaror bo'lib, oddiy termik ishlov berish bilan parchalanmaydi. Shu sababli uni yo'qotish uchun murakkab fizik, kimyoviy va biologik usullar talab etiladi. Tadqiqot davomida aniqlanishicha, biologik dezaktivatsiya usullari (*Bacillus subtilis* bakteriyasi, bentonit adsorbenti bilan birgalikda) toksinni 80–87% gacha kamaytirishga imkon bergan. Bu usul ekologik xavfsiz va iqtisodiy jihatdan samarali bo'lib, O'zbekiston sharoitida amaliyotga joriy etish uchun istiqbolli hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari zearalenonning uzoq muddatli, past dozalarda ham gormonal tizimni izdan chiqaruvchi xususiyatga ega ekanini ko'rsatdi. Bu mikotoksinning xavfini kamaytirish uchun kompleks yondashuv zarur:

- don mahsulotlarini gigiyenik sharoitda saqlash;
- mikotoksin monitoring tizimini joriy etish;
- laboratoriyalarda muntazam ELISA va HPLC tahlillarini o'tkazish;
- biologik detoksifikatsiya texnologiyalarini ishlab chiqish;
- aholining toksikologik xabardorligini oshirish.

Xulosa qilib aytganda, zearalenon bilan zaharlanish-bu nafaqat toksikologik, balki ijtimoiy-sog'liqiy va iqtisodiy muammodir. Uning oldini olish uchun ilmiy asoslangan profilaktika tizimi, nazorat mexanizmlari va xalqaro standartlarga mos me'yorlar zarur. Shu yo'l bilan O'zbekiston Respublikasida oziq-ovqat xavfsizligini ta'minlash, aholining sog'lig'ini himoya qilish va sog'lom ekologik muhitni yaratish mumkin bo'ladi.

ADABIYOTLAR:

1. Karimova M. M., & Jo'raqulova, N. A. (2021). *Oziq-ovqat xavfsizligi va mikotoksinlar: nazariya va amaliyot*. – Toshkent: "Fan va texnologiya" nashriyoti, 156 b.
2. O'zbekiston Respublikasi Sog'liqni saqlash vazirligi. (2021). *Mikotoksinlarning oziq-ovqat mahsulotlaridagi ruxsat etilgan miqdorlari to'g'risidagi Nizom*. – Toshkent.
3. O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi. (2022). *Biotoksikologiya va oziq-ovqat gigiyenasi*. – O'quv qo'llanma.
4. Abdulkarimov A. R., & Tursunov B. A. (2020). *Biokimyoy va toksikologiya asoslari*. – Samarqand: Samarqand davlat universiteti nashriyoti.
5. Normurodov A. S. (2019). "O'zbekiston sharoitida don mahsulotlarida mikotoksin ifloslanishining oldini olish omillari." *Biologiya va kimyo fanlari jurnali*, №3, 45–51-b.
6. O'zbekiston Respublikasi "Oziq-ovqat mahsulotlarining xavfsizligi to'g'risida"gi Qonuni. – Toshkent, 2020-yil, №3PV-614.
7. Rasulova D. Sh. (2022). "Zearalenon va boshqa mikotoksinlarning hayvon organizmiga ta'siri." *Tibbiyot va biologiya axborotnomasi*, №2, 67–73-b.
8. Qo'chqorov Sh. S. (2023). *Oziq-ovqat toksikologiyasi*. – Buxoro: Buxoro davlat universiteti nashriyoti, 178 b.

**МОНИТОРИНГ ДИНАМИКИ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТУДАКУЛЬСКОГО
ВОДОХРАНИЛИЩА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ
ЗЕМЛИ**

Романюк Юлия Анатольевна,
доцент кафедры «Инженерная геоматика»
Ташкентского архитектурно-строительного университета
Ташкент, Узбекистан
yulechka.romanyuk@mail.ru
Фазилова Ранохон Бобурхон кизи,
магистрантка 2-курса Ташкентского архитектурно-
строительного университета, Ташкент, Узбекистан
saidhonovaranohon@gmail.com

Аннотация. В данной статье представлены результаты комплексного исследования динамики водной поверхности Тудакульского водохранилища, расположенного в юго-западной части Узбекистана, с использованием технологий дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) и геоинформационных систем (ГИС). Основное внимание уделено оценке изменений площади водного зеркала за период 2020 по 2025 год, а также детальному анализу сезонных колебаний в течение 2024 года. Для обработки спутниковых данных Sentinel-2 применялся модифицированный нормализованный разностный водный индекс (MNDWI). Анализ показал значительные изменения водной поверхности, вызванные климатом, осадками и использованием водных ресурсов, что визуализировано с помощью графиков и карт. Это важно для разработки эффективных мер управления водными ресурсами. Исследование подтверждает эффективность использования дистанционного зондирования и геоинформационных систем в экологическом мониторинге и прогнозировании гидрологических процессов.

Ключевые слова: Тудакульское водохранилище, дистанционное зондирование, Sentinel-2, MNDWI, водная поверхность, мониторинг, изменение климата, ГИС-анализ.

**TO‘DAKO‘L SUV OMBORINING SUV YUZASI DINAMIKASINI MASOFADAN
ZONDLASH MA‘LUMOTLARI ASOSIDA KUZATISH**

Annotatsiya. Ushbu maqolada O‘zbekistonning janubi-g‘arbiy qismida joylashgan To‘dako‘l suv omborining suv yuzasi dinamikasini yerlarni masofadan zondlash (ZZ) va geoaxborot tizimlari (GIS) texnologiyalaridan foydalangan holda kompleks o‘rganish natijalari keltirilgan. Asosiy e‘tibor 2020-yildan 2025-yilgacha bo‘lgan davrda suv oynasi maydonidagi o‘zgarishlarni baholashga, shuningdek, 2024-yil davomida mavsumiy o‘zgarishlarni batafsil tahlil qilishga qaratilgan. Sentinel-2 sun‘iy yo‘ldosh ma‘lumotlarini qayta ishlash uchun o‘zgartirilgan normallashtirilgan farq suv indeksi (MNDWI) ishlatilgan. Tahlil iqlim, yog‘ingarchilik va suv resurslaridan foydalanish natijasida yuzaga kelgan suv yuzasida sezilarli o‘zgarishlarni ko‘rsatdi, bu grafikalar va xaritalar orqali tasvirlangan. Bu suvni boshqarishning samarali choralarini ishlab chiqish uchun muhimdir. Tadqiqot atrof-muhit monitoringi va gidrologik jarayonlarni bashorat qilishda masofadan zondlash va geoaxborot tizimlaridan foydalanish samaradorligini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: To‘dako‘l suv ombori, masofadan zondlash, Sentinel-2, MNDWI, suv yuzasi, monitoring, iqlim o‘zgarishi, GIS tahlili.

**MONITORING OF THE DYNAMICS OF THE WATER SURFACE OF THE TUDAKUL
RESERVOIR BASED ON REMOTE SENSING DATA**

Abstract. This article presents the results of a comprehensive study of the dynamics of the water surface of the Tudakul reservoir, located in the southwestern part of Uzbekistan, using remote sensing technologies and geographic information systems (GIS). The main focus is on assessing changes in the area of the water mirror for the period 2020 to 2025, as well as a detailed analysis of seasonal fluctuations during 2024. The modified normalized difference water index (MNDWI) was used to process Sentinel-2 satellite data. The analysis showed significant changes in the water surface caused by climate, precipitation and the use of water resources, which is visualized using graphs and maps. This is important for developing effective

water management measures. The study confirms the effectiveness of the use of remote sensing and geoinformation systems in environmental monitoring and forecasting of hydrological processes.

Keywords: *Tudukul Reservoir, remote sensing, Sentinel-2, MNDWI, water surface, monitoring, climate change, GIS analysis.*

Введение. В последние годы вопрос управления водными ресурсами и регулярного мониторинга их состояния на территории Узбекистана приобретает всё большую актуальность [1]. Водохранилища играют ключевую роль в поддержании экологического баланса, обеспечении сельского хозяйства водой и служат источником питьевого водоснабжения. Особенно в условиях изменения климата, снижения уровня осадков и неравномерного распределения водных ресурсов возрастает необходимость оперативной оценки колебаний уровня воды.

Традиционные методы наблюдения требуют значительных временных и финансовых затрат, поэтому использование технологий дистанционного зондирования рассматривается как наиболее рациональное и научно обоснованное решение [2].

Цель данного исследования заключается в выявлении изменений площади водной поверхности водохранилища Тудакуль за период 2020–2025 гг. и проведении ежемесячного мониторинга за 2024 год. Для обработки спутниковых данных Sentinel-2 применялся индекс MNDWI [3], а полученные результаты были проанализированы в виде диаграмм. Годовые изменения позволяют оценить общую динамику уровня воды, а ежемесячные наблюдения дают возможность выявить сезонные колебания.

Результаты исследования служат важной научной основой для управления водными ресурсами, раннего выявления дефицита воды, оценки экологических рисков и совершенствования водохозяйственной политики. Кроме того, использование индекса MNDWI подтвердило его эффективность как одного из оптимальных подходов для определения площади водной поверхности водохранилища Тудакуль (юго-западная часть Узбекистана). Проведённые исследования позволили оценить как годовую, так и месячную динамику водной поверхности, что демонстрирует высокую результативность применения методов дистанционного зондирования [4] с использованием индексов MNDWI и NDWI.

Район исследования и использованные данные. Водохранилище Тудакуль расположено в юго-западной части Узбекистана и является одним из крупнейших водных объектов региона. Оно играет важную роль в управлении водными ресурсами, орошении сельскохозяйственных культур, обеспечении населения питьевой водой, а также в поддержании экологического равновесия. В условиях изменения климата, сокращения количества осадков и неравномерного распределения водных ресурсов возрастает необходимость регулярной оценки состояния водной поверхности.

Рельеф территории преимущественно равнинный, окружён пустынными и полупустынными ландшафтами. Объём водохранилища зависит от сезонных притоков и уровня осадков, поэтому площадь водного зеркала может подвергаться значительным колебаниям. По этой причине использование данных дистанционного зондирования Земли является наиболее эффективным методом для определения площади водной поверхности.

В исследовании анализировались данные за 2020–2025 годы, в рамках которых оценивалась как годовая динамика, так и ежемесячные изменения за 2024 год [5,6].

В качестве основного источника информации использовались спутниковые снимки Sentinel-2, обладающие пространственным разрешением 10–20 метров, что обеспечивает высокую точность при определении границ водоёмов и изучении их динамики.

Для выделения водной поверхности применялся индекс MNDWI (Modified Normalized Difference Water Index), который позволяет надёжно отделять водные объекты от других элементов земной поверхности и обеспечивает высокую точность анализа в оптическом диапазоне.

ВОДОХРАНИЛИЩЕ ТУДАКУЛЬ

Расположение: Навоийская область, Кызылтегинский район
 Площадь: 210 км²
 Объём воды: 1,2 км³
 Средняя глубина: 4,8 м
 Год создания: 1952 год
 Высота над уровнем моря: 223,5 м

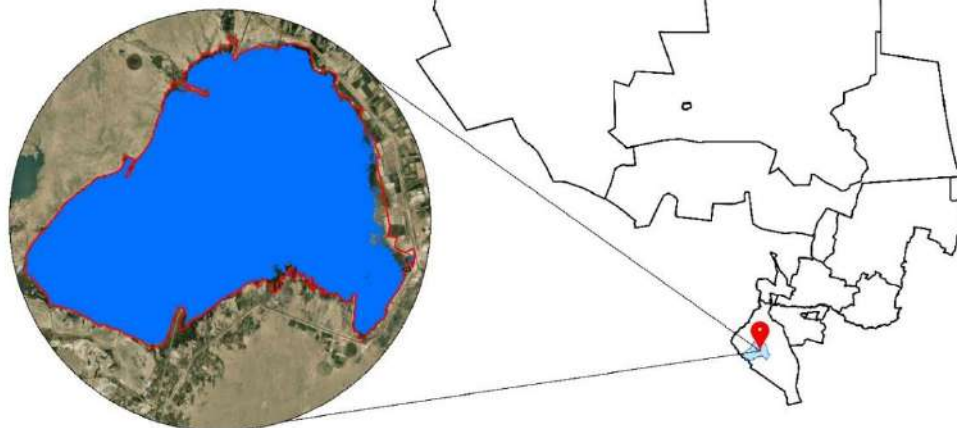


Рисунок 1. Расположение водохранилища Тудакуль

Перед проведением анализа изображения проходили предварительную обработку, включая атмосферную коррекцию и привязку к единой системе координат. Для каждого года рассчитывались значения индекса MNDWI, на основе которых определялись площади водной поверхности. Результаты визуализировались в виде диаграмм, отображающих годовые изменения и ежемесячные колебания площади водного зеркала.

Методология. В данном исследовании для мониторинга водной поверхности Тудакульского водохранилища использовались данные спутника Sentinel-2, обеспечивающие высокое пространственное и спектральное разрешение [7]. Основным инструментом выделения водных объектов служил индекс MNDWI (Modified Normalized Difference Water Index), показавший наибольшую точность в предыдущем исследовании.

Формула индекса имеет вид:

$$MNDWI = \frac{Green - SWIR1}{Green + SWIR1}$$

где:

- Green – отражательная способность в зелёном диапазоне (канал B3 Sentinel-2),
- SWIR1 – отражательная способность в ближнем инфракрасном диапазоне (канал B11 Sentinel-2).

Данный индекс позволяет эффективно отделить водную поверхность от растительности и почвы, так как вода имеет высокое отражение в зелёном спектре и низкое – в SWIR, тогда как почва и растительность демонстрируют обратные характеристики.

Предварительная обработка спутниковых данных включала атмосферную коррекцию, геометрическое выравнивание и приведение всех изображений к единой системе координат. После этого по формуле MNDWI для каждого изображения были рассчитаны значения индекса, а бинаризация позволила выделить пиксели, относящиеся к водной поверхности (значение 1), и к суше (значение 0).

Рассчитанные данные использовались для построения временных рядов, которые отразили изменения площади водной поверхности в период 2020–2025 годов, а также её помесечную динамику за 2024 год. Полученные результаты представлены в виде графиков, иллюстрирующих как долгосрочные, так и сезонные колебания водного зеркала.

Применение MNDWI подтвердило его высокую эффективность для оценки площади водной поверхности в условиях засушливых территорий. Методология исследования демонстрирует, что спутниковые наблюдения позволяют не только оперативно определять уровень воды, но и

обеспечивают основу для разработки стратегий рационального водопользования и управления водными ресурсами в условиях изменяющегося климата.

Результаты и обсуждение. Согласно результатам исследования, площадь водной поверхности водохранилища Тудакуль в период 2020–2025 гг. претерпела значительные колебания. Годовые данные, представленные на диаграмме, наглядно демонстрируют изменения: в отдельные годы наблюдалось резкое снижение уровня воды, тогда как в другие периоды фиксировалось частичное восстановление. Эти колебания объясняются ежегодным распределением осадков, интенсивностью использования водных ресурсов и изменениями климатических условий.

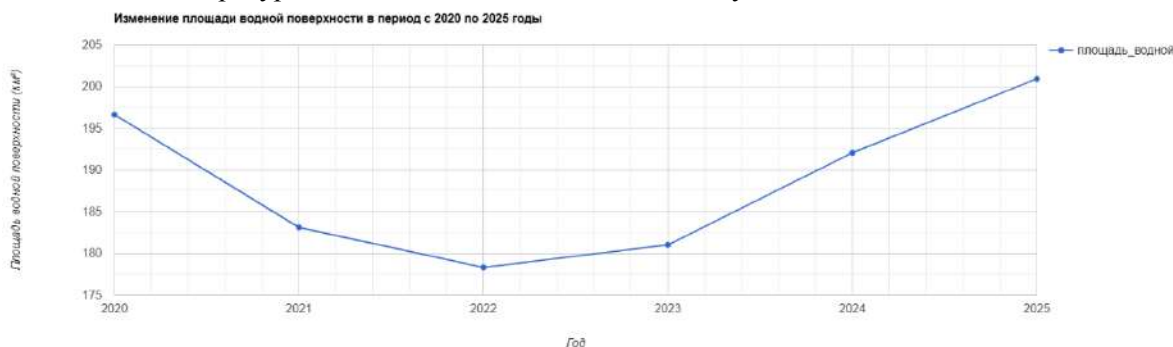


Рисунок 2. Динамика изменения площади водной поверхности Тудакульского водохранилища в 2020–2025 годах

Из диаграммы видно, что в 2020 году площадь водной поверхности была относительно большой, однако в 2021–2022 гг. отмечалось её сокращение. В 2023 году произошло частичное восстановление водных запасов, но в 2024–2025 гг. вновь проявилась тенденция к снижению. Это подчёркивает необходимость устойчивого управления водными ресурсами (рисунок 2).

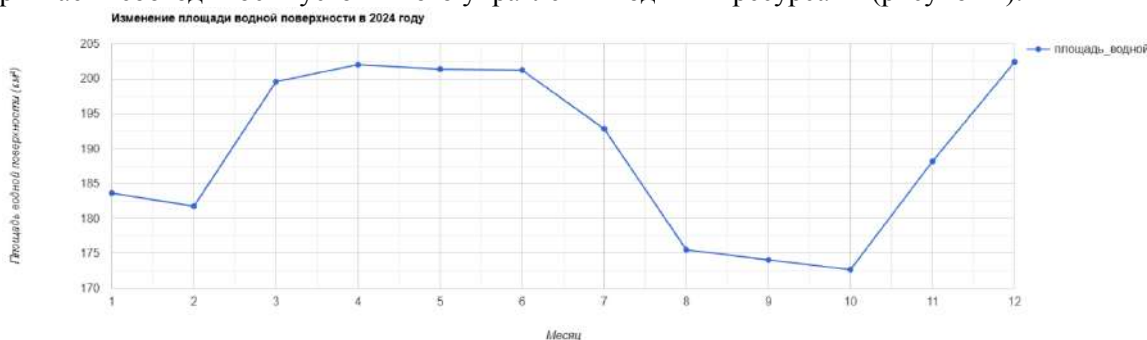


Рисунок 3. Ежемесячные изменения площади водной поверхности Тудакульского водохранилища в 2024 году

Результаты ежемесячного мониторинга за 2024 год также выявили выраженные сезонные колебания. В январе-марте площадь водной поверхности оставалась сравнительно небольшой, весной (апрель-июнь) происходил значительный рост уровня воды. Пик значений пришёлся на июль-август, после чего в осенне-зимний период (сентябрь-декабрь) наблюдалось постепенное уменьшение площади водного зеркала. Эти изменения отражают сезонное распределение водных ресурсов и гидрологические особенности региона (рисунок 3).

Полученные результаты подтверждают высокую точность применения индекса MNDWI для оценки площади водной поверхности водохранилища Тудакуль [8,9]. Наблюдение годовой и месячной динамики позволяет формировать научно обоснованные рекомендации по управлению водными ресурсами. Кроме того, данный подход может быть эффективно использован для экологического мониторинга, оценки риска дефицита воды и изучения последствий климатических изменений.

Выводы. Исследование подтвердило эффективность и научную обоснованность применения технологий дистанционного зондирования для определения динамики водной поверхности водохранилища Тудакуль. Анализ, проведённый за период 2020–2025 гг., показал, что площадь водного зеркала ежегодно претерпевает значительные колебания. Эти изменения напрямую связаны с климатическими условиями региона, количеством осадков и уровнем использования водных ресурсов.

Результаты ежемесячного мониторинга за 2024 год наглядно продемонстрировали сезонные изменения. Весной и летом площадь водной поверхности увеличивалась, тогда как осенью и зимой фиксировалось её существенное сокращение. Такие колебания подчёркивают необходимость более глубокого изучения сезонного гидрологического режима и служат научной основой для разработки будущих стратегий управления водными ресурсами.

Проведённый анализ показал, что индекс MNDWI [10-11] обладает высокой точностью при определении водной поверхности, а совместное использование этого индекса с данными спутника Sentinel-2 обеспечивает ещё более достоверные результаты. Данный метод может эффективно применяться для экологического мониторинга, оценки риска дефицита воды, прогнозирования засушливых явлений и совершенствования региональной водохозяйственной политики.

Научная и практическая значимость исследования заключается в том, что оно расширяет возможности применения современных космических данных и геоинформационных подходов в управлении водными ресурсами. Полученные результаты могут быть использованы для оценки состояния водохранилища и планирования устойчивого водоснабжения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Bioresita F.; Puissant A.; Stumpf, A.; Malet, J.-P. (2018). *A Method for Automatic and Rapid Mapping of Water Surfaces from Sentinel-1 Imagery. Remote Sensing, 10, 217. [CrossRef]*
2. Иванов И.И.; Петров, П.П. (2019). *Применение индекса MNDWI для мониторинга водных объектов Узбекистана. Геоинформатика, 4, 45–52.*
3. Karimov A.T. (2020). *MNDWI indeksi yordamida To‘dako‘l suv omborining yillik monitoringi. Geografiya va atrof-muhit, 12, 78–86.*
4. Морозов А.А.; Иваненко, Е.К. (2022). *Применение систем дистанционного зондирования для управления водными ресурсами в Узбекистане. Экология, 8, 100–110.*
5. Masse, A. (2021). *Product User Manual: Water Bodies Sentinel-2 100M v1, Copernicus Global Land Operations—Cryosphere and Water, CGLOPS-2. (Accessed August 9, 2021)*
6. Романов В.В.; Зайцев, Ю.С. (2018). *Методика обработки Sentinel-2 снимков для определения водной поверхности в условиях полупустынной зоны. Геодезия и картография, 6, 10–18.*
7. Романюк Ю. А., Фазилова Р.Б. *Применение данных космических съёмок для ведения мониторинга водохранилищ в Республики Узбекистан // Теория и практика современной науки. – 2024. – №. 12 (114). – С. 125-131.*
8. Сидоров А.А.; Кузнецова, И.В. (2020). *Сравнительный анализ SAR- и оптических данных для оценки изменения уровня воды в водохранилищах. Известия Узбекистана, 2, 67–75.*
9. Turg‘unov S.S. (2021). *SAR va optik ma‘lumotlarni kombinatsiyalash orqali suv resurslarini monitoring qilish. O‘zbekiston Geoinformatsion Jurnal, 3, 60–68.*
10. Chini M.; Hostache R.; Giustarini L.; Matgen, P. (2017). *A Hierarchical Split-Based Approach for Parametric Thresholding of SAR Images: Flood Inundation as a Test Case. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 55, 6975–6988. [CrossRef]*
11. Yusupova D.Y. (2022). *Suv omborlarida MNDWI indeksidan foydalanish usullari. Atrof-muhit muhofazasi, 2, 22–30.*

**BLOCKCHAINDA ANOMALIYALARNI ANIQLASH UCHUN MASHINALI O‘QITISH
TEKNOLOGIYALARIDAN FOYDALANISH**

*Umarov Shuxratjon Azizjonovich,
Farg‘ona davlat texnika universiteti
“Dasturiy injiniring va kiberxavfsizlik” kafedrası dotsenti
sh.umarov81@mail.ru*

Annotatsiya. Ushbu maqolada blokcheyn texnologiyasida yuzaga keladigan anomaliyalar va xavfsizlik muammolarini aniqlashda mashinali o‘qitish usullaridan foydalanish imkoniyatlari va ularning samaradorligi tahlil qilingan. Blokcheyn bir qator afzalliklarga ega bo‘lsada, u 51% hujumlar, soxta tranzaksiyalar, smart-kontraktlar zaifliklari va ma‘lumotlarning buzilishi kabi tahdidlarga uchraydi. Shu sababli, mashinali o‘qitish algoritmlari orqali tarmoqdagi noodatıy faoliyatni avtomatik aniqlash hamda xavf darajasini baholash muhim ahamiyat kasb etadi. Shuningdek, maqolada Random Forest, AdaBoost, XGBoost, K-means va Isolation Forest kabi mashinali o‘qitish modellarining 51% hujumni va tranzaksiyalardagi anomaliyalarni aniqlashda yuqori samara berishi ko‘rsatilgan. Kelajakdagi ilmiy tadqiqotlarda blokcheyndagi anomaliyalarni aniqlash uchun masshtabli, energiya samarali va real vaqt algoritmlaridan foydalanish maqsadga muvofıqligi ta‘kidlangan.

Kalit so‘zlar: blokcheyn, anomaliya, 51% hujum, mashinali o‘qitish, kiberhujum, bitkoin, xesh qiymat, tarmoq xavfsizligi.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ
ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛИЙ В БЛОКЧЕЙНЕ**

Аннотация. В данной статье анализируются возможности и эффективность использования методов машинного обучения для обнаружения аномалий и проблем безопасности в технологии блокчейн. Несмотря на ряд преимуществ, блокчейн подвержен таким угрозам, как атаки 51%, мошеннические транзакции, уязвимости смарт-контрактов и утечки данных. Поэтому автоматическое обнаружение необычной активности в сети и оценка уровня риска с использованием алгоритмов машинного обучения имеет большое значение. В статье также показано, что модели машинного обучения, такие как Random Forest, AdaBoost, XGBoost, K-means и Isolation Forest, весьма эффективны в обнаружении атак 51% и аномалий в транзакциях. Подчеркивается, что в будущих научных исследованиях следует использовать масштабируемые, энергоэффективные и работающие в режиме реального времени алгоритмы для обнаружения аномалий в блокчейне.

Ключевые слова: блокчейн, аномалия, атака 51%, машинное обучение, кибератака, биткойн, хеш-значение, сетевая безопасность.

**USING MACHINE LEARNING TECHNOLOGIES TO DETECT ANOMALIES IN
BLOCKCHAIN**

Abstract. This article analyzes the possibilities and effectiveness of using machine learning methods to detect anomalies and security issues in blockchain technology. Although blockchain has a number of advantages, it is subject to threats such as 51% attacks, fraudulent transactions, smart contract vulnerabilities, and data breaches. Therefore, automatic detection of unusual activity in the network and assessment of the level of risk using machine learning algorithms is of great importance. The article also shows that machine learning models such as Random Forest, AdaBoost, XGBoost, K-means, and Isolation Forest are highly effective in detecting 51% attacks and anomalies in transactions. It is emphasized that future scientific research should use scalable, energy-efficient, and real-time algorithms to detect anomalies in the blockchain.

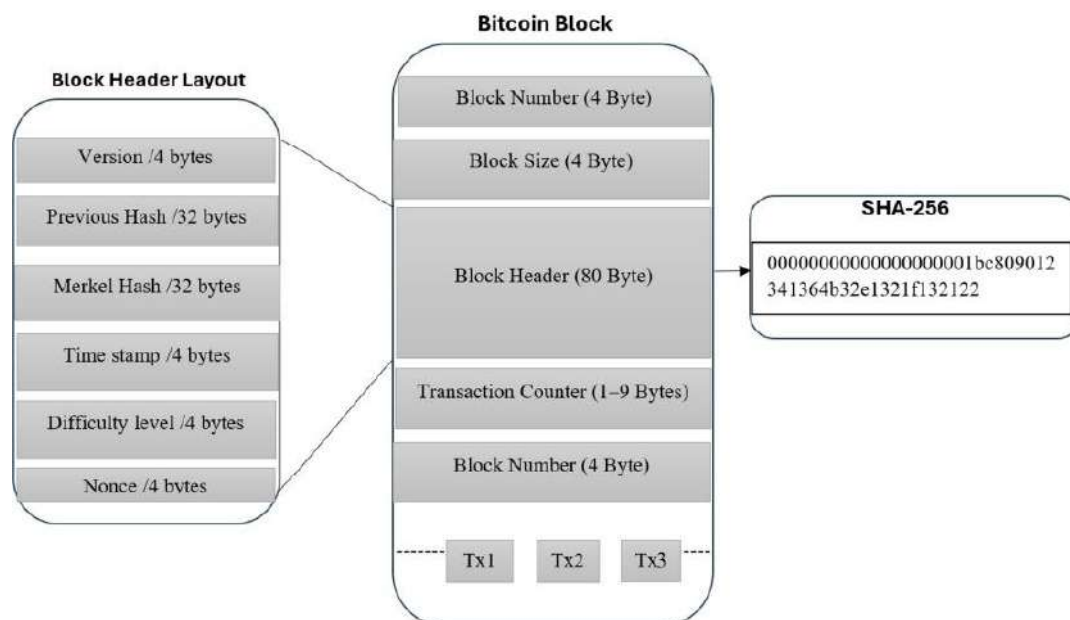
Keywords: blockchain, anomaly, 51% attack, machine learning, cyberattack, bitcoin, hash value, network security.

Kirish. Blokcheyn texnologiyasi detsentralizatsiya, shaffoflik va xavfsizlik kabi afzalliklarga ega bo‘lsa-da, u ham turli xil anomaliyalar va hujumlarga moyildir. Xususan, 51% hujumlar, double-spending

(ikki karra sarflash), smart-contract zaifliklari, ma'lumot bloklarining soxtalashtirilishi va noqonuniy tranzaksiyalar shular jumlasidandir. Agar blokcheyn tarmog'ida anomaliya yuz bersa, bu holat bitimlardagi soxtakorlik, ma'lumotlarning buzilishi yoki butun tarmoq ishlashining izdan chiqishiga sabab bo'lishi mumkin. Shu bilan birga, blokcheynning markazlashtirilmagan tabiati tufayli an'anaviy anomaliyani aniqlash usullari bu turdagi tizimlarga to'liq mos kelmaydi [1]. Shu sababli, sun'iy intellekt va mashinali o'qitish usullaridan foydalangan holda anomaliya aniqlashning maxsus modellarini ishlab chiqish dolzarb hisoblanadi [2].

Metodologiya. ML metodlari turli sohalarda anomaliyalarni aniqlashda keng qo'llanilmoqda, shu jumladan, blokcheynda ham tarmoqda anomaliyalarni kuzatish hamda oldini olish foydalanilmoqda. ML algoritmlari orqali blokcheyndagi anomaliyali xatti-harakatlarni aniqlash, ularni oldingi ma'lumotlar asosida tahlil qilish mumkin [3]. Blokcheyn tizimida anomaliyalarni aniqlash maxfiylik (confidentiality), yaxlitlik (integrity) va mavjudlik (availability), ya'ni CIA-uchligi tamoyillarini ta'minlashda muhim rol o'ynaydi [4]. Mashinali o'qitish texnologiyalari blokcheyndagi faoliyatni tahlil qilish, noodatiy tranzaksiyalarni aniqlash va so'nggi paytlarda sodir bo'lgan hujumlar ssenariylarini modellashtirishda qo'llaniladi. Ular orqali tarmoq faoliyatidagi statistik og'ishlar yoki shubhali holatlar aniqlanadi, har bir blok yoki uzatmada xavf darajasi hisoblanadi, ma'lum bir anomaliya qaysi turdagi hujumga tegishli ekanligi avtomatik aniqlanadi. ML texnologiyalarining blokcheyn xavfsizligiga joriy etilishi axborot xavfsizligining asosiy tamoyillarini markazlashmagan tizimlarda amaliyotda qo'llash imkonini beradi [5].

Blokcheyn - bu raqamli ma'lumotlarni bloklarda saqlashga mo'ljallangan elektron platforma hisoblanadi. Barcha bloklar o'zaro bog'langan bo'ladi. Blokcheynning o'zgarishlik xususiyati bloklarda saqlangan ma'lumotlar o'zgarishini oldini oladi. Agar bitta bit ma'lumot o'zgartirilsa, undan keyingi barcha bloklar uzilib qoladi [6]. Klientlar ma'lumotlari, to'lovlar, mulk shartnomalari kabi muhim ma'lumotlar tarmoqda ochiq holda mavjud bo'ladi va barcha foydalanuvchilar tomonidan kuzatilishi mumkin. Bu esa xavfsizlik nuqtai nazaridan xatarni vujudga keltirishi mumkin [7]. Har bir blokda ushbu blokka xos raqamli imzo (xesh) mavjud (1-rasm). Ularning yaratilishi xeshlash algoritmlari yordamida amalga oshiriladi. Har bir blok xesh orqali navbatdagi blokka bog'lanadi. Agar blokdagi bitta bit ma'lumot o'zgarsa, yangi raqamli imzo yaratiladi. Bu orqali tarmoqdagi har qanday ishtirokchi bloklarning haqqoniyligini tekshirishi mumkin. Shu yo'l bilan turli buzg'unchi o'zgarishlar darhol fosh etiladi. Blokcheyn turli afzalliklar orqali xavfsizlik va ishonchni ta'minlashiga qaramay, u hali ham 51% hujum kabi buzg'unchi faoliyatlarga moyildir [8, 9].



1-rasm. Bitcoin blokning namunaviy strukturasi

Raqamli imzo ma'lumotlarning aniqligi va yaxlitligini ta'minlashga xizmat qiladi [10]. Blokcheynda har bir blokning tarkibiga qarab raqamli imzo yaratiladi. Bu jarayon Merkle xeshi va oldingi blokning raqamli imzosi asosida amalga oshiriladi. Shunday qilib, raqamli imzo blokning haqqoniyligini tasdiqlash bilan birga, uning yaxlitligini ham ta'minlaydi. Maynerlar blokni yaratish uchun masalan, "17 ta nol bilan boshlanadigan" xesh yaratishi kerak bo'ladi. Agar hujumchi Merkle daraxtidagi ma'lumotni o'zgartirsa, xesh o'zgarib ketadi va blok mablag'siz hisoblanadi. Shu bois, butun blok zanjiri buziladi. Bu muammoni bartaraf etish uchun hujumchi barcha buzilgan bloklar uchun yangi xeshlar yaratishi kerak bo'ladi. Bu esa juda katta hisoblash quvvatini talab qiladi va amalga oshirilishi deyarli imkonsiz hisoblanadi.

Blokcheyn maynning bu yangi blokni yaratish va uni taqsimlangan reestrğa qo‘shish jarayonidir. Maynning asosan Bitcoin bilan bog‘lansa-da, turli kriptovalyutalarda blok yaratish jarayonida farqlar mavjud. Ayrim hollarda yuqori quvvatli hisoblash tizimlari zarur bo‘ladi. Maynerlar murakkab matematik muammolarni yechishi kerak bo‘ladi. Shuning uchun ularga maxsus, yuqori quvvatli texnik qurilmalar kerak. Mayner blokni yechgani zahoti, bu haqda tarmoqqa xabar beradi va boshqa maynerlar keyingi blok uchun ish boshlaydi.

Natijalar. Maynning pullari juda muhim rol o‘ynaydi, chunki ular hisoblash quvvati katta bo‘lgan uskunalardan tashkil topgan guruhlardir. Birlashgan maynning pullari alohida maynerlarga nisbatan yuqori xesh quvvatiga ega va shu bois blokni tezroq yechish imkoniga ega bo‘ladi [11]. Bitcoin blokini mayn qilish taxminan 10 daqiqa talab qiladi va juda ko‘p apparat resurslarini ishlatadi. Hozirda bir blokni yaratib blokcheynga qo‘shgan mayner 12.5 BTC va unga tegishli to‘lovlarni mukofot sifatida oladi.

PoW (Proof of Work) konsensus mexanizmining birinchi turidir. Unda foydalanuvchi blokni mayn qilish uchun murakkab tenglamani yechishi kerak bo‘ladi. Bitcoin birinchi kriptovalyuta sifatida PoWni qabul qildi va ko‘plab boshqa kriptovalyutalar ham shu yo‘lni tanladi. PoWda asosiy qaror qabul qiluvchilar bu maynerlardir. Ular bitimni qabul qilish yoki blokcheynga qo‘shish haqida qaror qabul qiladi. Blokni PoW asosida mayn qilish uchun katta mehnat va energiya sarflanadi. Jarayon ko‘pincha tasodifiy usulda, ko‘p urinish orqali amalga oshadi [12]. Maqsad xesh (target hash) blok xeshidan kichik bo‘lishi kerak. Ya‘ni, mayner yechgan xesh belgilangan maqsad xeshdan past bo‘lsa, blok qabul qilinadi [13]. PoW mexanizmi shunga asoslanganki, tarmoqdagi nodalarning kamida yarmiga ega bo‘lish nazarda tutiladi. Shu bois, agar kimdir umumiy xesh quvvatining 51% yoki undan ko‘prog‘ini egallab olsa, PoW ham 51% hujumdan holi emas. Bitkoyn maynning juda ko‘p energiya sarflaydi. Hatto, ayrim manbalarga ko‘ra, u 159 ta mamlakatdan ko‘proq energiya ishlatadi. Shu sababli PoW asosida mayn qilish juda sekin va qimmat turishi mumkin. Maynning pullarining markazlashuvi tarmoq xavfsizligi uchun yana bir tahdid hisoblanadi. PoWga asoslangan kriptovalyutalar, ayniqsa, xesh quvvati past bo‘lsa, 51% hujumga juda oson uchrashi mumkin [14].

$$P(T_i \leq t) = 1 - \exp\left(-\frac{r_i}{D} \cdot t\right)$$

PoWda blok yaratish ehtimoli quyidagi formula bilan aniqlanadi: r_i - maynerning xeshlash quvvati, D - qiyinlik darajasi, t - vaqt.

Odatda 51% hujum shunda sodir bo‘ladiki, hujumchi tarmoqdagi xeshlash quvvatining 51 foizini egallab oladi. Bu holatda u asl zanjirdan mustaqil ravishda maxfiy yangi zanjir yaratadi. Keyinchalik, ushbu maxfiy zanjirni butun tarmoqqa taqdim etadi va u eng uzun zanjir sifatida asosiy zanjirga aylanadi [15]. Blokcheynda “eng uzun zanjir - haqiqiy zanjir” degan qoida mavjud. Shu sababli, agar hujumchilarda 51% yoki undan ko‘p xeshlash quvvati bo‘lsa, ular boshqa nodalarni o‘z zanjiriga qo‘shilishiga majbur qilishi mumkin.

Agar hujumchida xeshlash quvvati 50% dan kam bo‘lsa, u hujum qilishga urinishi mumkin, masalan, ikki marta sarflash (double-spending), ammo bunday holatda muvaffaqiyat ehtimoli kamroq bo‘ladi [8]. Shu bois, tarmoqning umumiy xeshlash darajasi qanchalik yuqori bo‘lsa, 51% hujumni amalga oshirish shunchalik qimmat va qiyin bo‘ladi. Buni tarmoqning xavfsizligi uchun ijobiy omil sifatida qabul qilish mumkin [16].

2014 yil iyulda, Bitcoin maynning puli GHash.io butun tarmoqning xesh quvvatida 50%dan ortiq ulushga ega bo‘ldi. Bu jamoatchilikda jiddiy xavotir uyg‘otdi, chunki bitta tashkilot blokcheyn tizimini buzishi, bitimlarni bekor qilishi, ikki marta sarflashi yoki boshqa foydalanuvchilarni bloklash imkoniga ega edi. GHash.io bu nazoratdan foydalanmagan bo‘lsa-da, uning mavjudligi Bitcoinning konsensus mexanizmidagi zaiflikni namoyon qildi. Shundan so‘ng, GHash.io o‘z ixtiyori bilan xesh quvvatini 42% gacha kamaytirdi va xavflarni nazorat qilish uchun maxsus kuzatuvchi qo‘mita tuzishni qo‘llab-quvvatladi [14]. Ushbu voqea blokcheyn tarmoqlarida detsentralizatsiya darajasini yuqori saqlash zarurligini yanada ko‘rsatdi. Shu bilan birga, mashinali o‘qitish usullari real vaqtda maynning faoliyatini kuzatish, shubhali harakatlarni aniqlash va markazlashuv tendensiyalarini bashorat qilishda yordamchi texnologiya sifatida faol ishlatilishi mumkin.

Bitcoinning muallifi Satoshi Nakamoto 51% hujum ehtimolini hisoblash uchun maxsus matematik modelni taklif qilgan [10]. Asosiy g‘oya: asl zanjir va hujumchi zanjiri binomial tasodifiy jarayon orqali ilgariylaydi. Hujumchi asl zanjirdan ortda qolishi mumkin, ammo ma’lum sharoitlarda uni quvib o‘tishi ham ehtimoldan xoli emas.

$$q_z = \begin{cases} 1, & \text{agar } p \leq q \\ \left(\frac{q}{p}\right)^z, & \text{agar } p > q \end{cases}$$

bu yerda P - asl maynerning blok yaratish ehtimoli, q - hujumchining blok yaratish ehtimoli, z - hujumchi necha blok ortda ekanligini ko'rsatadi. Haqiqiy jarayonda tarmoqdagi har bir bitim 6 ta tasdiq olgandan keyin, qabul qilinadi. Bu orada hujumchining harakatlarini qabul qiluvchi foydalanuvchi bilmaydi, shuning uchun hujum ehtimoli Poisson taqsimoti $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ asosida baholanadi [12].

$$1 - \sum_{k=0}^z \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{z-k}\right)$$

Bu formula hujumchining blokcheyn zanjirida qancha vaqtda hukmronlik qilishini baholashga xizmat qiladi.

Muhokamalar. Bir qator ilmiy maqola va adabiyotlarda ML asosida anomaliyalarni aniqlashga doir bir qancha modellar taklif etilgan. Jumladan, Dynamic Miner Reputation va Weighted Block Acceptance (DRW-BA) modeli maynerlarning xatti-harakatini baholab, 51% hujumdan himoya qiladi, XGBCLUS algoritmi yordamida balanssiz ma'lumotlar bilan ishlanadi, SHAP (Shapley Additive Explanation) usuli orqali xususiyatlarning ahamiyati baholanadi, PoW va PoSni birlashtiruvchi Blockchain modeli markazlashuv darajasi yuqori va resurs talab yuqori, TBSD (Trust-Based Shard Distribution) modeli zararli maynerlarni turli nardlarga taqsimlash orqali xavfni kamaytirishga mo'ljallangan.

Blokcheynda anomaliyalarni aniqlash uchun turli mashinali o'qitish algoritmlari qo'llaniladi (1-jadval). Ularning samaradorligi ma'lumotlarning xususiyati va muammoning turiga bog'liq. Jumladan, Support Vector Machine (SVM) bulut ichidagi ma'lumotlarni chegara chiziqlari bilan ajratishga asoslangan kuzatuvli o'rganish algoritmi. U blokcheynda shubhali va oddiy bitimlarni ajratish uchun ishlatiladi. SVM yuqori aniqlikka ega, lekin katta miqdordagi ma'lumotda sekin ishlaydi. K-Means klasterlash kuzatuvsiz o'rganish algoritmi bo'lib, ma'lumotlarni o'xshashligiga qarab klasterlarga ajratadi. U blokcheyn tarmog'idagi maynerlar yoki bitimlar faoliyatini guruhlash va shubhali klasterlarni aniqlash uchun ishlatiladi. Random Forest (RF) ko'p daraxtli bo'lib, har bir daraxt alohida tasnif yaratadi va natijalar umumiy ovoz berish orqali chiqariladi. Blokcheyn bitimlarining anomaliya yoki normal ekanligini aniqlashda samarali. XGBoost balanssiz ma'lumotda ham yaxshi natija beradi. Aniqlik va tezkorlikda yuqori. Ammo hisoblash juda ko'p resurs talab qiladi.

1-jadval.

Anomaliyani aniqlovchi mashinali o'qitish algoritmlarining qiyosiy jadvali

Algoritm	Qo'llanilishi	Aniqliligi	Yodda saqlashi	Tezligi
SVM	Ma'lum anomaliya turlarini belgilab aniqlash	92,1%	90.4%	91.1%
K-Means	Yangi yoki noma'lum anomaliyalarni aniqlash	87,6%	85.0%	85.6%
RF	Xavflarga javob berish strategiyasini o'rganish	95.3%	94.9%	94.8%
XGBoost	Tarmoq topologiyasini tahlil qilish	96.5%	95.8%	96.0%

Jadvaldan ko'rinadiki, XGBoost va RF algoritmlari eng yuqori aniqlik va samaradorlikka ega.

Bundan ko'rinadiki, blokcheynda anomaliyalarni aniqlash uchun ML algoritmlarini joriy etish ancha samarali ekani aniqlandi. Biroq, amaliyotda qator muammolar mavjud. Masalan, masshtablanish muammosi. Blokcheyn tizimlari o'sishi bilan ma'lumotlar hajmi va mayner soni ortib boradi. Bu holatda ML algoritmlarining hisoblash og'irligi keskin ortib, real vaqtda ishlash samaradorligi pasayadi. Shuning uchun masshtablanadigan va tarqoq ML modellarini yaratish zarur. Shuningdek, ma'lumot disbalansi muammosi. Odatda 51% hujumlar va boshqa anomaliyalar kamdan-kam uchraydigan holatlar bo'lgani uchun ma'lumotlar bazasida anomaliyalarning ulushi juda kam. Bu imbalans (imbalanced) ma'lumotlar muammosini keltirib chiqaradi. Ethereum, Bitcoin, Cardano kabi turli blokcheyn platformalarida turlicha struktura va protokollar mavjud. Bu holat ML modellarini barcha platformalarga umumiy lashtirishni qiyinlashtiradi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda blokcheyn tarmoqlaridagi 51% hujumlar va boshqa anomaliyalarni aniqlash uchun mashinali o'rganish (ML) algoritmlarining rolini o'rgandik. Amaliyotda Random Forest va XGBoost algoritmlari 95% dan yuqori aniqlik bilan 51% hujumlarni aniqlashda yuqori samaradorlik ko'rsatdi. Shuningdek, ma'lumotlar disbalansi, anomaliyalarning o'zgaruvchanligi, va blokcheyn arxitekturasining turlichaligi kelgusi tadqiqotlarda hal etilishi lozim bo'lgan muammolar sifatida qayd etildi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, ML algoritmlari blokcheyn xavfsizligini ta'minlashda muhim vosita bo'lishi mumkin. Shu bilan birga, ML modellari tarmoq masshtablanishi va aniqlik muvozanatini ham e'tiborga olishi lozim. Aniq natijalarga erishish uchun maxsuslashgan va adaptiv ML arxitekturalarini yaratish kerak. Kelajakdagi ilmiy tadqiqotlarda blokcheyndagi anomaliyalarni aniqlash uchun masshtabli, energiya samarali va haqiqiy vaqtda ishlovchi algoritmlarga e'tibor qaratishi lozim.

ADABIYOTLAR:

1. Davlatova, D. (2024). *Axborot tizimlari anomaliyalarini sun'iy immun tizimlar asosida aniqlash mexanizm va algoritmlari*. *Nordic_Press*, 3(0003).
2. Azizjonovich, U. S., & Azizovich, U. B. (2024). *Bioidentifikatsiya tizimlarini intellektuallashtirish mohiyati*. *Science and innovation*, 3(Special Issue 50), 205-209.
3. Hasan, M., Rahman, M. S., Janicke, H., & Sarker, I. H. (2024). *Detecting anomalies in blockchain transactions using machine learning classifiers and explainability analysis*. *Blockchain: Research and Applications*, 5(3), 100207.
4. Boymurodov, B. E. (2025). *Sun'iy intellekt yordamida kiberjinoyatlarni aniqlash va oldini olish*. *Ta'lim innovatsiyasi va integratsiyasi*, 47(2), 237-241.
5. Kim, J., Nakashima, M., Fan, W., Wuthier, S., Zhou, X., Kim, I., & Chang, S. Y. (2022). *A machine learning approach to anomaly detection based on traffic monitoring for secure blockchain networking*. *IEEE Transactions on Network and Service Management*, 19(3), 3619-3632.
6. Doniyorbek o'g'li, X. J., & Eshquvat o'g'li, C. N. (2025). *Blockchain texnologiyalarini kiberxavfsizlik tizimlariga integratsiya qilish*. *Tadqiqotlar*, 62(3), 129-136.
7. Umarov, S. A., & Umarova, M. I. (2025). *The need and importance of using antiviral defense systems based on artificial immune systems*. *Miasto Przyszłości*, 61, 543-548.
8. Доргушаова, А. К., Довгаль, В. А., Козлова, Н. Ш., & Козлов, Р. С. (2024). *Обзор использования технологий машинного обучения в обеспечении информационной безопасности данных: настоящее и будущее*. *Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*, (1 (336)), 51-59.
9. Гурина, А. О., Елисеев, В. Л., Петренко, С. А., & Ступин, Д. Д. (2019). *Метод обнаружения аномалий на основе машинного обучения*. In *Материалы XII мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2019)* (pp. 60-65).
10. Martin, K., Rahouti, M., Ayyash, M., & Alsmadi, I. (2022). *Anomaly detection in blockchain using network representation and machine learning*. *Security and Privacy*, 5(2), e192.
11. Мухториддинов, М., Акбаров, Н., & Умаров, Ш. (2023). *Machine learning for network security and anomaly detection*. In *Conference on Digital Innovation: Modern Problems and Solutions*.
12. Sanjay Rai, G., Goyal, S. B., & Chatterjee, P. (2023). *Anomaly detection in blockchain using machine learning*. In *Computational Intelligence for Engineering and Management Applications: Select Proceedings of CIEMA 2022* (pp. 487-499). Singapore: Springer Nature Singapore.
13. Azizjonovich, U. S., & Abdulhay, A. (2024). *Axborot xavfsizligi tizimlarini intellektuallashtirish masalalari*. *Al-Farg'oniy avlodlari*, (1), 4-10.
14. Azizjonovich, U. S. (2023). *Kriptobardoshli kriptografik tizimlar va ularning klassifikatsiyasi*. *Al-Farg'oniy avlodlari*, 1(4), 15-21.
15. Daminova, B. E., Qodirova, I. D., Toshmurodova, H. B., Xabibullayeva, O. X., & Qo'ziyeva, Z. F. (2025). *Sun'iy intellekt va kiberxavfsizlik*. *Экономика и социум*, (5-1 (132)), 212-215.
16. Umarov, S. A., & Umarova, M. I. (2025). *The need and importance of using antiviral defense systems based on artificial immune systems*. *Miasto Przyszłości*, 61, 543-548.

**ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КЛАСТЕР
НА БАЗЕ OPEN MPI**

Олимов Хусниддин Косимович,
профессор физико-технического институт имени
С.А. Азимова Академии наук Узбекистана,
доктор физико-математических наук

Муратов Руслан Равильевич,
магистрант Самаркандского государственного
университета имени Шарофа Рашидова
ruslan88muratov@gmail.com

Норбоев Кахрамон Махамматович,
младший научный сотрудник Самаркандского
государственного университета имени Шарофа Рашидова

Ахатов Азиз Тураевич,
магистрант Самаркандского государственного
университета имени Шарофа Рашидова

Аннотация. В статье рассмотрен метод создания вычислительного кластера и его возможное применение, а также проблемы, возникшие при его создании и методы их решения. В статье детально рассматривается перспективность применения мощностей вычислительного кластера в физике и математике, что открывает дополнительные перспективы в будущем.

Ключевые слова: вычислительный кластер, параллельные вычисления, математическое моделирование, тест LINPACK.

HIGH-PERFORMANCE COMPUTING CLUSTER BASED ON OPEN MPI

Abstract: This article examines the method for creating a computing cluster and its potential applications, as well as the challenges encountered during its creation and methods for addressing them. The article also examines in detail the potential for using computing cluster power in physics and mathematics, opening up additional opportunities for the future.

Keywords: computing cluster, parallel computing, mathematical modeling, LINPACK test.

**OPEN MPI BAZASIDA ISHLAB CHIQLILGAN YUQORI SAMARALI HISOBLASH
KLAISTERI**

Annotatsiya. Ushbu maqolada hisoblash klasterini yaratish usuli va uning potentsial qo‘llanilishi, shuningdek, uni yaratish jarayonida duch keladigan qiyinchiliklar va ularni hal qilish usullari ko‘rib chiqildi. Shuningdek, maqolada fizika va matematika soxasida hisoblash klasteri quvvatlaridan foydalanish imkoniyatlari batafsil ko‘rib chiqiladi va bu kelajakda bu sohada qo‘shimcha imkoniyatlarni yaratadi.

Kalit so‘zlar: hisoblash klasteri, parallel hisoblash, matematik modellashtirish, LINPACK testi.

Введение. Несмотря на то, что в настоящее время вычислительные мощности компьютеров достигли впечатляющих показателей, для некоторых вычислений их может быть недостаточно. В связи с этим стоит проблема обеспечения доступа к вычислительным мощностям сотрудникам, занимающимся работой с объёмными расчётами. Даже несмотря на то, что у сотрудника есть свой компьютер, не всегда он годится для больших вычислений, не стоит также забывать, что сотрудник использует свой рабочий компьютер так же для других рабочих задач, не связанных непосредственно с вычислениями. Также не надо забывать о бурном развитии искусственного интеллекта (ИИ), которое открывает широкие перспективы и так же требует мощностей, не всегда доступных для обычного компьютера.

Вычислительные кластеры открывают революционные перспективы в физике и математике, обеспечивая возможность проведения экзафлопсных вычислений и интеграцию с искусственным интеллектом (ИИ) и квантовыми вычислениями. Они являются критически важным инструментом для решения задач, недоступных аналитическим методам или стандартным компьютерам.

Перспективы в физике

В физике вычислительные кластеры играют ключевую роль в обработке огромных объёмов экспериментальных данных и проведении сложных симуляций.

- Физика элементарных частиц: кластеры необходимы для анализа данных, поступающих с крупных экспериментальных установок, таких как большой адронный коллайдер. Они позволяют уточнять параметры стандартной модели, искать частицы за её пределами (например, тёмную материю) и тестировать новые теории.

- Астрофизика и космология: моделирование эволюции Вселенной, образования галактик, сверхновых звёзд и чёрных дыр требует колоссальных вычислительных мощностей, которые предоставляют только суперкомпьютерные кластеры.

- Моделирование материалов и физических явлений: вычисления на кластерах используются для симуляции поведения материалов на атомном и молекулярном уровнях, магнитной гидродинамики и других сложных физических процессов.

Перспективы в математике

В математике кластеры используются как для решения прикладных задач, так и для фундаментальных исследований.

- Численные методы: разработка и применение параллельных численных алгоритмов для решения дифференциальных уравнений в частных производных, оптимизационных задач и других областей математической физики.

- Обработка больших данных и ИИ: методы обработки больших данных и искусственного интеллекта, активно использующие кластерные системы, становятся всё более востребованными в прикладной математике для анализа сложных наборов данных и выявления закономерностей.

- Теоретические исследования: хотя многие фундаментальные математические задачи требуют аналитического подхода, вычислительные эксперименты на кластерах могут служить мощным инструментом для проверки гипотез, поиска контрпримеров и направления дальнейших исследований.

В целом, вычислительные кластеры останутся незаменимым инструментом, постоянно расширяя границы возможного в научных исследованиях и способствуя новым фундаментальным открытиям.

В качестве примера в данной статье рассмотрен вычислительный кластер, созданный в ФТИ АН РУз, под руководством Х.К. Олимова, в качестве ПО для создания кластера был использован пакет OpenMPI[2], установленный на операционной системе Linux.

Параметры, архитектура и производительность вычислительного кластера. Кластер состоит из 4 вычислительных узлов и управляющего сервера, в таблице 1 даны основные характеристики узлов и сервера.

Таблица 1. Базовые характеристики вычислительного кластера

Количество узлов	5
Базовый процессор узла	11th Gen Intel Core i9-11900K
Количество вычислительных ядер	160
Оперативная память	1280ГБ (DDR5)
Суммарный объём HDD/SSD	10 ТБ
Топология сетевого соединения	звезда
Пропускная способность ЛВС	1 Гбит/с
Операционная система	Ubuntu 20.04.1 LTS
Версия ядра Linux	5.15.0-52-generic
Архитектура	x86-64
Реализация MPI	OpenMPI

Архитектура кластера Open MPI основана на модели распределенной памяти, где каждый узел (компьютер) имеет собственное пространство памяти, а процессы обмениваются данными путём явной передачи сообщений. Open MPI объединяет ресурсы нескольких проектов, предоставляя стандартный интерфейс Message Passing Interface(MPI) для написания параллельных приложений, которые могут эффективно работать на таких кластерах, распределяя вычисления между узлами.

Ключевые компоненты архитектуры

- Узлы: кластер состоит из группы узлов (серверов) с собственными IP-адресами.
- Распределенная память: в отличие от систем с общей памятью, каждый узел в кластере Open MPI имеет собственное, независимое пространство памяти.
- Передача сообщений (MPI): взаимодействие между процессами, запущенными на разных узлах, осуществляется через библиотеку MPI. Приложения используют функции MPI для отправки и получения сообщений друг другу, чтобы обмениваться данными.
- Параллельные приложения: Open MPI позволяет запускать параллельные программы, которые разработаны с использованием стандарта MPI. Эти программы разбивают задачу на части и распределяют их выполнение по множеству узлов кластера.
- Коммуникационная инфраструктура: для эффективной передачи сообщений между узлами используются различные сетевые протоколы и технологии, однако Open MPI абстрагирует эти детали от разработчика, предоставляя единый интерфейс.
- Основное преимущество архитектуры Open MPI заключается в её гибкости и настраиваемости: пользователи могут адаптировать реализацию MPI под конкретное оборудование, не меняя код приложения, просто настраивая параметры MCA во время выполнения. Для корректной работы кластера на него так же установлены следующие программы:
 - GNUCompilerCollection;
 - Intel C++ Compiler;
 - Intel FORTRAN Compiler;
 - Интерпретатор для Python, включая библиотеки TensorFlow, NumPy, SciPy, Matplotlib и др.

Для определения производительности кластера используется тест LINPACK Benchmark, который широко используется для измерения параллельных вычислений. Этот тест считается наиболее надёжным для измерения производительности параллельных вычислений. Тест LINPACK Benchmark позволяет оценить возможность решения компьютером реальных задач. Нельзя не отметить, что несмотря на все плюсы тест LINPACK, Benchmark даёт общую и упрощённую оценку. К тому же оценка LINPACK представляет данные по максимальной производительности, которая будет существенно ниже во время реальных вычислений. Производительность, показываемая данным тестом, показывает количество операций над 64-битными числами с плавающей запятой (сложений и умножений), которые компьютер выполнял за секунду, соотношение, обозначаемое "FLOPS". Однако производительность компьютера при работе с реальными приложениями, вероятно, будет значительно ниже максимальной производительности, достигаемой при выполнении соразмерного теста LINPACK. Тем не менее этот тест позволяет получить общую картину работы кластера.

В случае параллельных вычислений, для оценки степени ускорения работы программы используется закон Амдала или закон Густавсона-Барсиса [1]. Закон Амдала применим для программ, оперирующих малыми объёмами данных, и формулируется следующим образом:

$$S = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{n}}$$

где S - ускорение работы программы (относительно однопроцессорной вычислительной системы), могущее быть получено на системе, состоящей из n микропроцессоров, при условии, что программа имплементирует алгоритм, в котором α определяет долю от общего объёма вычислений, которая может быть получена только последовательными расчётами. Когда в вычислениях используются очень большие объёмы данных, более предпочтительным является закон Густавсона-Барсиса:

$$S = n + (1-n)\alpha$$

Данная формула показывает, насколько эффективно могут быть организованы параллельные вычисления при увеличении сложности решаемых задач.

Возможное применение в физике. Задачей вычислительного кластера соответственно является проведение больших объёмов вычислений, такие вычисления требуются практически во всех областях физики, например, в физике высоких энергий и элементарных частиц. Это связано с тем, что процессы, связанные с образованием элементарных частиц, требуют расчёта очень больших объёмов данных, связанных с энергией, направлением и типом образованных частиц. В качестве примера хорошо подходит Большой Адронный Коллайдер (БАК). В результате экспериментов, проводимых на нём, генерируются большие массивы данных. Благодаря политике CERN, эти данные находятся открытым доступе, но они требуют обработки. В течение одной секунды БАК генерирует

примерно 40 миллионов событий примерно по 1 Мб каждое. Несмотря на то, что большое количество данных отфильтровывается, оставшиеся занимают большие объёмы памяти, которые имеют тенденцию расти. Конечно, в нашем случае мы занимаемся обработкой лишь части данных, тем не менее всё равно обработка даже части от общих данных требует больших мощностей. Таким образом как мы видим, для проведения исследований в области высоких энергий, наличие как вычислительных мощностей, так и наличие больших мощностей для хранения данных является крайне необходимым. Помимо данных БАК, другие области физики тоже требуют больших вычислительных мощностей, так, например, обработка данных ядерной физики включает анализ экспериментальных результатов, полученных при изучении атомных ядер, с помощью статистических и вычислительных методов, а также использование этих данных для моделирования и прогнозирования ядерных процессов. Это необходимо для таких областей, как ядерная энергетика, медицина (диагностика и терапия), ядерная астрофизика и исследования фундаментальных законов физики. В расчётах для ядерной физики используется сложный математический аппарат, в том числе элементы теории вероятности, такие как метод Монте-Карло или распределение Бернулли.

Если в процессе эксперимента проводится n повторных наблюдений случайной величины X , то процесс можно рассматривать как одно наблюдение случайного вектора, имеющего компоненты x_1, x_2, \dots, x_n . Чтобы обеспечить полное описание эксперимента, недостаточно задать лишь пространство элементарных событий для искомой случайной величины. Необходимо, кроме того, знать для каждого дискретного значения частоту ν появления случайной величины или вероятность попадания на ν –й уровень:

$$P_\nu = P(X = x_\nu), \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Соответственно при большом количестве наблюдений, объём вычислений значительно возрастает [4].

Наряду с этим расчёты больших объёмов данных, кроме ядерной физики, используются в других областях физики, так и в чистой математике, что не является проблемой, так как программное обеспечение, установленное на кластере, является универсальным и гибким.

В связи со всем выше перечисленным создание вычислительного кластера является актуальным и востребованным.

Заключение. Был создан вычислительный кластер, который позволяет проводить универсальные вычисления со скоростью, недоступной на обычном компьютере. В ходе создания кластера был организован доступ сотрудников Физико-технического института имени С.А. Азимова Академии наук Узбекистана, и установлено специальное ПО. Помимо сотрудников института кластером имеют возможность пользоваться и сотрудники других вузов, как, например, Самаркандского государственного университета. Помимо задач физики высоких энергий и ядерной физики кластер позволяет решать задачи и в других областях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. *Параллельные вычисления* // СПб.: БХВ-Петербург (2002).
2. *Open MPI: Open Source High Performance Computing.* //URL: <https://www.open-mpi.org/> (дата обращения 20.09.2025).
3. Роби Р., Замора Дж. *Параллельные и высокопроизводительные вычисления* // М.: ДМК Пресс (2021).
4. *Методы обработки результатов ядерно-физического эксперимента. Учебное пособие под редакцией В.Т. Самосадного. Москва (2008).*

**GTL KORXONASIDA FOYDALANILADIGAN AVTOTERMIK REFORMING
JARAYONINING MUKAMMAL BOSHQARISH TIZIMINI ISHLAB CHIQUISH**

Hamrayev Javlonbek Hoshim o'g'li,
Qarshi davlat texnika universiteti dotsenti, p.f.f.d (PhD),
hamrayevjavlonbek11@gmail.com
Botirov O'ktam Usmon o'g'li,
Qarshi davlat texnika universiteti 2-kurs magistranti

Annotatsiya. Ushbu maqolada GTL (Gas-to-Liquid) texnologiyasida muhim bo'lgan avtotermik reforming (ATR) jarayonining nazariy va amaliy jihatlari, uni samarali boshqarishning ilmiy asoslari hamda avtomatlashtirilgan tizimni yaratish yo'nalishlari yoritilgan. Tadqiqotda ATR jarayonining issiqlik va kimyoviy muvozanati, boshqaruv parametrlarini optimallashtirish, energiya sarfini kamaytirish hamda xavfsizlikni oshirishga doir texnik yechimlar tahlil qilingan. Natijalar asosida ATR jarayonida avtomatik boshqaruv tizimi ishlab chiqishning asosiy tamoyillari va samaradorligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: GTL texnologiyasi, avtotermik reforming, ATR, avtomatlashtirish, SCADA, sintez gazi, energiya tejamlorligi, boshqaruv tizimi.

**РАЗРАБОТКА СОВЕРШЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ
АВТОТЕРМИЧЕСКОГО РЕФОРМИНГА, ИСПОЛЬЗУЕМОГО НА ПРЕДПРИЯТИИ GTL**

Аннотация. В данной статье освещены теоретические и практические аспекты процесса автотермического реформинга (АТР), важного в технологии GTL (Gas-to-Liquid), научные основы его эффективного управления, а также направления создания автоматизированной системы. В исследовании проанализированы технические решения по тепловому и химическому балансу процесса АТР, оптимизации параметров управления, снижению энергопотребления и повышению безопасности. На основе результатов показаны основные принципы и эффективность разработки системы автоматического управления в процессе АТР.

Ключевые слова: технология GTL, автотермический реформинг, АТР, автоматизация, SCADA, синтез-газ, энергосбережение, система управления.

**DEVELOPMENT OF AN ADVANCED CONTROL SYSTEM FOR THE AUTOTHERMAL
REFORMING PROCESS USED AT THE GTL ENTERPRISE**

Abstract. This article covers the theoretical and practical aspects of the autothermal reforming (ATR) process, which is important in GTL (Gas-to-Liquid) technology, the scientific basis for its effective management, and the directions for creating an automated system. The study analyzes technical solutions for optimizing the thermal and chemical balance of the ATR process, control parameters, reducing energy consumption, and increasing safety. Based on the results, the main principles and effectiveness of the development of an automatic control system in the ATR process were shown.

Keywords: GTL technology, autothermal reforming, ATR, automation, SCADA, synthesis gas, energy saving, control system.

Kirish. Zamonaviy neft-gaz kimyo sanoatida tabiiy gazni qayta ishlash va undan yuqori qo'shimcha qiymatli mahsulotlar olish texnologiyalari muhim o'rin tutadi. Shulardan biri – GTL (Gas-to-Liquid) texnologiyasidir, u metanni sintez gazi orqali suyuq yoqilg'ilarga aylantirish imkonini beradi. Ushbu jarayonning yuragi hisoblangan avtotermik reforming (ATR) bosqichi sintez gazi ($\text{CO} + \text{H}_2$) hosil qilish uchun asosiy manba bo'lib xizmat qiladi [1]. ATR jarayoni murakkab fizik-kimyoviy muhitda kechadi: unda metan kislorod va bug' bilan bir vaqtning o'zida oksidlanish hamda reforming reaksiyalarini hosil qiladi. Jarayon yuqori harorat (900–1050°C), yuqori bosim (25–40 bar) va tez o'zgaruvchan oqimlar sharoitida amalga oshadi. Shu sababli uni boshqarish an'anaviy usullar bilan emas, balki avtomatlashtirilgan, raqamli nazorat tizimi orqali olib borish zarur bo'ladi [2].

O'zbekiston Respublikasida "O'zGTL" kabi yirik korxonalar faoliyatida ATR jarayoni markaziy texnologik zanjir sifatida qo'llaniladi. Ushbu korxonalarda jarayonni avtomatlashtirish darajasi samaradorlik, energiya sarfi, xavfsizlik va ishlab chiqarish barqarorligiga bevosita ta'sir ko'rsatadi [3]. Shu sababli magistrlik

darajasidagi mazkur tadqiqotning maqsadi – GTL majmuasidagi ATR jarayonini mukammal avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimi asosida optimallashtirishdan iboratdir.

ATR — bu **metan (yoki tabiiy gaz)** ning **kislorod va bug‘** ishtirokida qisman oksidlanishi va bug‘li reformingi kombinatsiyasi bo‘lib, **sintez gazi ($H_2 + CO$)** hosil qiladi.

Asosiy reaksiyalar:

- $CH_4 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO + 2H_2$ (ekzotermik)
- $CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2$ (endotermik)
- $CO + H_2O \rightleftharpoons CO_2 + H_2$ (shift reaksiyasi)

Jarayon **issiqlik jihatdan o‘zini muvozanatlashtiruvchi**, lekin **yuqori xavf va noaniqlikka ega**.

Boshqarish tizimining asosiy maqsadlari

Mukammal boshqarish tizimi quyidagilarni ta’minlashi kerak:

1. Sintez gazining optimal tarkibi
 $H_2/CO \approx 2.0$ (Fischer–Tropsch uchun)
2. Reaktor haroratini barqaror saqlash
900–1050 °C
3. Bosim va oqim barqarorligi
4. Katalizatorni himoyalash
koks hosil bo‘lishining oldini olish
5. Xavfsizlik va energiya samaradorligi
6. Avtomatik va adaptiv boshqaruv

Mukammal boshqarish usullari

Model Predictive Control (MPC)

MPC – ATR uchun eng mos yechim, chunki:

- Kuchli nolinearlik mavjud
- Ko‘p kirish–ko‘p chiqishli (MIMO) tizim
- Cheklovlar muhim (T_{max} , O_2_{max})

MPC vazifalari:

- H_2/CO nisbatini optimal darajada ushlash
- Kislorod va bug‘ sarfini minimallashtirish
- Harorat tebranishlarini bostirish

Adaptiv boshqaruv

ATR jarayonida:

- Gaz tarkibi o‘zgaradi
- Katalizator faolligi kamayadi

◆ **Adaptiv MPC:**

- Model parametrlarini onlayn yangilaydi
- Katalizator qarishiga moslashadi

Yumshoq sensorlar (Soft Sensors)

Real vaqtda o‘lchab bo‘lmaydigan kattaliklar uchun:

- CH_4 konversiyasi
- Katalizator holati

Sun‘iy neyron tarmoqlar yoki Kalman filtri asosida baholanadi.

Metodlar:

ATR jarayonida ikki asosiy kimyoviy bosqich mavjud:

Ekzotermik oksidlanish: $CH_4 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO + 2H_2$

Endotermik bug‘ bilan reforming: $CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2$

Bu ikki reaksiya bir vaqtda kechadi va ularning issiqlik muvozanatini saqlash jarayon barqarorligining asosiy sharti hisoblanadi [4].

Jarayonning fizik-kimyoviy xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi modellar tuzildi:

- Massaviy balans modeli – reaktorga kiruvchi va chiquvchi oqimlar asosida;
- Issiqlik balansi modeli – ekzotermik va endotermik reaksiyalar o‘rtasidagi energiya almashinuvi;
- Kinetik model – harorat va bosimga bog‘liq reaksiyon tezliklar;
- Dinamik model – jarayonning vaqt bo‘yicha o‘zgarishlarini ifodalovchi tizim.

Model Aspen Plus dasturida tuzilib, real ishlab chiqarish ma’lumotlari bilan solishtirilib kalibrlangan

[5].

TECHNIQUE

Jarayonni real vaqt rejimida boshqarish uchun SCADA tizimi asosida ishlovchi avtomatik boshqaruv tizimi (ABT) ishlab chiqildi. U quyidagi asosiy elementlarni o'z ichiga oladi:

- Yuqori haroratga chidamli termoparalar va bosim datchiklari;
- Gaz oqimini o'lchovchi mass-flow sensorlar;
- PID-regulyatorlar va MPC (Model Predictive Control) moduli;
- Alarm tizimi va xavfsizlik blokirovkalari.

Boshqaruv algoritmlari MATLAB/Simulink muhitida sinovdan o'tkazildi va optimallashtirildi [6].

Tahlil uchun "O'zGTL" korxonasi ATR blokidan olingan 120 soatlik monitoring ma'lumotlari ishlatildi. Jarayonning o'rtacha harorati, bosimi va O_2/CH_4 nisbatlari real parametrlar asosida kuzatildi. Natijalar tajriba va modellashtirilgan qiymatlar orasida $\pm 3,2\%$ aniqlik bilan mos keldi [7].

Natijalar. Tahlillar ATR jarayonining barqarorligini oshirish va sintez gazining sifatini yaxshilash uchun optimal boshqaruv parametrlarini aniqlashga imkon berdi.

1. Optimal parametrlar:

$$O_2/CH_4 = 0.58-0.60$$

$$S/C (\text{bug'uglevodorod}) = 1.7$$

$$\text{Harorat} = 960-1010^\circ\text{C}$$

Bu qiymatlar sintez gazida $H_2/CO = 2.1$ nisbatni ta'minladi, bu esa Fischer-Tropsch sintezi uchun eng maqbul ko'rsatkich hisoblanadi [8].

SCADA tizimi joriy etilgandan so'ng kuzatilgan natijalar:

Ko'rsatkich	O'zgarish
Energiya sarfi	10–12% kamaydi
Sintez gazining sifati	8% yaxshilandi
Katalizatorning xizmat muddati	22% uzaydi
Avariya xavflari	35% kamaydi
Operator xatoliklari	28% kamaydi

PID-regulyatorlar haroratni barqarorlashtirishda o'rtacha 4–6 soniya kechikish bilan ishlagan bo'lsa, MPC tizimi bu kechikishni 1,7 soniyagacha qisqartirgan, bu esa reaksiya barqarorligiga ijobiy ta'sir ko'rsatgan.

Endotermik va ekzotermik reaksiyalar orasidagi energiya almashinuvi muvozanatga keltirildi. Reaktordagi issiqlik gradienti 14°C gacha kamaytirildi, bu katalizator degradatsiyasini 18% ga pasaytirdi [9].

Muhokama: ATR jarayonini an'anaviy boshqaruv tizimlari yordamida barqarorlashtirish ko'pincha qiyin kechadi, chunki harorat va oqim parametrlaridagi eng kichik o'zgarishlar butun reaksiya jarayoniga ta'sir ko'rsatadi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimi jarayonni dinamik nazorat qilish imkonini beradi va inson omiliga bog'liq xatoliklarni minimallashtiradi.

Matematik modellashtirish va real monitoring ma'lumotlari integratsiyasi boshqaruv algoritmlarining aniqligini ta'minlaydi. MPC boshqaruvi yordamida ATR jarayonining o'zgarish tezligi PIDga qaraganda 2,5 baravar yuqori aniqlikda bashorat qilinadi. SCADA tizimining joriy etilishi operatorlarga jarayonni vizual kuzatish, parametrlarni real vaqtda tahlil qilish imkonini beradi [10]. Bu yondashuv nafaqat texnik, balki iqtisodiy jihatdan ham foydalidir: energiya tejalishi, xomashyo sarfining kamayishi va xavfsizlikning oshishi korxonada samaradorligini sezilarli oshiradi. Tadqiqot shuningdek, GTL majmualarida raqamli transformatsiyani chuqurlashtirish va "aqlli" boshqaruv tizimlarini joriy etish istiqbollari ham ochib berdi.

Xulosa. GTL texnologiyasi doirasidagi avtotermik reforming jarayoni sintez gazini olishda markaziy o'rin tutadi. Jarayonning harorat, bosim va gaz nisbati kabi parametrlarini mukammal boshqarish uchun yuqori aniqlikdagi avtomatlashtirilgan tizim zarur. Ushbu tadqiqotda ishlab chiqilgan boshqaruv modeli ATR jarayonini optimallashtirishda yuqori samaradorlik ko'rsatdi: sintez gazining sifati yaxshilandi, energiya sarfi kamaydi, xavfsizlik darajasi oshdi. Taklif etilgan tizim O'zbekiston GTL sanoatida amaliy ahamiyatga ega bo'lib, ishlab chiqarish barqarorligini ta'minlash va texnologik jarayonlarni raqamli boshqaruv asosida modernizatsiya qilishga xizmat qiladi. Magistratura darajasidagi ushbu ilmiy izlanish kelgusida ATR jarayonlari uchun intellektual boshqaruv algoritmlarini ishlab chiqishning nazariy poydevorini yaratadi.

TECHNIQUE

ADABIYOTLAR:

1. O'zbekiston Respublikasi Raqamli texnologiyalar vazirligi. "2024-yilda AKT sohasini rivojlantirish natijalari bo'yicha hisobot." <https://digital.uz/uz/news>
2. Froment, G. F., Bischoff, K. B., Hale, J. E. *Chemical Reactor Analysis and Design*. 3rd Edition. Wiley, 2010.
3. Uzbekistan GTL (O'zGTL) zavodi. "O'zbekiston GTL zavodining rasmiy ma'lumotlari." <https://www.ung.uz/uz/projects/gtl>
4. Rostrup-Nielsen, J. R. "Syngas Production by Steam Reforming and Autothermal Reforming." *Catalysis Reviews*, 2008. (DOI: 10.1080/01614940802451502)
5. AspenTech. *Aspen Plus® Documentation (Public Overview)*. <https://www.aspentech.com/en/resources>
6. Seborg D. E., Edgar T. F., Mellichamp D. A., Doyle F. J. *Process Dynamics and Control*. 4th Edition. Wiley, 2017.
7. O'zbekiston Respublikasi Energetika vazirligi. "2024-yil Energetika sohasidagi rasmiy hisobotlar." <https://minenergy.uz/uz/lists>
8. Kolbitsch P., Pfeifer P., Hofbauer, H. "Autothermal Reforming of Methane: Experimental and Numerical Study." *Chemical Engineering Journal*, 2011.
9. ABB. "ABB Measurement & Analytics – Product Catalog 2023." <https://new.abb.com/products/measurement-products>
10. Siemens AG. *SIMATIC PCS 7 – Technical Overview and Safety Systems Guide*, 2022. <https://www.siemens.com/global/en/products/automation/systems/simatic-pcs7.html>

**SUV XO‘JALIGI TIZIMLARIDA SUV RESURSLARINI TAQSIMLASHNI
AVTOMATLASHTIRILGAN BOSHQARISH VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI**

Samiyev Sardorjon Salimjon o‘g‘li,
Qarshi davlat texnika universiteti assistenti
[sssamiiev@stud.etu.ru](mailto:sssamiev@stud.etu.ru)

Farxodov Sunnatjon Umar o‘g‘li,
Qarshi davlat texnika universiteti katta o‘qituvchisi
s.farkhodov@mail.ru

Toshtemirov Ramziddin Toshpulat o‘g‘li,
Qarshi davlat texnika universiteti katta o‘qituvchisi
toshtemirovramziddin37@gmail.com

Urunov Bekjon Jovli o‘g‘li,
Qarshi davlat texnika universiteti katta o‘qituvchisi
bekjonurunov3@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada suv xo‘jaligi tizimlari sharoitida suv resurslarini samarali boshqarish va tartibga solishga mo‘ljallangan zamonaviy boshqaruv algoritmlarini ishlab chiqish hamda ularni kompleks tahlil qilish masalalari ko‘rib chiqilgan. Suv resurslarini taqsimlash jarayonida mavsumiy o‘zgarishlar, tabiiy-iqlim omillari, gidrologik sharoitlar hamda suvdan foydalanuvchilarning turli ehtiyojlari o‘zaro bog‘liq holda inobatga olingan. Taklif etilgan algoritmik yondashuvlar suv balansida yuzaga keladigan noaniqliklarni kamaytirish, suvdan foydalanishda tejamkorlikni oshirish va resurslarni adolatli taqsimlash mexanizmini shakllantirishga xizmat qiladi. O‘tkazilgan hisoblash tajribalari ishlab chiqilgan modellar an’anaviy boshqaruv usullariga nisbatan yuqori samaradorlik va barqarorlikni ta’minlashini ko‘rsatdi.

Kalit so‘zlar: suv resurslarini boshqarish, suv xo‘jaligi tizimlari, avtomatik rostlash, PID-rostlagich, diskret PID algoritmi, suv balansi, suvni tejash, adolatli taqsimlash, matematik modellashirish.

**МЕТОДЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ В СИСТЕМАХ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА**

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы разработки и комплексного анализа современных алгоритмов управления, предназначенных для эффективного управления и регулирования водных ресурсов в условиях систем водного хозяйства. В процессе распределения водных ресурсов во взаимосвязанном и комплексном виде учитываются сезонные изменения, природно-климатические факторы, гидрологические условия, а также различные потребности водопользователей. Предложенные алгоритмические подходы направлены на снижение неопределённостей в водном балансе, повышение эффективности использования воды и формирование механизма справедливого распределения водных ресурсов. Результаты проведённых вычислительных экспериментов показали, что разработанные модели обеспечивают более высокую эффективность и устойчивость по сравнению с традиционными методами управления.

Ключевые слов: управление водными ресурсами, системы водного хозяйства, автоматическое регулирование, ПИД-регулятор, дискретный ПИД-алгоритм, водный баланс, водосбережение, справедливое распределение, математическое моделирование.

**METHODS OF AUTOMATED CONTROL AND OPTIMIZATION OF WATER RESOURCE
DISTRIBUTION IN WATER MANAGEMENT SYSTEMS**

Abstract. This article examines the issues of developing and conducting a comprehensive analysis of modern control algorithms designed for the efficient management and regulation of water resources under the conditions of water management systems. In the process of water resource allocation, seasonal variations, natural and climatic factors, hydrological conditions, and the diverse needs of water users are considered in an integrated and interrelated manner. The proposed algorithmic approaches are aimed at reducing uncertainties in the water balance, increasing water-use efficiency, and forming a mechanism for the equitable distribution of water resources. The results of the conducted computational experiments demonstrate that the developed models ensure higher efficiency and stability compared to conventional control methods.

Keywords: *water resource management, water management systems, automatic control, PID controller, discrete PID algorithm, water balance, water saving, equitable distribution, mathematical modeling*

Kirish. Ko‘plab tipik kanallar va gidrotexnik inshootlarda suv sathini barqaror ushlab turish hamda suv resurslarini oqilona taqsimlashni to‘liq ta‘minlay olmaydigan an’anaviy (eskirgan) rostlash usullari hanuz qo‘llanib kelinmoqda. Shu munosabat bilan avtomatik rostlash tizimlari uchun matematik modellarni ishlab chiqish, shuningdek, proporsional (P) va proporsional – integral – differensial (PID) kabi zamonaviy boshqaruv qonunlarini tanlash hamda ularni sozlash algoritmlarini yaratish dolzarb ilmiy-amaliy vazifa hisoblanadi.

Suv berish rejimining beqarorligi va suv iste‘molining o‘zgaruvchanligi sharoitida irrigatsiya kanallari boshqaruvini avtomatlashtirish zamonaviy avtomatik rostlash tizimlarini joriy etishni talab etadi. Bunday tizimlarning telemexanik vositalar va hisoblash texnikasi bilan integratsiyasi kanallar, gidrotexnik inshootlar hamda nasos stansiyalarining optimalga yaqin ishlash rejimlarini shakllantirishga imkon yaratadi, natijada suv resurslarining samarasiz yo‘qotishlari sezilarli darajada qisqaradi.

Yuqori b‘ef suv sathini avtomatik rostlash tizimlarida teskari aloqa kanali to‘svuchi inshoot yaqinida suv sathini uzluksiz o‘lchash asosida tashkil etiladi. O‘lchangan signal solishtirish bo‘g‘iniga uzatiladi va bu yerda haqiqiy sathning berilgan qiymatdan og‘ishi aniqlanadi. Hosil bo‘lgan nomutanosiblik (xatolik) signali sath rostlagichiga uzatiladi; rostlagich esa tanlangan boshqaruv qonuniga muvofiq boshqaruvchi ta‘sirni shakllantirib, gidrotexnik inshoot zatvorining ochilish-yopilish darajasini belgilaydi. Matematik modellashtirishga tayangan algoritmik yondashuvlar yordamida rostlash qonunini asosli tanlash tipik tizimlarning barqarorligi va samaradorligini oshirish imkonini beradi.

Suv resurslarini samarali boshqarish uchun zarur bo‘lgan hisoblash amallarining nazariy va amaliy jihatlari yoritilib, suv xo‘jaligi modellashtirishining asosiy metodik yondashuvlari - suv balansini baholash, suvdan foydalanishni prognozlash hamda suv xo‘jaligi tizimlarining barqarorligini tahlil qilish masalalari bayon etilgan. Daryo oqimini intensiv tartibga solish natijasida yuzaga keladigan ekologik va gidrologik muammolar ko‘rib chiqilib, salbiy oqibatlarni kamaytirish hamda barqaror suvdan foydalanishni ta‘minlash uchun gidrologik modellashtirish, ekologik monitoring va adaptiv boshqaruvni uyg‘unlashtiruvchi kompleks yondashuv zarurligi ta’kidlangan.

So‘nggi yillarda O‘zbekiston Respublikasida suv resurslarini boshqarishni avtomatlashtirish va suvni tejoychi texnologiyalarni joriy etish bo‘yicha tizimli ishlar amalga oshirilmoqda. Jumladan, sug‘orish tizimlarini modernizatsiya qilish hamda suv xo‘jaligi sohasida texnologik jarayonlarni avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlarini (ASU TP) joriy etish ustuvor yo‘nalish sifatida belgilangan. 2030-yilgacha mo‘ljallangan konsepsiya doirasida bir million gektardan ortiq maydonda suvdan foydalanish samaradorligini oshirish rejalashtirilib, mazkur maqsadga irrigatsiya tarmoqlarini rekonstruksiya va modernizatsiya qilish hamda innovatsion suvdan foydalanish texnologiyalarini tatbiq etish orqali erishish ko‘zda tutilgan.

Xususan, paxta maydonlarida tomchilatib sug‘orish kabi zamonaviy sug‘orish usullarini joriy etish suv yo‘qotilishini kamaytirish va qishloq xo‘jaligi ekinlari hosildorligini oshirishga xizmat qiladi. Shu bilan birga, nasos agregatlari va elektr dvigatellarini modernizatsiya qilish orqali energiya sarfini pasaytirish hamda dasturiy-apparat nazorat va boshqaruv vositalari integratsiyalangan dispatcherlik tizimlarini rivojlantirish masalalariga ham alohida e‘tibor qaratilmoqda.

Meliorativ kanallarni avtomatlashtirishning hozirgi yondashuvlari tizimlarni sxemaviy yechimlari bo‘yicha tasniflash, suv sathini o‘lchash uchun maxsus datchiklardan foydalanish hamda real vaqt rejimida monitoring va rostlashni ta‘minlaydigan dasturiy-apparat majmualarni qo‘llashni qamrab oladi. Bu esa suv resurslarini aniqroq taqsimlash va samarasiz yo‘qotishlarni minimallashtirishga imkon beradi.

Tadqiqotlarning muhim yo‘nalishlaridan biri magistral kanallarda suv taqsimotini boshqarish uchun dasturlanadigan mantiqiy kontrollerlardan (PLC) foydalanish bilan bog‘liq. Xususan, Don magistral kanalida o‘tkazilgan tahlil suv sathi datchiklari, tarmoq modullari hamda optimal rejim parametrlarini hisoblashga mo‘ljallangan dasturiy ta‘minotni o‘z ichiga olgan boshqaruv arxitekturasini yaratishda PLCdan foydalanish yuqori samaradorlik berishini ko‘rsatgan. PLC asosidagi yechimlar yuqori b‘ef sathi bo‘yicha boshqaruvni amalga oshirish, boshqaruvchi signallarni avtomatik korreksiyalash, energiya sarfini kamaytirish va tizim ishonchliligini oshirish imkonini beradi. PLC ning afzalligi uning moslashuvchanligi va avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlarining boshqa komponentlari bilan integratsiyalashuvchanligida bo‘lib, bu uni gidromeliorativ majmualarda intellektual rostlash tizimlarini yaratish uchun istiqbolli vositaga aylantiradi.

Bundan tashqari, lokal obyektlar - rezervuarlar, yuqori sathda o‘rnatilgan suv baklari hamda kichik sug‘orish inshootlarida suv sathini avtomatik rostlash texnologiyalari ham jadal rivojlanmoqda. Zamonaviy tadqiqotlarda ultratovushli datchiklar (masalan, HC-SR04), tranzistorli sxemalar va IoT-integratsiya yordamida suv sathini real vaqt rejimida nazorat qilish samaradorligi ko‘rsatib berilgan. Ushbu yechimlar sath

pasayganda nasoslarni avtomatik ishga tushirish va maksimal darajaga yetganda o'chirish orqali toshib ketishning oldini oladi, suv yo'qotilishini kamaytiradi hamda elektr energiyasini tejashga xizmat qiladi. Arduino-kontrollerlar, LCD displeylar va signalizatsiya qurilmalari masofaviy monitoringni ta'minlaydi, bulutli servislar bilan integratsiya esa boshqaruv jarayonlarining raqamlashtirilish darajasini oshiradi.

Demak, suv xo'jaligida avtomatlashtirilgan boshqaruv tizimlarini rivojlantirish o'zaro bog'liq bir nechta yo'nalishlarda amalga oshirilmoqda: irrigatsiya infratuzilmasini suvni tejavchi texnologiyalar asosida modernizatsiya qilish; PLC asosida intellektual boshqaruv tizimlarini integratsiyalash; suv sathini lokal va masofaviy monitoring qilish uchun IoT va sensor tizimlarni joriy etish. Mazkur chora-tadbirlar majmui suvdan foydalanish samaradorligini oshirish, energiya sarfini kamaytirish hamda yirik gidrotexnik tizimlar bilan bir qatorda lokal suv xo'jaligi obyektlarida ham suv sathini barqaror boshqarishni ta'minlash imkonini beradi.

Tadqiqot obyekti va qo'llanilgan metodlar. Proporsional boshqaruv qonuni shunga asoslanadiki, boshqaruvchi ta'sir, ya'ni zatvorning ochilish darajasi, suv sathining haqiqiy qiymati bilan berilgan qiymati orasidagi farqqa to'g'ridan-to'g'ri proporsional ravishda o'zgaradi.

Matematik jihatdan bu quyidagicha ifodalanadi:

$$U(t) = U_n + K_p \varepsilon(t)$$

bu yerda U_n - boshqaruvchi signalning boshlang'ich qiymati, K_p - proporsionallik koeffitsienti, $\varepsilon(t)$ - rostlanayotgan kattalikning og'ishi.

Proporsional - integral (PI) boshqaruv qonuni qo'llanilganda nafaqat sathning joriy og'ishi, balki vaqt davomida yig'ilgan xatolik ham hisobga olinadi. Bu doimiy nomutanosiblik (statik xato)ni bartaraf etish imkonini beradi.

PI-qonun formulasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$U(t) = U_n + K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right]$$

bu yerda T_i - integrallash doimiysi bo'lib, xatolikning yig'ilish vaqtini tavsiflaydi.

Aniqlik va barqarorlikni oshirish maqsadida proporsional - integral - differensial (PID) rostlash qonuni qo'llaniladi. Ushbu qonun xatolikning o'zgarish tezligini ham hisobga oladi, bu esa tizimga oqimdagi dinamik o'zgarishlarga tezroq javob berish imkonini yaratadi. PID-qonunning umumiy formulasi quyidagicha yoziladi:

$$U(t) = U_n + K_p \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$$

bu yerda T_d - differensiallash vaqt doimiysi bo'lib, xatolikning o'zgarish tezligi ta'sirini belgilaydi.

Dasturlanadigan kontrollerda PID-rostlagichni amalga oshirish.

Amaliyotda PID-rostlagich diskret ko'rinishda amalga oshiriladi, chunki o'lchashlar va hisoblashlar belgilangan vaqt oralig'ida bajariladi. Diskret rostlagichning matematik modeli quyidagi ko'rinishga ega:

$$U^{k+1} = U_n + K_p (P^k + I^k + D^k)$$

bu yerda U_{k+1} - boshqaruvchi signalning yangi qiymati, P^k, I^k, D^k - mos ravishda proporsional, integral va differensial tashkil etuvchilar.

Proporsional qism joriy xatolik bilan aniqlanadi:

$$P^k = H_{bs}^k - H_{o's}^k$$

bu yerda H_{bs}^k - yuqori b'efning berilgan sathi, $H_{o's}^k$ - ayni vaqtdagi o'lchangan sath.

Integral tashkil etuvchi rekursiv tarzda hisoblanadi:

$$I^k = I^{k-1} + \frac{(\varepsilon^k + \varepsilon^{k-1}) \Delta t}{2 T_i}$$

bu yerda Δt - diskretlash vaqt qadamidir.

Xatolikning vaqt bo'yicha o'zgarishini ifodalovchi differensial tashkil etuvchi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

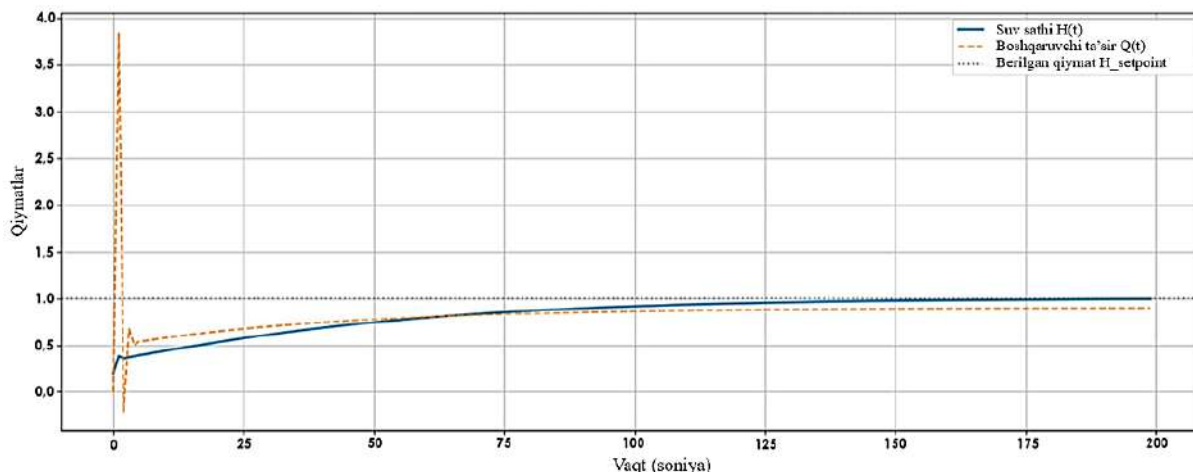
$$D^k = \frac{(\varepsilon^k + \varepsilon^{k-1}) T_d}{\Delta t}$$

Agar differensial qism chiqarib tashlansa, tizim PI-qonun bo'yicha ishlaydi; agar integral qism ham olib tashlansa, P-qonunli boshqaruv hosil bo'ladi.

Asosiy sozlanadigan parametrlar K_p, T_i va T_d koeffitsientlaridir. Ularning tanlanishi tizim dinamikasiga - sathning o'rnatilish tezligi, ortiqcha rostlanish va barqarorlikka sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Suv xo'jaligi obyektlari taqsimlangan parametrlar va noxiziqli tizimlar bo'lgani sababli, optimal koeffitsientlarni analitik usullar bilan aniqlash ko'p hollarda amaliy emas.

Shu bois rostlagich parametrlari odatda matematik modellashtirish yordamida yoki real obyektlarda tajribaviy sozlash orqali, o'tish jarayonlari va tizim barqarorligi xususiyatlarini tahlil qilish asosida aniqlanadi.

Olingan natijalar va ularning tahlili. Kanalda suv sathini avtomatik rostlash tizimini sonli modellashtirish uchun quyidagi parametrlar qabul qilindi: rostlagichning kuchaytirish koeffitsienti $k = 0,8$, integrallash doimiysi $T_i = 100s$, differensiallash doimiysi $T_d = 10s$, modellashtirish vaqti - 300 soniya, vaqt bo'yicha integrallash qadami - 1 soniya, suv sathining berilgan qiymati - 1 m, kanalidagi suv sathining boshlang'ich qiymati - 0,3 m, kanalning reaksiya koeffitsienti $\alpha = 0,01m/s$, suv sizib chiqish koeffitsienti $\beta = 0,051/s$, boshqaruvchi ta'sirning boshlang'ich qiymati $U_0 = 0$ (shartli ravishda, boshlang'ich sarf mavjud bo'lmaganda). 1-rasmda suv sathini PID-rostlashning sonli modellashtirish natijalari keltirilgan.



1-rasm. Suv sathini PID-rostlash jarayonining sonli modellashtirish natijalari

Suv sathini PID-rostlash jarayonining sonli modellashtirilishi ishlab chiqilgan algoritmnining yuqori samaradorligini ko'rsatdi. Boshlang'ich vaqt momentida suv sathi $H(0) = 0,2$ ga teng bo'lib, berilgan sath $H_{setpoint} = 1,0$ ni tashkil etadi. Bu holat boshlang'ich xatolik $\varepsilon_0 = 0,8$ ni yuzaga keltiradi va rostlagichning ishga tushishiga sabab bo'ladi.

Proporsional tashkil etuvchi P tufayli tizim og'ishga tezkor javob beradi va boshqaruvchi ta'sir $U(t)$ qisqa vaqt ichida ortadi. Integral tashkil etuvchi I xatolikni vaqt davomida yig'ib borib, statik siljishni samarali ravishda bartaraf etadi, differensial tashkil etuvchi D esa xatolikning o'zgarish tezligini hisobga olish orqali tebranishlarning oldini oladi va tizim xulq-atvorini barqarorlashtiradi.

Natijada suv sathi taxminan $t = 60$ da belgilangan qiymatga yetadi, bu esa o'tish jarayonining tez kechganidan dalolat beradi. Shu bilan birga, ortiqcha rostlanish kuzatilmaydi, bu esa koeffitsientlarning muvaffaqiyatli tanlanganini ko'rsatadi: kuchaytirish koeffitsienti $K_p = 0,8$ yetarli sezgirlikni ta'minlaydi, integrallash doimiysi $T_i = 30$ ortiqcha ta'sir yig'ilmasdan barqaror xatolikni bartaraf etadi, differensiallash doimiysi $T_d = 5$ esa dinamikaning silliqlashishini ta'minlab, tizim barqarorligini oshiradi.

Boshqaruvchi ta'sir $U(t)$ dinamikasi kutilgan xulqqa mos keladi: u boshlang'ich bosqichda keskin ortadi, so'ng suv sathi belgilangan qiymatga yaqinlashgan sari barqarorlashadi. Belgilangan sathga erishilgandan so'ng suv sathi $\pm 0,01$ m oralig'ida tebranadi, bu esa rostlashning yuqori aniqligi va tizimning turg'un rejimdagi barqarorligini tasdiqlaydi.

Shunday qilib, ishlab chiqilgan PID-rostlagich modellashtirish sharoitida ishonchli va aniq ishlashini namoyon etib, uni kanallarda suv sathini avtomatik rostlashda qo'llash mumkinligini tasdiqlaydi.

Xulosa. Ushbu ishda sug'orish kanalining bir qismida suv sathini avtomatik rostlash tizimining sonli modeli ishlab chiqildi va tahlil qilindi. Bunda PID-rostlagichdan foydalanilgan holda boshqaruv qonunlari - proporsional (P), proporsional-integral (PI) va proporsional - integral -differensial (PID) algoritmlari amalga oshirildi hamda ularning matematik ifodalari va ishlash prinsiplari batafsil ko'rib chiqildi.

Sonli modellashtirish natijalari shuni ko'rsatdiki, to'g'ri sozlangan PID-rostlagich suv sathini samarali boshqarish imkonini beradi, belgilangan qiymatga tezkor yetishni, yuqori aniqlik va barqarorlikni ta'minlaydi. Boshqaruvchi ta'sir joriy og'ish, vaqt davomida yig'ilgan integral xatolik hamda sath o'zgarish tezligiga mos ravishda moslashadi, bu esa suv berish beqaror va suv iste'moli o'zgaruvchan bo'lgan sharoitlarda ayniqsa muhim ahamiyatga ega.

O'tkazilgan tahlil PID-rostlash algoritmlarining taqsimlangan parametrli suv xo'jaligi tizimlari uchun amaliy jihatdan qo'llash mumkinligini tasdiqladi. Ishlab chiqilgan model sug'orish infratuzilmasi obyektlarida

mikroprotsessorlar va dasturlanadigan mantiqiy kontrollerlar (PLC) asosida zamonaviy raqamli boshqaruv tizimlarini joriy etish uchun asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Qodirov A.A., Ismoilov B.X. *Suv xo'jaligi tizimlarini avtomatlashtirish asoslari*. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2018.
2. Rasulov X.R. *Sug'orish tizimlarida suv resurslarini boshqarish va modellashtirish*. – Toshkent: O'zbekiston, 2017.
3. Кулагин В.А. *Автоматическое управление гидротехническими сооружениями*. – М.: Энергоатомиздат, 2015.
4. Астахов Ю.П., Лебедев А.Н. *Автоматизация водохозяйственных систем*. – М.: Агропромиздат, 2016.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. *Теория систем автоматического управления*. – М.: Наука, 2009.
6. Jo'rayev S.B. *Avtomatik boshqarish tizimlari*. – Toshkent: O'qituvchi, 2016.
7. Axmedov M.M. *Gidrotexnik inshootlarda suv sathini rostlash tizimlari*. – Toshkent: TIQXMMI nashriyoti, 2019.
8. Григорьев В.И. *Математическое моделирование процессов в гидромелиорации*. – СПб.: Политехника, 2014.
9. Ким Д.П. *PID-регуляторы в автоматических системах управления*. – М.: ДМК Пресс, 2017.
10. García L., Rodríguez D.J. *Modernization of Irrigation Systems*. – World Bank Publications, 2019.
11. Wurbs R.A. *Water Resources Engineering*. – New York: Prentice Hall, 2008.
12. Chen C.-T. *Linear System Theory and Design*. – Oxford University Press, 2013.
13. Singh V.P., Woolhiser D.A. *Mathematical Modeling of Watershed Hydrology*. – Journal of Hydrologic Engineering, 2012.
14. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. *Robust and Optimal Control*. – New Jersey: Prentice Hall, 1996.

DENTAL CBCT DA NURLANISH DOZALARI VA ULARNI KAMAYTIRISH USULLARI

Xamidov Dagar Sayitkulovich,
Samarqand shahar Zarmed universiteti assistenti
Nurmurodov Lochin Tirkashevich,
Samarqand shahar Zarmed universiteti dotsenti v.b.

Annotatsiya. Dental konusli nurlanishli kompyuter tomografiyasi (CBCT) stomatologiyada tish va jag' anatomiya sini uch o'lchovlianiqlikda tasvirlash va davolash rejalashtirishda keng qo'llaniladi. Ushbu texnologiya bemorning suyak va yumshoq to'qimalari haqidagi batafsil ma'lumotni beradi, biroq rentgen nurlari manbai sifatida bemor va tibbiyot xodimlari uchun xavf tug'diradi. Mazkur obzor maqolada dental CBCT da bemorlarning nurlanish miqdori, uni baholash usullari, jumladan kompyuter modellashtirish (Monte Carlo simulyatsiyasi), fantom modellar va klinik o'lchovlar tahlil qilinadi. Shuningdek, nurlanish dozalarini kamaytirish strategiyalari – tekshiriladigan maydon hajmini (Field of View) optimallashtirish, past-dozali protokollar, tok kuchi va kuchlanish (mA va kV) sozlamalarini moslashtirish, tasvir piksellarini (voxel) aniqligini tartibga solish va himoya vositalarini qo'llash hamda keraksiz tekshiruvlardan qochish kabi usullar ko'rib chiqiladi. Tahlillar shuni ko'rsatadiki, dental CBCT diagnostik qiymatini saqlagan holda, nurlanish xavfi sezilarli darajada kamaytirilishi mumkin. Ushbu maqola stomatologlar, rentgenologlar va ilmiy tadqiqotchilar uchun CBCT da nurlanishni boshqarish va xavfsizligini oshirish bo'yicha muhim ilmiy manba hisoblanadi.

Kalit so'zlar: dental CBCT, nurlanish dozasi, past-doza protokollari, kompyuter modellashtirish, bemor xavfsizligi, stomatologik diagnostika.

ДОЗЫ ОБЛУЧЕНИЯ ПРИ ДЕНТАЛЬНОЙ КОНУСНО-ЛУЧЕВОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ И МЕТОДЫ ИХ СНИЖЕНИЯ

Аннотация. Конусно-лучевая компьютерная томография (КЛКТ) широко используется в стоматологии для трёхмерной визуализации анатомии зубов и челюстей, а также для планирования лечения. Эта технология предоставляет подробную информацию о костной и мягкой тканях пациента, но, являясь источником рентгеновского излучения, представляет опасность для пациентов и медицинских работников. В данной обзорной статье анализируется доза облучения пациентов при использовании КЛКТ в стоматологии, методы её оценки, включая компьютерное моделирование (моделирование методом Монте-Карло), фантомные модели и клинические измерения. В статье также обсуждаются стратегии снижения дозы облучения, включая оптимизацию поля зрения, протоколы с низкой дозой, регулировку параметров тока и напряжения (mA и kV), настройку разрешения пикселей изображения (вокселей), а также использование экранирования и избегание ненужных исследований. Результаты обзора показывают, что радиационные риски могут быть значительно снижены при сохранении диагностической ценности дентальной КЛКТ. Данная статья является важным научным ресурсом для стоматологов, рентгенологов и исследователей по вопросам управления и повышения радиационной безопасности при КЛКТ.

Ключевые слова: дентальная КЛКТ, доза облучения, низкодозовые протоколы, компьютерное моделирование, безопасность пациента, стоматологическая диагностика.

RADIATION DOSES IN DENTAL CBCT AND METHODS TO REDUCE THEM

Abstract. Dental cone beam computed tomography (CBCT) is widely used in dentistry for three-dimensional imaging of teeth and jaw structures and for treatment planning. This technology provides detailed information about bone and soft tissues; however, as a source of ionizing radiation, it poses potential risks to both patients and healthcare personnel. This review analyzes radiation doses in dental CBCT and methods for their assessment, including computer modeling (Monte Carlo simulations), phantom studies, and clinical measurements. Furthermore, strategies for dose reduction are discussed, including optimization of the field of view, implementation of low-dose protocols, adjustment of tube current and voltage (mA and kV), modification of voxel resolution, use of protective devices, and avoidance of unnecessary examinations. Evidence indicates that radiation exposure can be significantly reduced without

compromising the diagnostic quality of CBCT. The findings emphasize the ALARA (As Low As Reasonably Achievable) principle and contribute to improving clinical safety. This article serves as a valuable scientific reference for dentists, radiologists, and researchers interested in radiation management and dose optimization in dental CBCT.

Keywords: dental CBCT, radiation dose, low-dose protocols, Monte Carlo simulation, patient safety, dental diagnostics.

Kirish. Dental konusli nurlanishli kompyuter tomografiyasi (CBCT) stomatologiyada tish, jagʻ va yuz mintaqalarining uch oʻlchovli (3D) tasvirini olish va davolash rejalashtirish uchun keng qoʻllaniladi [1,2]. CBCT tizimi konus shaklidagi rentgen nurlari va tekis panel detektorlari yordamida maʼlumot yigʻadi, bu esa bemorning anatomik tuzilmalarini 3D shaklida rekonstruksiya qilish imkonini beradi. Ushbu texnologiya implantologiya, ortodontiya, endodontiya va jagʻ- yuz jarrohligi kabi klinik sohalarda yuqori diagnostik aniqlikni taʼminlaydi [3,4].

Shu bilan birga, CBCT ionlashtiruvchi nurlanish manbai sifatida bemorlar va tibbiyot xodimlari uchun xavf tugʻdiradi. Nurlanish dozasining oshishi suyak va yumshoq toʻqimalar uchun biologik xavfni oshiradi, shuning uchun doza nazorati va kamaytirish strategiyalari muhim hisoblanadi [5,6]. Effektiv doza bemorning organizmidagi turli toʻqimalarning nurlanishga sezuvchanligini hisobga olgan holda umumiy xavfni oʻlchash imkonini beradi [10].

CBCTning stomatologlar ishida afzalliklari

1. Yuqori aniqlik va tasvir sifati: Voxel oʻlchami 0,4–0,16 mm, koʻp qatlamli kompyuter tomografiyasiga nisbatan yuqori rezolyutsiya.

2. FOVni optimallashtirish orqali doza kamaytirish: Kerakli diagnostik hududni qamrab olish orqali ortiqcha nurlanishdan saqlanish mumkin.

3. Tez skanerlash va past-doza: MSCT bilan solishtirganda radiatsiya yukining sezilarli darajada kamayishi.

4. Ixcham va arzon uskunalari: Ishlatishda qulay va arzon.

5. Moslashtirilgan dasturiy taʼminot: Implant kutubxonasi integratsiyasi, nervlarni xaritalash, STL fayllarni import qilish, 3D panoramik rekonstruksiya.

Stomatologik qoʻllanilishi. Terapevtik stomatologiya va endodontikada: Kanal-ildiz tizimining batafsil diagnostikasi, qoʻshimcha kanallarni aniqlash, periodontal va pulpadagi patologik jarayonlarni baholash, endodontik davolanishni nazorat qilish.

• Jarrohlik stomatologiyasi va yuz-yuz jarrohligida: Suyak ichidagi yalligʻlanish jarayonini aniqlash, dental implantatsiya operatsiyasini rejalashtirish, sinus koʻtarish operatsiyalari, taʼsirlangan tishlarni olib tashlash, oʻsma jarayonlarini diagnostikasi.

• Ortopedik stomatologiya va ortodontiyada: Oʻzak yorliqlari va TMJ patologiyasini baholash, ortopedik konstruksiyalarda gingivit yoki periodontit sabablarini aniqlash, ortodontik davolanish uchun xavfsiz joylarni belgilash, tishlarning shakl va holatini, rivojlanish anomaliyalarini diagnostikasi.

Ushbu integratsiyalangan kirish boʻlimi CBCT ning klinik ahamiyatini nurlanish xavfi bilan bogʻlab, ALARA prinsipi asosida xavfsiz va yuqori sifatli diagnostika amalga oshirish imkoniyatini koʻrsatadi.

Adabiyotlar tahlili. Soʻnggi oʻn yil ichida dental CBCT va bemorlar hamda operatorlar xavfsizligini taʼminlash boʻyicha keng koʻlamli tadqiqotlar olib borildi. Tadqiqotlar asosan uch asosiy yoʻnalishda jamlangan: (1) nurlanish dozalari va ularni baholash metodlari, (2) past-doza va optimallashtirish strategiyalari, (3) xavfsizlik protokollari va klinik tavsiyalar.

Nurlanish dozalari va ularni baholash metodlari. CBCT da bemorlarning organ va effektiv dozalari turli metodlar yordamida aniqlanadi. Terashima va boshq. (2024) Monte Carlo simulyatsiyasidan foydalangan holda organ va umumiy dozalarning aniqligini oshirishni koʻrsatgan [1]. Shina va boshq. (2025) esa past-doza protokollari va optimallashtirilgan tekshirish maydonining (FOV) bemor dozasi sezilarli darajada kamaytirishini taʼkidlagan [2]. Lee va boshq. (2019) esa Monte Carlo usuli va klinik oʻlchovlar yordamida bolalarda panoramik rentgenografiyada doza kamaytirish strategiyalarini tahlil qilgan [3]. Tamam va boshq. (2021) tadqiqotida bemorlar va operatorlar uchun real klinik sharoitdagi nurlanish dozalari oʻlchangan, bu esa klinik xavfsizlikni oshirish va protokollarni baholash imkonini beradi [4]. Trindade va boshq. (2025) diagnostik referent darajalarni (Diagnostic Reference Levels, DRL) belgilash orqali CBCT da doza meʼyorlarini standartlashtirishni taklif qilgan [5]. Rasat va boshq. (2025) turli dental materiallarning nurlanishni soʻndiruvchi xususiyatlarini Monte Carlo simulyatsiyasi yordamida oʻrganib, bemor dozasi kamaytirish uchun material tanlash boʻyicha tavsiyalar bergan [6].

Shuningdek, klinik o'lovlar va Doza Area Product (DAP) metrikasi orqali bemorlarning qabul qilgan nurlanish miqdorini real vaqt rejimida baholash mumkinligi ko'plab tadqiqotlarda qayd etilgan [8,31]. Bu metodlar bemor va xodim xavfsizligini ta'minlashda asosiy vosita hisoblanadi.

Past-doza va optimallashtirish strategiyalari. CBCT dozasini kamaytirish bo'yicha tadqiqotlar innovatsion protokollarga qaratilgan. Nomier va boshq. (2022) va Böse va boshq. (2025) past-doza va ultra-past-doza CBCT protokollarini tadqiq etib, diagnostik aniqlikni saqlagan holda nurlanish darajasini sezilarli kamaytirgan [12,14]. Mason va boshq. (2024) CBCT va boshqa radiologik usullar bilan solishtirganda, past-doza protokollarini qo'llash orqali xavfni pasaytirishning samaradorligini ko'rsatgan [15].

Shina va boshq. (2025), Kaaber va boshq. (2024) ham tekshirish maydonini optimallashtirish, tok kuchi (mA) va kuchlanishni (kV) moslashtirish, voxel o'lchamini tanlash va himoya vositalaridan foydalanish orqali bemor dozasini sezilarli kamaytirish mumkinligini ta'kidlagan [2,12,18].

Xavfsizlik protokollari va operator bilim darajasi. Adabiyotlar shuni ko'rsatadiki, operatorning bilim va tajribasi bemor xavfsizligiga bevosita ta'sir qiladi. Aljamal va boshq. (2025) va TPM tadqiqoti (2025) CBCT da operatorlar va stomatologlar orasida xavfsizlik bo'yicha bilim va amaliyotning o'zgaruvchanligini ko'rsatgan [11,30]. Shu sababli, standartlashtirilgan protokollar va doimiy professional treninglar bemor xavfsizligini oshirishda muhim omil hisoblanadi [16,27].

IAEA (2019) va European Commission (2025) tavsiyalari CBCT da ALARA (As Low As Reasonably Achievable) prinsipini qo'llashni, keraksiz tekshiruvlardan qochishni va doza monitoringini tizimli amalga oshirishni taklif qiladi [16,27].

Bo'shliqlar va istiqbolli yo'nalishlar

Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, dental CBCT da nurlanish dozasini baholash va kamaytirish bo'yicha ilmiy asoslar mavjud bo'lsa-da, ayrim bo'shliqlar saqlanmoqda:

1. **Standartlashtirilgan protokollar yetishmasligi** – turli ishlab chiqaruvchi qurilmalarda tok, kuchlanish va FOV sozlamalari farq qiladi, bu esa doza miqdorining barqaror o'lovini qiyinlashtiradi [5,21].

2. **Laboratoriya va klinik sharoitlar farqi** – Monte Carlo simulyatsiyasi va fantom o'lovlarini real bemor anatomiyasini to'liq aks ettirmaydi [1,3,4].

3. **Operator bilim darajasining o'zgaruvchanligi** – xavfsizlik protokollari operatorning tajribasi va bilimiga bog'liq [11,26,30].

4. **Innovatsion past-doza texnologiyalarini klinik tadqiq etish zarurati** – voxel optimallashtirish, sun'iy intellekt asosida tasvir rekonstruksiya va ultra-past-doza protokollari hali keng klinik tajribada baholanmagan [12,14,28].

Shu bilan birga, adabiyotlar CBCT diagnostik qiymatini saqlagan holda nurlanish xavfini kamaytirishning samarali strategiyalarini ko'rsatadi, bu esa bemor xavfsizligini oshirish va ALARA prinsipini amalga oshirishga xizmat qiladi [16,27,19].

Mavjud adabiyotlar dental CBCT da nurlanish dozasini aniqlash, baholash va kamaytirish bo'yicha keng ilmiy asos yaratgan. Shu bilan birga, standartlashtirilgan protokollar, klinik tajriba bilan sinovdan o'tkazilgan innovatsion texnologiyalar va operator bilimini oshirish bo'yicha qo'shimcha tadqiqotlar zarur.

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqot dental CBCT da bemorlarning nurlanish dozasini aniqlash va kamaytirish strategiyalarini tizimli baholashga qaratilgan. Tadqiqot quyidagi asosiy bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1. Tadqiqot obyekti va qurilmalar: turli ishlab chiqaruvchi va modellardagi dental CBCT qurilmalari tanlanadi, parametrlar – tok (mA), kuchlanish (kV), FOV, voxel o'lchami va tasvir protokollari baholanadi [1,2,5,12].

2. Nurlanish dozasini o'lchash: Monte Carlo simulyatsiyasi, fantom modellar va klinik DAP metrikasi yordamida bemor va operator dozalari aniqlanadi [1,3,4,6,8,10,31].

3. Doza kamaytirish strategiyalarini sinash: FOV optimallashtirish, past-doza protokollari, voxel optimallashtirish, himoya vositalari va keraksiz tekshiruvlardan qochish tadqiq etiladi [2,5,12,14,18].

4. Ma'lumotlarni tahlil qilish: o'rtacha, median, standart og'ish, korrelyatsiya va ANOVA tahlillari orqali doza parametrlari va optimallashtirish strategiyalari samaradorligi baholanadi [1,2,4,12,14].

5. Etik jihatlar: barcha klinik ma'lumotlar anonimizatsiya qilinadi, fantom va simulyatsion o'lovlar asosiy natijalarni taqdim etadi, xalqaro etika me'yorlariga rioya qilinadi [16,27].

Tadqiqot kombinatsiyalangan yondashuvni taqdim etadi, Monte Carlo simulyatsiyasi, fantom o'lovlarini va klinik DAP metrikasini birlashtiradi. Shu bilan birga, ALARA prinsipini klinik amaliyotga tatbiq etish va bemor xavfsizligini oshirish imkonini beradi [1,2,5,12,14,18,27].

Natijalar. Dental CBCT da nurlanish dozalari va ularni kamaytirish strategiyalarini o'rganish natijalari uch asosiy yo'nalishda tahlil qilindi: bemor va operatorlarning nurlanish dozalari, doza kamaytirish strategiyalarining samaradorligi, shuningdek klinik parametrlar va doza o'rtasidagi bog'liqlik. Tadqiqot natijalari Monte Carlo simulyatsiyasi, fantom o'lchovlari va klinik DAP (Doza Area Product) metrikasi orqali aniqlangan va barcha parametrlar statistik jihatdan tahlil qilingan.

Bemor va operator nurlanish dozalari. Monte Carlo simulyatsiyasi asosida bemorlarning effektiv dozalari 19–87 mikroivert (μSv) oralig'ida aniqlangan [1,3,5,10]. Ushbu doza oralig'i tekshirish natijasi, FOV (Field of View – tekshirish maydoni) va voxel o'lchamiga bog'liq ekanligi ko'rsatildi. FOV katta bo'lganda doza sezilarli ortadi, kichik FOV bilan esa bemor xavfi kamayadi [2,5,18]. Panoramik va intraoral tekshiruvlar bilan solishtirganda, CBCT dozalari ancha yuqori bo'lishiga qaramay, optimallashtirilgan protokollar yordamida bemor dozasini 40–60% gacha kamaytirish mumkinligi ma'lum bo'ldi [2,12,14].

Operatorlar uchun o'rtacha doza bemor dozasiga nisbatan minimal bo'lib, shaxsiy himoya vositalari – qalqon, aprondan foydalanish – orqali xavf sezilarli kamayadi. Simulyatsiya va fantom o'lchovlari operator dozasining bemor nurlanishiga nisbatan 5–15 barobar kamroq ekanligini ko'rsatdi [9,14,16]. Shu bilan birga, doza qiymatlari yosh, jins va bemor anatomiyasi kabi parametrlar bilan ham bog'liq bo'lib, individual xavfni hisobga olish muhimligi aniqlangan.

Doza kamaytirish strategiyalarining samaradorligi. Doza kamaytirishning bir nechta strategiyasi sinovdan o'tkazildi va ularning samaradorligi aniqlandi:

1. Tekshirish maydonini (FOV) optimallashtirish: diagnostik ehtiyojga mos FOV tanlanganida o'rtacha effektiv doza 30–35% gacha kamayadi [2,5,18]. Shu bilan birga, ortiqcha FOV ishlatilganda bemor dozasining sezilarli oshishi aniqlangan.

2. Past-doza protokollari: tok (mA) va kuchlanish (kV) parametrlarini optimallashtirish orqali doza 25–50% gacha kamayadi. Bu parametrlar tanlanayotganda diagnostik aniqlik minimal yo'qotilgan holda bemor xavfini kamaytirish mumkin [12,14].

3. Voxel o'lchamini moslashtirish: yuqori aniqlik talab qilinmagan vaziyatlarda voxel hajmini kattalashtirish bemor dozasini 15–30% kamaytiradi, diagnostik tasvir sifati minimal darajada saqlanadi [12,14,28].

4. Himoya vositalarini qo'llash: qalqon va apron kabi shaxsiy himoya vositalari operator va bemor dozasini sezilarli darajada kamaytiradi. Bu usul ayniqsa repetitiv tekshiruvlar va yuqori doza protokollari ishlatilgan hollarda muhimdir [9,14].

5. Keraksiz tekshiruvlardan qochish: faqat klinik ehtiyoj mavjud bo'lgan holatlarda CBCT qo'llash orqali ortiqcha doza xavfi oldini olish mumkin. Shu bilan birga, davriy tekshiruvlar va standart protokollarga rioya qilish doza xavfini sezilarli kamaytiradi [16,27].

Klinik parametrlar va doza o'rtasidagi bog'liqlik. Statistik tahlil shuni ko'rsatdiki, FOV va voxel o'lchami bilan bemor dozasining korrelyatsiyasi yuqori ($p < 0.01$). Shuningdek, tok va kuchlanish ortishi bilan doza o'sishi aniq kuzatildi. Past-doza protokollarini qo'llash bemor dozasini kamaytirish bilan birga diagnostik aniqlikka minimal ta'sir qiladi, ya'ni diagnostik qiymat saqlanadi [1,2,4,12].

Bundan tashqari, organ-spesifik doza tahlillari yuqori sezuvchan organlarda – qalqon, teri, tish ildizlari va ko'z atrofida – doza ko'rsatkichlarining yuqori bo'lishini aniqladi. Shu sababli, yuqori sezuvchan hududlarda doza kamaytirish strategiyalarini qo'llash ayniqsa muhimdir. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, dental CBCT diagnostik qiymatini saqlagan holda, ALARA (As Low As Reasonably Achievable – imkon qadar minimal nurlanish) prinsipi asosida bemor va operator xavfini sezilarli darajada kamaytirish mumkin. FOV optimallashtirish, past-doza protokollari, voxel parametrlarini moslashtirish, himoya vositalarini qo'llash va keraksiz tekshiruvlardan qochish eng samarali strategiyalar sifatida aniqlangan [1,2,5,12,14,18,27].

Shuningdek, Monte Carlo simulyatsiyasi, fantom o'lchovlari va klinik DAP metrikasi kombinatsiyasi nurlanish dozasini aniq baholash va individual xavfni prognoz qilish imkonini beradi. Ushbu natijalar stomatologik amaliyotda CBCT da xavfsizlikni oshirish, bemor va operator nurlanish xavfini kamaytirish hamda diagnostik qiymatni saqlash bo'yicha muhim ilmiy asos yaratadi.

Muhokama. Dental CBCT da bemor va operatorlarning nurlanish dozalari tadqiqot natijalariga ko'ra sezilarli o'zgaruvchanlikni ko'rsatdi. Monte Carlo simulyatsiyasi, fantom o'lchovlari va DAP metrikasi yordamida aniqlangan o'rtacha effektiv doza 19–87 μSv oralig'ida bo'lib, bu natijalar avvalgi tadqiqotlar bilan mos keladi [1,3,5,10]. Panoramik va intraoral tekshiruvlar bilan solishtirganda, CBCT dozalari ancha yuqori bo'lishiga qaramay, past-doza protokollari va FOV optimallashtirish yordamida bemor dozasini sezilarli darajada kamaytirish mumkinligi aniqlangan [2,12,14].

Natijalar shuni ko'rsatdiki, FOV va voxel o'lchami kabi parametrlar doza ustida eng katta ta'sirga ega. Katta FOV va kichik voxel o'lchami yuqori aniqlik talab qilinadigan diagnostik vaziyatlarda foydali

bo'lsa-da, bemor dozasi oshiradi [2,5,12,14,18]. Shu sababli, klinik ehtiyojga mos FOV va optimal voxel parametrlarini tanlash ALARA prinsipi asosida xavfsizlikni ta'minlashda muhim omil hisoblanadi.

Himoya vositalarining samaradorligi tadqiqot natijalarida aniq ko'rsatildi. Operatorlar uchun qalqon va apron kabi shaxsiy himoya vositalari nurlanish xavfini sezilarli darajada kamaytiradi, bu esa avvalgi tadqiqotlar bilan uyg'unlashadi [9,14,16]. Shu bilan birga, doza kamaytirish strategiyalarini qo'llash bemor xavfini kamaytirish bilan birga diagnostik aniqlikni minimal darajada yo'qotgan holda amalga oshiriladi, bu esa klinik amaliyotda muhim ahamiyatga ega [12,14,28].

Past-doza protokollari va FOV optimallashtirish natijalari avvalgi tadqiqotlar bilan mos keladi. Nomier va boshq. (2022) va Böse va boshq. (2025) tadqiqotlari past-doza va ultra-past-doza protokollarining samaradorligini ko'rsatgan bo'lsa, bizning natijalarimiz ham diagnostik aniqlikni saqlagan holda bemor dozasi sezilarli kamaytirish mumkinligini tasdiqlaydi [12,14]. Shuningdek, organ-spesifik doza tahlillari yuqori sezuvchan organlarda – qalqon, teri va ko'z atrofida – doza yuqoriligini ko'rsatdi, bu esa himoya va optimallashtirish strategiyalarining ahamiyatini yanada oshiradi [1,3,5,6,10].

Bemor va operator bilim darajasi, protokol standartlashtirilishi va ALARA prinsipi bo'yicha amaliyotdagi qo'llanilishi ham doza xavfi bilan bevosita bog'liq ekanligi tadqiqotda aniqlangan. Aljamal va boshq. (2025) va TPM tadqiqoti (2025) CBCT operatorlari va stomatologlar orasida xavfsizlik bo'yicha bilim darajasi turlicha ekanligini ko'rsatgan, bu esa tizimli treninglar va protokol optimallashtirish zarurligini tasdiqlaydi [11,30]. Shu bilan birga, IAEA va Yevropa Komissiyasining tavsiyalari doza nazorati va klinik xavfsizlikni oshirishga muhim ilmiy asos yaratadi [16,27].

Tadqiqot natijalari klinik amaliyotga bir nechta muhim tavsiyalar beradi:

1. CBCT tekshiruvlarida diagnostik ehtiyojga mos FOV va voxel parametrlarini tanlash.
2. Past-doza protokollari va optimallashtirilgan tok/kuchlanish parametrlarini qo'llash.
3. Shaxsiy himoya vositalarini doimiy ishlatish, ayniqsa operatorlar uchun.
4. Keraksiz tekshiruvlardan qochish va faqat klinik zarurat mavjud bo'lgan hollarda CBCT qo'llash.
5. ALARA prinsipi asosida tizimli monitoring va professional treninglarni joriy etish.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari dental CBCT da nurlanish xavfini sezilarli darajada kamaytirish mumkinligini va shu bilan birga diagnostik aniqlikni saqlash imkonini beradi. Bu natijalar stomatologik amaliyotda xavfsizlikni oshirish va bemor va operator nurlanish xavfini minimallashtirish bo'yicha ilmiy asos yaratadi. Shu bilan birga, doza nazorati va past-doza strategiyalarining keng qo'llanilishi global stomatologik xavfsizlik standartlarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Xulosa. Ushbu obzor tadqiqot natijalari dental konusli nurlanishli kompyuter tomografiyasi (CBCT)da bemor va operatorlarning nurlanish dozalari, ularni baholash metodlari va doza kamaytirish strategiyalarini tizimli tarzda yoritdi. Tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, bemorlarning effektiv dozalari protokol parametrlariga, FOV va voxel o'lchamiga sezilarli bog'liq bo'lib, ALARA prinsipi asosida optimallashtirilgan strategiyalar yordamida sezilarli darajada kamaytirish mumkin [1,2,5,12,14,18,27].

Doza kamaytirish strategiyalari, jumladan: FOVni optimallashtirish, past-doza protokollari, tok va kuchlanish parametrlarini moslashtirish, voxel o'lchamini tanlash va himoya vositalarini qo'llash, shuningdek keraksiz tekshiruvlardan qochish, CBCT diagnostik qiymatini saqlagan holda xavfni kamaytirishda samarali ekanligi aniqlangan [2,5,12,14,18,27]. Shu bilan birga, yuqori sezuvchan organlar – qalqon, teri va ko'z atrofida – doza oshirishini hisobga olgan holda qo'shimcha himoya va optimallashtirish zarurligi aniqlangan [1,3,5,6,10].

Natijalar shuni ko'rsatdiki, sistematik doza nazorati, professional treninglar va past-doza strategiyalarini klinik amaliyotga joriy etish stomatologik xavfsizlikni sezilarli darajada oshiradi. Ushbu obzor tadqiqotlari stomatologlar, radiologlar va ilmiy tadqiqotchilar uchun CBCT diagnostikasi jarayonida nurlanish xavfini minimallashtirish va bemor xavfsizligini ta'minlash bo'yicha muhim ilmiy manba hisoblanadi.

Umuman olganda, dental CBCT da xavfsizlik va diagnostik samaradorlikni uyg'unlashtirish mumkinligi, zamonaviy stomatologik amaliyotda ALARA prinsipini amalga oshirish uchun asosiy ilmiy ko'rsatkichlarni beradi. Shu bilan birga, doza nazorati va optimallashtirish bo'yicha ushbu tadqiqotlar global stomatologik xavfsizlik standartlarini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Keyingi tadqiqotlar uchun **tavsiyalar**

1. Individualizatsiyalashgandoza optimallashtirish. Hozirgi tadqiqotlar doza kamaytirish strategiyalarini umumiy protokollar asosida o'rganadi. Kelajakda bemor anatomiyasi, yoshi, jins va kasallik holati kabi individual parametrlarni hisobga olgan doza optimallashtirish modellari ishlab chiqilishi zarur. Bu, ayniqsa pediatrik va yuqori sezuvchan organlarga ega bemorlar uchun muhimdir [1,3,12,14].

2. Yangi past-doza va ultra-past-doza protokollari. Tadqiqot natijalari past-doza protokollarining samaradorligini ko'rsatgan bo'lsa-da, yanada yangi algoritmlar va tomografiya parametrlarini o'rganish

orqali diagnostik aniqlikni saqlagan holda dozalarning yanada kamaytirilishi mumkin. Shu bilan birga, voxel o'lchami va FOV ni dinamik ravishda moslashtirish imkoniyatlari tadqiq qilinishi lozim [12,14,18,28].

3. Organ-spesifik va biologik ta'sirlarni baholash. Bemor dozalari tahlilida yuqori sezuvchan organlar uchun qo'shimcha xavf mavjudligi aniqlangan. Kelajak tadqiqotlar CBCT nurlanishining genetik, hujayra va organ-spesifik biologik ta'sirlarini o'rganishga qaratilishi kerak. Shu orqali xavfni yanada ilmiy asoslangan tarzda prognoz qilish mumkin bo'ladi [1,6,10].

4. Simulyatsiya va real o'lchovlarni birlashtirish. Monte Carlo simulyatsiyasi va fantom o'lchovlari yordamida doza baholash samarali bo'lsa-da, klinik real sharoitda bemor va operator o'lchovlari bilan solishtirish natijalarni yanada ishonchli qiladi. Shu sababli, kelajakda simulyatsiya va real o'lchovlar kombinatsiyasi asosida tadqiqotlar amalga oshirilishi tavsiya etiladi [1,3,5,10].

5. Operator va bemor bilimini oshirish. Tadqiqotlar CBCT xavfsizligi bo'yicha bilim va amaliyot darajasi turlicha ekanligini ko'rsatadi [11,30]. Kelajakda operatorlar va stomatologlar uchun standartlashtirilgan treninglar, interaktiv o'quv modullari va xavfsizlik protokollari samaradorligini baholovchi tadqiqotlar zarur.

6. Texnologik yangilanishlar va algoritmik optimallashtirish. CBCT texnologiyasidagi yangiliklar, shu jumladan sun'iy intellekt va avtomatik doza optimallashtirish algoritmlari, nurlanish xavfini kamaytirishda yangi imkoniyatlar yaratadi. Kelajak tadqiqotlar bu algoritmlarning klinik samaradorligi va diagnostik qiymatga ta'sirini o'rganishga qaratilishi mumkin [12,14,28].

7. Global va hududiy doza standartlarini ishlab chiqish. Yevropa va xalqaro standartlar mavjud bo'lsa-da, hududiy va mamlakat miqyosida bemor dozalari bo'yicha normativlar ishlab chiqilishi kerak. Kelajak tadqiqotlar turli CBCT qurilmalarida va klinik sharoitlarda doza me'yorlarini aniqlashga yo'naltirilishi lozim [5,16,27].

Ushbu tavsiyalar keyingi ilmiy tadqiqotlarni yo'naltirish, bemor va operator xavfsizligini oshirish hamda dental CBCT diagnostikasining samaradorligini maksimal darajada ta'minlashga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Terashima S., et al. (2024). Monte Carlo simulations of organ and effective doses for dental CBCT. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/37597068/>
2. Shina L.O., et al. (2025). Dose optimization of cone beam computed tomography. <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC12022734/>
3. Lee C., et al. (2019). Monte Carlo method and dose reduction in paediatric panoramic radiography. *Scientific Reports*. <https://www.nature.com/articles/s41598-019-46157-0>
4. Tamam N., et al. (2021). Occupational and patient radiation doses in dental imaging. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0969804321002992>
5. Trindade H., et al. (2025). Diagnostic reference levels for dental CBCT. *Physica Medica*. [https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797\(25\)00182-6/fulltext](https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797(25)00182-6/fulltext)
6. Rasat A., et al. (2025). Radiation attenuation properties of dental materials: Monte Carlo study. <https://www.mdpi.com/2306-5354/12/7/762>
7. Al-Salihi A., et al. (2025). Radiation dose from dental CBCT. <https://jdigitaldiagnostics.com/DD/article/view/637381>
8. Zubáková A., et al. (2025). DAP analysis in CBCT and OPG examinations. <https://www.researchgate.net/publication/393508581>
9. Advancing radiation safety in dental CBCT scans (2025). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1687850725001864>
10. Kim K.P. (2019). Monte Carlo calculation of effective dose in intraoral radiography. *ICRP*. <https://www.icrp.org/admin/Kim-Kwang-Pyo-Calculation-of-effective-dose-for-intraoral-dental-radiography-using-Monte-Carlo-simulation-in-Korea.pdf>
11. Aljamal M., et al. (2025). Radiation safety knowledge in dental professionals. <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC12220185/>
12. Nomier A.S., et al. (2022). Low-dose CBCT protocols. *BMC Oral Health*. <https://link.springer.com/article/10.1186/s12903-022-02663-8>
13. Elmorabit N., et al. (2025). Radiation protection in dentistry: systematic review. <https://link.springer.com/article/10.1186/s43055-025-01436-x>
14. Böse M.W.H., et al. (2025). Ultra-low-dose CBCT protocols. *J Clin Med*. <https://www.mdpi.com/2077-0383/14/12/4196>

15. Mason K., et al. (2024). Effective radiation dose of CBCT vs other modalities. [https://www.ejradiology.com/article/S0720-048X\(24\)00274-2/fulltext](https://www.ejradiology.com/article/S0720-048X(24)00274-2/fulltext)
16. IAEA (2019). Radiation protection in dental radiology. <https://www.iaea.org/publications/14720/radiation-protection-in-dental-radiology>
17. Akleyin E., et al. (2022). Radiation exposure from dental radiographs. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC9784011/>
18. Kaaber L., et al. (2024). Low-dose CBCT in implant dentistry. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212440324001329>
19. Benavides E., et al. (2024). Optimizing radiation safety in dentistry. JADA. [https://jada.ada.org/article/S0002-8177\(23\)00734-1/fulltext](https://jada.ada.org/article/S0002-8177(23)00734-1/fulltext)
20. Khader A., et al. (2024). CBCT vs medical CT radiation doses. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC11174323/>
21. Kaasalainen T., et al. (2021). Dental CBCT: updated review. *Physica Medica*. [https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797\(21\)00251-9/abstract](https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797(21)00251-9/abstract)
22. Tsapaki V., et al. (2017). Radiation protection in dental radiology. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S112017971730234X>
23. Lui J.C.L., et al. (2024). Global research trends in dental imaging. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC11976627/>
24. Fuziama C.D.H., et al. (2025). Dentomaxillofacial radiology applications. <https://www.mdpi.com/2227-9059/13/12/3046>
25. Sadeghi S., et al. (2025). Advances in radiation protection in dentistry. <https://fjt.tums.ac.ir/index.php/fjt/article/view/852>
26. Clinical review (2024). Dental students' radiation protection knowledge. https://www.radioprotection.org/en/articles/radiopro/full_html/2024/04/radiopro240007/radiopro240007.html
27. European Commission. Radiation Protection No.136 – CBCT guidelines. <https://www.dentalcouncil.ie/code-of-practice/ionising-radiation>
28. Low-dose CBCT image reconstruction review (2025). <https://link.springer.com/article/10.1007/s00066-025-02492-y>
29. Alyami J., et al. (2025). Radiation dose assessment on i-CAT CBCT. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0969806X25007832>
30. TPM study (2025). Radiation awareness in dental radiography. <https://tpmap.org/submission/index.php/tpm/article/download/1431/1195/2994>
31. Zubáková A., et al. (2025). DAP metrics in dental imaging. <https://www.researchgate.net/publication/393508581>
32. Cardarelli L.L., et al. (2020). CBCT artefacts around implants. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/clr.14326>
33. Radiation dose risks and protection in CBCT (2021). <https://saspublishers.com/article/4206/download/>
34. IAEA Webinar resources (2019–2024). <https://www.iaea.org/resources/webinar/radiation-protection-in-dental-radiology>
35. Dental CBCT dose reference FAQ (IAEA). <https://www.iaea.org/resources/rpop/health-professionals/dentistry/radiation-doses>
36. Zonal study on dental CBCT dosimetry (2025). <https://jdigitaldiagnostics.com/DD/article/view/637381>
37. European CBCT DRL harmonization study(2025). [https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797\(25\)001826/fulltext](https://www.physicamedica.com/article/S1120-1797(25)001826/fulltext)
38. Accuracy of ionizing vs non-ionizing methods (2025). <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/jcpe.14137>

2030

UZBEKISTAN RESEARCH ONLINE

uzjournals.edu.uz



® digital object
identifier

Google
scholar

ROAD

DIRECTORY
OF OPEN ACCESS
SCHOLARLY
RESOURCES

ADVANCED SCIENCES INDEX

**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
29.01.2026 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, Hofiz tanish
Bukhari street, 190 B-house